

# **GRISSIAANS *A PRIORI***

Als versmelting van het idealistische fundament van Bolland  
en het intuïtionistische raamwerk van Brouwer

door

**Tim Kuipers**

Geboren te Eindhoven

**Onderzoeksscriptie Bachelor Wijsbegeerte**

aan de Universiteit Utrecht

onder begeleiding van

**Prof. Dr. Albert Visser**

&

**Prof. Dr. Paul G. Ziche**

29 augustus 2011

Keywords:

Griss, Brouwer, Bolland, Hegelianisme, logica, a priori, negatieloze, intuïtionistische, wiskunde, negatieloos, intuïtionisme, idealisme

# GRISSIAANS *A PRIORI*

## Als versmelting van het idealistische fundament van Bolland en het intuïtionistische raamwerk van Brouwer

door Tim Kuipers

### Abstract

Deze scriptie betreft een visie op het *a priori* dat de filosofie van de Nederlandse filosoof Griss nadert - een wiskundige die een vorm van intuïtionisme ontwikkelt aan de hand van een Hegeliaans idealisme. Zijn filosofie is te zien als een versmelting van het Hegeliaans idealisme van Bolland en Brouwers intuïtionisme. Deze scriptie zal deze twee filosofieën bespreken om vervolgens de Grissiaanse versmelting ervan uit te werken. De belangrijkste implicatie van de Grissiaanse filosofie is de verbanning van de negatie uit de wiskunde, waardoor de wiskunde nieuwe beginselen vergt.

## Inhoudsopgave

| §         | [titel]  | p.        |
|-----------|--|-----------|
|           | Abstract   | 1         |
|           | Inhoudsopgave  | 1         |
| <b>1.</b> | <b>Inleiding</b>   | <b>3</b>  |
| 1.1       | Wiskunde en de negatie   | 3         |
| 1.2       | Griss' filosofie en de versmelting van de filosofie van Bolland en Brouwer | 4         |
| <b>2.</b> | <b>Bollands idealisme</b>  | <b>5</b>  |
| 2.1       | Het leven van Bolland  | 5         |
| 2.2       | Fundamenten  | 6         |
| 2.2.1     | Onderscheiden en verenigen   | 6         |
| 2.2.2     | Begrippen en hun inhoud  | 7         |
| 2.2.3     | Verkeerdheid   | 7         |
| 2.3       | Werkelijkheid en waarheid  | 9         |
| 2.4       | Wiskundige begrippen   | 9         |
| 2.4.1     | Telbaarheid  | 9         |
| 2.4.2     | Identiteit   | 10        |
| 2.4.3     | De negatie   | 11        |
| 2.5       | Samenvatting   | 12        |
| <b>3.</b> | <b>Brouwers intuïtionisme</b>  | <b>13</b> |
| 3.1       | Het leven van Brouwer  | 13        |

| §         | [titel]   | p.        |
|-----------|---|-----------|
| 3.2.2     | De oerintuïtie van tijd                                       | 14        |
| 3.3       | De opbouw van wiskunde  | 15        |
| 3.3.1     | De natuurlijke getallen                                       | 15        |
| 3.3.2     | Het continuüm   | 15        |
| 3.3.2.1   | Meetbaarheid van het continuüm                                | 16        |
| 3.3.2.2   | Reële getallen  | 16        |
| 3.3.2.3   | Keuzevrijheid   | 17        |
| 3.4       | De wet van de uitgesloten derde                               | 17        |
| 3.5       | Equivalentie  | 18        |
| 3.6       | Eigenschappen en verzamelingen                                | 19        |
| 3.7       | Wetenschap en werkelijkheid                                   | 20        |
| 3.8       | Logica  | 20        |
| 3.9       | 'Hogere orde' wiskunde  | 21        |
| 3.10      | De negatie  | 21        |
| 3.11      | Samenvatting  | 22        |
| <b>4.</b> | <b>Grissiaans <i>a priori</i></b>                             | <b>23</b> |
| 4.1       | Griss   | 23        |
| 4.1.1     | Het leven van Griss   | 23        |
| 4.1.2     | Griss' <i>a priori</i>  | 24        |
| 4.2       | De aanschouwingsvorm van eenheid en splitsing                 | 24        |
| 4.2.1     | Onvolledigheid van splitsing en vereniging                    | 24        |
| 4.2.2     | Wiskunde en mystiek   | 25        |
| 4.2.3     | Eenheid, splitsing en de oerintuïtie van tijd                 | 25        |
| 4.3       | Idealisme en de werkelijkheid                                 | 26        |
| 4.4       | Concreetheid  | 27        |
| 4.5       | De negatie  | 27        |
| 4.5.1     | Brouwers constructieve interpretatie van de negatie           | 28        |
| 4.5.2     | Positief verschillen  | 29        |
| 4.5.3     | Soorten   | 30        |
| 4.5.3.1   | Soorten en logische connectieven                              | 31        |
| 4.5.4     | Griss' negatiebegrip  | 32        |
| <b>5.</b> | <b>Eindoordeel</b>  | <b>34</b> |
| 5.1       | Onbesproken elementen van Bolland's en Brouwers filosofie     | 34        |
| 5.2       | Fundamenten van het <i>a priori</i> en de status van wiskunde | 34        |
| 5.3       | Concreetheid en abstractie                                    | 34        |
| 5.4       | De negatie  | 34        |
| 5.5       | De versmelting  | 35        |
| <b>6.</b> | <b>Geciteerde werken</b>                                      | <b>36</b> |

# 1. Inleiding

In de 19e eeuw was de filosofie in volle bloei. Onder de vele bewegingen van die tijd bevonden zich het idealisme, dat zijn oorsprong vond bij Kant, en de zoektocht naar een fundament voor de wiskunde die vooral in gang is gezet door Hilbert. Te midden van deze ontwikkelingen bevond zich G. F. C. Griss (1889 - 1953). Hij zoekt het fundament van de wiskunde in het idealisme, net als zijn leermeester Brouwer, die de grondlegger van het intuïtionisme is. Waar echter Brouwer zich slechts richt op Kant en zijn analyse van de *a priori* aanschouwingsvormen, richt Griss zich voornamelijk op een idealisme dat in de kielzog van Kant vaart: het Hegelianisme. Daarvoor baseert hij zich op de Nederlandse filosoof Bolland, die het Hegelianisme heeft doen opleven in Nederland.

Weinig van Griss' nalatenschap is van filosofische aard; hij heeft slechts één klein boekje waarin hij zijn filosofie uiteenzet, *Idealistische Filosofie* (1946), en één artikel dat de negatie op een filosofische manier bespreekt, *Over de Negatie* (1948). De rest van zijn nalatenschap bestaat uit formele wiskundige uitwerkingen (die overigens wel inhaken op zijn filosofie van de wiskunde). In het voorwoord van *Idealistische Filosofie* maakt Griss zijn invloeden duidelijk:

Het was Bok, die mij reeds vroeg tot de filosofie bracht, en door hem kwam ik in kennis met Pos, die sedertdien voor mij een voortdurende prikkel tot filosofische bezigheid is geweest. Sterke invloed onderging ik van mijn leermeesters in de wiskunde Brouwer en Mannoury, verder van Carry van Bruggen en Bolland.

Na enige tijd was ik tot de overtuiging gekomen, dat het Hegeliaanse idealisme, gezuiverd van deductie, een kern bevat, die als grondslag voor iedere idealistische filosofie kan dienen. Mijn verdere filosofische werkzaamheid heeft in hoofdzaak bestaan in het uitwerken van deze gedachte. (Griss, *Idealistische Filosofie*, 1946, p. 7)

## 1.1 Wiskunde en de negatie

Zoals hierboven al is aangeduid, geeft Griss een filosofie die de wiskunde fundeert in een idealisme. De wiskunde speelt in zijn filosofie van het *a priori* een dusdanig grote rol, dat deze scriptie grotendeels gericht is op een filosofie van de wiskunde; de status van wiskunde t.o.v. de werkelijkheid en de opbouw ervan. Toch zullen de fundamenteën van het *a priori* besproken moeten worden, omdat die richting geven aan de filosofie van de wiskunde.

Griss' filosofie is voornamelijk besproken vanwege zijn *uitbanning van de negatie uit de wiskunde*. Zijn formeel wiskundige werk bestaat dan ook vooral uit de opbouw van een negatieloze intuïtionistische wiskunde. Daarom zal in deze scriptie een extra nadruk liggen op de negatie.

Deze scriptie gaat dus in op het *a priori* en haar fundamenteën, legt daarin de nadruk op de wiskunde en besteed extra aandacht aan de negatie.

## 1.2 Griss' filosofie en de versmelting van de filosofie van Bolland en Brouwer

Van de grofweg 70 bladzijdes die het boek bestrijkt, heeft slechts de helft betrekking op de het *a priori*. Het boek bespreekt daarnaast de mystiek, ethiek en de samenleving. Voor een dieper uitgewerkte filosofie van het *a priori* ben ik aangewezen op de werken van de filosofen waarvan Griss invloed onderging. De twee voor zijn visie op het *a priori* belangrijkste invloeden zijn Bolland en Brouwer.

Deze scriptie zal daarom het Grissiaans *a priori* beschrijven *aan de hand van een versmelting* van de filosofieën van deze twee filosofen. Deze versmelting zal hoofdzakelijk bestaan uit het idealistische fundament van Bolland en het intuïtionistische raamwerk van Brouwer.

We zullen zien dat Griss' eigen filosofie in sommige aspecten divergeert van de pure versmelting, hoewel hij er in de regel mee in overeenstemming is. Dat komt doordat Griss meer invloeden heeft gehad dan alleen Bolland en Brouwer en zijn filosofie daardoor niet puur en alleen een versmelting van de filosofie van de twee filosofen is.

Door de Grissiaanse filosofie te beschrijven aan de hand van de versmelting, komen de excentriciteiten van Griss' eigen filosofie op de achtergrond te staan. Deze scriptie betreft daarom in eerste instantie niet het *a priori* van Griss<sup>1</sup>, maar een *Grissiaans a priori*, namelijk de genoemde versmelting. Aangezien deze twee echter grotendeels overeenkomen, kan deze scriptie ook gezien worden als een analyse van het historisch tot stand komen van Griss' filosofie: als versmelting van de filosofie van zijn grootste invloeden. In dat geval is de versmelting, gezien als versmelting die Griss zelf heeft bewerkstelligd, echter niet *puur* een versmelting van Bolland's en Brouwer's filosofie, omdat Griss ook invloed heeft ondergaan van andere filosofen.

Of de versmelting onderdeel is van Griss' filosofie, of slechts een filosofie geeft die Griss' filosofie benadert, is niet beslisbaar, omdat hij Griss' uitingen slechts uitdiept en inhoud geeft, aan de hand van elementen uit de filosofie van zijn voorgangers. Waar Griss af lijkt te wijken van de pure versmelting, zal aangegeven worden hoe dit beschouwd kan worden als een toevoeging op de versmelting, zodat de versmelting als compatibel met Griss' uitingen gezien kan worden.

Deze scriptie betreft dus een versmelting van Bolland's idealistische fundament en Brouwer's intuïtionistische raamwerk tot een Grissiaans *a priori*, dat compatibel is met Griss' filosofie. We bespreken de filosofie van Bolland in hoofdstuk 2, die van Brouwer in hoofdstuk 3 en de versmelting van deze twee tot een Grissiaans *a priori* in hoofdstuk 4. In elk hoofdstuk komen eerst de fundamenten van het *a priori* aan bod, daarna de wiskunde en vervolgens de negatie.

---

<sup>1</sup> Met 'het *a priori* van Griss' wordt in deze scriptie niet bedoeld 'structuur van Griss' bewustzijn', maar 'de structuur van het bewustzijn volgens Griss'. (Aangezien introspectie ware kennis oplevert volgens Griss, komen de twee echter overeen.) Evenzo wordt met 'Grissiaans *a priori*' bedoeld 'Grissiaanse visie op het *a priori*'. Door deze naamgeving wordt de scriptie een stuk leesbaarder.

## 2. Bollands idealisme

De als eerste te bespreken filosofie die een grote invloed heeft gehad op Griss is het idealisme van Bolland. Het werk van Bolland is vooral gericht op het fundament van waarnemen en denken. Het is dit fundament dat de basis vormt voor de Grissiaanse versmelting van de filosofie van Bolland en Brouwer. Dit hoofdstuk bespreekt Bollands fundament, en enkele uitwerkingen daarvan die belangrijk zijn voor zijn interpretatie van wiskunde.

### 2.1 Het leven van Bolland

Terwijl Hegelianisme groot werd in Duitsland en andere landen, bleek Nederland er nog niet klaar voor; de nadruk lag op Spinozisme; een Nederlandse filosoof die wel het Hegelianisme bestudeerd had voordat Bolland dat deed, Johannes Diderik Bierens de Haan (1866 - 1943), versmolt het Hegelianisme met Spinozisme. Door de herontdekking van Spinozisme kreeg het Hegelianisme weinig kans. Dit veranderde nadat Bolland tot hoogleraar filosofie te Leiden werd benoemd in 1896. Bolland zou de invloedrijkste Nederlandse Hegeliaan worden. Rond de eeuwwisseling begon hij de belangrijkste werken van Hegel te publiceren, waardoor later in Nederland een neo-Hegelianistische stroming zou ontspruiten. (Rutgers, *Dutch Hegelianism*, 1994)

Gerardus Johannes Petrus Josephus Bolland (1854 – 1922) was een autodidact; hij werd benoemd tot hoogleraar filosofie na zijn baan als onderwijzer in Katwijk aan Zee. Het was een van zijn doelen om de filosofie tot het volk te brengen - om de belezen burger tot filosofisch debat te brengen. Zijn charismatische uitstraling zou uiteindelijk een richtende factor zijn geworden in de sekteachtige stroming van Bollandvolgers. Zijn filosofie kent een aantal radicaal verschillende periodes en vòòr zijn interesse in Hegel had Bollands filosofie een totaal andere richting.

Op het moment dat Bolland besloot Hegel te gaan lezen verkeerde hij in een diep scepticisme; door naar alle theorieën kritisch te kijken zag hij ze uiteenvallen. “Er was geen begrip of stelling die onaantastbaar was gebleken in [zijn] eigen criticisme; alles was onhoudbaar.” (uit een lezing van Bolland in 1906 te Amsterdam, geciteerd in (Otterspeer, *Bolland*, 1995, p. 244)) De onmacht om iets met absolute zekerheid te zeggen werd hem rond 1898 te veel. Omdat hij door zijn scepticisme niet in staat was om “aan het werk” te gaan, besloot hij toen om de filosofie te lezen van een Duitse idealist waar hij zich voorheen nog niet in had verdiept: Hegel.

In Hegels filosofie vond Bolland zijn eigen scepticistische problematiek terug, evenals de oplossing: een fundamenteel relativisme. Bolland: “Ziet, wat mijn wanhoop was geweest, ... het feit dat wát ik onderstelde en beredeneerde of probeerde, altemaal kapot ging in zoverre ik er flink over doordacht, - hier kwam ik plotseling in het licht te staan waarin ik leerde zeggen: ‘Wel, dat is juist het ware! Dat *is* de waarheid dat geen denkbaarheid ooit houdbaar is op zichzelf, dat er niets is, waarvoor men zoveel zeggen kan, dat er niet ook iets tégen zou te zeggen zijn. ... Geen afzonderlijke denkbaarheid van het ware, alles slechts te waarderen en te concederen onder voorbehoud ván, en in verband mét, wat anders; alles betrekkelijk.” ((Bolland, *Verslag van de rede*, 1906), geciteerd in (Otterspeer, *Bolland*, 1995, pp. 245-6))

Een aantal jaren later, eenmaal de Hegeliaanse filosofie eigen gemaakt, publiceerde hij het boek *De Logica. Leidraad bij het onderwijs in de zuivere rede*. (1911) Aan de hand van dit

boek kunnen we inzicht krijgen in Griss' visie op de grondslagen van wiskunde, die voor een groot deel in overeenstemming zijn met Bolland's idealisme. In dit hoofdstuk zal vooral ingegaan worden op die aspecten van het idealisme die van belang zijn voor een goed begrip van de wiskunde, vanuit Bolland's Hegeliaans perspectief. Daarmee is *De Logica* als te bespreken boek een logische keuze.

