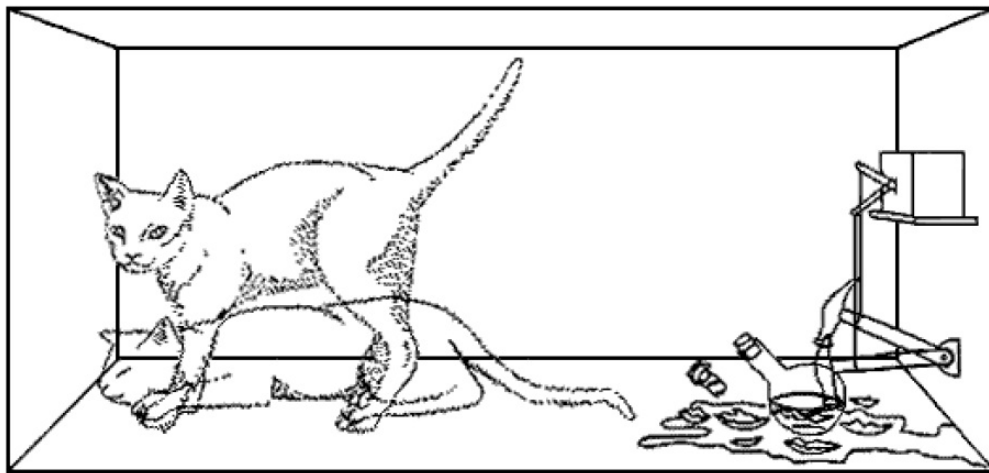


Realisme en Het Meetprobleem

Wat Kunnen We Kennen Van De Werkelijkheid



UNIVERSITEIT VAN UTRECHT

Auteurs:

Bram VAN DIJK

Vincent SCHOUTSEN

Begeleider:

Dr. Herman HENDRIKS

Intern begeleider:

Dr. Jos UFFINK

9 juli 2010

Inhoudsopgave

1	Inleiding	3
2	Wetenschappelijk Realisme	5
2.1	Wetenschappelijk Realisme	5
2.2	Correspondentietheorie van de Waarheid	6
I	Het Meetprobleem	7
3	Kwantummechanica	8
3.1	De Postulaten	8
3.2	Uitleg van de Postulaten	9
3.2.1	Toestandpostulaat	9
3.2.2	Observabelenpostulaat	9
3.2.3	SpectrumPostulaat	10
3.2.4	Born-Postulaat	10
3.2.5	Schrödinger-postulaat	10
3.2.6	Projectie postulaat	11
3.3	Eigentoestanden en Eigenwaarden	11
4	Meetprobleem	12
4.1	Metten op zich	12
4.2	Metten in de Kwantummechanica	13
4.2.1	Von Neumanns Meting (1932)	13
4.2.2	Meting van een Willekeurig Systeem	14
4.3	Smalle Zin	16
4.4	Heisenbergsnede	16
4.5	Schrödingers Kat	17
5	Oplossingen	18

5.1	Wigner: bewustzijn als oplossing	18
5.1.1	Wigners Vriend	18
5.1.2	Bewustzijn	19
5.2	Bohm: meting is slechts interactie	19
5.3	Many Worlds: elke toestand in een superpositie vertegenwoordigt een wereld . . .	21
5.3.1	De EWG theorie	21
II	Interpretaties en Realisme	24
6	Meerdere Oplossingen, Een Wereld	25
6.1	Wigner	25
6.2	Bohm	26
6.3	Many Worlds	26
6.4	Overeenkomsten	27
7	Conclusie	28
7.1	Onderdeterminatie en Theoriegeladenheid	29
7.2	Pragmatisme	30
7.3	Werkelijkheid en Interpretatie	31
7.4	Conclusie	32
A	Het Formalisme	35

Hoofdstuk 1

Inleiding

The dynamics and the postulate of collapse are flatly in contradiction with one another ... the postulate of collapse seems to be right about what happens when we make measurements, and the dynamics seems to be bizarrely wrong about what happens when we make measurements, and yet the dynamics seems to be right about what happens whenever we aren't making measurements.

–Albert in *Quantum Mechanics and Experience*, 1992, p. 79 [1]

Wat kunnen we kennen van de werkelijkheid? Dit is de vraag die wij gaan proberen te beantwoorden in deze scriptie. Dit gaan we doen aan de hand van het meetprobleem. Het meetprobleem is een probleem in de grondslagen van de kwantummechanica. We gebruiken de natuurkunde, omdat de natuurkunde pretendeert de werkelijkheid te beschrijven. Wetenschapsfilosofie zegt ons in hoeverre de wetenschap de werkelijkheid kan beschrijven. Deze twee disciplines vormen samen de interdisciplinaire discipline: Filosofie van de Natuurkunde.

Het doel van deze gecombineerde discipline is om de werkelijkheid op te bouwen met behulp van natuurkundige theorieën en behandelt de fundamentele problemen van deze theorieën. Dit is precies de invalshoek die wij nodig hebben om onze onderzoeksvraag te kunnen beantwoorden. Een filosofisch systeem dat spreekt over het kunnen kennen van de wereld zonder praktijkvoorbeeld uit de natuurkunde, is slechts een sprookje. We moeten een theorie van de werkelijkheid hebben die aansluit bij de meetgegevens en niet slechts mentale constructen beschrijft. Daarom gebruiken wij de discipline Filosofie van de Natuurkunde.

Kwantummechanica is een natuurkundige theorie. De kwantumwereld is bijzonder lastig te vatten binnen een realistisch wereldbeeld, omdat we enkel informatie van de kwantumwereld hebben door metingen. Hierop volgen meteen twee problemen, de kwantumwereld is niet gedefinieerd buiten de metingen én deze metingen zijn niet gedefinieerd in de kwantummechanica. We maken toch, aan het begin van dit verslag, expliciet de aanname van wetenschappelijk realisme: het doel van de wetenschap is om de wereld waar te beschrijven.

Met wetenschappelijk realisme en een wetenschappelijke theorie, kunnen we een beeld vormen van hoe de wereld is. Meetgegevens moeten echter nog geïnterpreteerd worden. Er zijn verschillende interpretaties mogelijk. We weten niet welke interpretatie de wereld daadwerkelijk beschrijft. Hier vinden we dus al frictie tussen een theorie die de wereld claimt te beschrijven (natuurkunde) en de theorie die claimt dat wetenschap ook daadwerkelijk de wereld beschrijft (wetenschappelijk realisme). De aanname van wetenschappelijk realisme zegt dat er slechts één waar kan zijn. De waarheid van zo'n theorie is in dit geval niet te beslissen. Doordat de theorieën ondergedetermineerd zijn door de meetgegevens, zijn meerdere interpretaties mogelijk.

We kunnen de waarheid van de interpretaties, door de onderdeterminatie niet meer kennen. Wij willen graag weten wat we nog wél kunnen kennen. Dit zullen we proberen af te leiden uit de toepasbaarheid van de verschillende interpretaties. Door de toepasbaarheid weten we dat de interpretatie een essentie van de natuur weet te vatten. Deze essentie is de structuur van de theorie die isomorf is met de structuur van de werkelijkheid.

De opzet van dit paper is in twee delen. Eerst zullen we in hoofdstuk 2 wetenschappelijk realisme uiteenzetten als raamwerk voor de scriptie. Vervolgens zullen we in het eerste deel, de kwantummechanica belichten (hoofdstuk 3). Tevens wordt in het eerste deel het meetprobleem uitvoerig belicht (hoofdstuk 4) en worden er meerdere oplossingen aangedragen (hoofdstuk 5).

In het tweede deel gaan we het hebben over de consequenties van de verschillende oplossingen: we zullen de drie corresponderende wereldbeelden beschrijven (hoofdstuk 6). In hoofdstuk 7 zullen we onze hoofdvraag beantwoorden aan de hand van de verschillende interpretaties van de kwantummechanica.

Hoofdstuk 2

Wetenschappelijk Realisme

De omlijsting van onze scriptie wordt gevormd door zowel het Wetenschappelijk Realisme als de Correspondentietheorie van de waarheid. Hierbinnen zullen wij het meetprobleem uiteen zetten. Dit raamwerk zal nu worden beschreven en zal in het vervolg de theoretische entiteiten van een ontologische wederhelft voorzien.

Wetenschappelijk realisme is een antwoord op de vraag: “Wat is het doel van wetenschap?”. Het stelt dat het doel van de wetenschap die wij bedrijven is om de wereld op een ware manier te beschrijven. We zullen eerst kort ingaan op deze definitie van wetenschappelijk realisme en vervolgens zullen we de correspondentietheorie van waarheid behandelen.

Van de correspondentietheorie van de waarheid zullen we de versie van Tarski behandelen, waarvan vele moderne theorieën van afgeleid zijn.

2.1 Wetenschappelijk Realisme

Whatever else realists say, they typically say that they believe in a ‘correspondence theory of truth’. (p. 140) (Putnam in [25])

In de Stanford Encyclopedia of Philosophy wordt realisme gedefinieerd door de volgende twee beweringen [10]:

1. De wereld bestaan objectief en onafhankelijk van de manieren hoe wij erover denken of beschrijven.
2. Onze gedachten en claims zijn over deze wereld.

De wereld die wij representeren in onze taal en wetenschap, is de objectieve wereld. Om deze objectiviteit te waarborgen hebben we een correspondentietheorie van de waarheid nodig. De correspondentietheorie geeft ons de mogelijkheid om onze uitspraken een waarheidswaarde toe te schrijven afhankelijk van de feitelijke stand van zaken in de wereld. De correspondentie theorie van de waarheid zullen wij in de volgende subsectie uiteenzetten.

In zijn boek *The Philosophy of Science*, formuleert Richard Boyd wetenschappelijk realisme op deze manier:

“That terms in mature scientific theories typically refer, that the theories accepted in a mature science are typically approximately true, that the same term can refer to the

same thing even when it occurs in different theories—these statements are viewed by the scientific realist . . . as part of any adequate scientific description of science and its relations to its objects” (p. 1066)(Boyd, uit [9] in [11])

Boyd zegt dus dat de termen in een wetenschappelijke theorie refereren naar een object in de werkelijkheid. Vanuit deze referentie, een een op een correspondentie met een object in de werkelijkheid, kan een noodzakelijke vereiste voor waarheid worden afgeleid. Dit is de correspondentietheorie van de waarheid.

2.2 Correspondentietheorie van de Waarheid

De correspondentietheorie van de waarheid stelt dat waarheid een aan de wereld gekoppelde relatie is, ook wel een wereld-wereld relatie genoemd. Er is dus koppeling tussen de het complex van uitspraken en de werkelijkheid. Wat wij zeggen of denken kan waar of onwaar zijn, waarbij de toestand van de wereld het oordeel velt. Het basisidee van correspondentie, zoals o.a. Tarski het stelt, berust op een quote van Aristoteles die zegt; “To say of what is that is, or of what is not that it is not” [26].

De kern van de correspondentietheorie die wij uiteen zullen zetten, is opgesteld door Tarski. Hoewel niet alle filosofen het hier over eens zijn, zullen wij zijn theorie volgen, om ons raamwerk duidelijk te krijgen. Tarski stelt dat de waarheid van een zin of stelling bepaald wordt door te kijken of het object waar naar gerefereerd wordt, ook daadwerkelijk voldoet aan het predicaat dat er aan wordt toegeschreven. Het is de correspondentie van onze proposities met de objecten die hierin beschreven worden, die leiden tot waarheidsuitspraken.

Deze vorm van referentie, correspondentie, is een eigenschap van het wetenschappelijk realisme. Putnam zegt zelfs dat als een theorie succesvol is, de termen in de theorie refereren naar objecten in de werkelijkheid.

[T]he world probably contains entities very like those postulated by our most successful theories. (p. 1117) (Putnam in [23])

Het wetenschappelijk realisme dat we in dit hoofdstuk beschreven hebben, bevat de correspondentietheorie van de waarheid. Een onderdeel hiervan is dat uitspraken over de wereld waar, of onwaar kunnen zijn. Wetenschappelijk Realisme impliceert de Correspondentietheorie van de waarheid. Realisme en de correspondentie theorie van de waarheid gaan hand in hand.

Wij zullen voor nu aannemen dat het doel van de wetenschap is om de wereld te beschrijven op een ware manier.

Deel I

Het Meetprobleem

Hoofdstuk 3

Kwantummechanica

3.1 De Postulaten

In dit gedeelte zullen de basisstellingen van QM geponeerd worden in wiskundige vorm. Ook zal de bijbehorende natuurkundige interpretatie aan bod komen. In het vervolg van de scriptie wordt de kennis van deze stellingen voorondersteld, waarop wij verder zullen voortborduren. Net als het formalisme van QM komen de postulaten van QM in vrijwel elk educatief boek voor, echter in verschillende verschijningsvormen en niet altijd puntsgewijs. Toch is alles hetgeen berekend wordt in de literatuur wat QM betreft, terug te vinden in de postulaten in combinatie met het formalisme. De komende beschrijving van de postulaten, evenals de uitleg ervan en de onderwerpen ‘Eigentoestanden en Eigenfuncties’ en ‘Gemengde toestanden en Pure toestanden’ zijn gebaseerd op de bundel van het vak ‘Grondslagen van de Quantummechanica’, oorspronkelijk geschreven door Jan Hilgevoord en later aangepast door onder meer Jos Uffink, Dennis Dieks, F.A. Muller en Michiel Seevinck.

De mathematische constructie van de QM, krijgt fysische betekenis door de Postulaten, opgesteld door Johann von Neumann. Hier komt dan ook de naam “Von Neumann-Postulaten” vandaan. Wij zullen deze postulaten formuleren en proberen hun fysische betekenis uit te leggen. Deze uitleg is nodig om duidelijk te maken hoe deze postulaten de verbinding vormen tussen het mathematisch construct en de natuurkundige theorie. De grondslag van het te behandelen ‘meetprobleem’ is terug te vinden in deze postulaten. Hier zullen wij later op terugkomen in het hoofdstuk ‘Het Meetprobleem’. Hieronder de Von Neumann postulaten in een versimpelde vorm.

1. *Toestandpostulaat* Elk fysisch systeem heeft een corresponderende Hilbert ruimte \mathcal{H} , de toestanden van het systeem zijn volledig te beschrijven door eenheidsvectoren in \mathcal{H} . Een samengesteld fysisch systeem komt overeen met het directe product tussen de Hilbert ruimten van de verschillende (deel)systemen. (Zie appendix voor uitleg over direct product)
2. *Observabelenpostulaat* Iedere fysische grootheid \mathcal{A} van het systeem komt overeen met een unieke “self - adjoint”¹ operator A in \mathcal{H} . Dirac noemt deze grootheden ‘observabelen’.
3. *Spectrumpostulaat* De enig mogelijke uitkomsten die gevonden kunnen worden bij een meting van een fysische grootheid \mathcal{A} , welke correspondeert met de operator A , zijn de waarden uit het spectrum van A .
4. *Born-postulaat*, in het discrete geval. Als het systeem zich bevindt in de toestand $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$, dan is de kans om bij meting van van de fysische grootheid \mathcal{A} , corresponderend met

¹zelf-geadjungeerde

operator A , met discreet spectrum $\text{Spec } A$, de eigenwaarde $a_i \in \text{Spec } A$ te vinden gelijk aan $\text{Prob}^{|\phi\rangle}(a_i) = \langle \phi | P_{a_i} | \phi \rangle$ waarbij P_{a_i} de projector uit de spectrale ontbinding van A is.

5. *Schrödinger-postulaat*. Zolang er geen metingen aan het systeem verricht worden, dan wordt de ontwikkeling van de toestand van het systeem in de tijd beschreven door een unitaire transformatie:

$$|\psi(t)\rangle = U(t - t_0) |\psi(t_0)\rangle \quad (3.1)$$

6. *Projectiepostulaat*, discreet geval. Als het systeem zich bevindt in toestand $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$ en er een meting van de fysische grootte \mathcal{A} wordt verricht, die correspondeert met operator A , met discreet spectrum $\text{Spec } A$, en de meting levert als eigenwaarde $a_i \in \mathbb{R}$, dan is het systeem direct na de meting in de volgende eigentoestand:

$$|\psi\rangle \rightsquigarrow \frac{P_{a_i} |\psi\rangle}{\|P_{a_i} |\psi\rangle\|} \quad (3.2)$$

3.2 Uitleg van de Postulaten

Deze zes postulaten vormen samen de vertaalsleutel tussen het fysische systeem en het wiskundige systeem en vice versa. De eerste vier postulaten verbinden de begrippen ‘toestand’, ‘grootte’, ‘fysisch systeem’ en ‘meting’ met wiskundige begrippen. De overgebleven postulaten geven een beschrijving van hoe de toestanden zich in de loop der tijd gedragen of veranderen. De postulaten 3 en 4 geven informatie over het begrip ‘meting’ en worden vaak omgedoopt tot één postulaat, het Meetpostulaat. De moeilijkheid zit hem, zoals vaak het geval is bij het poneren van wiskundige postulaten binnen een natuurkundige theorie, in de fysische interpretatie ervan. Vooral het verband tussen de werkelijkheid en de theorie is het speerpunt van deze scriptie. Mede daarom zijn de postulaten verder verklaard om precies die verbintenis tussen de objecten in de werkelijkheid met de objecten in de theorie duidelijk te maken.