Het boek bespreekt de logica, wat niet begrepen moet worden als de formele logica, maar als "het stelsel van Zuivere Rede". (Bolland, *Een Boek der Wijsheid*, 1899) Dit stelsel omvat veel meer dan wat door formele logica omvat wordt. Het idealisme dat ten grondslag ligt aan Bolland's (nieuwe) filosofie behandelt de elementaire en fundamentele categorieën van de geest. In tegenstelling tot het realisme ziet het idealisme de geest als primair en niet de realiteit. In dit hoofdstuk zullen de volgens Bolland's Hegelianisme belangrijkste ingrediënten van het zuivere denken besproken worden.

## 2.2 Fundamenten

Bolland's filosofie van de "Zuivere Rede" maakt gebruik van een centraal begrippenkader, met woorden zoals 'verenigen', 'onderscheiden' en 'verkeren', dat op velerlei aspecten van het bewustzijn wordt toegepast. Sterker nog: de toepassing van het begrippenkader vormt de essentie van zijn filosofie. Als gevolg daarvan wordt een interpretatie van zijn filosofie bemoeilijkt; omdat de filosofie wordt verwoord in het vooronderstelde begrippenkader van 'verenigen' en 'onderscheiden', zonder dat deze acten beschreven worden, is het soms onduidelijk welke gedachtesprongen Bolland maakt. Het toegepaste woordgebruik is niet altijd voldoende om de betekenis, of achterliggende theorie, af te leiden. Ook het beschrijven van zijn theorie wordt erdoor bemoeilijkt; omdat hij zijn eigen theorie niet *beschrijft* en een bepaald jargon gebruikt dat alleen binnen zijn filosofie te begrijpen is, moet de beschrijving van zijn theorie een totaal andere vorm aannemen dan zijn filosofie zelf. Dit betekent dat een groot deel van de hier gepresenteerde analyse van Bolland's Hegelianisme gebruik maakt van termen en begrippen die niet in zijn filosofie thuis horen, maar wel bruikbaar zijn om de achterliggende theorie inzichtelijk te maken.

### 2.2.1 Onderscheiden en verenigen

Bolland's Hegelianisme is een monistische theorie. Als zodanig poneert het een eenheid van het zijn als geheel. Dit betekent echter niet dat er geen onderscheidingen mogelijk zijn; onderscheiden en verenigen spelen een even grote, tegengestelde, centrale rol in deze filosofie. Het zien van eenheid is de verdienste van de rede en het onderscheiden een act van het verstand. "Het volledige denken denkt verstandig uiteen, om in redelijkheid te vereenigen." (Bolland, *De Logica*, 1911, p. 18)

Ten grondslag aan deze visie over onderscheiden en verenigen lijkt een vorm van transcendentiaal redeneren te liggen. Om het praten over *dingen* mogelijk te maken moeten we de capaciteit hebben om dergelijke afgescheiden eenheden te registreren. Het is echter niet de werkelijkheid die de dingen als kant-en-klare brokken aanlevert; we kunnen bijvoorbeeld dingen gaan zien die we voorheen nog niet zagen. Dit maakt het scheiden van een eenheid tot een veelheid een act van het bewustzijn. Het is deze act die het mogelijk maakt om over *dingen* te praten. Het afscheiden is daarmee de mogelijkheidvoorwaarde van kennis over dingen, waardoor men kan spreken over een transcendentiaal karakter.

Ondanks dit transcendentale karakter zijn er grote verschillen tussen de filosofie van Bolland en die van Kant (die het begrip 'transcendentiaal' inhoud heeft gegeven). Een belangrijk verschil is terug te zien in de methodiek die gebruikt wordt. Waar Kant probeert te beschrijven wat de mogelijkhedenvoorwaarden voor kennis en de limieten ervan zijn, gaat Bolland uit van de primaire acten verenigen en uiteendenken, die hij *toepast* in plaats van ze te bespreken. Terwijl Kants filosofie voornamelijk een beschrijvend karakter heeft, gaat het in Bolland's filosofie erom zaken in het licht te zien van de primaire geestesacten 'verenigen' en 'uiteendenken'.

### 2.2.2 Begrippen en hun inhoud

Om over 'afschieden' of 'onderscheiden' etc. te kunnen spreken, moeten we een medium vooronderstellen. Natuurlijk is elke eenheid die ontstaat door het verenigen van afgezonderde dingen als medium voor de onderscheiding: de eenheid is datgene waar afzonderingen in gemaakt worden. Om echter het idealistische aspect van deze filosofie naar voren te laten treden kan ik de eenheid waarin *alle* onderscheidingen plaatsvinden 'de bewustzijnsstroom' noemen. Dit is echter een objectieve benadering van het subject: wat voor het subject (de eenheid genaamd) alles is, is vanuit een derde-persoons-perspectief slechts de inhoud van het bewustzijn van dat ene subject.

Ik spreek van een bewustzijnsstroom omdat dit het dynamische karakter benadrukt wat in de Hegeliaanse filosofie duidelijk naar voren komt. "Aan het begin vinden wij het worden, worden van zijn en worden van niet zijn, ontstaan en vergaan." (Bolland, *De Logica*, 1911, p. 5) Het worden kan vanuit het derde-persoons-perspectief beschreven worden als verschijnen.

Dit dynamische karakter heeft een fundamentele rol voor Bolland. Het bewustzijn is een dynamisch geheel en de dingen die men erin aantreft delen deze eigenschap. Zo zijn ook begrippen dynamisch te begrijpen. Deze visie staat radicaal tegenover het analytische model van begrippen, waarin een begrip gezien wordt als een statisch object, dat geanalyseerd kan worden, om zo de inhoud bloot te leggen. Een dergelijk begrip-object bestaat uit eigenschappen die we eruit kunnen lichten en die we ook weer als begrip-objecten zouden kunnen zien.

Volgens de Hegeliaanse filosofie, echter, bevat een begrip geen inherente eigenschappen. Het verbinden van een eigenschap als 'ongetrouwd' aan het begrip 'bachelor' is dan een geestesact in plaats van een analyse-stap: "it is the effort of thought to make such contents explicit that both undermines them and brings about new contents."<sup>2</sup> (Redding, *Georg Wilhelm Friedrich Hegel*, 2010) Het begrip 'bachelor' wordt dan ondermijnd omdat het overgaat in 'ongetrouwd'; het bewustzijn 'stroomt' van het eerste naar het tweede begrip.

### 2.2.3 Verkeerdheid

Naast het begrippenkader van veelheid, eenheid en de overgangen daartussen wordt een centrale rol ingenomen door de begrippen 'verkeren', 'verkeerd zijn' en 'verkeerdheid'. Deze begrippen zijn te begrijpen in relatie tot 'keren' en 'keerpunt'. Het begrip 'verkeerdheid' wordt in Bolland's boek geïntroduceerd in relatie tot 'het andere': "iets en iets anders verhouden zich gelijk de gesteldheid en haar verkeerdheid." (Bolland, *De Logica*, 1911, p. 6) Het andere van iets is synoniem met hetgeen waar het in verkeert.

---

<sup>2</sup> Dit citaat heeft in eerste instantie betrekking op de filosofie van Hegel. Het is echter volledig compatibel met Bolland's filosofie en het legt zijn filosofie doeltreffender uit.



Het is essentieel aan begrippen dat ze verkeren in hun tegengestelde. Iets kan niet zichzelf zijn zonder iets anders te hebben. Dit is begrijpelijk in het licht van Bolland's monisme. Als we in eenheid een begrip afgrenzen, bepaalt deze grens vanzelf ook wat buiten dit begrip ligt; een grens is immers altijd tussen twee velden. In onze bewustzijnsstroom gaan begrippen echter in elkaar over en een gedachte over het één gaat over in een gedachte over het andere: "aan de grens gaat iets in iets anders over." (Bolland, *De Logica*, 1911, p. 6)

Een voorbeeld kan duidelijk maken hoe dit begrippenkader toegepast moet worden. Een helder voorbeeld is te ontleen aan het begrip 'vorm'. We kunnen aan verschijnselen een bepaalde vorm toekennen; zo kunnen we een voetbal rond noemen. Alhoewel rondheid haar eigen verkeerdheid zal hebben, gaat het hier over het begrip 'vorm'. Als we de vorm echter niet scheiden van zijn verkeerdheid vervalt het begrip tot het begrip 'verschijnsel', of een andere overkoepelende eenheid. Dit is echter niet de eenheid die we bedoelen als we op de vorm van iets duiden. Wanneer we het begrip van de vorm van een verschijnsel uitpluizen zien we de stof die de vorm mogelijk maakt. Dit hoort echter veeleer bij het tegenovergestelde van vorm, dan bij vorm zelf; dit is de grens van de 'inhoud' van het begrip. We kunnen nu zeggen dat het begrip is overgegaan in haar verkeerdheid bij het benaderen van de grens van het begrip. De begrenzing van een begrip, die nodig is om het begrip plaats te geven, geeft ons dus vanzelf de verkeerdheid ervan.

Het is in verband hiermee dat Bolland de mogelijkheid van een ding op zichzelf verwerpt. Een ding is namelijk altijd gerelateerd aan het andere ervan, het verkeerde. Het ding op zichzelf moet echter niet begrepen worden zoals Kant dat deed; hij bedoelde hier namelijk het object mee, los van onze voorstelling ervan. Kants idealisme maakt het echter onmogelijk om 'buiten ons bewustzijn te stappen' en over het ding los van onze voorstellingen te praten. Kant heeft veel kritiek gekregen op deze notie, omdat de door hem geponeerde onbereikbaarheid ervan het onmogelijk maakt het begrip te verwerven.

Het is als reactie op deze kritiek dat Bolland's begrip van het ding op zichzelf begrepen kan worden. Aangezien het enige wat voor ons bereikbaar is in het bewustzijn ligt, is het ding op zichzelf het begrip geabstraheerd van alle inhoud die je erbij denkt. Het is echter die inhoud die het begrip tot een geheel maakt; zonder inhoud heeft het begrip geen grens en gaat het op in een overkoepelende eenheid, waardoor het niet meer dat begrip is, maar die eenheid. Op deze manier kunnen we wel een begrip op zichzelf begrijpen, als de eenheid die je krijgt als je het begrip abstraheert, maar, aangezien deze eenheid niet meer het ding is, kunnen we niet spreken over het *ding* op zichzelf.

Deze visie, die iets en het andere op laat gaan in de (onderliggende) eenheid, kan vergeleken worden met het drietal begrippen these, antithese en synthese, ondanks het feit dat Bolland en Hegel zelf deze begrippen *niet* gebruiken om hun filosofie uit te leggen. (Mueller, *The Hegel Legend of "Thesis-Antithesis-Synthesis"*, 1958, p. 411) Volgens Bolland is een oordeel slechts de explicatie van een begrip: "elk begrip laat of kan zich, als geval van 'het' begrip, als oordeel stellen." (Bolland, *De Logica*, 1911, p. 35) Met deze gedachte kunnen we 'het iets' als corresponderend met 'these' zien, 'het andere' als corresponderend met 'antithese' en de eenheid van die twee als corresponderend met 'synthese'. Gezien de gelijkenissen kan dit niet-Bollandiaanse begrippenkader verhelderend werken.

Toch zal duidelijk gemaakt moeten worden wat de grenzen zijn van de vergelijking. In Bolland's theorie speelt drieheid een grote rol, maar de bovengenoemde drieheid komt nergens

terug. Alhoewel 'iets' en 'iets anders' tegenover elkaar worden gezet, staat 'eenheid' hier los van; 'eenheid' wordt juist tegenover 'veelheid' gezet. Er zijn dus eerder twee dichotomieën aan te wijzen in Bolland's filosofie dan één trichotomie. Daar komt nog eens bij dat eenheid geen voorkeurspositie heeft, wat wel gesuggereerd lijkt te worden door de trichotomie these-antithese-synthese. Hoewel Bolland grote nadruk legt op eenheid, heeft het een even belangrijke rol als veelheid. Aangezien echter het verstand en haar starre veelheid zo centraal hebben gestaan in de westerse filosofie (wat nu nog het geval is) legt Bolland veel nadruk op de eenheid die door de rede wordt verschaft.

### **2.3 Werkelijkheid en waarheid**

In Bolland's idealisme is het subject primair, en komt de werkelijkheid daarna; deze tweede moet dus gefundeerd worden in het subject. De werkelijkheid is volgens Bolland slechts een construct, gevormd door toekenningen van het verstand aan indrukken. Weer komt het woord 'indrukken' niet voor in het boek, wat verklaard kan worden door de suggestie, die het woord geeft, dat er een buitenwereld los van ons is die 'op ons in drukt'. De enige 'buitenwereld' waar we over kunnen praten is de werkelijkheid, en dat is het geheel dat we met ons verstand kunnen benoemen, bepalen en bestaan toekennen. Een derde-persoons-perspectief is strikt genomen dan ook niet mogelijk.

Dit bestaan of deze werkelijkheid staat los van de waarheid. De "waarheid en het ware gaan alle gesteldheid, zakelijkheid en realiteit te buiten." (Bolland, *De Logica*, 1911, p. 8) De waarheid betreft noodzakelijkheden en niet de contingente gesteldheden van de werkelijkheid. De waarheid is daarmee tot idealiteit verworpen en heeft hoofdzakelijk met de *a priori* structuur van het bewustzijn te maken. Dit is begrijpelijk wanneer je bedenkt dat de indrukken die we binnenkrijgen geen intrinsieke informatie geven over de buitenwereld - dat maakt dat de structuur in de werkelijkheid bepaald is door de geest.

De waarheid heeft in Bolland's filosofie de vorm van een eenheid die "niet vooruit verkéerd is en ópgeheven" (Bolland, *De Logica*, 1911, p. 8), wat inhoudt dat de waarheid niet afgescheiden kan worden; de waarheid is de denkbare eenheid die principieel niet verkeert. Wanneer iets toch verkeert dan is het geen waarheid en dien je de eenheid van datgene en zijn tegenovergestelde (zijn verkeerdheid) te verenigen om tot de waarheid te komen. Deze visie op waarheid is begrijpelijk vanuit zijn relativisme; het feit dat elke stelling tot zijn tegendeel verkeert is de waarheid - dat is de eenheid van al het denkbare.

### **2.4 Wiskundige begrippen**

Nu het algemene kader van Bolland's Hegelianisme duidelijk is, kan er aan de meer logische of wiskundige objecten en axioma's inhoud gegeven worden. De eerste logische of wiskundige notie die door Bolland besproken wordt is er een die fundamenteel is voor de wiskunde: telbaarheid. We zullen zien dat deze notie ook in Griss' filosofie een fundamentele rol speelt.

#### **2.4.1 Telbaarheid**

In Bolland's filosofie hangt telbaarheid nauw samen met noembaarheid; "De telbaarheid is verkeerde noembaarheid. Noemen moest het verschillende vereenigen, telbaarheid is noembaarheid van verschillende eenheid, en het tellen is noemen van eenheden, verschillende eenheden." (Bolland, *De Logica*, 1911, pp. 8-9) De hier besproken eenheid is de eenheid van

een ding geabstraheerd van de inhoud van die eenheid; hoewel alleen specifieke eenheden, dingen, geteld kunnen worden is de telbaarheid een eigenschap van de eenheid van een ding en niet van het ding zelf.

Telbaarheid is een eigenschap waarin de verschillende eenheden tot één eenheid komen. Telbaarheid is de eenheid van veelheid: 'veeleenigheid'. Zo is bijvoorbeeld de eenheid van een *bepaalde* verzameling eenheden (van dingen) vijf. Dus "is het getal veeleenigheid in gestelde bepaaldheid:" (Bolland, *De Logica*, 1911, p. 9) in een dergelijk bepaald geval (het genoemde voorbeeld) komt de eenheid van de veelheid aan verschillende dingen tot het getal vijf. Wanneer we deze veeleenigheid echter *onbepaald* laten benaderen we niet meer een specifiek getal, maar de telbaarheid in abstracto.

### 2.4.2 Identiteit

Een volgende fundamenteel wiskundige begrippenpaar is identiteit en differentie. Deze twee begrippen verkeren aan elkaar - ze zijn dan ook elkaars tegenovergestelde. "Identiteit op zichzelf houdt geen stand; de identiteit is identiteit van het differente, gelijk de differentie differentie is van het identieke." (Bolland, *De Logica*, 1911, p. 16) Dat differentie differentie van het identieke is, lijkt *in eerste instantie* voor de hand liggend: we scheiden die dingen die we aan zichzelf gelijk houden. Om deze wederzijds definiërende begrippen uit te leggen zal ik beginnen met de uitleg van identiteit.

Volgens Bolland is identiteit identiteit van het differente. Bedenk je wat het zou betekenen als identiteit identiteit was van het identieke. Dan zou elke identiteitsclaim de volgende vorm hebben: "Datgene is identiek aan zichzelf." Als dit het gebruik van de identiteitsrelatie zou zijn dan zou hij geen nut hebben. Want wat vertelt deze zin ons? Hij veronderstelt alleen een identiteit, zonder deze aan te wijzen: het woord 'zichzelf' veronderstelt de identiteit die de zin bespreekt.

De standaard vorm van een zin die spreekt over identiteit is dan ook: "Dit is identiek aan dat." We kunnen Freges begrippenpaar Sinn en Bedeutung gebruiken om dit uit te leggen. Het is namelijk alleen wanneer de Sinn verschilt dat het nut heeft om te zeggen dat de Bedeutung hetzelfde is. Wanneer we zeggen dat de Morgenster de Avondster is kan duidelijk worden hoe deze verschillende begrippen toch één zijn. Wanneer we echter zeggen dat de Morgenster identiek is aan zichzelf wordt er geen achterliggende eenheid verduidelijkt.

De analogie met Freges begrippenpaar gaat echter niet helemaal op. Het begrip Bedeutung lijkt verbonden te zijn met een vorm van realisme die in lijkt te gaan tegen het idealisme. Daarom blijft Bolland bij algemenere termen; hij specificeert niet hetgeen different en identiek is, terwijl Frege deze twee resp. 'Sinn' en 'Bedeutung' noemt en ze specifieke eigenschappen toekent. Als zodanig kan Bolland's theorie omgaan met identiteitsproposities die voor theorieën als die van Frege een probleem vormen zoals "Superman is Clark Kent." Omdat de veronderstelde identiteit niet gekenmerkt is als behorend tot de externe realiteit, komt Bolland's theorie niet in de problemen.

Aangezien identiteit verkeert tot differentie kunnen we nu dit tweede begrip beter duidelijk maken. Differentie is volgens Bolland altijd differentie van het identieke. Dit leek in eerste instantie vanzelfsprekend; beschouw echter de volgende positie: volgens Bolland kan *A* verschillen van *A*. Dit is te begrijpen in het licht van de veranderlijkheid van het bewustzijn en de begrippen die daarin voorkomen. Een begrip gaat vanzelf over in het verkeerde ervan. Het

identiek *houden* van een begrip is daarmee een activiteit van het bewustzijn.<sup>3</sup> Dit kan overigens verklaren dat sommige mensen moeite hebben met het bedrijven van formele logica, waarin de stelling “ $A$  is  $A$ ” fundamenteel is; het lukt deze mensen dan niet goed begrippen identiek te houden. Dergelijke “grondstellingen des verstands” zijn geen ‘denkwetten’ of “gezaghebbende voorschriften”, maar “bepalingen van het denken zelf”, die in de logica uitgebuit worden. (Bolland, *De Logica*, 1911, p. 17)

### 2.4.3 De negatie

Nu de fundamenteen van het a priori en de wiskunde zijn besproken, kunnen we overgaan tot de negatie. Terwijl de standaardinterpretatie ‘niet’ analoog aan ‘wegdenken’ ziet, is de negatie in Bolland's theorie verbonden met het centrale begrip ‘verkeren’. Het ‘negeren’ of ontkennen van een begrip is te begrijpen als de overgang van dat begrip in het andere ervan.

Deze visie is het beste terug te lezen in de uitspraak van Bolland dat de ‘bepaling’ “van uitsluiting ( $A$  is of  $A$  of **niet  $A$** ) het verschillende laat ineenvallen aan de onwillekeurige bekentenis dat iets **iets anders** kan zijn.” (Bolland, *De Logica*, 1911, p. 17) Hierin worden uiterst helder ‘niet’ en ‘het andere’ aan elkaar gekoppeld.

Deze analyse gaat echter voorbij aan het feit dat er verschillende interpretaties mogelijk zijn voor de zinsvormen “ $X$  is niet  $A$ ”, namelijk als “ $X$  (is niet)  $A$ ” of als “ $X$  is (niet  $A$ )”. Op dezelfde pagina meent Bolland echter dat “het beginsel van tegenspraak (“ $A$  is niet niet- $A$ ”) te bedenken geeft, dat in het ongelijk zijn het ongelijke gelijk blijft.” Hier wordt ‘ongelijk zijn’ gekoppeld aan ‘niet-zijn’ en het ongelijke aan ‘niet- $A$ ’. Er is echter niets dat ons weerhoudt de ongelijkheid die in beide uitdrukkingen naar voren komt uniform te interpreteren en evenzo ‘niet’. De negatie gebruikt als modificatie van het werkwoord (‘is-niet’) heeft dezelfde interpretatie als wanneer hij gebruikt wordt als modificatie van het zelfstandig naamwoord (‘niet- $A$ ’). Als modificatie van een zelfstandig naamwoord is de negatie duidelijk: het andere, maar het is vooralsnog onduidelijk hoe we hem als modificatie van het (hoofd)werkwoord van een zin moeten zien, aangezien nog niet is toegelicht hoe een propositie verkeert - wat het andere van een propositie is.<sup>4</sup> Een uitleg van Bolland's visie op wat een oordeel is hier dus noodzakelijk.

Behalve de vorm is er geen groot verschil tussen een begrip en een oordeel, in Bolland's Hegelianisme. “Het oordeel is het begrip in gestelde bepaaldheid. ... Elk begrip laat of kan zich, als geval van ‘het’ begrip, als oordeel stellen.” (Bolland, *De Logica*, 1911, p. 35) Wanneer we zeggen dat een bachelor ongetrouwd is uiten we alleen het begrip ‘bachelor’. Zo moeten we ook de zin “De mens is een dier.” zien als de explicatie van ons begrip van de mens. Het feit dat de stap van een begrip naar een eigenschap ervan een bewustzijnsact is en geen analyse van de inhoud, maakt dat de stap van onderwerp naar gezegde ook als begripsexplicatie gezien kan worden.

Met deze kijk moeten we de zin “De mens is niet een dier.” interpreteren als het andere van de mens, gezien als dier. Dit andere kan dan bijvoorbeeld de mens zien als goddelijk

---

<sup>3</sup> Alhoewel deze act van het bewustzijn geïnterpreteerd kan worden als een eenmalige handeling, die voor eens en voor altijd bepaalt of een begrip identiek aan zichzelf is of niet, interpreteert Griss hem, net als deze passage, als een aanhoudende activiteit. Dit heeft verband met het feit dat Griss het niet-meer onderscheiden als onvermijdelijk ziet in de opbouw van een steeds complexere wiskunde, wat zal worden toegelicht in §4.2.1.

<sup>4</sup> Ik ga hier uit van de stelling ‘niet( $A$  is  $X$ )  $\equiv$   $A$  is-niet  $X$ ’.

wezen, in plaats van dierlijk. Op een dergelijke manier kan een genegeerde propositie, een ontkenning, gezien worden als een nieuwe propositie.<sup>5</sup>

Deze interpretatie van Hegel, die de negatie verbindt aan het centrale begrippenkader van verkeren, is in overeenstemming met hoe andere Nederlandse filosofen, zoals Pos, denken over deze “dialectiek, die het omslaan van iets in iets anders ‘negatie’ noemt”. (Pos, *G. F. C. Griss' Idealistische Filosofie*, 1953, p. 7) Bovendien duidt Griss zelf ook op een dergelijke interpretatie: “Bij Hegel is de negatie (het tegendeel) van een ding of een begrip iets positief anders.” (Griss, *Over de Negatie*, 1948, p. 104)

## 2.5 Samenvatting

Dit waren de belangrijkste noties van Bolland's *a priori*. We hebben gezien hoe zijn filosofie doordrenkt is van de concepten uit zijn centrale begrippenkader: ‘verkeren’, ‘het andere’, ‘verenigen’, ‘scheiden’, etc. Daarnaast hebben we inzicht gekregen in de status van de werkelijkheid en de rol van het *a priori* daarin.

Ook de wiskundige noties, identiteit en telbaarheid, zijn uitgelegd aan de hand van Bolland's centrale begrippenkader. Het is dit begrippenkader waar Griss zich op baseert om tot een negatieloze wiskunde te komen. Griss' filosofie zal dus moeten rijmen met de hier besproken wiskundige noties, wil het een coherente filosofie zijn.

De negatie heeft voor Bolland een rol analoog aan het andere. Daardoor heeft het een niet-gedetermineerde functie. Omdat begrippen vaak gescheiden moeten worden van meerdere andere begrippen, is er niet één begrip dat het andere kan zijn. Het andere van ‘één’ kan net zo goed ‘nul’ als ‘twee’ zijn. Het is dan ook afhankelijk van de bewustzijnsstroom waar een begrip in overgaat, waar het in verkeert. We zullen zien dat dit een reden voor Griss is om Bolland's negatiebegrip af te wijzen.

---

<sup>5</sup> Deze propositie is niet te reduceren tot een propositie waarin de negatie als modificatie van het zelfstandig naamwoord wordt gezien. Het begrip ‘niet-dier’ zou verwijzen naar het andere van ‘dier’, wat ‘plant’ kan zijn.

## 3. Brouwers intuïtionisme

De andere filosofie die een grote invloed op Griss heeft gehad is het intuïtionisme. Dit is een theorie over het fundament van de wiskunde. Hij werd in het leven geroepen door de leermeester van Griss: Luitzen Brouwer, en werd voortgezet o.a. door Griss leeftijdgenoot Arend Heyting - ook een leerling van Brouwer - die een logica ontwierp die aansluit op het intuïtionisme. Ondanks de grote invloed van Brouwer heeft Griss een filosofie gecreëerd die in een fundamenteel aspect afwijkt van de theorie van zijn leermeester; terwijl Brouwer de functie van de negatie verandert ten opzichte van de klassieke interpretatie, verbant Griss de negatie helemaal uit de wiskunde. Dit hoofdstuk bespreekt Brouwer en zijn filosofie van de wiskunde: het intuïtionisme.

### 3.1 Het leven van Brouwer

Luitzen Egbertus Jan Brouwer, zoals zijn volledige naam luidt, (1881 - 1966) studeerde wis- en natuurkunde aan de Universiteit van Amsterdam, waar hij daarna ook les is gaan geven. Al vanaf jonge leeftijd heeft hij zich geïnteresseerd in filosofie: hij volgde tijdens zijn studie de lezingen van Mannoury waarin de fundamenteën van de wiskunde werden besproken en in zijn proefschrift over de grondslagen van wiskunde schrijft hij over Kants begrip van het *a priori* en ageert hij tegen diens stelling dat de euclidische ruimte *a priori* gegeven is. (van Stigt, *Brouwer's Intuitionism*, 1990, p. 28) Het is de visie die hij in dit proefschrift uitte, die hij later heeft uitgewerkt tot het intuïtionisme. In die zin is het intuïtionisme te zien als reactie op Kant.

Op zijn 24e, nog voor hij zijn proefschrift klaar had, werd Brouwer gevraagd om in een lezing te reageren op Bolland. Brouwer schreef een uitwerking van voorbereidingen op die lezing, die later gepubliceerd zou worden onder de naam *Leven, Kunst en Mystiek* (1905). Hierin ageert hij tegen het Bollandiaanse prijzen van het menselijk intellect en logisch redeneren, en legt de oorzaak van vele problemen bij de menselijke natuur. Na het degraderen van taal, toegepaste wetenschappen en vele andere onderwerpen is het enige dat staande blijft introspectie; het is de act van het in zichzelf keren die ons echte wijsheid geeft en los maakt van aardse frustraties. Alleen het innerlijk zicht blijft staande - *de intuïtie*. (van Stigt, *Brouwer's Intuitionism*, pp. 30-34)

### 3.2 Fundamenten van het intuïtionisme

Het intuïtionisme is een theorie die de wiskunde probeert te funderen in de geest, in tegenstelling tot bijvoorbeeld taal of de werkelijkheid. Omdat het intuïtionisme de wiskunde in eerste instantie fundeert in de geest, zijn de communiceerbaarheid van wiskundige bewijzen en de analyse ervan van secundair belang. Omdat de geest primair is, beschrijft Brouwer het intuïtionisme aan de hand van het geïdealiseerde subject: de geest in zoverre zij zich bezig houdt met pure wiskunde. Als zodanig wordt er geabstraheerd van menselijke tekortkomingen zoals de beperktheden van het geheugen en van taal.

De belangrijkste fundamenten van het intuïtionisme zijn constructivisme, de oerintuïtie van tijd en wilsvrijheid. Het was echter pas na een dik decennium, dat Brouwer zich realiseerde dat hij dit laatste element nodig had. Hiermee in overeenstemming zal ook ik deze notie pas uitleggen wanneer ik toe kom aan de reële getallen, die wilsvrijheid nodig hebben volgens Brouwer.

### 3.2.1 Constructivisme

Het Intuitionisme is in grote mate bepaald door haar constructivistische karakter: het ziet een bewijs als de (mentale) opbouw van het object waar het bewijs over spreekt. Een uitgeschreven formeel bewijs is dan slechts de mededeling van de mentale constructie. Zo kan de afleiding van de logische stelling  $(A \wedge B)$  uit  $A$  en  $B$  gezien worden als een beschrijving van de mentale constructie die je uitvoert om tot die stelling te komen.

Dit betekent dat alleen die stellingen bewezen kunnen worden, waarvoor je een analoog construct kan vormen, wat een beperking inhoudt van wat als een bewijs gezien kan worden; er zijn namelijk procedures die onder wiskundigen gezien worden als een bewijs, zonder dat er een analoog construct mogelijk is. In dergelijke gevallen zijn er twee mogelijke wegen die de intuïtionist kan begaan: of hij verwerpt de procedure, of hij probeert de intuïtionistisch ongefundeerde stappen te vervangen en zo een vergelijkbare procedure te formuleren.

Een voorbeeld van een door het intuitionisme verworpen procedure is het gebruik van de wet van de uitgesloten derde. Deze wet stelt dat ofwel  $A$  het geval is, of  $A$  niet het geval is ( $A \vee \neg A$ ). Een constructivist moet deze wet interpreteren als de stelling dat we ofwel een constructie van  $A$  hebben ofwel een constructie van  $\neg A$ . Wanneer we echter nog niets hebben geconstrueerd, hebben we van geen van beiden een constructie, wat de derde mogelijkheid is. De wet geldt dus niet in een constructivistisch systeem. In de volgende subsectie zullen we een intuïtionistisch tegenvoorbeeld van de wet zien.

Brouwer gaat echter nog een stap verder dan andere vormen van constructivisme, door te eisen dat ook alle wiskundige objecten opgebouwd moeten worden. Hij beschouwt zowel wiskundige objecten als bewijzen als constructies. Het beginsel van constructiviteit is bij hem een eis voor de gehele wiskunde; in de pure wiskunde moet alles geconstrueerd zijn.

### 3.2.2 De oerintuïtie van tijd

Om een fundament voor de wiskunde te geven heeft het intuitionisme de taak te laten zien hoe de wiskunde opgebouwd kan worden in de geest. Als eerste worden de getallen opgebouwd, omdat deze de basiselementen vormen van wiskunde. Daartoe wijst het intuitionisme op elementaire geestesacten waarvan het bestaan als direct inzichtelijk wordt beschouwd.

Brouwers geestesacten vinden plaats in de Kantiaanse aanschouwingsvorm van tijd - ook wel "de oerintuïtie van tijd". Andere benamingen ervoor zijn "*constantheid in wisseling* [en] *eenheid in veelheid*" (Brouwer, *Over de grondslagen der wiskunde*, 1907, p. 197); in deze benaming komt de vloeibaarheid van tijd echter nog niet erg naar voren, die Brouwer eraan toekent. Het is de tijdsintuïtie die de elementaire operaties van de wiskunde levert en daarom alom aanwezig is in wiskundige constructies.