3.2.1 Toestandpostulaat

Uit het toestandpostulaat volgt dat systemen met dezelfde $|\phi\rangle$ zich in dezelfde fysische toestand bevinden, waarbij de verbinding tussen de begrippen ‘toestand’ en ‘fysisch systeem’ duidelijk wordt. Zoals gesteld worden de toestanden beschreven door eenheidsvectoren. Een verschil in deze eenheidsvectoren wil niet gelijk zeggen dat deze niet dezelfde toestand representeren. (een faseverschil ($e^{i\Theta}$) tussen vectoren wordt over het algemeen als dezelfde toestand beschouwd) Ook is het zo dat wanneer twee systemen door dezelfde $|\phi\rangle$ worden beschreven en vervolgens bij een meting een andere uitkomst geven geen reden is om de toestanden als verschillend te zien. Eenzelfde toestand kan leiden tot verschillende uitkomsten, dit volgens de richtlijnen van het meetpostulaat.

3.2.2 Observabelenpostulaat

Elke fysische observabele wordt geassocieerd met een wiskundige zelf-geadjungeerde operator. Dit postulaat geeft expliciet de verbintenis tussen aan de ene kant de natuurkunde (observabele) en aan de andere kant de wiskunde (operator). Er is geen consensus of *iedere* zelf-geadjungeerde operator een fysische grootte voorstelt of omgekeerd dat *iedere* fysische grootte door een zelf-geadjungeerde operator wordt vertegenwoordigd. In de literatuur verschillende de meningen hierover. Hierop zal dan ook niet verder worden ingegaan.

3.2.3 SpectrumPostulaat

Met het spectrum van een fysische grootheid \mathcal{A} wordt het scala van waarden bedoeld die \mathcal{A} kan geven bij een meting. Een operator, die correspondeert met een observabele, die werkt op een willekeurige toestand, resulteert in een eigenwaardevergelijking. De willekeurige begintoestand wordt maximaal ontbonden in eigenvectoren van de operator. Alle eigenwaarden die corresponderen met de eigenvectoren zijn mogelijke uitkomsten van een meting van de observabele. Dit zijn elementen uit het spectrum van de operator Q . Deze elementen bestaan uit q_1, \dots, q_N . In het formalisme:

$$Q|\psi\rangle = \sum_{j=1}^N q_j |q_j\rangle \quad (3.3)$$

3.2.4 Born-Postulaat

Het Born-postulaat koppelt de fysische grootheid \mathcal{A} , gerepresenteerd door operator A , aan de observeerbare eigenwaarden, het spectrum van A , door middel van een kansamplitude. Het geeft bijvoorbeeld de kans dat een object op een bepaald tijdstip op een bepaalde plaats in de ruimte te vinden zal zijn

P_ϕ is een projector die wordt gedefinieerd als: $|\phi\rangle\langle\phi|$, de projector P_{a_i} als: $\sum_{j=1}^{n_i} |a_i, j\rangle\langle a_i, j|$

Wanneer we bij het voorbeeld blijven van de kansverdeling over de positie van een object, moet het zo zijn dat het object ergens wordt aangetroffen met kans 1. Om deze reden moet de toestand genormaliseerd zijn. Dit normalisatiebegrip volgt direct uit de definitie van $|a_k\rangle$ als orthonormale basis, zoals ook terug te vinden is in het formalisme.

Wanneer nu een meting wordt verricht van de fysische grootheid \mathcal{A} , gerepresenteerd door operator A , met als eigenwaarden $a_1, \dots, a_i \in \text{Spec}A$, is de kans gegeven door gebruik te maken van het Born-Postulaat;

$$Prob^{|\phi\rangle}(a_i) = \langle\phi|P_{a_i}|\phi\rangle = \sum_{j=1}^{n_i} \langle\phi|a_i, j\rangle\langle a_i, j|\phi\rangle = \sum_{j=1}^{n_i} |\langle a_i, j|\phi\rangle|^2 \quad (3.4)$$

3.2.5 Schrödinger-postulaat

Het Schrödinger-postulaat geeft de beschrijving van het systeem, waarbij het systeem invariant is onder een translatie in de tijd. Dit postulaat geeft het verband tussen het voortgaan van de tijd in een fysisch systeem (wanneer er geen metingen worden verricht) en de wiskundige representatie daarvan. Deze wiskundige representatie is gegeven door een unitaire operator $U(t)$, die volgens het ‘‘Stone - Von Neumann theorema (1932)’’ geschreven kan worden als een functie van de zelfgeadjungeerde operator H , *Hamiltonian operator*. Dit ziet er als volgt uit; $U(t) = e^{\frac{-itH}{\hbar}}$

Omdat de operator U deel uitmaakt van de zogenaamde Lie algebra groep², is de multiplicatie dusdanig dat $U(t)U(t') = U(t+t')$. Dit is ook te zien wanneer je naar de vorm van de operator U kijkt, die opgebouwd is uit e-machten. $U(t) = e^{at}, U(t') = e^{at'}$, nu volgt automatisch dat $U(t)U(t') = e^{at}e^{at'} = e^{a(t+t')}$

Hieruit volgt dat de in het Schrödinger-postulaat geponeerde unitaire operator $U(t - t_0)$ als volgt geschreven kan worden;

²Het is niet noodzakelijk de eigenschappen van deze groep te begrijpen om het postulaat te doorzien

$$U(t - t_0) = e^{\frac{-iH(t-t_0)}{\hbar}} \quad (3.5)$$

Nu kunnen we de vergelijking compleet maken door deze unitaire operator in de Schrödinger vergelijking in te voeren, wat resulteert in;

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\phi(t)\rangle = i\hbar \frac{d}{dt} e^{\frac{-iH(t-t_0)}{\hbar}} |\phi(t_0)\rangle = H |\phi(t)\rangle \quad (3.6)$$

3

3.2.6 Projectie postulaat

Het Projectie postulaat is een aanpassing van Von Neumanns projectiepostulaat door G. Lüders in 1951 en heeft betrekking op het meetproces. In de literatuur verschillen de meningen over of dit postulaat daadwerkelijk bij QM hoort, aangezien het niet niet in het schrödinger postulaat te schrijven valt omdat de projector niet unitair is. Oorspronkelijk stelde Von Neumann dat de toestand direct na een meting van \mathcal{A} , met als uitkomst de eigenwaarde a_i , een zogenaamde *eigenstoestand* is met als eigenwaarde a_i .

3.3 Eigentoestanden en Eigenwaarden

In het formalisme wordt een observabele wiskundig gerepresenteerd als een zelf-geadjungeerde operator. Deze operator geeft een reële waarde als uitkomst bij een meetproces. Door dit aspect van zelf-geadjungeerde operatoren worden ze gezien als representatief voor het weergeven van de meetbare eigenschappen van kwantummechanische elementen. Dit doet vermoeden dat een eigenschap altijd een reële waarde heeft. In het formalisme wordt de waarde van de uitkomst van een meting gekoppeld aan de eigenwaarde van de eigentoeestand van de operator waar het systeem zich op dat moment in bevindt. Dit is het verband tussen de eigenwaarde en de eigentoeestand, wat een belangrijk onderdeel is van het QM formalisme. Hieruit kun je afleiden dat wanneer het systeem zich in een eigentoeestand bevindt, er bij een meting van de observabele zekerheid 1 bestaat dat er een bijbehorende eigenwaarde gevonden wordt.

Zoals al bij de uitleg van het toestand-postulaat aan bod is gekomen hoeft bij een meting van observabele Q van een groep van identieke systemen, die allemaal in dezelfde toestand $|\phi\rangle$ zijn, er niet hetzelfde resultaat uit te komen. Er zijn echter toestanden waarbij dat *wel* het geval is en een meting van een observabele telkens hetzelfde resultaat geeft. Deze gedetermineerde toestanden worden eigentoestanden genoemd. We zijn al eerder eigentoestanden tegegekomen, namelijk de toestand $|\phi\rangle$ in de volgende vergelijking; $H |\phi(t)\rangle = E |\phi(t)\rangle$ is een eigentoeestand. In deze vergelijking wordt E de *eigenwaarde*⁴ genoemd van operator H . Zoals in het spectrum postulaat beschreven is, heet de verzameling van alle eigenwaarden van een operator, het spectrum van de operator.

Een operator heeft op een vector in het algemeen twee acties: hij kan de lengte veranderen en hij kan de vector laten roteren in Hilbertruimte. Voor een rotatie in een oneindigdimensionale Hilbertruimte zijn er buitengewoon veel mogelijkheden. Eigenwaardes vinden we als er van een rotatie geen sprake is. De vector $Q|f\rangle$ is de oorspronkelijke vector $|f\rangle$ vermenigvuldigd met een scalar. Deze scalar is dan de eigenwaarde van de operator en $|f\rangle$ is de eigenvector van de operator.

Als de oorspronkelijke vector niet in de richting van de eigenvectoren van de operator staat, dan volgt na de toepassing van de operator op de toestand een ontbinding van de toestand in eigenvectoren van de operator.

³De operator H , de Hamiltoniaan, geeft, als toegepast op een toestand, het energiespectrum van een systeem corresponderend met de toestand weer.

⁴een eigenwaarde is een getal, niet een operator of een functie

Hoofdstuk 4

Meetprobleem

If all this damned quantum jumping [verdampte Quantenspringerei] were really to stay, I should be sorry I ever got involved with quantum theory. –Schrödinger, 1926, (p.57 in [21])

In dit hoofdstuk zullen we het meetprobleem uiteenzetten. Dit hoofdstuk is, net als het vorige, bijzonder schatplichtig aan de syllabus van het vak *Grondslagen van de Kwantummechanica*. Het meetprobleem is een van de grootste obstakels van de orthodoxe kwantummechanica. Er zijn twee formuleringen van dit probleem, een smalle en een wijde. De wijde formulering is het grootste probleem voor de kwantummechanica; waarom heeft een meting in de orthodoxe formulering van de kwantummechanica een aparte status? De smalle formulering gaat in op de formele interpretatie van het probleem. We zullen eerst uiteenzetten hoe meten op zich te werk gaat en vervolgens hoe een kwantummeting verloopt. Een meting van een willekeurige toestand maakt vervolgens de problemen in de smalle zin expliciet.

4.1 Meten op zich

Zoals we in het tweede hoofdstuk uiteengezet hebben, gaan we uit van wetenschappelijk realisme. Een meting in een klassiek natuurkundige theorie is, vanuit realistisch oogpunt, een weergave van de waarde die de observabele ook echt heeft. Voorbeeld: we hebben een bad met water en we willen de temperatuur T weten. We houden een thermometer in het water en als het kwik niet meer beweegt, wijst het kwik de temperatuur aan die het water heeft. De onvolkomenheden in de ijking van de thermometer nemen we voor lief in dit voorbeeld.

In een ideale situatie gaan we ervan uit, dat de meting de temperatuur van het water niet beïnvloedt. De schaal en de ijking zijn slechts namen die gegeven worden aan eigenschappen van objecten. Wat we meten is ook werkelijk het geval. Er is een continue set met mogelijke temperaturen die objecten kunnen hebben. De schaal refereert naar die werkelijke temperaturen. Dat zijn de namen die wij er aan hebben gegeven. Daardoor bestaan er ook meerdere mogelijke manieren om temperatuur weer te geven; Celsius, Fahrenheit en Kelvin. Ze geven een andere naam aan een temperatuur zoals het vriespunt, maar ze bedoelen de ‘echte’ temperatuur in de wereld. Een meting is de manier om de waarde van de gemeten observabele weer te geven op een schaal waar we het over eens zijn.

Er zijn ook een ander soort metingen denkbaar. Dit zijn metingen waarbij het meetapparaat enkel “Ja” of “Nee” zegt. Dit zijn bijvoorbeeld positiemetingen. De vraag is; is er een object op positie x ? Het antwoord is bevestigend, dan wel ontkennend. Ook hier wordt ervan uitgegaan dat het object een positie heeft en dat deze door het meetapparaat wordt weergegeven.

Een meting heeft, in de klassieke natuurkunde geen bijzondere status. Het is enkel een middel om een eigenschap van een object weer te geven op een schaal of in een coördinatenstelsel. Hierdoor kunnen we iets zeggen over de eigenschappen van de objecten. Er bestaat de impliciete aanname dat de interactie tussen het meetapparaat en het object verwaarloosbaar is.

We kunnen het klassieke meetproces weergeven als volgt:

$$(a_j, r_0) \rightsquigarrow (a_j, r_j) \tag{4.1}$$

waar $a_j \in a_1 \dots a_n$, de mogelijke waarden¹ van eigenschap \mathcal{A} en met $r_j \in r_1 \dots r_n$, de mogelijke waarden van meetapparaat \mathcal{R} . De letter R staat voor “reading”. Er is een bijectie mogelijk van a_n naar r_n , zodat $r_n = m(a_n)$, met m een functie. De waarde van de eigenschap van het objectstelsel wordt geprojecteerd op een schaalverdeling.

4.2 Meten in de Kwantummechanica

In de kwantummechanica heeft de meting een speciale status. Het woord meting staat in de postulaten. De betekenis van het woord “meting” is echter niet gedefinieerd in de postulaten. Dit is het meetprobleem *in de wijde zin*: waardoor heeft een meting een speciale status boven een normale fysische interactie?

Als we, bijvoorbeeld, een kwantummechanische positiemeting van een foton doen, laten we het foton botsen op een lichtgevoelige plaat. Op de plaat zit een lichtgevoelige emulsie. In de emulsie zitten zilvertomen. Door de botsing, raakt het zilvertoom aangeslagen. Als de plaat dan ontwikkeld wordt, zit er een stip op de plek waar dat aangeslagen zilvertoom zat. Zilver komt ook voor in de natuur. Een zilvertoom kan ook in de natuur in aangeslagen toestand geraken. Toch zouden we dit niet als meting willen bestempelen.

Waardoor is een meting zo’n speciaal geval van fysische interactie?

4.2.1 Von Neumanns Meting (1932)

In 1932, in zijn boek, *Mathematische Grundlagen der Quantentheorie*, zet Von Neumann het meetproces in de kwantummechanica uiteen [31]. Hij neemt hiervoor een situatie die vergelijkbaar is met het klassieke meetproces. Men neme een kwantumobject in een eigentoeestand van de operator die correspondeert met de te meten observabele², $|a_j\rangle$

Een meetapparaat is in een zogeheten *ready state* $|r_0\rangle$. Het meetapparaat \mathcal{R} heeft $N + 1$ eigentoestanden, dus dat is het aantal eigentoestanden van het object plus één. De eigentoestanden van het meetsysteem corresponderen met wijzerposities van het meetapparaat. Hierdoor is het mogelijk om de standen van de wijzer af te lezen³ Let op, we beschouwen het macroscopische meetsysteem als een kwantumsysteem, beschreven door een toestandsvector, om het meetproces in het formalisme weer te kunnen geven!

De eigenschap \mathcal{A} wordt weergegeven door de operator A op Hilbertruimte \mathcal{H}_1 N dimensies. Het meetapparaat wordt weergegeven door de operator \mathcal{R} op Hilbertruimte \mathcal{H}_2 met $N + 1$ dimensies. Als we nu het ideale meetproces gaan formuleren, komen we uit op een proces dat qua structuur

¹Voor het temperatuurvoorbeeld in deze sectie geldt dat $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Voor de Ja/Nee meting geldt dat $a_1 = 0$ en $a_2 = 1$

²Aangezien, zoals in het vorige hoofdstuk is gepostuleerd, iedere observabele uniek gerepresenteerd wordt door een operator, zal ik de zinsfrases “operator die correspondeert met de te meten observabele” en “observabele” verwisselbaar gebruiken.