Van de oerintuïtie kunnen een aantal begrippen 'afgelezen' worden, zoals: "continu, eenheid, nog eens [en] enzovoort". (Brouwer, *Over de grondslagen der wiskunde*, 1907, p. 180) Deze begrippen zijn onherleidbaar - ze volgen direct uit de oerintuïtie van tijd. Met behulp daarvan worden de wiskundige gebouwen gecreëerd. Als eerste de natuurlijke getallen, waaruit op een eenvoudige manier de rationale getallen volgen, waarmee Brouwer de reële getallen definieert. Vervolgens kunnen we dan van eigenschappen, relaties en verzamelingen gaan praten.

### 3.3 De opbouw van wiskunde

Met bovengenoemde fundamenten bouwt Brouwer de wiskunde op. We zullen echter zien dat dit niet *alle* fundamenten zijn die Brouwer hiervoor gebruikt. Gaandeweg wordt het Brouwer duidelijk dat er nog een fundamentele eigenschap van de geest moet worden aangenomen: keuzevrijheid. Voor we aar echter komen moeten we eerst een aanzienlijk deel van de wiskunde hebben opgebouwd. De eerste wiskundige objecten zijn de natuurlijke getallen.

#### 3.3.1 De natuurlijke getallen

De intuïtie van tijd geeft een tweedeling in heden en verleden, doordat het een moment bewaart in het geheugen, om vervolgens te zien dat dat moment verschilt van het heden. Dit verschaft het subject het vermogen tot onderscheiden. Het is de eerste tweeheid in de 'genetische hiërarchie'<sup>6</sup> van het ontstaan van wiskunde.

Met dit vermogen is het in staat discrete objecten te onderscheiden in de aanschouwingen. Wanneer vervolgens van de inhoud van objecten wordt geabstraheerd, houden we een abstracte, wiskundige tweeheid over, die het gemeenschappelijke substraat is van alle specifieke tweeheden. Van deze tweeheid kan vervolgens in het ene ding nog een onderscheiding gemaakt worden, om zo het concept van 'drie' te vormen.

Dit proces kan worden herhaald, waardoor de reeks van natuurlijke getallen wordt gecreëerd: 'de fundamentele reeks'. Het vermogen tot herhaling, dat door Brouwer vaak wordt aangeduid met de term 'enzovoorts', is een primitieve notie, die een rol speelt in de creatie van verscheidene wiskundige entiteiten.

De orderrelatie tussen de getallen, aan de hand waarvan we ze op een lijn kunnen schikken, is gefundeerd in de tijdsrelatie 'eerder-later', die natuurlijk is gegeven. Drie is meer dan twee, omdat drie later gecreëerd is in de fundamentele reeks. (van Stigt, *Brouwer's Intuitionism*, 1990, p. 153)

#### 3.3.2 Het continuüm

De volgende stap in de opbouw van het wiskundige domein is de opbouw van het continuüm, dat de reële getallen bevat. De constructie hiervan kan niet hetzelfde verlopen als die van de natuurlijke getallen, aangezien er niet zoiets bestaat als het kleinste opvolgende rationale (en dus ook reële) getal; terwijl bij de natuurlijke getallen het eerste getal dat groter is dan één eenduidig twee is, kunnen we bij de rationale getallen voor een gegeven getal groter dan één, altijd een kleiner getal vinden, dat dichter bij één ligt.

Het is juist deze eigenschap die fundamenteel is voor het continuüm. Het fundament is de intuïtie van 'tussen' - sterker nog: het continuüm wordt zelfs geïdentificeerd met de intuïtie van 'tussenin'. (van Stigt, *Brouwer's Intuitionism*, 1990, p. 156) Deze intuïtie maakt het mogelijk om tussen elke twee rationale getallen een nieuw rationaal getal te creëren, waardoor we elk willekeurig rationaal getal kunnen creëren, waarmee we vervolgens de reële getallen zullen definiëren (zie §2.3.2.2).

---

<sup>6</sup> Deze hiërarchie vertrekt vanuit de oerintuïtie en bouwt voort naar steeds complexere gedachtes. Deze hiërarchie is genetisch te noemen, omdat eerder geconstrueerde objecten worden meegenomen (wat analoog gezien kan worden aan overerven) en kunnen worden gebruikt in complexere constructies.



De intuïtie van tussen wordt gefundeerd in de oerintuïtie van tijd, net zoals de intuïtie van tweeheid. De twee intuïties ontstaan tegelijkertijd in dit “oergebeuren”. Net als in Bollands Hegelianisme, zijn discreetheid en continuïteit onafscheidelijke complementen van elkaar en hebben ze een gelijkwaardige rol.

Het is echter onvermijdelijk de een als voorafgaand aan de ander te zien: we kunnen het continuüm zien als medium voor de discrete getallen en we kunnen de discrete getallen zien als de elementen die samengevoegd het continuüm geven. In de eerste interpretatie is er een direct inzichtelijke vloeibaarheid van tijd die de intuïtie van het continuüm geeft en in de tweede interpretatie is er een synthetische act van samenhouden (Latijn: *continere*) die een lijn geeft tussen de gecreëerde getallen.

### 3.3.2.1 Meetbaarheid van het continuüm

De vloeibaarheid van tijd wordt gegeven door de intuïtie van het continuüm, die direct voortvloeit uit de oerintuïtie. Willen we getallen op het continuüm kunnen leggen, dan moet het meetbaar zijn - we hebben een methode nodig die het continue representeert m.b.v. het discrete. Dit gebeurt aan de hand van rationale getallen: breuken. Deze getallen vormen een schaal met willekeurig grote dichtheid van punten: voor een dichtheid van  $n$  hoeven we slechts alle breuken  $1/n, 2/n, 3/n$ , enz. op de schaal te zetten.

De constructie van rationale getallen gebeurt op de klassieke manier. (Eudoxos van Cnidus heeft al in de oudheid laten zien dat  $a/-b = -a/b$  en  $a/b \leq c/d \Leftrightarrow a \times d \leq b \times c$ ) Deze kunnen we tussen de natuurlijke getallen ordenen door te postuleren dat  $a/1 = a$ . Het is spijtig dat Brouwer niet vertelt hoe rationale getallen zich verhouden tot de oerintuïtie van tijd.

### 3.3.2.2 Reële getallen

Vervolgens zijn de reële getallen aan de beurt. Dat zijn getallen zoals de uitkomst van de wortel van twee, wat wordt uitgerekend op 1.4142... - waarbij men zonder einde door kan gaan met de decimale expansie. Volgens Brouwer is een reëel getal gedefinieerd door een dergelijke oneindige expansie; een reëel getal is een reeks opeenvolgende rationale getallen, met de restrictie dat elk volgend getal minder mag afwijken van deze dan deze van de vorige. In het geval van het decimale getallenstelsel is dit gemakkelijk te verwezenlijken door telkens een cijfer aan de decimale ontwikkeling toe te voegen.<sup>7</sup> Brouwers definitie is echter meer algemeen en daardoor onafhankelijk van onze toevallige decimale representatie van reële getallen.

Met behulp van deze visie kan nu het continuüm (in de tweede interpretatie) vorm worden gegeven. Dit doet Brouwer met behulp van het begrip ‘spreiding’, dat uit de bovenstaande definitie van reële getallen te destilleren is. Voor een eindig beginsegment van een dergelijke reeks rationale getallen is er een bereik aan reële getallen die erdoor gedefinieerd kunnen worden. (Dit bereik is zo groot als aangegeven wordt door de restricties op de rationale getallen.) Daarom geeft een spreiding een lijnstuk in plaats van een punt; het is de mogelijkheid van een oneindig aantal punten binnen een bereik. Als zodanig constitueert zij de lijn van het continuüm.

---

<sup>7</sup> Een eindig decimaal getal is eenvoudig te lezen als een rationaal getal, met als noemer een één met hetzelfde aantal nullen als er cijfers achter de komma staan en als teller het decimale getal, zonder de komma. Zo wordt 1,23 gelezen als het rationale getal 123/100.

### 3.3.2.3 Keuzevrijheid

Hierboven hebben we reële getallen besproken aan de hand van het voorbeeld van de wortel van twee. Er zijn echter veel meer reële getallen dan berekend kunnen worden. Daarom introduceert Brouwer het begrip ‘keuzerij’, dat gefundeerd is in de vrije wil. Een keuzerij is een reëel getal waarbij elk volgend rationaal getal gekozen wordt door vrije wil, in tegenstelling tot een wet of berekening. Hierdoor worden de reële getallen niet beperkt tot berekenbare getallen.

Dit begrip kunnen we gebruiken om het continuïteitsbeginsel te funderen: als we een eigenschap kunnen concluderen over een keuzerij, dan is dit geconcludeerd na de constructie van de eerste  $n$  aantal decimalen in de ontwikkeling ervan en dus geldt deze eigenschap voor elke keuzerij dat hetzelfde beginsegment heeft. We kunnen echter een groter beginsegment hebben gecreëerd dan nodig was om de eigenschap te concluderen, dus het segment waarvoor de beide reële getallen overlap hebben hoeft niet precies dezelfde grootte te hebben als het beginsegment van de initiële keuzerij. Dit beginsel kan geformaliseerd worden als:

$$\forall \alpha \exists n \forall \beta \in \alpha(n) A(\beta, n) \rightarrow \forall \alpha \exists m \exists n \forall \beta \in \alpha(m) A(\beta, n)$$

waarbij  $A(\alpha, n)$  staat voor de constructie van de eigenschap  $A$  na  $n$  decimalen en  $\beta \in \alpha(m)$  staat voor de overlap voor de eerste  $m$  decimalen (Iemhoff, *Intuitionism in the Philosophy of Mathematics*, 2009).

Dit beginsel geldt in eerste instantie voor keuzerijen en niet voor reële getallen in het algemeen; het is voorstelbaar dat een eigenschap van een getal geconcludeerd kan worden aan de hand van een berekening, in plaats van het beginsegment van de decimale expansie. Zo kunnen we bijvoorbeeld van de uitkomst van de wortel van twee zeggen dat het de eigenschap ‘is de wortel van twee’ heeft, zonder dat er een ander reëel getal (met hetzelfde beginsegment) deze eigenschap heeft.

### 3.4 De wet van de uitgesloten derde

Met het bovenstaande continuïteitsbeginsel en keuzerijen kunnen we een tegenvoorbeeld formuleren voor de wet van de uitgesloten derde ( $A \vee \neg A$ ). Laat  $A$  de stelling zijn dat een reëel getal  $x$  het getal ‘precies nul’ geeft. Laten we concreter zijn; laat  $A$  de stelling zijn dat een keuzerij  $x$  (bepaald door vrije wil) equivalent is met een reeks  $y$  van rationale getallen die bepaald zijn door de wet dat elk rationaal getal nul<sup>8</sup> is. In dat geval kan  $y$  gepresenteerd worden met een decimale expansie waarvan elk cijfer een nul gaat zijn. Dit geval van de wet van de uitgesloten derde kan algemeen gesteld worden als “een keuzerij representeert ‘precies nul’ of niet.” Het kan geformaliseerd worden als:

$$\forall \alpha (\forall n \alpha(n) = 0 \vee \neg \forall n \alpha(n) = 0)$$

waarbij  $\alpha(n)$  staat voor het  $n$ -de cijfer in de decimale expansie van  $\alpha$ . (Iemhoff, *Intuitionism in the Philosophy of Mathematics*, 2009)

Stel nu dat we deze bewering kunnen bewijzen en dat  $x$  ‘precies nul’ is. Dan hebben we deze eigenschap kunnen concluderen naar de constructie van een eindig beginsegment. Ons continuïteitsbeginsel zou dan vervolgens betekenen dat we ook een andere keuzerij kunnen creëren (met slechts het beginsegment hetzelfde) waarvoor de eigenschap van ‘precies nul’ zijn

---

<sup>8</sup> Eigenlijk:  $0/1$ , omdat de equivalentie met het natuurlijke getal nul een extra stap is.

ook geldt. Dan zouden we dus een keuzerij hebben, waarvoor de decimale expansie een beginsegment met louter nullen heeft, gevolgd door een willekeurig cijfer, bijvoorbeeld 1, en daarvan zouden we concluderen dat elk cijfer in de decimale expansie een nul is. Dit is absurd, omdat de gekozen 1 dan gelijkgesteld wordt aan een nul.<sup>9</sup> De hypothese van de wet van de uitgesloten derde eindigt in een absurditeit. Dit voorbeeld is daarom een weerlegging van de wet van de uitgesloten derde.

### 3.5 Equivalentie

Equivalentie is volgens Brouwer een relatie en vormt samen met een van zijn argumenten een predicaat. Hij dient daardoor voor verschillende wiskundige objecten verschillend gedefinieerd worden. Aangezien de reële getallen worden gedefinieerd aan de hand van de natuurlijke getallen, zal ook equivalentie als eerste voor de natuurlijke getallen gedefinieerd moeten worden.

Omdat het creëren van een natuurlijk getal een act is, levert elke dergelijke act een nieuwe instantie van het getal. We hebben een methode nodig om een dergelijke simpele equivalentie tussen verschillende instanties van 'hetzelfde' getal te kunnen concluderen. Om dit te doen dient volgens Brouwer geabstraheerd te worden van de arbitraire tijd waarop de creatie plaatsvond en de manier waarop die plaatsvond. Dit abstractum kan vervolgens "ingepast" worden in een andere constructie van tweeheid en zo wordt de equivalentierelatie tussen de twee gevormd. (van Stigt, *Brouwer's Intuitionism*, 1990, p. 342)

Voor reële getallen en andere wiskundige complexen, wordt equivalentie verkregen simpelweg d.m.v. het doorlopen van de wiskundige structuur van twee dergelijke objecten en alle elementen op equivalentie te testen. Bij twee reële getallen hoeven we volgens Brouwer dus slechts door de reeksen rationale getallen te lopen en te kijken of de overeenkomstige rationale getallen equivalent zijn. (Voor de equivalentie van twee rationale getallen hoeven we natuurlijk slechts de noemers en de tellers te vergelijken, van de twee rationale getallen in vereenvoudigde vorm.)

Brouwer lijkt er hier vanuit te gaan dat de restricties op de twee keuzerijen strikt zijn geformuleerd en voor beide reële getallen hetzelfde zijn. Hij lijkt uit te gaan van het decimale getallenstelsel, waarbij twee getallen alleen gelijk zijn als elk opeenvolgend cijfer gelijk is.<sup>10</sup> Het is echter mogelijk dat twee keuzerijen (met minder restricties) met een verschillend beginpunt naar hetzelfde punt toe convergeren - dat na een verschillend beginsegment de twee keuzerijen hetzelfde zijn. Omdat een keuzerij echter geen einde kent, is het onmogelijk om equivalentie ervan te concluderen. Dit kunnen we echter wel doen met spreidingen, gezien hun eindige karakter.

Een oplossing voor de fout die Brouwer hier maakt, is een notie te introduceren die tegengesteld is aan wat hij noemt apartheid. Twee reële getallen zijn dan identiek, wanneer op elk moment de restricties op de twee rationale getallen een overlap geven. Dit zal later in de scriptie duidelijke worden, wanneer ik apartheid zelf bespreek.

---

<sup>9</sup> Voor een bespreking van de absurditeit hiervan, zie §3.10.

<sup>10</sup> "Twee spreidingen [...] worden equivalent of identiek genoemd als voor elk element van de ene een equivalent elementen van de andere aangewezen kan worden." ((Brouwer, *Berliner Gastvorlesungen – Intuitionisme*, 1927) geciteerd in (van Stigt, *Brouwer's Intuitionism*, 1990, 343))

Een complexere vorm van equivalentie betreft een formule als ' $13 = 6 + 7$ '. In een dergelijk geval wordt er gebruik gemaakt van het eerder genoemde 'inpassen'. Brouwer zegt in zijn proefschrift: "Zoo leze men in de formule ' $13 = 6 + 7$ ' de herinnering aan het inpassen in een groep waarlangs men tot 13 kan tellen van een groep bestaande uit de juxtapositie van een groep waarlangs men tot 6, en een waarlangs men tot 7 kan tellen."<sup>11</sup> (Brouwer, *Over de grondslagen der wiskunde*, 1907, p. 177)<sup>12</sup> De structuur van 6 en 7 kunnen we inpassen in die van 13.