³Hier leunt de kwantummechanica op de vooronderstellingen in de klassieke mechanica. De verborgen aanname is dat we de wijzerpositie juist kunnen waarnemen. Dit zit natuurlijk ook al besloten in de aanname van wetenschappelijk realisme die we gedaan hebben.

vrijwel identiek is aan het klassieke analogon. Het aantal dimensies van de totale Hilbertruimte $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, is $2N + 1$. Als er een kwantummeetproces met een gelijke structuur als het klassieke meetproces bestaat, dan is er een transformatie mogelijk, waarvoor geldt:

$$U(\tau) |a_j\rangle_1 |r_0\rangle_2 = |a_j\rangle_1 |r_j\rangle_2 \quad (4.2)$$

Hierin is $U(\tau)$ een unitaire operator

$$U(\tau) = \sum_{j,k} |a_k\rangle \otimes |r_{r+j}\rangle \langle a_k| \otimes \langle r_j| \quad (4.3)$$

De werking van deze unitaire operator is, dat de unitaire transformatie uit (4.2) precies op die manier wordt uitgevoerd. Het meetproces dat hier uit voortkomt is vergelijkbaar met dat van de klassieke mechanica. We beginnen met een meetsysteem in een ready state en een objectsysteem in een eigentoestand. Vervolgens geeft het meetsysteem een transcriptie van de waarde weer op zijn wijzerplaat. Let wel, we hebben de postulaten waarin het woord meting wordt gebruikt, nog niet hoeven gebruiken.

Er is nog een probleem. In deze voorstelling van een kwantummeetproces, wordt de aanname gemaakt dat het objectsysteem zich reeds in een eigentoestand van de te meten observabele bevindt. Door de eigenstate-eigenvalue link heeft een kwantumsysteem, als het zich in een eigentoestand bevindt, kans 1 om de corresponderende eigenwaarde als uitkomst van een meting te vinden. Hoe zit het met het meten van kwantumsystemen die zich niet in een eigentoestand van een te meten observabele bevinden?

4.2.2 Meting van een Willekeurig Systeem

Als het objectsysteem zich in een willekeurige toestand $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_I$ bevindt, zal de meting niet op Von Neumanns manier verlopen. Stel dat $|\psi\rangle$ willekeurig is, dan kunnen we $|\psi\rangle$ ontbinden in de eigentoestanden van \mathcal{A} met coëfficiënten c_j . Ontbinden in eigentoestanden is geometrisch voorstelbaar als het projecteren op de orthonormale basis $\sum_j |a_j\rangle$. Elke ket waarop geprojecteerd is, komt voor in een superpositie, de basis. De coëfficiënten c_j zijn dan ook, per vector, scalars om te zorgen dat het geheel genormeerd blijft en de oorspronkelijke vector gevormd wordt als ze allemaal weer opgeteld worden. Iedere eigenvector correspondeert met een toestand. Een superpositie van eigenvectoren doet vermoeden dat een systeem zich in meerdere toestanden tegelijk bevindt.

Dit is een bijzonder tegenintuïtief beeld. Wat gebeurt er als we een meting doen op dit systeem? We weten op welke manier de unitaire operator het meetsysteem correleert met het objectsysteem. Als het objectsysteem zich in een superpositie van eigentoestanden bevindt, dan is gemakkelijk in te zien dat het meetapparaat zich nu ook in een superpositie van eigentoestanden zal bevinden. De uitkomst van deze meting wordt dan:

$$\sum_{j=1}^N c_j U(\tau) |a_j\rangle_1 |r_0\rangle_2 \quad (4.4)$$

Nu hebben we een superpositie van eigentoestanden van het meetsysteem. De eigentoestanden van het meetsysteem corresponderen met wijzerposities. De wijzerposities zijn macroscopisch. We hebben nog nooit een wijzer in een superpositie waargenomen. Dit is een probleem, want dit is wel de uitkomst van het meetproces in het formalisme.

Na de meting hebben we, als uitkomst:

$$\sum_{j=1}^N c_j |a_j\rangle_1 \otimes |r_j\rangle_2 \quad (4.5)$$

We weten dat de som van de kwadraten van de coëfficiënten gelijk is aan 1

$$\sum_{j=1}^N |c_j|^2 = 1 \quad (4.6)$$

Volgens het meetpostulaat is de kans om een eigentoestand van \mathcal{A} te vinden gelijk aan het kwadraat van de scalar voor de eigenvector. Dat betekent dat de kans om $|a_i\rangle$ te vinden gelijk is aan $|c_i|^2$. Dit geldt als we dit toepassen op een ontbinding van $|\psi\rangle$ in de basis corresponderend met de observabele die we meten. Het geldt ook als we het toepassen op het systeem na de meting, dus op de eigentoestanden van het meetsysteem. De kansen op een bepaalde eigentoestand van het objectsysteem is gelijk aan de kans op de eigentoestand van het meetsysteem die met de desbetreffende eigentoestand van het objectsysteem correspondeert. De coëfficiënten blijven gelijk. Hierdoor is de correlatie van de twee systemen een goede representatie die het systeem niet verstoort. De kans op een toestand van het objectsysteem is gelijk aan de kans van de corresponderende waarde die de wijzer aanwijst op het meetsysteem.

We hebben nog steeds een wijzer in een superpositie van toestanden. Als de wijzer ergens eenduidig heen zou wijzen, dan weten we in welke toestand het systeem zich bevindt. Als we nu een meting maken van de positie van de wijzer van het meetsysteem, dan kunnen we wellicht weten in welke positie de wijzer zich bevindt. Laten we dit extra meetsysteem \mathcal{R}' noemen.

\mathcal{R}' heeft een wijzer met verschillende mogelijke wijzerposities corresponderend met de eigentoestanden $\{ |r'_1\rangle, |r'_2\rangle, \dots, |r'_m\rangle \} \in \mathcal{H}_3$. We gaan het proces nu opnieuw toepassen, maar dan met \mathcal{R}' als meetsysteem en \mathcal{R} als objectsysteem. Wat er nu gebeurt is eigenlijk niets anders dan een herhaling van het vorige meetproces. We moeten de operator U iets aanpassen, omdat de meting nu over twee andere systemen gaat en zich op een andere tijd afspeelt. De vorm van de operator is echter nog gelijk. Deze Operator noemen we $U'(\tau')$.

Het gehele meetproces voltrekt zich nu in twee stappen, eerst wordt $U(\tau)$ toegepast. $U(\tau)$ werkt enkel op Hilbertruimtes 1 en 2, dus die laat Hilbertruimte 3 ongemoeid. Vervolgens wordt $U'(\tau')$ toegepast op \mathcal{R} en \mathcal{R}' . Deze tweede meting laat Hilbertruimte 1 ongeschonden en correleert enkel de eigentoestand van de meetwijzer van \mathcal{R} aan de wijzerpositie van \mathcal{R}' . De uitkomst is dan, als we deze meting verrichten op een systeem dat zich al in een superpositie bevindt

$$\sum_{j=1}^N c_j |a_j\rangle_1 \otimes |r_j\rangle_2 \otimes |r'_j\rangle_3 \quad (4.7)$$

We zien dat het metameetsysteem \mathcal{R}' , in exact dezelfde superpositie belandt als het meetsysteem en het objectsysteem. Dit is een proces dat we oneindig vaak kunnen toepassen. Er zullen steeds meer systemen in een verstrengelde⁴ toestand terechtkomen. Hoe kunnen we hier een mogelijke meetuitkomst uit halen?

De oplossing van de orthodoxe interpretatie is het projectiepostulaat. Door het projectiepostulaat wordt op het moment van de meting, de vector $|\psi\rangle$ geprojecteerd op de vector die correspondeert met de meetuitkomst. Om te weten welke vector het is geworden, moeten we de meting ook echt daadwerkelijk uitvoeren. Dit postulaat is er enkel om de theorie aan de daadwerkelijke meetuitkomsten te koppelen. De dynamica, die gegeven wordt het Schrödinger-postulaat, vertelt niet hoe het systeem zich verder zou ontwikkelen tijdens een meting. Het projectiepostulaat is nodig om geen superpositie van uitkomsten, maar een eenduidige uitkomst te krijgen.

Het projectiepostulaat bezorgt de meting een speciale status, omdat er tijdens een meting afgeweken mag worden van het Schrödinger-postulaat. De speciale status is een groot probleem. Er zijn

⁴Een verstrengelde toestand is een toestand waarin verschillende systemen, die zich bevinden in verschillende Hilbertruimtes, met elkaar verstrengeld zijn door middel van de ‘ \otimes ’-operatie.

meerdere fysici die zich bezig hebben gehouden met deze overgang van een superpositie naar een eenduidige eigentoestand. Nu volgt eerst de definitie van het meetprobleem in de smalle zin.

4.3 Smalle Zin

Het meetprobleem in de smalle zin is de vraag, hoe we van de verstrengelde toestand, die de uitkomst van het meetproces in het formalisme is, naar een eenduidig antwoord komen wat overeenkomt met de waarneming? Het meetprobleem in smalle zin zet dus zijn vraagtekens bij het projectiepostulaat. Na een meting bevindt het systeem zich doorgaans in een superpositie van verschillende toestanden, zoals in vergelijking (4.5)

$$|\psi\rangle \otimes |r_0\rangle \rightsquigarrow \sum_{j=1}^N c_j |a_j\rangle \otimes |r_j\rangle \quad (4.8)$$

Hier zijn $|a_1\rangle, \dots, |a_N\rangle \in \text{Spec}A$, dus eigentoestanden uit het spectrum van A , waar A de gemeten observabele is. De uitkomst van (4.8), kunnen we niet interpreteren, want we hebben nog nooit een superpositie waargenomen. Om de uitkomst wel te kunnen interpreteren, zouden we graag zien dat het systeem zich bevindt in een toestand die we wel kunnen interpreteren, namelijk:

$$|a_j\rangle \otimes |r_j\rangle \text{ met kans } |c_j|^2 \quad (4.9)$$

Dit is gelijk aan de het Born-postulaat. We hebben een kans $|c_j|^2$ per mogelijke uitkomst $|r_j\rangle$. Elke $|r_j\rangle$ correspondeert met een wijzerpositie en geeft ons informatie over de toestand van het objectstelsel. We willen nu weten hoe de volgende overgang zich afspeelt: (4.8) \rightsquigarrow (4.9). Zowel Heisenberg als Schrödinger heeft er in 1935 over nagedacht, dit zullen we in twee volgende paragrafen behandelen.

4.4 Heisenbergsnede

De Heisenbergsnede (Heisenberg cut) is een denkbeeldige snede die gemaakt wordt in de oneindige reeks met meetapparaten.[2] Doordat we met het ene meetapparaat het andere meten, komt ieder nieuw meetapparaat in een vergelijkbare superpositie van eigentoestanden terecht. Stel je voor dat we een splitsing aanbrenge in de verzameling van meetapparaten. Het ene deel beschouwen we als klassiek, terwijl we het andere deel nog steeds als kwantumobjecten beschouwen en beschrijven. De klassieke objecten kunnen zich niet in een superpositie bevinden, dus die moeten wel een eenduidige positie innemen. De rest van de systemen volgt de ineenstorting van de superpositie vanzelf doordat de systemen verstrengeld zijn.

Het maakt niet uit waar in de reeks meetsystemen we de snede maken. Aangezien de kans om een bepaalde meetwaarde te vinden niet verandert als we er een meetapparaat aan toevoegen, maakt het ook niet uit hoeveel van de systemen zich in een kwantumtoestand bevinden en hoeveel zich klassiek gedragen.

Volgens Heisenberg is de enige voorwaarde om de snede te plaatsen, dat de snede zich ergens bevindt tussen het kwantumobject en de observatie door de waarnemer. We observeren immers nooit een superpositie van toestanden. De snede lijkt een mogelijke oplossing voor het probleem in de smalle zin, de vraag is nu veranderd. Waarom zetten we de snede op die plek? Doordat er geen formeel verschil is tussen de meetsystemen, is het vreemd om het ene systeem klassiek en de andere kwantummechanisch te beschrijven. Wat is het verschil tussen microscopisch en macroscopisch.

Dat is de plek waar we de snede op de meest natuurlijke manier zouden willen invullen. Dat is echter een plek die we niet absoluut kunnen bepalen.

4.5 Schrödingers Kat

Een mooi voorbeeld van hoe het projectiepostulaat tekortschiet, is Schrödingers kat-paradox. Stel dat we een kat in een doos stoppen. In diezelfde doos stoppen we ook een radioactief deeltje, dat elk moment kan vervallen, met een halfwaardetijd van 1 uur. In de buurt van dat deeltje zit een geigerteller die verbonden is met een hamer. Als het deeltje vervalt, neemt de geigerteller dat waar, de wijzer beweegt en dit zet de hamer in beweging. De hamer slaat een fles blauwzuur stuk. De kat gaat dood. Let op, dit is wat er gebeurt áls het deeltje vervalt. We weten niet óf het deeltje al vervallen is.

Schrödinger zegt hierover

The psi-function of the entire system would express this by having in it the living and dead cat (pardon the expression) mixed or smeared out in equal parts. (p. 157) ([32], translation of [27])

Tot op het moment dat de meting daadwerkelijk gedaan wordt, bevindt de kat zich in beide toestanden tegelijk. De kat is dood en levend tegelijk. Dit gebeurt, volgens Schrödinger, in situaties waarin macroscopische objecten eigenschappen van kwantumobjecten krijgen toegeschreven door correlatie. We zien echter nooit een superpositie van verschillende toestanden van macroscopische objecten, zoals katten. Na een uur kunnen we de situatie als volgt beschrijven:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\sqrt{2} |\text{niet vervallen}\rangle_{\text{deeltje}} \otimes |0\rangle_{\text{geiger}} \otimes |\text{omhoog}\rangle_{\text{hamer}} \otimes |\text{heel}\rangle_{\text{fles}} \otimes |\text{levend}\rangle_{\text{kat}} \\ & + \frac{1}{2}\sqrt{2} |\text{vervallen}\rangle_{\text{deeltje}} \otimes |1\rangle_{\text{geiger}} \otimes |\text{omlaag}\rangle_{\text{hamer}} \otimes |\text{stuk}\rangle_{\text{fles}} \otimes |\text{dood}\rangle_{\text{kat}} \end{aligned} \quad (4.10)$$

De Kopenhaagse Interpretatie lost dit op door het projectiepostulaat. Het projectiepostulaat zegt dat op het moment dat de meting daadwerkelijk verricht wordt, de superpositie ineen stort, *collapses*, naar de toestand die de uiteindelijke meting aangeeft. Dus tot op het moment dat iemand de doos opent en daadwerkelijk een meting verricht, zal de kat dood en levend tegelijk zijn. Dit is niet inzichtelijk of voorstelbaar. Hoe lossen we dit op?

Hoofdstuk 5

Oplossingen

Er zijn verschillende interpretaties van de kwantummechanica die allemaal op een andere manier het meetprobleem oplossen. We zullen drie van deze oplossingen behandelen. We zullen eerst de interpretatie van Wigner behandelen, vervolgens die van Bohm en ten slotte de Many Worlds-interpretatie van Everett.

5.1 Wigner: bewustzijn als oplossing

Wigner lost het smalle meetprobleem op door invloed aan het bewustzijn toe te kennen. Wigners oplossing is er een die niet door iedereen even bevredigend wordt gevonden. Toch heeft deze oplossing een hoop aanhangers. Een van de meest prominente aanhangers is waarschijnlijk Pauli. Volgens Cushing, in [12], was Pauli er fel op tegen om de externe wereld weer te geven zonder de waarnemer en zijn geest op te nemen in het wereldbeeld. Wigners oplossing gebruikt aannames over de uitwerking van het bewustzijn op de wereld.

Het verklaart precies hoe de golf functie van het kwantumdomein, de superpositie, naar het klassieke domein, een eenduidige toestand overgaat. Deze overgang wordt bewerkstelligd door het bewustzijn van de waarnemer. Het meetprobleem in de smalle zin wordt opgelost ten koste van het meetprobleem in de wijde zin. In plaats van de oplossing van het wijde meetprobleem in de natuur te zoeken, wordt de oplossing in het bewustzijn gezocht. Het bewustzijn is iets wat we niet goed begrijpen. Ook de verschillende vormen van bewustzijn die er op deze wereld zijn, leiden tot vragen. Deze vragen zijn vaak zonder antwoord. De bekendste vraag is of Schrödingers kat bewust genoeg is om de golf functie ineen te doen storten. Bell vroeg in zijn artikel *Against 'Measurement'* of de waarnemer een doctoraat in de natuurkunde moet hebben om als waarnemer te gelden[4].

Laten we Wigners precieze formulering van zijn oplossing eens bekijken. Het argument dat Wigner gebruikt om de invloed van het bewustzijn aannemelijk te maken, heet 'Wigners Vriend'.

5.1.1 Wigners Vriend

Wigner introduceert eerst een denkbeeldige natuurwet. Deze natuurwet zegt: de kans om een flits te zien is $\frac{1}{4}$ tegen $\frac{3}{4}$. Als ik op een flits zie op tijdstip t , dan is de kans om geen flits te zien op $t + 1$ gelijk aan $\frac{3}{4}$ en de kans om een flits te zien gelijk aan $\frac{1}{4}$. Als ik geen flits zie op een willekeurig tijdstip t , dan is het andersom; de kans om een flits te zien op $t + 1$ gelijk aan $\frac{3}{4}$ en de kans om geen flits te zien gelijk aan $\frac{1}{4}$. Dit kan voorgesteld worden als een vector $|\psi_1\rangle$ corresponderend met de toestand dat er net wel een flits is gezien, en een vector $|\psi_2\rangle$, als er geen flits is gezien.

De toestandsvectoren voorspellen de kansen op de mogelijk waarneembare meetuitkomsten: wel of geen flits zien.

In de kwantummechanica kunnen we een meting doen van een observabele, waarna het meetapparaat in dezelfde superpositie van toestanden terecht komt. Als we nu nog geen meting hebben gedaan, dus nog niet hebben gekeken of er een flits te zien was, dan bevindt het systeem zich in de toestand $\frac{1}{4}|\psi_1\rangle + \frac{3}{4}|\psi_2\rangle$. Stel dat we een meting doen, bijvoorbeeld een apparaat dat kijkt naar flitsen, dan bevindt na de meting het apparaat zich in dezelfde toestand, verstrengeld met het flitssysteem. Dit hebben we in het vorige hoofdstuk reeds gezien.

Als we zelf kijken of er een flits is, dan zien we altijd wel of geen flits. Als we zelf een flits zien, bevinden we ons nooit in een superpositie. Stel nu dat we Wigners vriend als meetsysteem nemen. Wigners vriend zit te wachten op de flits. Wij weten niet of hij een flits gezien heeft. Voordat hij ons verteld of hij wel of niet een flits gezien heeft, bevindt hij zich, volgens de kwantummechanica, in een superpositie van mogelijke toestanden verstrengeld met het flitssysteem. Op het moment dat hij ons bevestigend, dan wel ontkennend antwoord geeft op de vraag of hij een flits gezien heeft, stort de superpositie van de vriend ineen tot van beide toestanden.

Stel dat we Wigners vriend vragen of hij al voordat hij ons antwoordde zich bewust was van het waarnemen van een flits. Wigners vriend zal altijd zeggen dat hij al voordat de golf functie voor ons in elkaar stortte, zich bewust was van het flitssysteem. Voor hem stortte de superpositie ineen op het moment dat hij zelf het flitssysteem observeerde op tijdstip t . Voor iedere bewuste waarnemer zal het zijn alsof de golf functie in elkaar stort op het moment dat hij zelf observeert.

5.1.2 Bewustzijn

Wigner maakt de aanname dat zijn vriend een eigen bewustzijn heeft. Het is mogelijk om solipsisme aan te hangen, waardoor de vriend geen bewustzijn zou hebben. Dit is niet weerlegbaar, maar het is een onwerkbare hypothese en valt om die reden af. De aanname van het toekennen van een bewustzijn aan de vriend is hierdoor niet problematisch. Wigner zegt dat alle informatie van het bewustzijn van een ander persoon via de fysische wereld verloopt. Maar hoe kunnen we de interactie van een bewustzijn met de wereld waarnemen?

Wigner beargumenteert dat het bewustzijn de golf functie ineen doet storten. Hij gebruikt hiervoor een ander fysisch argument; de alom geaccepteerde claim van actie-reactie. Aangezien de wereld om ons heen indrukken achterlaat op ons bewustzijn, is het voor te stellen dat ons bewustzijn ook invloed uitoefent op de externe wereld. Wigner maakt hier expliciet de scheiding tussen lichaam en geest. En stelt dat het ook mogelijk zou moeten zijn om invloeden van het bewustzijn op de wereld waar te nemen, hoe vruchteloos deze pogingen in het verleden ook geweest zijn.

5.2 Bohm: meting is slechts interactie

Om Bohms oplossing van het meetprobleem te behandelen, moeten we eerst een kleine introductie geven in zijn theorie. De Bohmse mechanica is een interpretatie van de kwantummechanische formules die gebruikt maakt van verborgen variabelen.

De Bohmse mechanica is in zijn eerste vorm geïntroduceerd door Louis de Broglie op de Solvay Conferentie van 1927 [3]. De Broglie heeft toen een causale interpretatie gegeven van de werking van de kwantumwereld. Deze interpretatie is toen weerlegd door Wolfgang Pauli, hoewel uit Bacciagaluppi en Valentini's transcript van de conferentie is gebleken dat de Broglie alle benodigde ingrediënten voor een weerlegging heeft vermeld. Verslagen heeft de Broglie zijn interpretatie opgegeven en heeft hij zich enkel nog beziggehouden met de orthodoxe interpretatie. Totdat hij in 1952 een artikel van Bohm onder ogen kreeg. Hij herkende zijn eigen idee en sloot zich meteen bij Bohm aan.

De nieuwe insteek die Bohm aan de orthodox kwantummechanische interpretatie heeft gegeven is dat de objecten een positie hebben. In de orthodoxe kwantummechanica kunnen we enkel spreken over positie in de context van het meetapparaat. In de Bohmse mechanica gaan we er van uit dat alle objecten een actuele positie hebben[7]. Het Schrödinger-postulaat geeft een vergelijking voor de functie ψ . We weten dat ψ complex is. De vergelijkingen die Bohm vindt lijken op de klassieke Hamilton-Jacobi vergelijkingen. In het Hamilton-Jacobi formalisme wordt een deeltje voortgestuwd op een potentiaal golf.

Bohms interpretatie wordt gevormd door voor de golf functie een complex getal in te vullen in zijn polaire vorm¹. Hij vult in $\psi = Re^{Si/\hbar}$. De \hbar zorgt er voor dat de uitkomsten gekwantiseerd zijn. Er komen twee differentiaalvergelijkingen uit die het verloop van de S en de R bepalen. De R wordt geïnterpreteerd als de waarschijnlijkheid en S wordt geïnterpreteerd als het golfpakket. Het deeltje heeft een positie en wordt voortgestuwd door de golf.

We geven hier nu de vergelijkingen, daarnaast zullen we de beschrijvingen van de vergelijkingen in woorden proberen te vatten.

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{1}{2m}[R\nabla^2 S + 2\nabla R \cdot \nabla S] \quad (5.1)$$

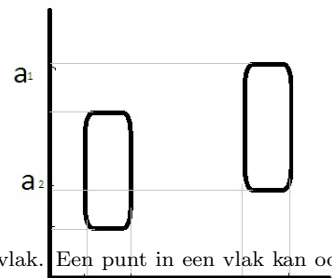
$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\left[\frac{(\nabla S)^2}{2m} + V(\mathbf{x}) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R}\right] \quad (5.2)$$

In plaats van een ontologie met een golf of een deeltje, heeft de Bohmse mechanica een golf én een deeltje. Het deeltje wordt voortgestuwd door de golf en de golf wordt beschreven door de S . Verder is er een verzameling van mogelijke paden dat het deeltje kan volgen, allemaal loodrecht op het golf front. We zien dat de enige formule waarin \hbar nog staat, de differentiaalvergelijking voor S is. Als we \hbar in deze tweede term in de vergelijking gelijkstellen aan 0, blijft er enkel nog de Hamilton-Jacobi vergelijking over voor S . De interpretatie van S is hierdoor voor de hand liggend, we interpreteren S op eenzelfde manier als een klassieke Hamilton-Jacobi golf. De tweede term in de vergelijking voor S , de term met \hbar , veroorzaakt het vreemde kwantumgedrag. De rest van de formule is immers klassiek.

R wordt beschouwd als een waarschijnlijkheidsverdeling, waardoor de verschillende mogelijke paden een kans krijgen toebedeeld. Een van de mogelijke paden die een object aflegt, is actueel, R geeft de onzekerheid over welk pad actueel is.

Doordat er enkel positie bestaat in de Bohmse interpretatie, is een meting van een observable die niet positie is, altijd slechts een contextuele meting van het object. De plaats van het object ten opzichte van de golf, en de positie van de golf ten opzichte van het meetapparaat, geven ons de uiteindelijke meetwaarde. De positie van het deeltje bepaalt de uiteindelijke uitkomst. De oplossing van het wijde meetprobleem is snel gevonden. Het proces ‘meten’ is in de Bohmse mechanica bijzonder helder; het is slechts een weergave van de positie van een deeltje.

Het meetprobleem in de smalle zin wordt op een iets complexere manier opgelost. Doordat de verschillende golfpakketten niet overlappen, en dit is een redelijke eis, we kunnen immers ons meetapparaat er op construeren, zal de uiteindelijke toestand factoriseren. Doordat de toestand is gefactoriseerd zullen er zich twee gescheiden golfpakketten vormen. Hierdoor kan het Bohmse deeltje zich niet van het ene naar het andere golfpakket begeben.



¹Ieder complex getal kan uitgedrukt worden als een punt op het complexe vlak. Een punt in een vlak kan ook beschreven worden door een afstand en een hoek te specificeren. Het complexe getal z is ook uit te drukken als $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$. Hierbij geeft r de lengte van de vector, terwijl de sinus en de cosinus de hoek specificeren op het complexe vlak. We weten dat we de sinus en de cosinus kunnen omschrijven naar een macht van de natuurlijke constante e , namelijk: $\cos \alpha + i \sin \alpha = e^{i\alpha}$. Hier zijn $r, \alpha \in \mathbb{R}$.

Figuur 5.1: Wijzertoestanden (r_1, r_2) en eigenschappen (a_1, a_2) .

Dit moet even toegelicht worden. In de Bohm theorie bewegen deeltjes zich voort in de configuratieruimte. Ze bevinden zich in golfpakketten. De superpositie die ontstaat na een meting, koppelt meerdere golfpakketten aan elkaar. We kunnen de wijzertoestanden zo kiezen dat ze niet overlappen. Dat betekent dat de objecttoestanden waarmee de wijzertoestanden gecorreleerd zijn, nu ook niet meer overlappen [20][16]. Zie Figuur 5.1. Aangezien het Bohmdeeltje een positie heeft en zich niet buiten de golfpakketten kan begeven, zal er altijd een eenduidig antwoord uit de meting komen. Een meting is hierdoor niets anders dan ordinaire fysische interactie waarbij een van de systemen geheel nietoverlappende golfpakketten heeft.

5.3 Many Worlds: elke toestand in een superpositie vertegenwoordigt een wereld

every quantum transition taking place on every star, in every galaxy, in every remote corner of the universe is splitting our local world on earth into myriads of copies of itself

– Bryce S. DeWitt, 1970 (p.161 in [13])

De oplossing die wij hieronder zullen behandelen is de veel-werelden-interpretatie (Many Worlds) van H. Everett, J.A. Wheeler en B. DeWitt. De oplossing zal aan de hand van een artikel van Bryce S. DeWitt gegeven worden, *Quantum Mechanics and Reality* [13]. De Many-Worlds oplossing van het meetprobleem dat elke vector uit de superpositie van vectoren een reële wereld beschijft. Waarbij in elke wereld de meting een eenduidige waarde geeft. Dit idee klinkt bizar, maar het kent aanhangers en wordt serieus genomen om verschillende redenen.

5.3.1 De EWG theorie

De EWG theorie, opgesteld door Everett, Wheeler and Graham, beweert het meetprobleem op te kunnen lossen op de volgende manier;

1. Door alleen gebruik te maken van het mathematische formalisme van kwantummechanica zonder verdere toevoegingen.
2. Zonder de ineenstorting van de superpositie nodig te hebben.

De Many Worlds-aanhangers stellen dat de ‘echte’ wereld, of een gedeelte daarvan, gerepresenteerd wordt door de volgende mathematische objecten;

1. Een vector in Hilbert Ruimte.
2. Een verzameling dynamische vergelijkingen.

Er is maar één postulaat nodig om de fysische betekenis aan de wiskundige objecten te geven, dit postulaat is het volgende; De wereld moet opdeelbaar zijn in systemen en (meet)apparaten. De Many Worlds-interpretatie beweert dus dat het mathematische formalisme zijn eigen interpretatie bevat. Wanneer je dit stelt moet je de volgende vraag beantwoorden; Hoe kan een de superpositie van toestanden, die nooit ineenstort, overeenkomen met de werkelijkheid?

Het verschil tussen het begrip *kans* in de statistische mechanica en *kans* in de QM, is dat in de statische mechanica kans voortkomt uit een onwetendheid en het begrip kans in de QM absoluut

is. Wanneer in de statistische mechanica meerdere metingen worden verricht wordt de kans om iets te weten groter. In tegenstelling tot QM waarbij de kans absoluut is en meerdere metingen de waarschijnlijkheid niet aanpassen door meer informatie over het systeem weer te geven. De kansen op een bepaalde meetuitkomst, zijn altijd hetzelfde en worden door metingen niet verhoogt.

De Many Worlds-theoretici beweren dat de toestandvector het werkelijke universum beschrijft. Als er een meting gedaan wordt aan de toestandsvector, dan wordt deze ontbonden in de basis die hoort bij het spectrum van de operator die correspondeert met de gemeten observabele. Deze superpositie van eigentoestanden van de observabele, correspondeert volgens de Many Worlds-interpretatie, met een superpositie van mogelijke werelden. Elke vector in de superpositie beschrijft een wereld.

Dit meerdere werelden concept kan zeer onwerkelijk overkomen. Hoe is het mogelijk dat de wereld, en wij daarin, continu opgesplitst worden wanneer er interacties voorkomen. Wij merken niet dat deze opsplitsing plaatsvindt. Dit kan als volgt worden uitgelegd: Wanneer we, zoals eerder beschreven, een tweede meetsysteem zouden introduceren, creëren we een verstrengeling van meetsystemen. Het tweede meetsysteem meet het eerste meetsysteem. De resultaten van beide meetsystemen komen overeen, zoals we dit ook in het vorige hoofdstuk hebben beschreven. De ineenstorting van de superpositie vindt niet plaats, omdat alle meetsystemen² dusdanig verstrengeld zijn dat ze per toestand van het objectsysteem, allemaal exact de corresponderende meettoestand hebben. We merken hierdoor nooit de overgang van de superpositie naar de eenduidige toestand. Dus ook nooit de overgang van één wereld, naar een wereld uit een set van mogelijke werelden. Omdat er geen meetsysteem buiten de vectortoestand van het universum bestaat die kan bepalen welk van de vectoren in de superpositie de ‘echte’ wereld beschrijft, moeten we stellen dat elke vector even echt is, waarbij elke wereld onwetend is van elke andere wereld.

Iedere vector in de superpositie heeft een bepaalde kans, deze kans komt overeen met de kansen die het Born-postulaat ons geeft. Deze toestandsvector kan worden gezien als een boom met enorm veel vertakkingen, die zich dus ook telkens opdelen wanneer er een interactie is. Hieruit is er dus een toestandvector te schrijven voor het gehele universum. Dit is voor te stellen als een boom, waarin elke tak van de boom een mogelijke wereld representeert. De kansinterpretatie geeft dan de waarschijnlijkheid om je te bevinden op een van de takken van de boom. De oorsprong van deze kansinterpretatie emergeert volgens de Many-worlds theoretici uit niets meer dan het formalisme. Dit is echter een drogreden waar wij niet verder op in zullen gaan.³

Connectie met de Werkelijkheid

Het antwoord op de vraag hoe de Many-Worlds theorie correspondeert met de werkelijkheid is duidelijk; wanneer je elke toestand als een werkelijke wereld ziet, heb je helemaal geen last van een superpositie. Er is maar een vector voor elke wereld. Er is geen superpositie van toestanden in een wereld, er is een superpositie van werelden met elk een toestand. Er is geen sprake van een ineenstorting, om de simpele reden dan er geen superpositie is op het niveau van de wereld. Op elk moment in de tijd, bevinden we ons maar in één wereld. Hierdoor kunnen we altijd beginnen met rekenen met 1 toestand, die niet in een superpositie is.