### 3.6 Eigenschappen en verzamelingen

Andere eigenschappen dan die van equivalentie worden op een soortgelijke manier gecreëerd. Het concept 'eigenschap' heeft veel te maken met het concept 'verzameling': alle entiteiten met een bepaalde eigenschap vormen namelijk een verzameling. Brouwer definieert verzamelingen als de "samenvatting" van een aantal wiskundige entiteiten, die aan een (logisch) predicat voldoen.<sup>13</sup> De verbinding van deze entiteiten is een directe toepassing van de oerintuïtie van tijd.

Verzamelingen zijn echter niet goed bruikbaar voor de intuïtionistische filosofie: het concept impliceert een afgesloten geheel, terwijl bijvoorbeeld de oneven getallen geen einde kennen. Als zodanig kan de verzameling ervan niet geconstrueerd worden. In plaats daarvan spreekt Brouwer van soorten.

Een soort is volgens Brouwer slechts de eigenschap, alhoewel hij blijft spreken van de elementen van een soort. Een soort is een deel dat van een gehele constructie geabstraheerd wordt en waarvan het veronderstelbaar is dat we het kunnen inpassen in andere constructies. De essentiële ingrediënten van een soort zijn daarmee: de *abstractie* van een deelconstruct uit een wiskundige entiteit, de *hypothese* van het kunnen inpassen van dit abstractum in een ander construct en het daadwerkelijke *inpassen*. Deze procedure kan vervolgens worden toegepast op reeds gecreëerde wiskundige entiteiten om te kunnen concluderen of ze 'element van' de soort zijn of niet.

De soort 'oneven getallen' wordt inhoud gegeven door van een specifiek oneven getal de structuur te abstraheren: een aantal keer twee elementen en een keer één. Vervolgens proberen we dit abstractum in te passen in een aantal reeds geconstrueerde natuurlijke getallen en concluderen we van elk oneven getal daarvan dat het abstractum erin past en dus dat de eigenschap oneven ervoor geldt - dat het tot de soort oneven behoort.

Het hier gegeven concept van een soort blijkt niet in overeenstemming te zijn met het beginsel van constructiviteit: "in a construction of mathematics, restricted to progressively and sequentially building upwards there would be no room for hypothesis nor for 'absurdity' [c.q. negation]." (van Stigt, *Brouwer's Intuitionism*, 1990, p. 336) Het mechanisme, dat omschreven wordt met de stappen abstractie, hypothese en inpassing, heeft Brouwer echter op een

---

<sup>11</sup> Voor de leesbaarheid is dit citaat in één regel geplaatst, in plaats van de formule op een aparte regel te plaatsen, en zijn er enkele aanhalingstekens aan de formule toegevoegd voor correctheid.

<sup>12</sup> Brouwer spreekt hier van een herinnering, omdat hij van mening is dat het opschrijven van een constructie geen pure wiskunde is; als we een formule voor onszelf opschrijven is dit alleen om een reeds uitgevoerde constructie te herinneren.

<sup>13</sup> Deze definitie voldoet aan Brouwers eerdere visie op verzamelingen, zoals hij die voor 1917 heeft geformuleerd. (van Stigt 1990, 305) Deze visie stelt hij dan bij en vervangt hem door een theorie over soorten, zoals hieronder uitgelegd zal worden.

constructieve manier gedefinieerd. De hypothese-stap bestaat daarom alleen uit het genereren van de mogelijke manieren waarop een deel construct kan ingepast worden in een wiskundig object van de betreffende soort, waardoor speculatie over objecten wordt vermeden.

Dit proces zal nader toegelicht worden in §2.10 en volledig worden uitgewerkt §4.5.1, omdat een oordeel over in hoeverre Brouwers theorie in overeenstemming is met zijn constructiviteitsbeginsel aan de orde is voor een vergelijking tussen Griss en Brouwer.

### 3.7 Wetenschap en werkelijkheid

Tot dusverre zijn de grondbeginselen van de pure wiskunde en uitwerkingen daarvan besproken. Om Brouwers visie op het *a priori* nog beter in beeld te krijgen zullen nu een aantal andere gebieden besproken worden die Brouwer, voor sommigen enigszins onverwacht, als *a posteriori* bestempelt: wetenschap, sommige vormen van wiskunde en logica.

Brouwer stelt in eerst instantie wetenschap gelijk aan de buitenwereld van het subject. Dit wordt verkregen door toepassing van wiskunde op de aanschouwingen. Als zodanig is Brouwers visie een panmathematisme: wiskunde is alom 'aanwezig' in de buitenwereld. Op zichzelf zijn de aanschouwingen vormeloos; het is het subject dat hier, door middel van wiskunde, objecten en causale relaties in ziet. We kunnen daarom in Brouwers terminologie zeggen dat 'het subject de buitenwereld creëert'. Het staat daarmee in contrast met wetenschappelijk realisme, dat Brouwer hekelte. (van Stigt, *Brouwer's Intuitionism*, 1990, pp. 275-85)

### 3.8 Logica

Brouwers visie op de logica is gedurende zijn leven veel veranderd, wat voor een groot deel veroorzaakt werd door de ontwikkeling die logica zelf heeft doorgemaakt. Gedurende zijn leven is Peano met zijn rekenkunde gekomen, Russell en Whitehead met de *Principia Mathematica*, Hilbert met de 23 onopgeloste problemen van de wiskunde, etc. De traditionele Aristotelische logica, die een aantal redeneervormen als 'de juiste' voorlegde, begon halverwege de 19e eeuw te verdwijnen. Tot die tijd betrof logica voornamelijk de vorm van zinnen die algemeen aanvaarde redeneringen uitten.

Brouwers visie is gestoeld op deze vroegere traditie. Hij ziet de logica als een discipline die totaal los van wiskunde staat; het is de studie die wetten probeert te vinden in talige redeneringen.<sup>14</sup> Als zodanig is het een *a posteriori* wetenschap; het bestudeert de wetten van geuite taal: syllogismen.

Onder invloed van de ontwikkeling van een logische calculus, verbreedt hij dit begrip, zodat ook bijvoorbeeld propositielogica eronder zou kunnen vallen. Wetenschap van taal blijft echter nietig; het levert geen kennis over de geest of over de buitenwereld, terwijl het dat soms wel lijkt te pretenderen.

---

<sup>14</sup> Dit sluit aan bij de herkomst van haar benaming, die is afgeleid van het Griekse woord 'logos', dat een betekenis heeft die verwant is aan 'woord', maar ook aan 'rede'.

### 3.9 'Hogere orde' wiskunde<sup>15</sup>

Dit bredere begrip van de logica bevat echter meer dan alleen syllogismen en propositiologica; we kunnen bijvoorbeeld de taal van wiskundigen analyseren, om zo tot een wetenschap van de wiskunde te komen - een tweede-orde wiskunde. Het moet echter benadrukt blijven worden dat een dergelijke logica nog steeds a posteriori is en niet direct uit de geest voortvloeit. Een voorbeeld van een dergelijke tweede orde wiskunde wordt door Brouwer gegeven in zijn proefschrift: een deel van Peanos wiskunde.

Om tot een hogere orde wiskunde te komen moeten een aantal abstractiestappen uitgevoerd worden. De genetische hiërarchie, die uitmondt in hogere orde wiskunde, heeft als basis de intuïtionistische wiskunde. Vervolgens komt de talige uitdrukking daarvan: wiskundige geschriften. Daarna komt een wetenschap van deze wiskundige taal, waarbij echter talige bouwwerken vergezeld blijven van wiskundige bouwwerken. De volgende stap is abstractie: "Het niet meer denken aan een betekenis van de elementen der zo-even genoemde logische figuren[(bouwwerken)]; en het nabouwen van die figuren door een nieuw wiskundig systeem der tweede orde, voorlopig zonder taal, die het bouwen begeleidt" (Brouwer, *Over de grondslagen der wiskunde*, 1907, p. 173).

Deze stappen (het talig tot uiting brengen, de studie van de taal en abstractie van de betekenis) kunnen vervolgens herhaald worden. Zo kunnen we een derde orde logica krijgen, wat essentieel is aan Hilberts werk. Op deze manier kunnen we een steeds hogere orde wiskunde creëren, alhoewel er steeds minder verschillen zullen zijn tussen twee opeenvolgende wiskundige systemen. Het heeft dus weinig nut om nog een vierde orde wiskunde te creëren.

Een dergelijke logica, als wetenschap van wiskunde, kan volgens Brouwer erg interessant zijn. Het nut ervan is echter niet meteen duidelijk. In briefwisselingen tussen Brouwer en formele wiskundigen, is hij de ene keer enthousiast en de andere keer erg kritisch. Het hoofdargument tegen een wetenschap van wiskunde is gebaseerd op de feilbaarheid van taal.

### 3.10 De negatie

Willen we de negatie inbouwen in Brouwers constructivisme, dan moet het een eigenschap van een constructie zijn: wanneer we zeggen dat iets niet geldt, moet dat betrekking hebben op een constructie. Brouwer interpreteert  $\neg A$  als de onmogelijkheid van de constructie  $A$  - de constructie is dan absurd, oftewel "ongerijmd".

In de genetische hiërarchie van wiskunde komt de negatie pas vrij laat aan bod. Het is pas wanneer we stellingen doen - wanneer we iets van een wiskundige entiteit prediceren, dat de negatie een rol gaat spelen. De negatie is dus toepasbaar op predicaties.

Dit is te verklaren door de rol die Brouwer aan soorten toekent. Een soort genereert zijn elementen niet, maar geeft een open hypothese die op specifieke wiskundige entiteiten losgelaten kan worden. De negatie komt in het leven wanneer een dergelijke hypothese gefalsifieerd moet worden.

Dit gebeurt wanneer het inpassen van een deelconstructie in een ander constructie absurd blijkt. Omdat de deelconstructie (de eigenschap) en de geconstrueerde wiskundige

---

<sup>15</sup> Het begrip 'hogere orde' heeft in Brouwers filosofie een betekenis die verschilt van het hedendaagse begrip 'hogere orde'. De interpretatie van Brouwers begrip zou fout zijn, wanneer het wordt gezien als Brouwers interpretatie van het hedendaagse begrip. Het feit dat de benaming hetzelfde is, is puur toeval.

entiteit beide afgerond zijn, hebben ze een eindig karakter. Hierdoor zijn er altijd maar een eindig aantal mogelijkheden waarop het inpassen kan plaatsvinden. Wanneer we deze allemaal zijn afgegaan en geen inpassing is mogelijk gebleken, lopen we vast. We kunnen dan concluderen dat de hypothese absurd is, dat de eigenschap voor deze entiteit niet geldt. (Deze stap wordt soms zelfs de constructie van de onmogelijkheid genoemd.)

Hoe concluderen we echter dat een specifieke inpassing onmogelijk is? Zoals hierboven is getoond, gelukt een inpassing wanneer alle elementen van beide constructies in elkaar ingepast kunnen worden. Op deze manier reduceert absurditeit van complexe gevallen zich tot absurditeit van simpele gevallen.

De absurditeit van simpele gevallen, zoals  $1 = 2$ , is in Brouwers filosofie een directe inzichtelijkheid, die oerprimitief lijkt te zijn. Brouwer zegt niet veel over deze simpele vorm van absurditeit. Hij lijkt de notie voor lief te nemen. Andere uitdrukkingen die Brouwer in deze context gebruikt zijn: “het gaat niet”, “stuiten op een ongerijmdheid”, “incompatibiliteit”, “vastlopen”, etc. Hier wordt echter geen verdere inhoud aan gegeven; de fundamentele negatie zijn niet uitgewerkt.

### **3.11 Samenvatting**

Dit waren de voor deze scriptie belangrijkste elementen van het intuïtionisme van Brouwer. We hebben gezien hoe constructivisme, de oerintuïtie van tijd en wilsvrijheid inhoud geven aan de intuïtionistische wiskunde en hoe andere noties, die elementair zijn in de wiskunde, gefundeerd worden. Daarnaast hebben we gezien hoe Brouwer staat tegenover verschillende soorten formalismen, door de status van de logica en hogere orde wiskunde te bespreken. Alhoewel Brouwers filosofie in het algemeen een filosofie is die volledig en consistent volgt uit zijn fundamentele negatie, zijn er een aantal imperfecties aan te wijzen, zoals de (in §3.5 besproken) terugval op het decimale getallenstelsel en het ontbreken van een fundering van de negatie.

## 4. Grissiaans *a priori*

Om een Grissiaans *a priori* op te bouwen, moet het in overeenstemming zijn met Griss' eigen opvattingen. Een groot deel van Griss' werk is van formeel wiskundige aard en betreft niet de filosofische achtergrond van zijn denkbeelden. Zijn grootste filosofische werk, *Idealistische Filosofie* (1946), besteedt weinig inkt aan het *a priori* van het verstand: wiskunde. Bovendien is deze scriptie groter in omvang dan al het filosofische werk van Griss tezamen. Daarom zal een groot deel van de opbouw van een Grissiaans *a priori* moeten bestaan uit het versmelten van de twee filosofieën (van Bolland en Brouwer) die hem het meest hebben beïnvloed op een manier die niet in zijn werk terug is te vinden. Natuurlijk is Griss ook beïnvloed door andere filosofen. Daarom lijkt zijn filosofie op sommige punten af te wijken van een pure versmelting van de twee filosofieën besproken in de vorige twee hoofdstukken. Op die punten zal ik de verhouding tussen uitingen van Griss en zijn twee belangrijkste voorgangers bespreken en duidelijk maken dat de pure versmelting niet incompatibel is met Griss' filosofie.

De versmelting tussen Bolland's en Brouwer's filosofie tot een Grissiaans *a priori* is te zien als het invoegen van Bolland's idealistische fundament in Brouwer's intuïtionistische wiskunde. Dit fundament heeft implicaties voor enkele noties van het intuïtionisme. Griss' uitbanning van de negatie uit de wiskunde is hier echter *niet* een van; zij volgt uit het constructivistisch beginsel wat fundamenteel is aan het intuïtionisme. De uitbanning hoort toch thuis in de versmelting, omdat een versmelting van twee filosofieën de opbouw van een *coherente* filosofie is uit elementen van de twee.

Dit hoofdstuk zal eerst Griss en de inhoud die hij aan de term '*a priori*' toekent bespreken. Vervolgens zal het de primaire aanschouwingsvorm van het Grissiaanse *a priori* beschrijven: hoe deze bij Griss er uitziet en de verhouding ervan tot die bij Bolland en Brouwer. Daarna zal de status van de werkelijkheid en abstractie in het Grissiaans *a priori* besproken worden. Uiteindelijk zal de negatie behandeld worden - de incompatibiliteit met het beginsel van het constructivisme, Brouwer's 'oplossing' hiervoor, de noties die veranderd moeten worden door de uitbanning van de negatie en de noties die de negatie van Brouwer's komen te vervangen.

### 4.1 Griss

Zoals hierboven vermeld zal dit hoofdstuk eerst Griss en de inhoud die hij aan de term '*a priori*' toekent bespreken.

#### 4.1.1 Het leven van Griss

George François Cornelis Griss (1898 – 1953) studeerde wiskunde aan de Amsterdamse universiteit, waar hij o.a. les kreeg van Brouwer. In 1925 promoveerde hij met een proefschrift over differentiaalvarianten van stelsels vectoren. (Griss, *Differentialinvarianten von Systemen von Vektoren*, 1925) Zijn geschriften kunnen opgedeeld worden in twee perioden, op basis van onderwerp: aan de ene kant schreef hij over bovengenoemde differentiaalvarianten, waarover hij een aantal artikelen publiceerde in de jaren 1930 - 1936 en aan de andere kant over de negatieloze wiskunde waarover hij publiceerde in de jaren 1944 - 1951. (Heyting, *Over de betekenis van het Wiskundig werk van G. F. C. Griss*, 1953)



#### 4.1.2 Griss' *a priori*

Zoals de inleiding al heeft door laten schemeren, betreft dit hoofdstuk het *verstandelijk a priori* van Griss en niet zijn gehele theorie over het *a priori*. Tegenover het verstand staat de rede. Griss' theorie over het *a priori* van de rede is niet verbonden aan de in deze scriptie besproken filosofie van zijn voorgangers - het staat er zelfs totaal los van. Dit betekent echter niet dat zijn theorie van het *a priori* in dit opzicht afwijkt van de twee besproken filosofische systemen. Zijn introductie van de rede betreft een nieuwe manier van denken: 'het mystieke denken'. Hij verandert niet het concept van het *a priori*, maar introduceert een geheel nieuwe vorm van denken, die ook vòòr de waarneming kan plaatsvinden. De bij Bolland en Brouwer besproken categorie van het *a priori* wordt dus niet aangetast; hij wordt slechts aangevuld met het mystieke denken. Om de frictie tussen Griss en zijn voorgangers op te lossen, kan de term 'het *a priori*' bij Bolland en Brouwer vervangen worden door de term 'het *verstandelijk a priori*'. In plaats daarvan kies ik ervoor Griss' *verstandelijk a priori* aan te duiden met de term '*a priori*' en zal ik het mystieke denken niet verder uitwerken.

#### 4.2 De aanschouwingsvorm van eenheid en splitsing

Gelijk Bolland spreekt Griss over de primitieve fundamenteen eenheid en splitsing. "*In het [zelf]bewustzijn beseft het 'ik' een splitsing tussen zichzelf en het andere (subject en object) en daardoor de eenheid van beide. ... Het 'ik' neemt een object waar en beseft (ziet in of begrijpt), dat dit slechts mogelijk is op grond van een splitsing tussen subject en object*". (Griss, *Idealistische Filosofie*, p. 14) De twee fundamentele noties 'eenheid' en 'splitsing' worden als eerste hier genoemd - in verband met het zelfbewustzijn - wat suggereert dat de splitsing tussen subject en object voorafgaat aan splitsingen tussen twee objecten. In het bovenstaande citaat verwijst 'het object' echter naar het waargenomen object. De hier besproken splitsing is dus de scheiding tussen het 'eigenlijke' subject en de aanschouwingen. Dit zijn de twee hoofdcategorieën van de bewustzijnsstroom (die ook 'het subject' genoemd zou kunnen worden). Door splitsing gaat deze op in subject en object, die door vereniging weer erin opgaan. "Door het eenheidsbesef verliezen subject en object hun scherpe begrenzing, ze worden opgenomen in een bewustzijnsstroom." (Griss, *Idealistische Filosofie*, p. 15)

Dat de splitsing tussen het subject en object voorafgaat aan splitsing tussen twee objecten zien we niet terug in Bolland's filosofie. Als deze 'voorafgang' zou plaatsvinden in de genetische hiërarchie van het *a priori*, dan zou er afgeweken worden van Bolland's en Brouwer's filosofie, aangezien bij hen het scheiden van objecten primair is. We kunnen de voorafgang beter interpreteren als een (mogelijkheids-)voorwaarde voor kennis van de structuur van het bewustzijn. Dit is totaal in overeenstemming met het feit dat er in het citaat verwezen wordt naar het zelfbewustzijn. Het citaat vertelt ons dan dat de splitsing tussen subject en object de eerste stap is naar een begrip van het ego. Op deze manier is het standpunt niet in conflict met Bolland's filosofie, maar is het een toevoeging eraan.

##### 4.2.1 Onvolledigheid van splitsing en vereniging

Een essentiële eigenschap van splitsing en verbinding is dat ze nooit volledig zijn. "De splitsing is geen absolute scheiding, de eenheid geen ongebrokenheid." (Griss, *Idealistische Filosofie*, p. 14) Dit is begrijpelijk gezien de Bollandiaanse achtergrond; ook in die filosofie zagen we de onvolledigheid van scheiding: aan zijn grens gaat iets in iets anders over. Dit zien we ook terug

in Griss' primaire "splitsing tussen subject en object, waarbij [...] het object niet los van het subject komt, maar ermee verbonden blijft, zo zelfs dat er geen scherpe grens tussen beide is en ze in een eenheid opgaan. Geen object zonder subject en geen subject zonder object; ze zijn onverbrekkelijk met elkaar verbonden, op elkaar betrokken." (Griss, *Idealistische Filosofie*, 1946, p. 14)

Deze onvolledigheid van scheiding is volgens Griss essentieel voor het bedrijven van wiskunde. Hij zorgt ervoor dat we objecten kunnen vergelijken, samen kunnen voegen in een verzameling etc. Een volledig afgescheiden object zou dan hermetisch zijn afgesloten van enige interactie. Elke interactie tussen twee objecten is een verbinding, die de scheiding tussen die twee objecten onvollediger maakt.

In tegenstelling tot Brouwer, is voor Griss dit ook de oorzaak van de niet-exactheid van wiskundig denken - van het maken van fouten. "Juist dáár de scheiding niet volledig is, is het wiskundige denken mogelijk, maar is ook het maken van fouten, d.w.z. het niet-meer-onderscheiden onvermijdelijk." (Griss, *Idealistische Filosofie*, p. 23) Hoe complexer de wiskundige bouwwerken, hoe meer onderscheidingen, des te meer vaagheid, tot op het punt dat men onderscheidingen niet meer kan handhaven. (Franchella, *Brouwer and Griss on Intuitionistic Negation*, 1994, p. 264) Bij Brouwer was de oorzaak juist de feilbaarheid van taal en het herinneringsvermogen. Aangezien Griss zich hier duidelijk tegen Brouwer opstelt, kan men twijfelen aan de mogelijkheid van een versmelting tussen Brouwers en Bolland's filosofie. Het is echter goed voor te stellen dat zowel de onvolledigheid van scheiding als de genoemde feilbaarheden bijdrage aan het maken van fouten. Deze tegenstelling tussen Griss en Brouwer hoeft dus niet opgenomen te worden in de versmelting en staat hem daarom niet in de weg.

#### **4.2.2 Wiskunde en mystiek**

De twee primaire geestesacten brengen volgens Griss twee manieren van denken voort: het verstandelijk of wiskundig denken, dat werkt met "zo scherp mogelijke scheidingen der objecten", en het mystieke denken, "waarin het besef der eenheid overheerst". (Griss, *Idealistische Filosofie*, p. 15) De aanvaarding van de mystiek is een weinig voorkomend fenomeen in de westerse filosofie. Griss verbindt de mystiek aan oosterse filosofie en religie. Op deze manier wordt rekenschap gegeven van een manier van denken, die vaak buiten beschouwing wordt gelaten.

De twee manieren van denken zijn echter niet de enige; waar mystiek alleen naar eenheid kijkt en wiskunde alleen afgezonderde elementen, laat het wijsgerig of volledig denken beide denkwegen zijn zo intensief mogelijk tot ontwikkeling komen. Wijsbegeerte beschrijft de manier waarop het object en subject verbonden worden (Franchella, *Negation in the Work of Griss*, 1995, p. 30) en maakt daardoor de verhouding tussen wiskunde en mystiek duidelijk.

#### **4.2.3 Eenheid, splitsing en de oerintuïtie van tijd**

Het hier uiteengezette fundament, dat ons het elementaire vermogen tot splitsen en verenigen geeft, is vrij simpel verenigbaar met Brouwers intuïtionisme, dat in plaats van dat fundament de oerintuïtie van tijd heeft. Het verschil tussen de twee fundamenten is dat het fundament, dat Bolland Griss levert, alleen het vermogen tot splitsen en verenigen geeft, terwijl de oerintuïtie van tijd ook het idee van vloeibaarheid (wat essentieel is voor het continuüm) en van herhaling geeft. Dat de Bollandiaanse intuïtie van splitsen en verenigen ook in Brouwers tijdsintuïtie terug

is te vinden, is te zien aan zijn gebruik van de term 'eenheid in veelheid'. Het idee van vloeibaarheid is bij Bolland niet apart gegeven; in plaats daarvan is het verweven met zijn kijk op scheidingen, dat (in Griss' terminologie) altijd onvolledig is. Herhaling is bij Bolland geen primitieve notie; in plaats van herhaling van één en dezelfde act, zal Bolland de identiteit tussen twee acten moeten vaststellen.

Het is een misverstand te denken dat de betrekking van de oerintuïtie op tijd zorgt voor een duidelijk verschil met Bolland primitieve intuïtie. Dat Brouwers intuïtie de 'tijdsintuïtie' wordt genoemd, verandert weinig aan de status van deze intuïtie binnen zijn filosofie. Deze naamgeving komt voort uit het feit dat Brouwers filosofie in eerste instantie een reductie was van Kants aanschouwingsvormen, waarbij alleen de aanschouwingsvorm van tijd overbleef. In Brouwers werk is echter niets te vinden wat zijn oerintuïtie een zelfde status zou geven als de aanschouwingsvorm van tijd bij Kant, in de zin dat die ons het idee zou geven van tijd zelf.

De vereniging van de primitieve intuïties van Bolland en Brouwer is in die zin simpel dat Brouwers oerintuïtie de functies splitsen en verenigen al omvat. Wanneer we vervolgens, Griss volgend, de onvolledigheid hiervan introduceren, geeft dit ons een natuurlijke interpretatie van het Bollandiaanse begrip 'verkeren', wat dan ook het idee van vloeibaarheid bevat. Op deze manier, wanneer we de onvolledigheid van splitsing introduceren, sluit de oerintuïtie van tijd volledig aan bij Bolland's centrale begrippenkader en voegt het daaraan slechts het idee van herhaling toe.

### 4.3 Idealisme en de werkelijkheid

Alle drie de filosofieën, van Griss, Bolland en Brouwer, zijn idealistisch te noemen in drie opzichten. Ze zijn ten eerste alle drie tegengesteld aan een realisme, waarin het object in afzondering van het subject centraal staat; het ding is niet op zichzelf, maar altijd 'geïnformeerd' door de structuur die het verstand eraan oplegt. Ten tweede vindt wiskunde volgens alle drie plaats in de geest.<sup>16</sup> Ten derde is ook de "volledige erkenning van een a priori" een reden om de filosofieën idealistisch te noemen volgens Griss. (Griss, *Idealistische Filosofie*, p. 13)

Aangezien de werkelijkheid bij Bolland en Brouwer een construct is, dat gevormd wordt door toekenningen van het verstand aan de aanschouwingen, zou de versmelting van hun twee theorieën deze stelling overnemen. Alhoewel Griss ook meent dat wetenschap bestaat uit systematische toepassing van wiskunde op de aanschouwingen<sup>17</sup>, wijkt zijn visie op de werkelijkheid aanzienlijk af van die van Bolland en Brouwer.

Een reden hiervoor is Griss' aanvaarding van de mystiek en de rede. De werkelijkheid bestaat dan wel uit *a priori* toekenningen aan de aanschouwingen, maar omdat het *a priori* niet alleen uit wiskundig verstand bestaat, maar ook uit rede, kunnen we niet zeggen dat de werkelijkheid wordt gevormd door toekenningen van alleen maar het wiskundig verstand. Het is ook om deze reden dat Griss een panmathematisme afwijst. Aangezien de acceptatie van de mystiek en de rede al slechts een toevoeging bleek op de pure versmelting tussen Bolland's en

---

<sup>16</sup> Alhoewel Bolland de wiskunde niet bespreekt in zijn boek *De Logica*, is het veilig om aan te nemen dat ook in zijn filosofie de wiskunde in de geest plaatsvindt, aangezien hij de logica ook in de geest zetelt.

<sup>17</sup> Dit geldt voor alle wetenschappen en niet alleen de wetenschappen die werken met wiskundige formules; "Dat de wetten der natuur in wiskundige formules, de resultaten der andere wetenschappen in 'begrippen' worden weergegeven, is slechts een gradueel verschil." (Griss, *Idealistische Filosofie*, p. 26)

Brouwers filosofie, is ook de opvatting dat de werkelijkheid meer omvat dan alleen verstandelijke toekenningen slechts een uitbreiding en geen afwijking.

Griss' visie op de werkelijkheid heeft nog een ander aspect, dat niet verenigbaar *lijkt* met die van Bolland en Brouwer, dat ook doet twijfelen aan de idealistische status van Griss' filosofie. Onder invloed van Berkeley accepteert Griss "een opsomming van *kenmerken, naar welke de realiteitsverschijnselen van alle andere (bewustzijns)verschijnselen worden onderscheiden*. Zij zijn sterker, levendiger en scherper, vertonen meer vastheid, orde en samenhang in zijn niet naar willekeur op te wekken." (Griss, *Idealistische Filosofie*, p. 57) Het zal onder deze invloed zijn geweest, dat Griss de realiteit karakteriseert als een "complex van ervaringen [die] een zekere duur en regelmaat vertoont" (Griss, *Idealistische Filosofie*, p. 16). Dit doet het lijken dat Griss van mening is dat er een structuur in de werkelijkheid zit die wij eruit kunnen halen, wat een realistische kijk op de wiskunde zou impliceren. Het betreft hier echter het onderscheiden tussen werkelijkheid enerzijds en fantasie, droom etc. anderzijds. Van de toepassing van wiskunde op de aanschouwingen, selecteren we volgens bepaalde kenmerken een deel dat we als realiteit bestempelen. Op deze manier is de structuur in de werkelijkheid nog steeds van het subject afkomstig en blijft idealistische status van Griss' filosofie dus behouden.

#### 4.4 Concreetheid

In zijn filosofie spreekt Griss (in tegenstelling tot Brouwer) niet van het *geïdealiseerde* subject. Dat heeft te maken met zijn visie op abstractie en het daaruit volgende begrip van concreetheid. Volgens hem gaat het concrete vooraf aan het abstracte; het abstracte bestaat zelfs alleen in het concrete: het is "onmogelijk van alle inhoud te abstraheren, tenzij men hieronder juist verstaat, dat die inhoud onverschillig is (vgl. de kritiek van Berkeley op abstracte begrippen)." (Griss, *Idealistische Filosofie*, p. 22) Het idee van een abstractum kan dus alleen worden gevormd als we een idee hebben van een bepaalde concrete instantie die het abstractum met zich meebrengt.

Er kan daarom niet volledig geabstraheerd worden van de feilbaarheden van de mens. Elk mens is feilbaar en heeft zijn limieten; een abstract subject is daarom ook gelimiteerd. Men kan op een gegeven moment niet meer doortellen omdat het getal te groot wordt om te bevatten. Bovendien kan "het aangeven van een middel ter berekening in een eindig aantal stappen ... nietszeggend zijn, indien het aantal stappen te groot is." (Griss, *Idealistische Filosofie*, p. 23) Omdat elk subject andere limieten heeft is het onmogelijk aan te geven waar het abstracte subject niet meer verder kan. Griss gebruikt daarom Descartes' term '*in indefinitum*' in plaats van de term '*ad infinitum*' om een dergelijke limiet aan te duiden.

#### 4.5 De negatie

Griss' werk is vooral bestudeerd vanwege zijn visie op de negatie; vanwege zijn uitbanning van de negatie uit de wiskunde, geeft zijn filosofie en wiskunde een interessant systeem. Zijn visie op de negatie is grotendeels bepaald door de constructiviteitseis van het intuïtionisme. Toch wijkt zijn visie af van die van Brouwer.

Volgens Griss kunnen we alleen een helder begrip hebben van een wiskundig object, als we dat object hebben gecreëerd. "In overeenstemming hiermee is, dat *definiëren in principe synoniem is met construeren*". (Griss, *Idealistische Filosofie*, p. 69) Dit maakt het hypothetisch

redeneren onmogelijk; we kunnen niet de hypothese hebben dat er een object ‘bestaat’ met bepaalde eigenschappen, omdat die hypothese verwijst naar het object, dat we dan ook moeten hebben gecreëerd, waardoor de hypothetische status van de redenering vervalt. Daardoor moet ook de negatie vermeden worden, die in het leven zou worden geroepen wanneer een hypothetische redenering op absurditeit stuit. Volgens Griss is in de pure wiskunde een dergelijke hypothetische redenering en daarmee ook de negatie onmogelijk, omdat de hypothese verwijst naar een contradictoair en dus onconstrueerbaar object.<sup>18</sup>

Griss wijkt af van Brouwer, wat betreft de negatie, omdat Brouwers negatie-interpretatie nog teveel te maken heeft met hypothetische redeneringen. In de volgende subsectie zal de relatie tussen Brouwers negatie-interpretatie en het hypothetisch redeneren duidelijk gemaakt worden, om de status van Griss’ reactie op Brouwer duidelijk te maken.