“In brief, it is what allows us to start at any point in any branch of the universal state vector without worrying about previous or simultaneous branches” (p.164) (De Witt in [13])

De grootste zwakte van de Many Worlds-Interpretatie ligt in de experimentele voorspellingen, deze komen namelijk overeen met de orthodoxe interpretatie. Geen enkel experiment kan de ‘andere’

²Dit is een willekeurig lange keten.

³Een formalisme zonder een interpretatie is louter een mathematisch construct zonder correspondentie met de werkelijkheid

werelden blootleggen, en zo de theorie verifiëren. De bizarre implicatie van meerdere werelden kan tot noch toe niet worden uitgesloten. Het ligt in de theorie verborgen dat dit nooit zal kunnen, wat ons met het zogenaamde 'onderdeterminatie-probleem' oplevert. Hierover komen wij in onze conclusie te spreken.

Deel II

Interpretaties en Realisme

Hoofdstuk 6

Meerdere Oplossingen, Een Wereld

Er zijn meerdere oplossingen. Er is maar één wereld. Hoe kunnen we meerdere oplossingen hebben en toch het realisme aanhangen? Deze vraag zullen we proberen te beantwoorden in hoofdstuk 7. Laten we eerst kijken naar de wereldbeelden die de drie verschillende interpretaties ons leveren.

6.1 Wigner

Laten we eens kijken naar de processen die er feitelijk gebeuren volgens Wigners interpretatie van het meetprobleem. Eerst de ontologie: Wigner's interpretatie een uitbreiding op de Kopenhaagse Interpretatie. De Kopenhaagse Interpretatie zegt dat we voor de ineenstorting nog geen klassieke eigenschappen kunnen toeschrijven aan het object. Het object heeft geen eenduidige toestand voordat de superpositie ineen gestort is. De ineenstorting wordt door ons bewustzijn bewerkstelligd.

Tijdens de meting bevindt het systeem zich in een superpositie van mogelijke meetuitkomsten. Dit is niet wenselijk, want deze beschrijving sluit dan niet meer aan op de manier waarop we het systeem daadwerkelijk waarnemen. Wigners oplossing zegt dat ons bewustzijn slechts één toestand kan waarnemen, en dat ons bewustzijn de ineenstorting veroorzaakt. Een mogelijke voorstelling van hoe ons bewustzijn de ineenstorting veroorzaakt, is dat men, door introspectie, precies weet welke van de toestanden het geval is.

Als we onze wetenschappelijke theorie laten leunen op de onbegrepen notie van het bewustzijn, dan wordt de externe natuur afhankelijk van ons interne bewustzijn. Als ons bewustzijn een onderdeel is van de natuur die we beschrijven, hoe kunnen we dat dan vanuit ons bewustzijn doen? Dit brengt een soort van tegenstrijdigheid met zich mee die niet gewenst is in een fysische theorie. Daarnaast wordt het begrip over de werking van de natuur in de weg gestaan door ons onbegrip over de werking van het bewustzijn. Wigner claimt dat de natuur gescheiden is van ons bewustzijn, maar dat ons bewustzijn er wel invloed op uitoefent. Nu moeten we alsnog proberen ons bewustzijn te analyseren om het proces, de ineenstorting, te kunnen beschrijven.

Hierbij maken we gebruik van introspectie en dat is een bijzonder subjectieve methode om een objectieve theorie te onderbouwen. De ineenstorting van de superpositie wordt bewerkstelligd en het projectiepostulaat wordt toegepast. De reden om het projectiepostulaat toe te passen vinden wij niet mooi, maar daar kunnen de meningen over verschillen.

6.2 Bohm

In de Bohm theorie zijn de deeltjes reëel. De paden die ze afleggen zijn ook reëel. We weten echter niet welke van de paden actueel is. De paden van de deeltjes bevinden zich in configuratieruimte. Een configuratieruimte heeft $3N$ dimensies, met N het aantal deeltjes. Stel we nemen een deeltje, dit heeft een aantal mogelijke paden, orthogonaal op de richting van het golffront, allemaal in 3 dimensies. We doen een meting: Op het moment dat we een macroscopische wijzerpositie correleren met een pad in de configuratieruimte, krijgt dit pad, samen met deze wijzerpositie, een eigen 3 dimensies. Er is dan een nieuw object bijgekomen, namelijk de wijzerpositie. Er bevinden zich op dat moment paden in 6 dimensies, de mogelijke paden met de wijzer nog niet uitgeslagen in de ene 3 dimensies, en het specifieke pad gecorreleerd met de nieuwe wijzerpositie in de andere 3. Dit is allemaal in de beschrijving. Van deze twee ruimtes met 3 dimensies, is er maar één actueel. We weten echter nog niet welke van de twee dat is. We kunnen hier makkelijk achter komen door te kijken naar de macroscopische wijzertoestand.

Waar in de orthodoxe interpretatie sprake is van een superpositie en een ineenstorting daarvan, is in de Bohmse mechnica de superpositie van toestanden slechts een beschrijving van onze onwetendheid. De ineenstorting hiervan is geen veractualisering van een toestand, maar een onzekerheid die wegvalt. Er is al een actuele toestand.

6.3 Many Worlds

Many Worlds-interpretatie stelt dat er meerdere werelden bestaan naast de actuele wereld waarin wij ons bevinden. Iedere keer dat er een meting (interactie) plaatsvindt, splitst de wereld zich op waardoor de mogelijke uitkomsten van de meting allemaal gerealiseerd worden, ieder in een eigen wereld.

Als we refereren aan een kat, dan bedoelen we dat er geen superposities (dood, levend, etc.) mogelijk mogen zijn in een wereld en dat de positie en een toestand van de kat eenduidig gedefinieerd zijn. In elke wereld bevinden alle objecten in een eenduidige toestand. Tijdens de meting zijn al deze toestanden reëel, maar is er nog onzekerheid over welke actueel is. Na de meting zijn alle werelden nog steeds reëel, maar er is maar één actuele wereld.

De huidige wereld heeft volgens deze theorie, één wereld in het verleden die met de huidige correspondeert, maar een meervoud aan werelden in de toekomst die met de huidige correspondeert.

Wanneer we de toestand van een object als volgt definiëren; $|\psi\rangle_{object}$ dan kunnen we de toestandsvector van de wereld opschrijven en ook die van het universum. In de volgende vergelijking worden objecten gezien als macroscopische toestanden.

$$|\psi\rangle_{wereld} = |\psi\rangle_{object_1} \cdots |\psi\rangle_{object_n} \quad (6.1)$$

Van hieruit kunnen we makkelijk de toestandsvergelijking opschrijven voor het universum.

$$|\psi\rangle_{universum} = \sum a_i |\psi\rangle_{wereld_i} \quad (6.2)$$

Deze beschrijving van het universum mag hooguit een benadering genoemd worden, dit mede door het feit dat een object geen precieze wiskundige definitie kent.

ordinary quantum mechanics is just fine for all practical purposes (p.33) (Bell in [4])

Dit is een van de problemen waar wij het in deze scriptie over hebben, de kloof tussen de beschrijving en de werkelijkheid. Toch is deze toestandsvector voor het universum in de praktijk nuttig,

o.a. voor Stephen Hawking, zodat hij het universum in zijn geheel kan beschrijven in plaats van een klein systeem te beschrijven [18].

Ten slotte komt er uit het QM formalisme voort dat de QM toestand van het universum op oneindig veel manieren te ontbinden is in superposities van toestanden. Welke decompositie van toestanden moet je dan kiezen, want een andere keuze kan leiden tot een ander wereldbeeld.

6.4 Overeenkomsten

Er zijn overeenkomsten tussen de drie interpretaties. Alledrie gaan ze van een superpositie van mogelijke meetuitkomsten, naar een enkele meetuitkomst die klassiek interpreteerbaar is. Dit is natuurlijk ook al voor het opstellen van de interpretaties een van de vereisten; als een natuurkundige theorie niet aansluit bij onze waarneming, is hij onwaar.

De overeenkomsten tussen de Bohm interpretatie en de Many Worlds-interpretatie, zijn ook erg fraai. In de Bohm interpretatie is er één actueel pad, en de rest van de paden is enkel aanwezig door onze onzekerheid over welke van de paden actueel is. In de Many Worlds-interpretatie, wordt de actuele wereld achteraf bepaald. Voor de waarneming van de meting, zijn de werelden allemaal mogelijk [29]. De twee interpretaties lijken hierdoor bijzonder veel op elkaar. Ze hebben allebei slechts één actuele toestand. Beide interpretaties correleren een nieuwe wereld met een meettoestand. In de Bohm theorie gebeurt dit door een nieuwe 3 dimensies te creëren voor een pad dat gekoppeld wordt aan een nieuwe wijzerposititie van een object op macroniveau. Dit is een mogelijke uitkomst, die weten we alleen nog niet zeker. In de Many Worlds-interpretatie wordt er voor iedere mogelijke wijzerpositie een nieuwe reële wereld gecreëerd.

De Wigner-interpretatie is hierin, als enige collapse-interpretatie, een beetje een vreemde eend in de bijt. Toch zijn de uitkomsten van deze interpretatie net zo passend als die van de anderen. Alledrie de interpretaties sluiten aan bij de empirische waarneming.

Hoofdstuk 7

Conclusie

Even recapituleren; op welk punt zijn we beland? We hebben de (kwantum)wereld. We hebben de meetgegevens van deze wereld. We hebben het formalisme in combinatie met een interpretatie, die de meetgegevens verklaren. Het formalisme is een mathematisch construct waarmee metingen gekoppeld worden aan verschillende meetuitkomsten. Om de mathematische structuur fysische betekenis te geven, is er een interpretatie van het formalisme nodig [14]. Dit soort interpretaties koppelt een theoretisch construct aan een beeld van de werkelijke wereld. Door een mathematische term een betekenis te geven, refereert er een object in de theorie aan een entiteit in het wereldbeeld van de interpretatie. Vaak wordt er een ontologische betekenis aan gegeven, maar er is in ieder geval een betekenis van de term gegeven binnen die bepaalde interpretatie.

Als we de orthodoxe QM voor waar aannemen, het formalisme in combinatie met de postulaten, dan komen we in de problemen. De theorie definieert niet wanneer iets een meting is. In de postulaten wordt er gesproken van een meting. We pogen de natuur op zich te beschrijven, maar nu lijkt de beschrijving van de natuur ineens afhankelijk van onszelf, omdat een meting impliceert dat er met een bepaalde intentie interactie is met het object. De intentie is het achterhalen van informatie. Hierdoor worden natuurlijke interacties, interacties zonder intentie¹, buitengesloten. Hierdoor worden objectieve beschrijvingen worden subjectief.

Daarnaast bestaat er een probleem dat zich voordoet bij het meetproces. In de postulaten wordt aangegeven dat tijdens het ongedefinieerde meetproces er een bijzondere overgang plaatsvindt. De overgang van een superpositie van toestanden naar een eenduidige toestand.

Er dienen zich drie oplossingen aan² die deze beide problemen oplossen. Deze interpretaties geven ons alledrie een ander wereldbeeld. Er kan maar één wereldbeeld waar zijn, want er kan er maar één corresponderen met de actuele werking van de natuur.

We kunnen nu twee dingen doen:

- We kunnen niet vaststellen welke interpretatie waar is, maar wetenschappelijk realisme aan blijven hangen. Hierdoor stellen we dat we de werkelijkheid niet kunnen kennen, maar er is wel een ware beschrijving. We zijn onwetend over de waarheid van een interpretatie.
- We kunnen niet vaststellen welke interpretatie waar is, maar wetenschappelijk realisme verwerpen. Hierdoor verandert het doel van de wetenschap. We kunnen ons afvragen wat we wél van de natuur kunnen kennen.

De eerste mogelijkheid verteld ons wat we niet kunnen kennen van de werkelijkheid. Wij willen

¹We maken hier de aanname dat gebeurtenissen in de natuur geen doel op zich hebben, dit doel wordt altijd door ons aan de wereld opgelegd.

²Er zijn meerdere oplossingen mogelijk, maar we bespreken er maar drie.

graag weten wat we wel kunnen kennen. Wij zullen ons daarom focussen op de tweede mogelijkheid.

We zullen nu eerst bespreken hoe het komt dat we niet kunnen vaststellen welke interpretatie waar is. Vervolgens zullen we een pragmatisch doel van de wetenschap introduceren. Hieruit kunnen we dan afleiden wat er nog wel over de natuur te zeggen valt. We komen op het eind tot de conclusie dat verschillende ontologieën wel degelijk kennis toevoegen aan ons inzicht in de werkelijkheid.

7.1 Onderdeterminatie en Theorieladenheid

Every theory is as well supported by the evidence as any of its rivals (p. 324) (Laudan in [23])

Wanneer op basis van logische gronden geen uitsluitel te bieden valt over welke interpretatie te prefereren boven de andere komen we uit op de onderdeterminatie van de theorieën door meetgegevens. Pogingen om erachter te komen welke theorie de juiste is, mislukken, of zijn in het ergste geval niet eens mogelijk. Er zijn vaak geen beslissende experimenten denkbaar.

Pierre Duhem legt de basis van onderdeterminatie in zijn essay *The Aim and Structure of Physical Theory* [15]. Later breidt Willard V. O. Quine [11], dit idee uit tot het geheel van verkregen kennis en spitst zich dus niet alleen toe op de wetenschap. In ons geval houden we het binnen de wetenschap, zoals Laudan al zegt in het citaat hierboven: De ontoereikendheid van het bewijs om uitsluitel te geven om de ene theorie boven de andere te verkiezen.

Daarnaast kan een theorie nooit bevestigd worden. Dit zegt Popper in zijn *Logic of Scientific Discovery* [24]. We moeten een theorie falsifiëren. Het is niet mogelijk om een theorie te bevestigen door experimenten, omdat de meetuitkomsten binnen de theorie zelf uitgelegd moeten worden³. Hierdoor is de zogenaamde bevestiging door de experimenten, al een onderdeel van de theorie en dus zelf behoeftig aan bevestiging. We moeten de meetuitkomsten altijd interpreteren binnen een theorie. Dit fenomeen heet de theoriegeladenheid van observatie.

Op macroscopisch niveau komen onze overtuigingen over de wereld grotendeels overeen. Overtuigingen als, “De bal is rond.”, “De bieb is zwart.” zijn niet controversieel. We krijgen een set van indrukken binnen, en daarmee vormen we een beeld van de werkelijkheid. Als we de menselijk waarneming⁴ als meetstelsel beschouwen, dan krijgen we zoveel informatie over de objecten op macroscopisch niveau, dat er consensus bestaat. Als er een macroscopisch experiment in een laboratorium gedaan wordt dan krijgen we via onze ogen, extra informatie binnen over de interpretatie van de gegevens.

In de kwantummechanica hebben we geen extra informatie uit directe observatie van het object. Alle informatie die wij van de kwantumwereld hebben, is in termen van meetuitkomsten. Dit is precies waar we geen eenduidige verklaring voor hebben, er is geen *anschauliches* weergave van het object. Alle informatie zit verstopt in een uitleg van de meetresultaten binnen een interpretatie, de juistheid van zo’n veronderstelling wordt wederom bepaald door de interpretatie⁵. We hebben

³Een voorbeeld hiervan is de bevestiging van de ether-theorie, door de meetuitkomsten van een experiment uit te leggen in termen van ether, en hierdoor te concluderen dat ether-theorie correct is en ether bestaat.

⁴Over waarneembaarheid kan ook een debat gevoerd worden. In het licht van dit onderzoek denken we dat we het best kunnen zeggen, dat de meetresultaten die een macroscopisch object aangeeft als waarneembaar kunnen stellen. Een eenhoorn is ook waarneembaar, maar wordt niet waargenomen. Het gaat dus niet over de gepostuleerde waarneembaarheid van een entiteit, maar over de daadwerkelijk waargenomen toestanden, waarin dus het menselijk lichaam als meetapparaat van dit soort objecten fungeert.

⁵Dus een kwantummechanische propositie P bevat elementen, die enkel betekenis en waarheid krijgen binnen het raamwerk van proposities dat hoort bij de interpretatie waar P een propositie uit is. Bijvoorbeeld het pad van een Bohmiaans deeltje, is niet toepasbaar op systemen binnen de Kopenhaagse Interpretatie. Binnen de Kopenhaagse Interpretatie kunnen we helemaal niet spreken van een pad. De paden in Bohm theorie bevinden zich in de configuratieruimte. Een positie in een configuratieruimte heeft ook enkel betekenis in een theorie die dit verklaard. Het kan niet zomaar geprojecteerd worden op de Euclidische ruimte, dan verliest het pad weer zijn

een interpretatie nodig van hoe de processen achter de metingen de meetresultaten beïnvloeden. Wij hebben hiervoor de interpretaties van Bohm, Wigner en Everett genomen.