#### 4.5.1 Brouwers constructieve interpretatie van de negatie

In Brouwers intuïtionisme is het object waarnaar verwezen wordt in de hypothese de inpassing van een deelconstruct in een wiskundig object. Toen Brouwer zich realiseerde dat het begrip van een hypothese niet verenigbaar is met het constructiviteitsbeginsel, corrigeerde hij in (Brouwer, *Addenda en corrigenda over de grondslagen der wiskunde*, 1917) het standpunt wat hij in zijn proefschrift geuit had. (van Stigt, *Brouwer’s Intuitionism*, p. 336) Hij ‘verving’ de hypothese van inpassing door een mechanisme waarin alle mogelijkheden van inpassing afgegaan zouden worden. Aan de hand van dit mechanisme zouden twee nieuwe eigenschappen worden gedefinieerd: element-zijn-van een soort en niet-element-zijn-van een soort, waarbij de eerste eigenschap geconcludeerd kan worden wanneer we een succesvolle inpassing hebben gevonden en de tweede wanneer we alle mogelijke inpassingen hebben gehad en zo ‘vastlopen’. Door het ‘vastlopen’ van het inpassingmechanisme te maken tot de bron van de negatie, vermijdt Brouwer hypothesen, waardoor de incompatibiliteit met het constructiviteitsbeginsel omzeild wordt.

Brouwers constructieve interpretatie van de negatie staat wankel. Bij het spreken over eigenschappen refereert Brouwer niet vaak naar bovengenoemde constructieve interpretatie en blijft hypothetische termen gebruiken, zoals ‘aannemen’, ‘denkbaarheden’ en natuurlijk ‘hypothese’. (Griss, *Negationless Intuitionistic Mathematics II*, 1954, p. 3) Het interpreteren van deze noties in het licht van Brouwers gecorrigeerde constructieve interpretatie verandert bovendien niets. (Vandaar dat het woord ‘verving’ in de vorige alinea tussen aanhalingstekens staat.) Wanneer we hypothesen wel zouden toelaten, zou het mechanisme, dat een wiskundig object op een eigenschap test, precies hetzelfde zijn als het mechanisme dat Brouwer voorstelt. Met dit inzicht bestaat Brouwers herdefiniëring van het wiskundige begrip hypothese slechts uit het wegcijferen van het natuurlijke begrip van hypothesen, dat logischerwijze juist de interpretatie van het mechanisme geeft.

Brouwer blijft echter hypothetische termen gebruiken, zonder naar zijn constructieve interpretatie daarvan te verwijzen. Dit is ook de oorzaak dat Heyting, in zijn formalisering van

---

<sup>18</sup> Natuurlijk komen dit soort hypothetische redeneringen wel voor, maar niet in de pure wiskunde. “Het stellen der problemen, het vragen naar oplossingen is een pre-mathematische werkzaamheid. ... Deze onderscheiding in pre-mathematische werkzaamheid en de eigenlijke wiskundige constructie loopt enigszins parallel met wat G. Bouligand noemt de ‘Sythèse globale S, à un certain instant’ en het terrein der constructies (construction des solutions).” (Griss, *Over de Negatie*, p. 98)

Brouwers intuïtionisme, de negatie ( $\neg$ ) en de falsum ( $\perp$ ) blijft gebruiken. Het feit dat Brouwer hypothetische termen blijft gebruiken maakt duidelijk dat het constructiviteitsbeginsel op wankel voet staat. Ook het aanhoudend gebruik van de negatie (bijv. in de term niet-element-zijn-van) en noties zoals ‘absurditeit’ en ‘vastlopen’ dragen bij aan deze zwakte in zijn filosofie. Het constructiviteitsbeginsel maakt wiskunde tot het “progressively and sequentially building upwards” (van Stigt, *Brouwer’s Intuitionism*, p. 336), waarin alleen (steeds complexere) waarheden/bewijzen/objecten voorkomen en dus geen hypotheses, onwaarheden of absurditeiten. Omdat de fundering van deze noties in het constructiviteitsbeginsel zwak is, staat het constructiviteitsbeginsel op wankel voet.

Gezien deze zwakte, kan Griss’ uitbanning van de negatie gezien worden als een verbetering van Brouwers filosofie van de negatie. Deze uitbanning schrapt echter een groot deel van wat als (pure) wiskunde gezien kan worden. Het zou jammer zijn als dit allemaal verloren gaat. Daarom introduceert Griss een positieve, constructieve notie voor ongelijkheid en voor soorten.

#### 4.5.2 Positief verschillen

We hebben reeds gezien dat Brouwer geen (goed) fundament geeft voor de negatie. In simpele gevallen, zoals het op elkaar en proberen te passen van 1 en 2, zegt Brouwer dat we simpelweg stuiten op een absurditeit, zonder daar verder over uit te weiden. Griss geeft wel een duidelijk fundament.

Laten we, voordat we Griss’ fundament van wiskundige ongelijkheid bespreken, zijn visie op (on)gelijkheid in het algemeen nader bekijken. Hier hoeven echter niet veel woorden aan verspild te worden; zijn visie is volledig in overeenstemming met Bolland’s filosofie van identiteit en differentie. De wet van identiteit, ‘ $A$  is  $A$ ’, geldt niet zonder meer, omdat objecten veranderlijk zijn. Een mooie toevoeging hierop geeft Griss door te verwijzen naar Heraclitus: “men kan geen twee keer door dezelfde rivier gaan” (Griss, *Idealistische Filosofie*, p. 12).

Griss definieert wiskundige identiteit en differentie ook op een manier die volledig compatibel is met Bolland’s filosofie. Griss fundeert de notie van verschillend-zijn in de differentierelatie tussen natuurlijke getallen; die zijn gedefinieerd met de wet van identiteit; voor een natuurlijk getal geldt dus per definitie ‘ $x = x$ ’. Om aan deze wet te voldoen moeten we dus (actief) elk getal aan zichzelf gelijk houden. Het geval van differentie is analoog: elk volgend natuurlijk getal is per definitie different aan alle vorige getallen, wat betekent dat we het getal actief moeten blijven onderscheiden van de vorige getallen. Op deze manier wordt de identiteits- en verschilrelatie tegelijk opgebouwd met de natuurlijke getallen.

Griss laat zien dat we, met deze notie, door middel van simpele inductie, voor een eindige verzameling natuurlijke getallen, kunnen laten zien dat de volgende eigenschappen gelden:

- I  $a = a$
- II  $a = b \rightarrow b = a$
- III  $a = b$  en  $b = c \rightarrow a = c$
- IV  $a \neq b \rightarrow b \neq a$
- V  $a = b$  en  $b \neq c \rightarrow a \neq c$
- VI  $a = b$  òf  $a \neq b$

VII  $a \neq c$  voor iedere  $c \neq b \rightarrow a = b$ <sup>19</sup> (Griss, *Idealistische Filosofie*, p. 67)

Deze fundering kunnen we vervolgens gebruiken om de (on)gelijkheid tussen complexere wiskundige objecten te definiëren. Voor elk soort wiskundige objecten moeten we een afzonderlijke (on)gelijkheidsrelatie definiëren. Zo kunnen we bijvoorbeeld van verzamelingen zeggen dat ze ongelijk zijn, wanneer we een element hebben gevonden uit een verzameling die ongelijk is aan alle elementen uit de andere verzameling. Een interessanter geval is de reële getallen.

Voor de reële getallen gebruikt Griss Brouwers<sup>20</sup> notie van apartheid.<sup>21</sup> Omdat een spreiding een afgekapt reëel getal is en een lijnstuk geeft in plaats van een punt, kunnen we een reëel getal zien als een convergerende reeks lijnstukken. We weten dan dat twee reële getallen apart liggen, wanneer we twee lijnstukken (van ieder één) hebben gevonden die geen overlap hebben. We concluderen dus dat twee reële getallen apart liggen, wanneer de restricties op twee rationale getallen in de twee reeksen ervoor zorgen dat de twee reeksen niet naar elkaar toe kunnen convergeren.<sup>22</sup>

Bij complexe wiskundige objecten gelden niet meer alle bovenstaande eigenschappen. In het bijzonder vervallen eigenschappen VI en VII. In het geval van reële getallen kunnen we echter de stelling VI ( $a = b$  of  $a \neq b$ ) vervangen; “er voor in de plaats komt: Is  $a \neq b$ , dan geldt voor ieder element  $c$  minstens één der relaties  $c \neq a$  of  $c \neq b$ .”

Het vervallen van stelling VI heeft natuurlijk veel te maken met de ongeldigheid van de wet van de uitgesloten derde. De overeenkomsten tussen deze stelling en die wet zullen duidelijk zijn. Omdat er in de stelling geen negatie voorkomt, maar er over twee verschillende relaties wordt gesproken, is de onhoudbaarheid van de stelling ( $aGb$  of  $aVb$ , waarbij  $G$  voor de gelijkheidsrelatie staat en  $V$  voor de verschilrelatie) direct in te zien.

#### 4.5.3 Soorten

Aangezien in Brouwers definitie van soorten een hypothetisch element voorkomt, dat geen constructieve basis heeft, moet Griss het begrip ‘soort’ herdefiniëren. Dit doet hij door het hypothetische element te vervangen door een zeker element. In plaats van soorten te definiëren

---

<sup>19</sup> Hierbij staat ‘ $\neq$ ’ voor het begrip ‘onderscheiden’ of ‘verschillend’. Voor een interpretatie van de connectieven ‘en’, ‘of’ en ‘ $\rightarrow$ ’, zie §4.5.3.1.

<sup>20</sup> Brouwers definitie van apartheid is o.a. terug te vinden in (Brouwer, *Die Struktur des Kontinuums* 1930).

<sup>21</sup> Dat Griss’ notie hier mee in overeenstemming is, volgt uit (Griss, *Idealistische Filosofie*, p. 68). Hier valt Griss echter expliciet terug op het decimale getallenstelsel, door het reële getal te identificeren met een rij cijfers. Dit valt echter te verklaren met dat dit boekje gericht is op zijn filosofie en niet zijn wiskunde, waardoor hij de wiskunde versimpeld heeft weergegeven. In een later artikel geeft Griss een definitie van reële getallen die geheel in overeenstemming is met die van Brouwer: (Griss, *Negationless Intuitionistic Mathematics III*, 1954, 3-6). Als we vervolgens deze verbetering van de definitie van reële getallen extrapoleren naar de definitie van apartheid, dan komt deze overeen met Brouwers apartheid.

<sup>22</sup> Het is interessant om op te merken dat Brouwer de non-equivalentie van ongelijkheid en apartheid bewijst in (Brouwer, *De non-aequivalentie van de constructieve en de negatieve orderrelatie in het continuum*, 1949). Griss bevestigt dit verschil, maar merkt op “dat van iedere twee reële getallen, waarvan bekend is dat ze niet gelijk zijn, ook bekend is, dat ze verschillen.” (Griss, *Idealistische Filosofie*, p. 68)

als eigenschappen die van wiskundige objecten verondersteld kunnen worden, spreekt Griss van eigenschappen waarvan we *weten* dat ze gelden voor wiskundige objecten. We moeten dus eerst een eigenschap hebben geconstrueerd, voordat we over de soort kunnen spreken.

Dit maakt dat we niet kunnen spreken van de nul-soort ( $\cong$  de lege ‘verzameling’). De nul-soort zou alleen worden gecreëerd door een eigenschap waar geen wiskundig object aan voldoet, maar dit maakt dat we niet weten dat de eigenschap geldt voor enig wiskundig object, waardoor we volgens bovenstaande definitie geen soort hebben. Bovendien kan een eigenschap gezien worden als een abstractie van een wiskundig object, waarvoor we dus een concrete instantie nodig hebben (zie §4.4). We kunnen dus geen eigenschap creëren, als we geen concreet object hebben waaruit we het kunnen destilleren. Daarom kunnen we ook niet altijd een soort creëren. Een gevolg hiervan is dat de doorsnede van twee soorten niet altijd een soort is. Griss accepteert deze enigszins obscure consequentie.

#### 4.5.3.1 Soorten en logische connectieven

Met dit begrip van soorten kunnen we inhoud geven aan de connectieven van de logica. Een stelling zoals ‘ $x$  is even of oneven, voor alle natuurlijke getallen’ interpreteren we als dat er een deelsoort van de natuurlijke getallen even is, een andere oneven en dat de natuurlijke getallen de vereniging van deze twee deelsoorten is. Op een vergelijkbare manier interpreteren we het logische connectief ‘en’ met behulp van de doorsnede van twee soorten. Ook de logische negatie wordt dan geïnterpreteerd met het complement: “Is  $a$  een echte deelsoort van een verzameling, dan kunnen we  $\neg A$  opvatten als de complementaire soort t.o.v. die verzameling.” (Griss, *Over de Negatie*, p. 101)

Zonder soorten en de operaties daarop, hadden we de dis- en conjunctie niet adequaat kunnen definiëren. Wanneer we  $A \vee B$  zouden interpreteren als dat  $A$  waar is of  $B$  waar is, komen we in de problemen. Laten we als voorbeeld nemen ‘ $x = 9 \vee x \neq 9$ , voor de natuurlijke getallen onder 10’. Laten we meteen het eerste getal proberen; dan krijgen we de stelling dat  $1 = 9$  waar is, of  $1 \neq 9$  waar is. Dit is vanuit Griss’ filosofie onacceptabel, omdat er de stelling  $1 = 9$  in voorkomt, terwijl die niet kan worden geconstrueerd.

In het artikel *Over de Negatie* komt de logische implicatie helaas niet aan bod. Alleen in het artikel (Griss, *Logic of Negationless Intuitionistic Mathematics*, 1954) wordt de logische implicatie besproken: “The *implication*  $p \rightarrow q$  will have its natural meaning:  $q$  follows from  $p$ ,  $p$  is true, so  $q$  is also true.” Waar deze implicatie in de standaard logica geïnterpreteerd wordt als een hypothetische redenering, die vertrekt vanuit de hypothese  $p$  (“als  $p$  dan  $q$ ”), is hij in Griss’ interpretatie een niet-hypothetische redenering, die vertrekt vanuit de *bewezen*<sup>23</sup> formule  $p$  (“ $p$ , dus  $q$ ”).<sup>24</sup>

---

<sup>23</sup> Deze visie is in overeenstemming met de visie die Franchella aan Griss toeschrijft in (Franchella, *Negation in the Work of Griss*, 1995, p. 34).

<sup>24</sup> De discrepantie tussen de manier waarop de implicatie en de andere connectieven worden geïnterpreteerd – het feit dat de implicatie als enig logisch connectief niet geïnterpreteerd wordt aan de hand van operaties op verzamelingen – valt buiten het bereik van deze scriptie. Op deze plaats zal een korte schets van de logica van Griss moeten volstaan. Er is veel literatuur te vinden over de formele logica en wiskunde van Griss – te veel om in deze scriptie adequaat te behandelen.



#### 4.5.4 Griss' negatiebegrip

We hebben nu gezien hoe een strikte behandeling van het constructiviteitsbeginsel leidt tot de verbanning van de negatie uit de pure wiskunde en hoe deze verandering ten opzichte van Brouwers filosofie doorwerkt in de definities van de fundamentele wiskundige constructies. We hebben echter nog niet gezien hoe de negatie *wel* geïnterpreteerd wordt (behalve het logische symbool  $\neg$ ).

Voordat we hieraan toe komen zal ik echter Griss' visie op Bolland's negatie bespreken. Griss wijst de interpretatie van de negatie als het tegendeel af. Dit doet hij omdat het tegendeel van een ding te contextafhankelijk is. Het hangt totaal van het subject op een bepaald moment af, waar de bewustzijnsstroom naartoe voert. Dit heb ik in de slotsom van het hoofdstuk over Bolland beschreven als een niet-gedetermineerd karakter. "Dit betekent, dat het begrip negatie ... varieert". Als negatie van een geheel getal kan men evengoed een breuk als een reëel getal nemen. "De negatie heeft hier slechts betekenis, als het binnen een bepaald systeem wordt toegepast. Dit systeem wordt niet door de negatie voortgebracht. We zien hieruit, dat het nemen van het tegendeel tot op grote hoogte willekeurig is, en sterk beïnvloed kan worden door het resultaat, dat men wil bereiken." (Griss, *Over de Negatie*, p. 104) Dit maakt het onhandig om met een dergelijk negatiebegrip te werken.