Om de waarheid van een interpretatie vast te stellen, zouden we een bijectie van de interpretatie naar de objecten in de werkelijkheid moeten hebben. Dit is echter niet mogelijk: alles wat we hebben zijn interpretaties van de meetgegevens. Er is geen extra informatie over de kwantummechanische processen en systemen, om zo'n bijectie te construeren.

We kunnen niet meer weten welke interpretatie waar is.

7.2 Pragmatisme

We kunnen de waarheid van een interpretatie niet vaststellen. Onder de aanname van wetenschappelijk realisme is dit wel wenselijk. We kunnen niet langer het doel van wetenschap nastreven dat we al sinds het begin van dit paper aanhangen. Dit doel was om de werkelijkheid waar te beschrijven. We stellen voor om het doel van wetenschap aan te passen. Ons nieuwe doel wordt om de meetgegevens te verklaren. We kunnen de meetgegevens verklaren met de verschillende interpretaties.

In zijn boek, *The Scientific Image*, uit 1980, introduceert Bas van Fraassen een antirealistische positie die hij empirisch constructivisme noemt. Empirisch constructivisme wordt gekenschetst door de volgende slogan:

Science aims to give us theories which are empirically adequate; and acceptance of a theory involves as belief only that it is empirically adequate. (p. 12) (van Fraassen in [30])

Alle interpretaties die behandelt zijn, zijn empirisch adequaat. Alles wat nodig is, is dat de theorie aansluit bij de meetgegevens. Het geloof in de empirische adequaatheid is genoeg om een theorie aan te hangen volgens van Fraassen. Dit is in tegenstelling tot het wetenschappelijk realisme. In het wetenschappelijk realisme is er een geloof in de waarheid van de interpretatie nodig om de termen binnen de interpretatie betekenis te geven.

Verderop in het boek zegt van Fraassen:

[E]mpirical adequacy does not require truth; in my view, science aims only at empirical adequacy and anything beyond that is not relevant to its success. (p. 198) (van Fraassen in [30])

Hij verwerpt waarheid als een criterium voor het succes van wetenschappelijke theorieën. De interpretaties worden enkel nog beoordeeld op hun toepasbaarheid. In ons project is dit bijzonder handig, want de verschillende interpretaties postuleren allemaal processen die ten grondslag liggen aan de waarneming, die zelf niet resulteren in een nieuw empirisch feit⁶. Het waarheidsgehalte van de claims voorbij de waarneembare feiten is niet vast te stellen en dus ook niet interessant.

We hebben nu verschillende interpretaties, allemaal mogelijk toepasbaar, die leiden tot verschillende wereldbeelden. De wereldbeelden sluiten elkaar uit. Maar de wereldbeelden geven, doordat ze overeenkomen met de meetresultaten, wel een mogelijke interpretatie van de werkelijkheid. Het

causale verklaring, wat de reden was dat het pad geïntroduceerd kon worden[5]. Dit geeft de theoriegeladenheid van kwantummechanische interpretaties goed weer.

⁶Behalve Wigner's interpretatie, maar de invloeden van het bewustzijn zijn, naar ons weten niet waargenomen binnen een wetenschappelijk verklarend raamwerk. Er zijn de voorbeelden van waterkristallen die ander vormen aannemen door menselijk denken, maar aangezien dit hoogst controversieel is, willen wij dit niet als een pre voor Wigner's interpretatie laten gelden.

conjunct van alle mogelijke interpretaties levert meer inzicht over de wereld dan elk wereldbeeld apart, hier komen we later nog op terug.

Doordat de wereldbeelden niet tegelijkertijd toepasbaar zijn, ze postuleren immers een conflicterende ontologie, gebruiken we er per situatie maximaal één. We kunnen per situatie vrij kiezen welke interpretatie we gebruiken. Het lijkt alsof we een relativistische wereldbeeld aanhangen. Dit is niet de bedoeling, want dan verliezen we alle zekerheid van stellingen die we over de wereld kunnen maken. Er is wel degelijk een zekerheid over de wereld die wij kunnen kennen. Dit komt voort uit een disjuncteliminatie van datgene wat in alle interpretaties gelijk is: De manier waarop de empirische meetgegevens zich tot elkaar verhouden.

7.3 Werkelijkheid en Interpretatie

We hebben drie mogelijke interpretaties geschetst, van hoe de processen op kwantumniveau verlopen op het moment dat er een meting gedaan wordt. Een oplossing van het meetprobleem in de smalle zin moet een verklaring geven hoe het formalisme aansluit bij onze klassieke fysische beschrijving van de wereld. Het formalisme beschrijft een superpositie van toestanden terwijl we slechts één toestand waarnemen. We moeten de interpretatie van het meetproces zo kiezen, dat het aansluit bij wat we waarnemen. Dieks zegt hierover, in 1991:

There is a certain freedom in establishing a link between the mathematical structure and the real world. In principle, the only restriction is contained in the requirement that the theoretical structure should be in a mapping-relation with the structure of physical characteristics by means of which the real world is described.(p.79) (Dieks in [14])

Hier zit de daadwerkelijke koppeling tussen de kwantumwereld en de macroscopische wereld, waarin we ons zo vertrouwd kunnen rondbewegen. Het formalisme moet zo worden geïnterpreteerd dat het aansluit bij onze meetgegevens. Het meetprobleem gaat precies over deze interpretatiestap. Maar wat zegt zo'n interpretatie over de natuur? Doordat er ware voorspellingen gedaan worden, kunnen we ervan uitgaan dat er een essentie van de wereld beschreven wordt door deze verschillende interpretaties.

Deze interpretaties hebben alledrie het formalisme gemeen. Dit formalisme geeft een bepaalde structuur weer. Dit is een axiomatische structuur. Sommige axiomatische stelsels zijn toepasbaar op verschillende plekken in de werkelijkheid. Een mooi voorbeeld hiervan wordt gegeven door een brief van Hilbert aan Frege [6][17]. Hilbert en Frege zijn in een discussie over de axioma's van de meetkunde. Hilbert zegt hierover:

[I]t is surely obvious that every theory is only a scaffolding or schema of concepts together with their necessary relations to one another, and that the basic elements can be thought of in any way one likes. If in speaking of my points I think of some system of things, e.g. the system: love, law, chimney-sweep ... and then assume all my axioms as relations between these things, then my propositions, e.g. Pythagoras' theorem, are also valid for these things. In other words: any theory can always be applied to infinitely many systems of basic elements. (Brief aan Frege, december 29, 1899, p. 40) [17]

De interpretatie van de relaties in de theorie op objecten van de werkelijkheid, is geldig als deze toepasbaar is. Verwarrend is het woord 'assume' in deze quote. We denken dat we niet zomaar een set met axioma's kunnen aannemen te gelden voor willekeurige elementen in de werkelijkheid. Dit is alleen mogelijk wanneer de geobserveerde elementen, een isomorfe *structuur* vertonen als de structuur binnen de wiskundige axioma's.

Laten we dit nu toepassen op het meetprobleem. Er bestaat een wiskundig systeem, namelijk het formalisme, dat de verhoudingen van de waarnemingen correct beschrijft, *mits* we eisen dat het systeem zich na een meting in één eigentoestand bevindt. Als dit het geval is dan hebben we een wiskundige structuur die compleet aansluit bij onze meetgegevens. Alle interpretaties die we behandelt hebben in deze scriptie beginnen bij ditzelfde formalisme. We kunnen nu zeggen dat datgene wat zich afspeelt in de werkelijkheid, zich in ieder geval in zulke relaties met elkaar verhoudt.⁷

Deze structuur is een voorwaarde voor het creëren van een empirisch adequate theorie. Deze structuur is een onderdeel van alledrie de oplossingen. Deze structuur, die precies aansluit bij de meetgegevens, kunnen we zien als een isomorfe structuur van een structuur in de werkelijkheid.

We kunnen niet de objecten of processen in de werkelijkheid kennen, maar wel de relaties en structuren tussen deze objecten of processen. [22]

7.4 Conclusie

We hebben nu drie interpretaties geschetst die alledrie een mogelijke weergave schetsen van hoe de kwantumwereld zich gedraagt. Alledrie beschrijven ze sowieso de meetgegevens en de verhoudingen daartussen: eerst is er een superpositie van toestanden met een bepaalde kans om een meetuitkomst te vinden. Op het moment van observeren, nemen we één van de (voorheen mogelijke) uitkomsten waar.

Of een meting een speciaal soort van fysische interactie is, zullen we niet snel te weten komen. Iedere keer dat we meten of een fysische interactie gelijk is aan een meting, maken we een meting. We kunnen dus nooit definiëren hoe een fysische interactie op zich het systeem beïnvloedt. Dit is ook niet nodig voor de toepassing van de theorie.

De begrippen binnen een theorie krijgen betekenis door de theorie zelf. De begrippen slaan terug op de waarneming. Door de ontologie van een bepaalde interpretatie, kunnen we de structuur van een theorie beter begrijpen. Het begrip van de verhoudingen van theoretische entiteiten, komt het best tot zijn recht als erover gesproken wordt alsof ze waar zijn. Door te doen alsof een ontologie waar is, creëert men voor zichzelf, een zinnige manier om een begrip te hanteren. Er wordt als het ware een referent van een theoretische entiteit aangenomen, zodat de uitspraken binnen een theorie niet leeg zijn. Het doel hiervan is slechts om de structuur beter te begrijpen.

We hebben de structuur, maar alledrie de interpretaties geven ons meer inzicht. De Wigner interpretatie geeft ons als inzicht, dat de superpositie voor de waarneming door ons bewustzijn ineengestort moet zijn. De Bohm en Many Worlds-interpretatie geven ons inzicht in hoe mogelijke werelden corresponderen met mogelijke meetuitkomsten. De Bohm interpretatie geeft ons ook nog een causale verklaring van de dynamica van de theorie. We kunnen de structuur op zichzelf lastig voorstellen. Enkel een structuur impliceert dat er objecten zijn waartussen de structuur geldt. Relaties veronderstellen nu eenmaal relata [22]. Om de structuur in de werkelijkheid te begrijpen, hebben we verschillende interpretaties die allemaal een ander inzicht geven in dezelfde structuur.

Ontologische claims zijn een pragmatische hypothese om de structuur in de werkelijkheid betekenis te geven.

⁷De wiskunde is louter de beschrijving van deze structuur, het is niet zo dat we de wiskunde in de natuur aantreffen. Het zijn slechts de structuren.

Bibliografie

- [1] D.Z. Albert, *Quantum mechanics and experience*, Harvard Univ Pr, 1992.
- [2] G. Bacciagaluppi and E. Crull, *Heisenberg (and Schrödinger, and Pauli) on hidden variables*, *Studies In History and Philosophy of Science Part B: Studies In History and Philosophy of Modern Physics* **40** (2009), no. 4, 374–382.
- [3] G. Bacciagaluppi and A. Valentini, *Quantum theory at the crossroads: reconsidering the 1927 Solvay conference*, Arxiv preprint quant-ph/0609184 (2006).
- [4] J.S. Bell, *Against measurement*, *Physics World* **3** (1990), no. 8, 33–40.
- [5] D.W. Belousek, *Formalism, Ontology and Methodology in Bohmian Mechanics*, *Foundations of science* **8** (2003), no. 2, 109–172.
- [6] Patricia Blanchette, *The Frege-Hilbert controversy*, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Edward N. Zalta, ed.), fall 2009 ed., 2009.
- [7] D. Bohm, *A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of “Hidden” Variables. I and II*, *PHYSICAL REVIEW* **85** (1952), no. 2.
- [8] D. Bohm and J. Bub, *A proposed solution of the measurement problem in quantum mechanics by a hidden variable theory*, *Reviews of Modern Physics* **38** (1966), no. 3, 453–469.
- [9] Richard Boyd, *The philosophy of science*, Asco Trade Typesettingl, 1991.
- [10] ———, *Scientific realism*, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Edward N. Zalta, ed.), summer 2010 ed., 2010.
- [11] J.A. Cover and M. Curd, *Philosophy of science: the central issues*, 1998.
- [12] J.T. Cushing, A. Fine, and S. Goldstein, *Bohmian mechanics and quantum theory: an appraisal*, Springer, 1996.
- [13] B.S. DeWitt, *Quantum mechanics and reality*, *Physics Today* **23** (1970), no. 9, 30–35.
- [14] D. Dieks, *On some alleged difficulties in the interpretation of quantum mechanics*, *Synthese* **86** (1991), no. 1, 77–86.
- [15] P. Duhem, *The Aim and Structure of Physical Theory*, (trans.) P, Wiener. New York: Atheneum (1954), reprinted in [11].
- [16] D. Dürr, *Bohmsche Mechanik als Grundlage der Quantenmechanik*, Springer, 2001.
- [17] G. Frege, G. Gabriel, F. Kambartel, and C. Thiel, *Gottlob Freges Briefwechsel mit D. Hilbert, E. Husserl, B. Russell, sowie ausgewählte Einzelbriefe Freges*, Meiner Verlag, 1980.

- [18] G.W. Gibbons and S.W. Hawking, *Cosmological event horizons, thermodynamics, and particle creation*, Physical Review D **15** (1977), no. 10, 2738–2751.
- [19] Dieks D. Muller F. Uffink J. Hilgevoord, J. and M. Seevinck, *Foundations of Quantum Mechanics*, (2009).
- [20] P.R. Holland, *The quantum theory of motion: an account of the de Broglie-Bohm causal interpretation of quantum mechanics*, Cambridge Univ Pr, 1995.
- [21] M. Jammer, *The philosophy of quantum mechanics*, Wiley London, 1974.
- [22] James Ladyman, *Structural realism*, The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Edward N. Zalta, ed.), summer 2009 ed., 2009.
- [23] Larry Laudan, *Demystifying underdetermination*, Scientific Theories **14** (1990), reprinted in [11].
- [24] S.K.R. Popper, *The logic of scientific discovery*, Hutchinson, 1959.
- [25] Hilary Putnam, *Meaning and the moral sciences*, Routledge and Kegan Paul, London, 1978.
- [26] W. D. (ed.) Ross, *The works of aristotle translated into english*, second ed., Clarendon Press, Oxford, 1928.
- [27] E. Schrodinger, *Die gegenwartige Situation in der Quantenmechanik*, Naturwissenschaften **23** (1935), no. 48, 807–812, translation reprinted in [32].
- [28] Alfred Tarski, *The semantic conception of truth*, Philosophy and Phenomenological Research **4** (1944), 341–375.
- [29] L. Vaidman, *The Reality in Bohmian Quantum Mechanics or Can You Kill with an Empty Wave Bullet?*, Foundations of Physics **35** (2005), no. 2, 299–312.
- [30] B.C. Van Fraassen, *The scientific image*, Oxford University Press, USA, 1980.
- [31] J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantentheorie*, 1932.
- [32] J.A. Wheeler and W.H. Zurek, *Quantum theory and measurement*, Princeton University Press Princeton, NJ, 1983.

Bijlage A

Het Formalisme

De appendix bestaat uit het tweede hoofdstuk uit de syllabus voor de grondslagen van de kwanummechanica. Dit hebben we bijgevoegd om lezers die niet bekend zijn met het kwantummechanische formalisme toch wat houvast te geven. Deze appendix is NIET door ons geschreven, de credits voor deze appendix gaan naar Jan Hilgevoord, Dennis Dieks, Fred Muller, Jos Uffink en Michiel Seevinck.

II

THE FORMALISM

As far as the laws of mathematics refer to reality, they are not certain; and as far as they are certain, they do not refer to reality.

— Albert Einstein

In mathematics you don't understand things. You just get used to them.

— Johann von Neumann

The customary mathematical formulation of quantum mechanics has been developed by John von Neumann in 1932 as operator calculation on a Hilbert space. We will not need all characteristics of this calculation and we give, therefore, only a succinct review. For our purposes we can limit ourselves to a finite - dimensional Hilbert space, a complex vector space with an inner product. We will give an overview of the elementary concepts of this Hilbert space, and in an addendum we will concisely summarize the infinite - dimensional case. For an extensive, exact treatment of Hilbert spaces we refer to the first chapters of E. Prugovečki (2006).

II. 1 FINITE - DIMENSIONAL HILBERT SPACES

We start this chapter by defining a space called a Hilbert space, the elements of which are called *vectors*, this vector space will be indicated by \mathcal{H} . Following Dirac's ket notation the vectors will be indicated by $|\alpha\rangle, |\beta\rangle, |\gamma\rangle, |\phi\rangle, |\psi\rangle, |\chi\rangle, \dots$, complex numbers will be specified by the first characters of the alphabet $a, b, c \in \mathbb{C}$.