Griss' negatiebegrip komt noch van Bolland noch van Brouwer. Er is maar één interpretatie van de negatie, en die is hetzelfde voor de pre-mathematische bezigheid, wetenschap, filosofie en mystiek. Hiervoor verwijst Griss naar Bergson's *L'Évolution Créatrice* (1911).

Volgens Bergson is het denken in relatie tot de werkelijkheid altijd positief: "what is perceived is the *presence* of one thing or another, never *absence* of anything." (Bergson, *L'Évolution Créatrice*, 1911, p. 297) Het is pas wanneer het geheugen en de verwachting in het spel komen dat het negatieve begrip afwezigheid een rol gaat spelen. Het is wanneer we een (bekend) ding verwachten, dat we kunnen zeggen dat het er niet is. Dit doen we wanneer we een ander ding vinden dan we verwacht hadden. We concluderen een afwezigheid na een vergelijking tussen het verwachte en het actuele.

De uitspraak dat iets afwezig is, meer in het algemeen: de negatie van een uitspraak dat iets het geval is, betekent dus dat we dat geval verwacht hadden, of in ieder geval mogelijk achtten,<sup>25</sup> maar er iets anders het geval bleek te zijn (zonder te specificeren wat).  $\neg A$  betekent dan dat we  $A$  mogelijk achten, maar er iets anders het geval is. Hierdoor krijgt het een indirecte relatie met de werkelijkheid; wanneer  $A$  een directe positieve uitspraak is over de werkelijkheid, is  $\neg A$  een uitspraak over  $A$ , die zegt dat  $A$  vervangen moet worden door een ander geval (en in die zin is het affirmatie van tweede orde). Een ontkenning bestaat dus uit twee stappen: het mogelijk achten van een geval en het zeggen dat dit geval vervangen moet worden door een ander geval (zonder te specificeren welk geval).

Graag zou ik hier de ruimte nemen om een deel te citeren uit Bergson's boek, dat wat meer achtergrond voor zijn standpunt geeft en de connectie met Griss op een mooie manier weergeeft. Deze passage beschrijft hoe we tot ontkenningen komen, vanuit een geest die louter en alleen op de waarneming betrokken zou zijn:

---

<sup>25</sup> Deze enigszins plotselinge omslag van 'het verwachte' naar 'het mogelijke' vinden we ook terug in de geschriften van Bergson.

Endow this mind with memory, and especially with the desire to dwell on the past; give it the faculty of dissociating and of distinguishing: it will no longer only note the present state of the passing reality; it will present the passing as a change ... it will be at the point of representing a disappearance. But it will not yet have reached it. To represent that a thing has disappeared, it is not enough to perceive a contrast between the past and the present; it is necessary besides to turn our back on the present, to dwell on the past, and to think the contrast of the past with the present in terms of the past only, without letting the present appear in it. (Bergson, *L'Évolution Créatrice*, 1911, pp. 310-311)

Alhoewel Bergsons visie op de negatie overeenkomsten heeft met die van Bolland, gaat Griss' kritiek op Bollands negatiebegrip niet op voor die van Bergson. Terwijl volgens Bolland de negatie van iets op een niet-gedetermineerde manier iets anders geeft, is volgens Bergson de negatie van iets een niet-gespecificeerd anders iets. Het verschil zit hem hierin, dat waar bij Bolland afhankelijk van omstandigheden een specifiek begrip wordt gegeven, dit begrip bij Bergson ongespecificeerd wordt gelaten. Bergsons negatiebegrip is daarom niet contextafhankelijk.

Nu we een nieuwe interpretatie van de negatie hebben, gegeven door Bergson, kunnen we ons afvragen of deze niet toch compatibel is met het constructiviteitsbeginsel. Een dergelijke vraag moet negatief beantwoord worden. Zoals hierboven beschreven, betekent  $\neg A$  dat we  $A$  mogelijk achten, maar er iets anders het geval is. In de wiskunde kunnen we echter niet spreken van mogelijkheid; het enige dat we hebben zijn wiskundige objecten die reeds geconstrueerd zijn, die dus nooit de status hebben van potentialiteit, maar altijd van actualiteit. Bovendien zou  $\neg A$  nog steeds verwijzen naar het onconstrueerbare object  $A$ .

## 5. Eindoordeel

Nu zijn de belangrijkste elementen van het (verstandelijk) *a priori* van de filosofieën van Bolland, Brouwer en Griss uiteengezet. We hebben gezien hoe de filosofie van Griss als compatibel gezien kan worden met een pure versmelting van de filosofieën van Bolland en Brouwer.

### 5.1 Onbesproken elementen van Bolland's en Brouwer's filosofie

Bij de beschrijving van het Grissiaans *a priori* zijn echter elementen, die belangrijk zijn voor Bolland's Hegelianisme en Brouwer's intuïtionisme, achterwege gelaten. Ik heb, vooralsnog, geen mogelijke problemen gevonden van het toevoegen van deze elementen aan de versmelting. Er is niets in de versmelting dat bijvoorbeeld Brouwer's visie op hogere orde wiskunde in de weg staat.

### 5.2 Fundamenten van het *a priori* en de status van wiskunde

We hebben gezien hoe de versmelting het fundament van Bolland pakte en dat 'invoegde' in het intuïtionisme van Brouwer. Dit was mogelijk omdat Brouwer als fundament al de oerintuïtie van tijd had, die evenals Bolland's fundament ons de capaciteit tot splitsen en verenigen zou geven. Door deze invoeging werd er gelijk de onvolledigheid van splitsing en vereniging geponeerd, omdat deze notie, die Griss heeft geïntroduceerd, is te herleiden naar Bolland's begrip van scheiden en verenigen. De introductie van onvolledigheid kunnen we zien als een toevoeging op de theorie van Brouwer.

De status van de wiskunde is bij alle drie de filosofen hetzelfde gebleken: wiskunde is alom aanwezig in de (wetenschappelijke) werkelijkheid. Griss accepteert echter ook het mystieke denken, wat maakt dat er een niet-wetenschappelijk, mystiek deel van de werkelijkheid is. Ook de acceptatie van de mystiek kan gezien worden als een toevoeging op de pure versmelting; de mystiek staat totaal los van de wiskunde.

### 5.3 Concreetheid en abstractie

Griss visie op concreetheid en abstractie is echter niet terug te vinden in het werk van Bolland. Ook gaat hij in tegen Brouwer's intuïtionisme, dat over een abstract geïdealiseerd subject spreekt en over eigenschappen, waar geen wiskundige objecten aan voldoen. Op dit punt lijkt Griss dus af te wijken van een pure versmelting. We hebben echter later, in §4.5.3, gezien dat dit punt in overeenstemming is met Griss' visie op eigenschappen. Sterker nog: de besproken visie op abstractie is afleidbaar uit het constructiviteitsbeginsel, overeenkomstig met Griss' visie op eigenschappen. Als we een abstractum zouden kunnen creëren los van enige concrete instantie, zou het een object worden dat we niet kunnen inpassen in de concrete instanties, omdat het proberen in te passen een hypothetisch element heeft, dat incompatibel is met het constructiviteitsbeginsel. Als een abstractum niet terug is te vinden in de concrete instanties kunnen we niet spreken van een abstractum. Een abstractum wordt daarom niet gecreëerd los van de concrete instanties, maar op het moment dat we een concrete instantie creëren.

### 5.4 De negatie

In de laatste subsectie is de negatie besproken. We hebben gezien hoe de negatie in eerste instantie wordt geïntroduceerd door een hypothetische redenering, die incompatibel is met het

constructiviteitsbeginsel van het intuïtionisme vanwege de hypothetische status, die de mogelijkheid van een onconstrueerbaar, contradictoir object accepteert. Brouwers verdediging tegen een dergelijke complicatie stond wankel; in plaats van de negatie, met zijn hypothetische connotaties, te vervangen, behoudt hij de wiskundige verwezenlijking ervan en cijfert hij het begrip 'hypothese' eruit weg, waardoor het verband tussen de negatie en de verwezenlijking ervan onduidelijk wordt. Bovendien verwijst Brouwer nauwelijks naar zijn constructieve negatie-interpretatie, waardoor het betwifelbaar wordt dat Brouwer dit inderdaad als het fundament van de negatie accepteerde. Griss uitbanning van de negatie kan daarom als verbetering van het intuïtionisme gezien worden.

Als vervanging van het begrip ongelijkheid introduceert Griss het begrip 'positief verschillen', dat gefundeerd is in het Bollandiaanse fundament. We zien hier dat de versmelting een betere theorie geeft dan Brouwers intuïtionisme, aangezien die laatste ongelijkheid definieert als de absurditeit van gelijkheid, zonder een goede fundering ervoor te geven. Met Bolland's fundament konden we differentie en identiteit gelijktijdig funderen in de oerintuïtie.

Door de onaanvaardbaarheid van de hypothese moesten we ook soorten herdefiniëren. Dit kon gedaan worden door simpelweg het hypothetische element te vervangen door een zeker element. Met deze notie van soorten werd vervolgens inhoud gegeven aan een paar logische connectieven.

Uiteindelijk hebben we Griss' interpretatie van de niet-logische negatie besproken, die totaal in overeenstemming was met de visie van Bergson erop. Deze wijkt af van Bolland's visie op de negatie, omdat die een betekenis krijgt die afhankelijk is van het subject. Daarmee is de interpretatie van de negatie onmogelijk; alleen het subject zelf weet dan wat het betekent. Juist omdat het andere van iets niet eenduidig hetzelfde object is, is Bergson's negatie-interpretatie aannemelijk: deze zegt namelijk dat de negatie niet specificeert wat het andere object is en dat wat in een bepaalde context het andere is niet in de betekenis van 'niet' zit. Griss' negatie-interpretatie kan daarom als verbetering worden gezien van de Hegeliaanse visie op de negatie.

Deze verbeteringen horen thuis in een versmelting, omdat een versmelting de opbouw van een *coherente* filosofie is, aan de hand van elementen uit de te versmelten filosofieën. Als de eis van coherentie niet zou zijn gegeven, dan zou het simpelweg samenvoegen van de elementen van beide filosofieën, dat leidt tot een incoherente filosofie, tellen als een versmelting, terwijl dan geen wezenlijke stap is uitgevoerd.

## 5.5 De versmelting

Hoewel Griss' filosofie in het algemeen overeenstemt met een pure versmelting van Bolland's fundament en Brouwers intuïtionisme, lijkt zij er soms van af te wijken. Deze 'afwijkingen' konden echter gezien worden als *toevoegingen* op de pure versmelting of bleken er toch compatibel mee. Naast elementen uit de filosofieën van Bolland en Brouwer, hebben we elementen gezien uit de mystiek en de filosofieën van Berkeley, Heyting en Bergson. Door deze invloeden kan deze scriptie, die Griss' filosofie hoofdzakelijk beschrijft aan de hand van een versmelting tussen Bolland's en Brouwers filosofieën, niet gezien worden als een uitwerking van Griss' filosofie zelf, maar moet zij omschreven worden als de uitwerking van een *Grissiaans a priori als versmelting van het idealistische fundament van Bolland en het intuïtionistische raamwerk van Brouwer*.

## 6. Geciteerde werken

- Bergson, Henri. *L'Évolution Créatrice*. Vertaler: Arthur Mitchell (1998). New York: Dover, 1911.
- . *Creative Evolution*. Vertaler: Arthur Mitchell. New York: Dover, 1911.
- Bolland, G J P J. *De Logica: Leidraad bij het onderwijs in de zuivere rede*. Leiden: A. H. Adriani, 1911.
- . „Een Boek der Wijsheid.” *Nederlandschen Spectator*, 2 September 1899: 1-4.
- . *Verslag van de rede, door Prof. Bolland in het gebouw 'Odeon' te Amsterdam tot opening zijner colleges den 25sten September 1906 uitgesproken*. Leiden, 1906.
- Brouwer, L E J. „Addenda en corrigenda over de grondslagen der wiskunde.” In *Collected Works*, door L E J Brouwer, Editor: A Heyting, 145-149. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1917.
- . „Berliner Gastvorlesungen - Intuitionisme.” niet gepubliceerd, 1927.
- . „De non-aequivalentie van de constructieve en de negatieve orderelatie in het continuum.” In *Collected Works*, door L E J Brouwer, Editor: A Heyting, 495-496. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1949.
- . *Die Struktur des Kontinuums*. Wien, 1930.
- . *Leven, Kunst en Mystiek*. Delft: Waltman, 1905.
- . *Over de grondslagen der wiskunde*. Amsterdam: Maas & van Suchtelen, 1907.
- Franchella, Miriam. „Brouwer and Griss on Intuitionistic Negation.” *Modern Logic*, 1994: 256-65.
- . „Negation in the Work of Griss.” Editor: H C M de Swart en L J M Bergman. *Perspectives on Negation: Essays in honour of Johan J. de Jongh on his 80th Birthday* (Tilburg University Press), 1995: 29-40.
- Gilmore, P C. *The Effect of Griss' Criticism of the Intuitionistic Logic on Deductive Theories Formalized Within the Intuitionistic Logic*. Amsterdam: Drukkerij Holland N.V., 1953.
- Griss, G F C. „Differentialinvarianten von Systemen von Vektoren.” Amsterdam, 1925.
- . *Idealistische Filosofie*. Arnhem: van Loghum Slaterus' Uitgeversmij N.V., 1946.
- . „Logic of Negationless Intuitionistic Mathematics.” In *Negatieloze intuïtionistische wiskunde*, door G F C Griss, Editor: H J Pos. 1954.
- . „Negationless Intuitionistic Mathematics II.” In *Negatieloze intuïtionistische wiskunde*, door G F C Griss, Editor: H J Pos. 1954.
- . „Negationless Intuitionistic Mathematics III.” In *Negatieloze intuïtionistische wiskunde*, door G F C Griss, Editor: H J Pos. 1954.
- . „Over de Negatie.” *Feestbundel aangeboden door vrienden en leerlingen aan Prof. Dr. H.J. Pos, hoogleraar aan de Gem. Universiteit te Amsterdam, ter gelegenheid van het bereiken van de 50-jarige leeftijd op 11 juli 1948*, 1948: 96-106.
- Heyting, Arendt. „Over de betekenis van het Wiskundig werk van G. F. C. Griss.” *Algemeen Nederlands Tijdschrift voor Wijsbegeerte en Psychologie*, 1953: 8-11.
- Iemhoff, Rosalie. „Intuitionism in the Philosophy of Mathematics.” *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. 4 September 2009. <http://plato.stanford.edu/entries/intuitionism/> (geopend Juli 20, 2011).
- Mueller, Gustav E. „The Hegel Legend of "Thesis-Antithesis-Synthesis".” *Journal of the History of Ideas*, Juni 1958: 411-414.
- Otterspeer, Willem. *Bolland : Een bibliografie*. Amsterdam: Uitgeverij Bert Bakker, 1995.

- Pos, H J. „G. F. C. Griss' Idealistische Filosofie.” *Algemeen Nederlands Tijdschrift voor Wijsbegeerte en Psychologie*, 1953: 1-7.
- Redding, Paul. „Georg Wilhelm Friedrich Hegel.” *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Editor: Edward N. Zalta. 22 Juli 2010. <http://plato.stanford.edu/entries/hegel/>.
- Rutgers, Harco. „Dutch Hegelianism: The Cement of Social Life.” *Siebethissen.net/Wijsbegeerte in Nederland/1994 Dutch Hegelianism (english)*. 1994. [http://www.siebethissen.net/Wijsbegeerte\\_in\\_Nederland/1994\\_Dutch\\_Hegelianism\\_%28english%29.htm](http://www.siebethissen.net/Wijsbegeerte_in_Nederland/1994_Dutch_Hegelianism_%28english%29.htm) (geopend July 20, 2011).
- van Stigt, Walter P. *Brouwer's Intuitionism*. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B.V., 1990.