Vectors can be added, and multiplied with a complex number, also called a *scalar*, we then remain in \mathcal{H} , i.e., for all $|\phi\rangle, |\psi\rangle \in \mathcal{H}$ and $a \in \mathbb{C}$ we have

$$|\phi\rangle + |\psi\rangle \in \mathcal{H} \quad \text{and} \quad a|\phi\rangle \in \mathcal{H}, \quad (\text{II. 1})$$

which can be expressed by saying that \mathcal{H} is *closed* under linear combinations.

The addition is *commutative* and *associative*,

$$|\phi\rangle + |\psi\rangle = |\psi\rangle + |\phi\rangle, \quad (\text{II. 2})$$

$$|\phi\rangle + (|\psi\rangle + |\chi\rangle) = (|\phi\rangle + |\psi\rangle) + |\chi\rangle. \quad (\text{II. 3})$$

We require the existence of a *null vector*, $0 \in \mathcal{H}$, which is provable unique and has the property that for all $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$

$$0 + |\phi\rangle = |\phi\rangle, \quad (\text{II. 4})$$

and that every vector has an *additive inverse*, i.e., for every $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$ there is a vector $|\phi'\rangle \in \mathcal{H}$, also provable unique, such that

$$|\phi\rangle + |\phi'\rangle = 0. \quad (\text{II. 5})$$

The scalar multiplication is *distributive* and associative,

$$(a + b) (|\phi\rangle + |\psi\rangle) = a|\phi\rangle + a|\psi\rangle + b|\phi\rangle + b|\psi\rangle, \quad (\text{II. 6})$$

$$a(b|\phi\rangle) = (ab)|\phi\rangle, \quad (\text{II. 7})$$

and we demand that

$$1|\psi\rangle = |\psi\rangle. \quad (\text{II. 8})$$

Incidentally we also write

$$a|\psi\rangle := |a\psi\rangle := |\psi\rangle a. \quad (\text{II. 9})$$

EXERCISE 1. Prove (a) $0|\phi\rangle = 0$,
(b) the summation inverse of $|\phi\rangle$ equals $-1|\phi\rangle$.

An *inner product* on a vector space is a mapping $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$, where the image in \mathbb{C} of $(|\phi\rangle, |\psi\rangle) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ is written as $\langle\phi|\psi\rangle$. The inner product has the following properties:

- (i) $\langle\phi|a\psi + b\chi\rangle = a\langle\phi|\psi\rangle + b\langle\phi|\chi\rangle$,
- (ii) $\langle\phi|\psi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle^*$,
- (iii) $\langle\phi|\phi\rangle \geq 0$, (II. 10)
- (iv) $\langle\phi|\phi\rangle = 0$ iff $|\phi\rangle = 0$.

The value

$$\|\psi\| := \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle} \quad (\text{II. 11})$$

is called the *norm* of $|\psi\rangle$ and meets the usual requirements for a norm; its value is positive, except for the zero vector which is assigned 0, it is homogeneous, in the sense that $\|a\psi\| = |a|\|\psi\|$, and it satisfies the triangle inequality $\|\psi + \phi\| \leq \|\psi\| + \|\phi\|$. A vector is called a *unit vector* if the norm equals 1.

An important inequality is the Cauchy - Schwarz inequality

$$|\langle \phi | \psi \rangle|^2 \leq \langle \phi | \phi \rangle \langle \psi | \psi \rangle. \quad (\text{II. 12})$$

EXERCISE 2. Prove (a) the Cauchy - Schwarz inequality (II. 12),
(b) the definition of the norm satisfies the standard requirements for a norm.

The n vectors $|\alpha_1\rangle, \dots, |\alpha_n\rangle$ are called (*linearly*) *independent* if it follows from

$$\sum_{i=1}^n c_i |\alpha_i\rangle = 0 \quad (\text{II. 13})$$

that all coefficients c_i are equal to zero, otherwise the vectors are called *dependent*.

EXERCISE 3. Prove that mutually orthogonal vectors are linearly independent.

A set of vectors $|\alpha_1\rangle, \dots, |\alpha_N\rangle$ in \mathcal{H} is *complete*¹ if every vector $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ can be written as a linear combination of this set,

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^N c_i |\alpha_i\rangle. \quad (\text{II. 14})$$

A complete, independent set of vectors is called a *basis*. A basis is called *orthonormal* if

$$\langle \alpha_i | \alpha_j \rangle = \delta_{ij}, \quad (\text{II. 15})$$

where δ_{ij} is the Kronecker delta. It can be proved that every basis of a space \mathcal{H} contains the same number of elements, this number is, by definition, the *dimension* of \mathcal{H} , and is written $\dim \mathcal{H}$. The dimension of a Hilbert space is infinite if every finite set of linearly independent vectors is incomplete.

If $|\alpha_1\rangle, \dots, |\alpha_N\rangle$ is an orthonormal basis, with $N = \dim \mathcal{H}$, then from (II. 15) it follows for the coefficients in (II. 14) that

$$c_i = \langle \alpha_i | \psi \rangle, \quad (\text{II. 16})$$

and the vectors $|\psi\rangle$ in such a basis can thus be represented by columns of N complex numbers. Therefore, an N - dimensional Hilbert space can also be written as \mathbb{C}^N .

¹The use of the term 'complete' for a system of vectors should not be confused with the same phrase as used within the context of the foundations of quantum mechanics, that is, as a property of a physical theory.

With (II. 16), in an orthonormal basis we have

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \quad (\text{II. 17})$$

and hence $\langle\psi| = (c_1^*, c_2^*, \dots, c_n^*)$, therefore

$$|\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} c_1 c_1^* & \dots & c_1 c_n^* \\ \vdots & \ddots & \\ c_n c_1^* & & c_n c_n^* \end{pmatrix}, \quad (\text{II. 18})$$

from which it is evident that for the vectors of the orthonormal basis $\{|\alpha_i\rangle\}$ it holds that

$$\sum_{i=1}^N |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i| = \mathbb{1}, \quad (\text{II. 19})$$

with $\mathbb{1}$ the *identity mapping* on \mathcal{H} ,

$$\mathbb{1}|\psi\rangle = |\psi\rangle \quad \forall |\psi\rangle \in \mathcal{H}. \quad (\text{II. 20})$$

Using (II. 14) and (II. 16), we see that an orthonormal basis is indeed characterized by the relation

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^N \langle\alpha_i|\psi\rangle |\alpha_i\rangle = \sum_{i=1}^N |\alpha_i\rangle \langle\alpha_i|\psi\rangle. \quad (\text{II. 21})$$

The definition of a finite - dimensional Hilbert space is now completed; it is a finite - dimensional complex vector space with an inner product which is related to the norm by means of (II. 11). A *real* finite - dimensional Hilbert space is obtained by replacing \mathbb{C} everywhere by \mathbb{R} , i.e., the set of scalars is in \mathbb{R} and the inner product is always real. In section II. 6 we will see that for the *infinite* - dimensional case the definition must be extended with two requirements, ‘separability’ and ‘completeness’, which we can prove in the finite - dimensional case.

II. 2 OPERATORS

An *operator* A on a Hilbert space \mathcal{H} is a linear mapping of \mathcal{H} onto itself,

$$A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad |\psi\rangle \mapsto A|\psi\rangle \quad \text{with} \quad A(a|\psi\rangle + b|\phi\rangle) = aA|\psi\rangle + bA|\phi\rangle. \quad (\text{II. 22})$$

From (II. 16) we saw that in a given orthonormal basis $|\alpha_1\rangle, \dots, |\alpha_N\rangle$ the vectors $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ are unambiguously represented by rows of N complex numbers $c_i = \langle\alpha_i|\psi\rangle$. This corresponds to the

representation of an operator A as an $N \times N$ -matrix A in a basis $\{|\alpha_i\rangle\}$, and the coefficients of the vector $A|\psi\rangle$ in this basis are, using (II. 19),

$$\langle \alpha_i | A | \psi \rangle = \langle \alpha_i | A \mathbb{1} | \psi \rangle = \sum_{j=1}^N \langle \alpha_i | A | \alpha_j \rangle \langle \alpha_j | \psi \rangle = \sum_{j=1}^N A_{ij} c_j, \quad (\text{II. 23})$$

with

$$A_{ij} := \langle \alpha_i | A | \alpha_j \rangle. \quad (\text{II. 24})$$

Operators A and B can be added and multiplied,

$$(A + B) |\psi\rangle := A |\psi\rangle + B |\psi\rangle \quad \text{and} \quad (AB) |\psi\rangle := A (B |\psi\rangle). \quad (\text{II. 25})$$

The *adjoint* A^\dagger of an operator A is defined by the following equation

$$\langle \psi | A^\dagger | \phi \rangle = \langle \phi | A | \psi \rangle^* \quad \forall |\phi\rangle, |\psi\rangle \in \mathcal{H}. \quad (\text{II. 26})$$

EXERCISE 4. Show that for the matrix representation in an orthonormal basis it holds that $(A^\dagger)_{ij} = A_{ji}^*$.

Every operator on a finite - dimensional vector space has a unique adjoint, and the following holds

$$\begin{aligned} (cA)^\dagger &= c^* A^\dagger, \\ (A + B)^\dagger &= A^\dagger + B^\dagger, \\ (AB)^\dagger &= B^\dagger A^\dagger, \\ (A^\dagger)^\dagger &= A. \end{aligned} \quad (\text{II. 27})$$

An operator B is called an *inverse* of A if

$$AB = BA = \mathbb{1}. \quad (\text{II. 28})$$

In this case we write A^{-1} for B , because the inverse, if it exists, is unique. Not every operator has an inverse, an example in the Hilbert space \mathbb{C}^2 is

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{II. 29})$$

The *trace* of an operator A is defined as follows,

$$\text{Tr } A := \sum_{i=1}^N \langle \gamma_i | A | \gamma_i \rangle, \quad (\text{II. 30})$$

where $|\gamma_1\rangle, \dots, |\gamma_N\rangle$ is an arbitrary orthonormal basis and $N = \dim \mathcal{H}$.

EXERCISE 5. Show that $\text{Tr } A$ is independent of the choice of the orthonormal basis.

The trace has the following properties:

$$\begin{aligned}\text{Tr } A^\dagger &= \text{Tr } A^*, \\ \text{Tr } (bA + cB) &= b \text{Tr } A + c \text{Tr } B, \\ \text{Tr } AB &= \text{Tr } BA.\end{aligned}\tag{II. 31}$$

EXERCISE 6. Prove the three statements in (II. 31).

We will now list the most important types of operators. An operator A is called *normal* if it commutes with its adjoint,

$$[A, A^\dagger] := AA^\dagger - A^\dagger A = 0,\tag{II. 32}$$

where 0 is actually the ‘zero operator’, it maps all vectors to the zero vector 0 . An operator is called *self-adjoint* or *Hermitian* if it is equal to its adjoint,

$$A^\dagger = A,\tag{II. 33}$$

and with the first statement of (II. 31) we see that the trace of a self-adjoint operator is always real. Self-adjoint operators are normal, but not all normal operators are self-adjoint, e.g., the *unitary operator*,

$$U^\dagger = U^{-1}.\tag{II. 34}$$

EXERCISE 7. Prove that a unitary operator preserves the inner product, e.g., for all $|\phi\rangle, |\psi\rangle \in \mathcal{H}$ the following holds: if $|\phi'\rangle = U|\phi\rangle$ and $|\psi'\rangle = U|\psi\rangle$ then $\langle\psi'|\phi'\rangle = \langle\psi|\phi\rangle$.

An operator A is called *positive*, i.e. $A \geq 0$, if

$$\langle\psi|A|\psi\rangle \geq 0 \quad \forall |\psi\rangle \in \mathcal{H}.\tag{II. 35}$$

An operator P is called a *projection operator*, or a *projector* for short, if it is self-adjoint and idempotent,

$$P = P^\dagger \quad \text{and} \quad P^2 = P.\tag{II. 36}$$

An example of a projector, apart from the obvious examples of the zero operator 0 and the identity operator $\mathbb{1}$, is the mapping $P_\phi = |\phi\rangle\langle\phi|$ which projects on a given unit vector $|\phi\rangle$,

$$P_\phi : |\psi\rangle \mapsto \langle\phi|\psi\rangle|\phi\rangle = |\phi\rangle\langle\phi|\psi\rangle. \quad (\text{II. 37})$$

EXERCISE 8. Show that (a) every projector is positive,
(b) if P is a projector, then $\mathbb{1} - P$ is one also.

Projectors are the workhorses of Hilbert space. Nearly all of our further considerations concerning quantum mechanics can be formulated in terms of projectors, and therefore we will now discuss their properties somewhat more elaborate.

We write the set of all projectors on a Hilbert space \mathcal{H} as $\mathcal{P}(\mathcal{H})$. Every projector P can be characterized by means of its range, i.e. the set

$$\mathcal{H}_P := \{P|\psi\rangle : |\psi\rangle \in \mathcal{H}\}. \quad (\text{II. 38})$$

This set is closed under linear combinations and thus forms a partial Hilbert space, called a *subspace* of \mathcal{H} . Conversely, every subspace of \mathcal{H} corresponds unambiguously to a projector.

▷ *Remark*

In infinite - dimensional Hilbert spaces this only holds for closed subspaces. ◁

The subspace corresponding to a projector is also called its *eigenspace*, and if the dimension of its eigenspace is N , the projector is called N - dimensional.

Two projectors P_1 and P_2 are called *mutually orthogonal*, written as $P_1 \perp P_2$, if

$$P_1 P_2 = 0. \quad (\text{II. 39})$$

In that case their eigenspaces are also orthogonal,

$$P_1 \perp P_2 \quad \text{iff} \quad \forall |\psi\rangle \in \mathcal{H}_{P_1}, \quad \forall |\phi\rangle \in \mathcal{H}_{P_2} \quad \langle\phi|\psi\rangle = 0. \quad (\text{II. 40})$$

EXERCISE 9. Verify that $P_1 P_2 = 0 \implies P_2 P_1 = 0$ holds for projectors.

For two orthogonal projectors $P_1 \perp P_2$, the sum $P_1 + P_2$ is also a projector since it is, as can be seen using (II. 27), self - adjoint, and it is idempotent,

$$(P_1 + P_2)^2 = P_1^2 + P_1 P_2 + P_2 P_1 + P_2^2 = P_1^2 + P_2^2 = P_1 + P_2, \quad (\text{II. 41})$$

thereby satisfying the requirements (II. 36). The eigenspace of the projector $P_1 + P_2$ is the linear space spanned by the vectors in \mathcal{H}_{P_1} and \mathcal{H}_{P_2} .

A set of projectors P_1, \dots, P_N is called mutually orthogonal if

$$P_i P_j = \delta_{ij} P_i \quad \text{for } i, j = 1, \dots, N, \quad (\text{II. 42})$$

a set of mutually orthogonal projectors is called *complete* if

$$\sum_{i=1}^N P_i = \mathbb{1}. \quad (\text{II. 43})$$

In particular, in accordance with (II. 19), for an orthonormal basis $|\alpha_i\rangle, \dots, |\alpha_N\rangle$ it holds that the associated 1 - dimensional projectors form a complete set,

$$\sum_{i=1}^N |\alpha_i\rangle \langle \alpha_i| = \mathbb{1}. \quad (\text{II. 44})$$

II. 3 EIGENVALUE PROBLEM AND SPECTRAL THEOREM

If $|\beta_1\rangle, \dots, |\beta_N\rangle$ is an arbitrary orthonormal basis, the operator A is represented in this basis as an arbitrary $N \times N$ - matrix,

$$A_{ij} = \langle \beta_i | A | \beta_j \rangle. \quad (\text{II. 45})$$

A powerful tool for the study of such matrices is obtained if they can be ‘diagonalized’, i.e., if an orthonormal basis $|\alpha_1\rangle, \dots, |\alpha_N\rangle$ can be found where the matrix representation of A is of the form

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_N \end{pmatrix}, \quad (\text{II. 46})$$

or, equivalently,

$$A_{ij} = a_j \delta_{ij}. \quad (\text{II. 47})$$

For such a basis it holds that

$$A |\alpha_i\rangle = a_i |\alpha_i\rangle. \quad (\text{II. 48})$$

Equation (II. 48) is called the *eigenvalue equation* of the operator A , the values a_i are called the *eigenvalues* of A , the set of eigenvalues of A the *spectrum* of A , written as $\text{Spec } A$, the vectors $|\alpha_i\rangle$ are called the *eigenvectors*, and the system $|\alpha_1\rangle, \dots, |\alpha_N\rangle$ an *eigenbasis* of A . For a self - adjoint operator it holds that the eigenvalues are all real, and the eigenvalues are not negative if the operator is positive. For a unitary operator U all eigenvalues $u_i \in \mathbb{C}$ are on the complex unit circle, $|u_i| = 1$, for a projector the eigenvalues are 0 or 1.

The eigenvalue equation does, however, not always have a solution. See as an example operator (II. 29). The conditions under which the equation *can* be solved are given by the next important theorem which we mention without proof.

SPECTRAL THEOREM:

Every normal operator A has an orthonormal basis of eigenvectors $|\alpha_1\rangle, \dots, |\alpha_N\rangle$ and associated eigenvalues a_1, \dots, a_N , not necessarily distinct, satisfying (II. 48).

The spectral theorem tells us that normal operators can be diagonalized. This can be formulated more elegantly in Dirac notation, where we must distinguish between the case in which all eigenvalues differ from each other, and the case in which some eigenvalues are equal. In the first case the operator is called *maximal*, in the second case the operator is called *degenerate*.

Suppose that the operator A is maximal, all eigenvalues a_i differ from each other, $a_i \neq a_j$ if $i \neq j$. In this case we often use the eigenvalues as a label for the eigenvectors and write $|a_i\rangle$ instead of $|\alpha_i\rangle$. This notation is unambiguous, there is exactly one eigenvalue for every eigenvector. Now, according to the spectral theorem, there is an orthonormal basis $|a_1\rangle, \dots, |a_n\rangle$ such that

$$A = \sum_{i=1}^N a_i |a_i\rangle \langle a_i|, \quad (\text{II. 49})$$

since, with (II. 44), it holds for all $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ that

$$A|\psi\rangle = A \mathbb{1}|\psi\rangle = A \sum_{i=1}^N |a_i\rangle \langle a_i|\psi\rangle = \sum_{i=1}^N a_i |a_i\rangle \langle a_i|\psi\rangle. \quad (\text{II. 50})$$

If the operator is degenerate there are only $M < N$ distinct eigenvalues a_1, \dots, a_M . For every eigenvalue a_i , there exists a number n_i of mutually orthogonal eigenvectors, for which we have

$$\sum_{i=1}^M n_i = N. \quad (\text{II. 51})$$

The eigenvalue a_i is called *n_i -fold degenerate*. The associated eigenvectors span a n_i -dimensional subspace of eigenvectors for the value a_i .

Choose, in this subspace, an orthonormal basis $\{|\alpha_{i,j}\rangle\}$ with $j = 1, \dots, n_i$. Here we can also use the eigenvalues a_i as a label for the basis vectors because the use of the extra label j prevents our notation from being ambiguous. Now the eigenvalue equation (II. 48) becomes

$$A|a_i, j\rangle = a_i |a_i, j\rangle. \quad (\text{II. 52})$$

Analogous to (II. 49), we find

$$A = \sum_{i=1}^M a_i \sum_{j=1}^{n_i} |a_i, j\rangle \langle a_i, j|, \quad (\text{II. 53})$$

which can, in terms of the n_i -dimensional *eigenprojectors*

$$P_{a_i} = \sum_{j=1}^{n_i} |a_i, j\rangle \langle a_i, j|, \quad (\text{II. 54})$$

also be written as

$$A = \sum_{i=1}^M a_i P_{a_i}. \quad (\text{II. 55})$$

EXERCISE 10. Show that P_{a_i} in (II. 54) is independent of the choice of the orthonormal basis $|a_i, 1\rangle, \dots, |a_i, n_i\rangle$.

We summarize the two preceding cases in the following, equivalent, form of the spectral theorem, formulated in terms of projectors.

SPECTRAL THEOREM:

For every normal operator A a unique set of *mutually distinct* eigenvalues a_1, \dots, a_M exists, with $M \leq N$, and an associated *unique* complete set of mutually orthogonal projectors P_{a_1}, \dots, P_{a_M} , such that

$$A = \sum_{i=1}^M a_i P_{a_i}, \quad (\text{II. 56})$$

$$\mathbb{1} = \sum_{i=1}^M P_{a_i}. \quad (\text{II. 57})$$

If the operator is non-degenerate, all of these projectors are 1-dimensional; if it is degenerate, $\dim P_{a_i}$ gives the degeneracy of eigenvalue a_i . Equation (II. 56) is called the *spectral decomposition* of A , the set of mutually orthogonal projectors P_{a_i} is called the *spectral family* of A , and (II. 57) a *decomposition of unity*.

II. 3. 1 APPENDIX

A formulation of the spectral theorem which is equivalent to the preceding, but is more suitable for generalizations, can be obtained if we introduce the correspondence between the eigenvalues and the associated eigenprojectors as a mapping \mathfrak{A} of all subsets of $\text{Spec } A \subset \mathbb{C}$ to the set $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ of projectors on \mathcal{H} .

We construct that mapping by demanding

$$\{a_i\} \mapsto P_{a_i}, \quad (\text{II. 58})$$

and extend this with the condition

$$\{a_1, a_2\} \mapsto P_{\{a_1, a_2\}} := P_{a_1} + P_{a_2}, \quad (\text{II. 59})$$

or, more general, if Δ represents an arbitrary set of eigenvalues, we define

$$\Delta \mapsto P_\Delta = \sum_{a \in \Delta} P_a. \quad (\text{II. 60})$$

A mapping $\mathfrak{A} : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{H})$ is called a *projection - valued measure* if

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & P_\emptyset = 0 \\ \text{(ii)} \quad & P_{\text{Spec } A} = \mathbb{1} \\ \text{(iii)} \quad & P_{\cup_i \Delta_i} = \sum_i P_{\Delta_i}, \quad \text{for all } \Delta_i \text{ mutually disjoint.} \end{aligned} \quad (\text{II. 61})$$

EXERCISE 11. Verify that: $P_{\Delta^c} = \mathbb{1} - P_\Delta$ where $\Delta^c = \text{Spec } A \setminus \Delta$ is the complement of Δ .

The spectral theorem can now again be formulated.

SPECTRAL THEOREM:

Every normal operator A corresponds unambiguously to a projection - valued measure \mathfrak{A} .

II. 4 FUNCTIONS OF NORMAL OPERATORS

The spectral theorem makes it possible to treat functions of normal operators in a simple manner. If f is an arbitrary function, real or complex, and A is an operator with spectral decomposition

$$A = \sum_{i=1}^M a_i P_{a_i}, \quad (\text{II. 62})$$

then the *function* $f(A)$ of A is defined as

$$f(A) := \sum_{i=1}^M f(a_i) P_{a_i}. \quad (\text{II. 63})$$

This means that $f(A)$ always has the same eigenvectors and eigenprojections as A , and only differs from A in the indication of the eigenvalues, namely $f(a_i)$ instead of a_i . Consider as an example the *characteristic function* χ_a of $a \in \mathbb{C}$,

$$\chi_a : \mathbb{C} \rightarrow \{0, 1\}, \quad x \mapsto \chi_a(x) := \begin{cases} 1 & \text{if } x = a \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (\text{II. 64})$$

for which, with (II. 63), we have

$$\chi_{a_k}(A) := \sum_{i=1}^M \chi_{a_k}(a_i) P_{a_i} = P_{a_k}, \quad (\text{II. 65})$$

and we see that the projectors from the spectral decomposition of A , (II. 62), are functions of A . We use the spectral decompositions in the proof of the following theorem.

THEOREM:

If two self - adjoint operators A and B commute, there is a maximal, self - adjoint operator C of which both A and B are a function.

To prove this theorem we first prove a useful lemma.

LEMMA:

If $[A, B] = 0$, a basis $\{|\gamma_i\rangle\}$ exists in which A and B are simultaneously diagonal.

Proof

Let $\{|a_i, j\rangle\}$ be an orthonormal eigenbasis of operator A , where $j = 1, \dots, n_i$ is the degeneracy of eigenvalue a_i , and we have

$$\langle a_p, q | a_i, j \rangle = \delta_{pi} \delta_{qj}. \quad (\text{II. 66})$$

Analogously, let there be an orthonormal eigenbasis $\{|b_k, l\rangle\}$ for operator B . From $[A, B] = 0$ and (II. 62) it follows that

$$A (B |a_i, j\rangle) = B A |a_i, j\rangle = a_i B |a_i, j\rangle, \quad (\text{II. 67})$$

and $B |a_i, j\rangle$ is, apparently, an eigenvector of A with the eigenvalue a_i , i.e., $B |a_i, j\rangle$ is in the eigenspace spanned by $|a_i, 1\rangle, \dots, |a_i, n_i\rangle$. Or, equivalently,

$$B |a_i, j\rangle = \sum_{k=1}^{n_i} \Lambda_{j,k}^{[i]} |a_i, k\rangle \quad (\text{II. 68})$$

holds for certain numbers $\Lambda_{j,k}^{[i]} \in \mathbb{C}$.

By definition, B is self - adjoint and therefore the matrix $\Lambda^{[i]}$ must be Hermitian,

$$\langle a_k, l | B |a_i, j\rangle = \Lambda_{l,j}^{[i]} \delta_{ki} = \Lambda_{l,j}^{[i]}, \quad (\text{II. 69})$$

$$\langle a_k, l | B |a_i, j\rangle^* = \Lambda_{l,j}^{[i]*} = \langle a_i, j | B^\dagger | a_k, l \rangle = \Lambda_{j,l}^{[k]} \delta_{ik} = \Lambda_{j,l}^{[i]}, \quad (\text{II. 70})$$

and we see that

$$\Lambda_{l,j}^{[i]*} = \Lambda_{j,l}^{[i]}. \quad (\text{II. 71})$$

Because $\Lambda^{[i]}$ is indeed self - adjoint, it can be diagonalized by a unitary matrix $S^{[i]}$,

$$\Lambda'^{[i]} = S^{[i]-1} \Lambda^{[i]} S^{[i]}. \quad (\text{II. 72})$$

This corresponds to an orthonormal basis transformation within the n_i - dimensional subspace with eigenvalue a_i . Carrying out this transformation in each of the subspaces and writing $|a_i, m'\rangle$ for the transformed eigenvectors of A , we have

$$|a_i, m'\rangle = \sum_{j=1}^{n_i} S_{j,m'}^{[i]} |a_i, j\rangle. \quad (\text{II. 73})$$

In the new basis $\{|a_i, m'\rangle\}$ the matrix $\Lambda^{[i]}$ is diagonalized and therefore

$$B |a_i, m'\rangle = \Lambda'_{m',m'}^{[i]} \delta_{m',j} |a_i, j\rangle = \Lambda'_{m',m'}^{[i]} |a_i, m'\rangle. \quad (\text{II. 74})$$

The vectors $|a_i, m'\rangle$ are not just eigenvectors of A , but also of B and form, by construction, a basis. \square

▷ *Remark*

Notice that it is not contradictory to this lemma if non - commuting operators have *some* eigenvectors in common. ◁

Now we come to the proof of the theorem.

Proof

Define, in the basis $\{|\gamma_i\rangle\}$ of the lemma

$$A = \sum_i a_i P_{|\gamma_i\rangle} \quad \text{and} \quad B = \sum_i b_i P_{|\gamma_i\rangle}, \quad (\text{II. 75})$$

where the eigenvalues a_i and b_i are allowed to be degenerate. Next, define a maximal self - adjoint operator

$$C = \sum_i c_i P_{|\gamma_i\rangle}, \quad (\text{II. 76})$$

with all $c_i \in \mathbb{C}$ distinct.

Then, according to (II. 65), with χ_{c_i} defined analogously to (II. 64),

$$P_{|\gamma_i\rangle} = \chi_{c_i}(C). \quad (\text{II. 77})$$

With $f(x) = \sum_i a_i \chi_{c_i}(x)$ and $g(x) = \sum_i b_i \chi_{c_i}(x)$, as defined in (II. 63), we now find

$$A = \sum_i a_i \chi_{c_i}(C) = f(C) \quad \text{and} \quad B = \sum_i b_i \chi_{c_i}(C) = g(C). \quad (\text{II. 78})$$

We see that both self-adjoint, and mutually commuting, operators A and B are functions of the maximal, self-adjoint operator C , which we set out to prove. \square

▷ *Remark*

From the construction of C we see that the choice of C is not unique. Suppose that

$$A = f(C_1) = g(C_2), \quad (\text{II. 79})$$

where C_1 and C_2 are both maximal. In general, it is not required for C_1 and C_2 to commute. But they do commute if A is maximal itself. In that case f can be inverted

$$C_1 = f^{-1}(A) = f^{-1}(g(C_2)) \quad (\text{II. 80})$$

from which it follows that

$$[C_1, C_2] = 0. \triangleleft \quad (\text{II. 81})$$

II. 5 DIRECT SUM AND DIRECT PRODUCT

There are two ways to construct a new Hilbert space \mathcal{H} from two given Hilbert spaces \mathcal{H}_1 and \mathcal{H}_2 , or vice versa, to divide a given Hilbert space \mathcal{H} into smaller spaces.

II. 5. 1 DIRECT SUM

Let \mathcal{H}_1 and \mathcal{H}_2 be two Hilbert spaces. By definition we call the space $\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ the direct sum space of \mathcal{H}_1 and \mathcal{H}_2 if the following requirements have been satisfied.

- (i) The space $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ contains as its elements all ordered pairs of vectors, written as $|\phi\rangle_1 \oplus |\psi\rangle_2$, with $|\phi\rangle_1 \in \mathcal{H}_1$ and $|\psi\rangle_2 \in \mathcal{H}_2$.
- (ii) A summation and scalar multiplication are defined on $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, which satisfy

$$a(|\phi\rangle_1 \oplus |\psi\rangle_2) + b(|\chi\rangle_1 \oplus |\xi\rangle_2) = (a|\phi\rangle_1 + b|\chi\rangle_1) \oplus (a|\psi\rangle_2 + b|\xi\rangle_2). \quad (\text{II. 82})$$

- (iii) The inner product is additive,

$$({}_1\langle\phi| \oplus {}_2\langle\phi|) (|\psi\rangle_1 \oplus |\psi\rangle_2) = {}_1\langle\phi|\psi\rangle_1 + {}_2\langle\phi|\psi\rangle_2. \quad (\text{II. 83})$$

- (iv) $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ is the smallest Hilbert space spanned by the elements of the form $|\phi\rangle_1 \oplus |\psi\rangle_2$ and their linear combinations.

▷ *Remark*

An arbitrary linear combination of elements in $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ is, according to (II. 82), of the form

$$\sum_i a_i (|\phi_i\rangle_1 \oplus |\psi_i\rangle_2) = \sum_i a_i |\phi_i\rangle_1 \oplus \sum_i a_i |\psi_i\rangle_2. \quad (\text{II. 84})$$

Consequently, with $|\phi\rangle_1 \in \mathcal{H}_1$ and $|\psi\rangle_2 \in \mathcal{H}_2$, *all* elements in $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ are of the form $|\phi\rangle_1 \oplus |\psi\rangle_2$. This means that from the requirements (i) and (ii) it follows that $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ is closed under linear combinations. ◁

The subspace of $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, existing of all vectors of the form $0_1 \oplus |\phi\rangle_2$, with 0_1 the null vector in \mathcal{H}_1 , and $|\phi\rangle_2 \in \mathcal{H}_2$ arbitrary, is isomorphic to \mathcal{H}_2 , likewise for $|\phi\rangle_1 \oplus 0_2$ and \mathcal{H}_1 . Moreover, these two subspaces of $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ are mutually orthogonal, because

$$({}_1\langle\phi| \oplus 0_2) (0_1 \oplus |\psi\rangle_2) = {}_1\langle\phi|0\rangle_1 + {}_2\langle 0|\phi\rangle_2 = 0. \quad (\text{II. 85})$$

Therefore, every vector $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ can be written uniquely as the direct sum of two orthogonal terms,

$$|\phi\rangle = |\phi\rangle_1 \oplus |\phi\rangle_2 = |\phi\rangle_1 \oplus 0_2 + 0_1 \oplus |\phi\rangle_2. \quad (\text{II. 86})$$

Vice versa, suppose that \mathcal{H} is an arbitrary Hilbert space, and that \mathcal{H}_1 is a subspace of \mathcal{H} . Now let $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_1^\perp$ be the *orthocomplement* of \mathcal{H}_1 , i.e., \mathcal{H}_2 contains all vectors in \mathcal{H} which are perpendicular to all vectors in \mathcal{H}_1 . Then $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ holds, with the identification

$$|\phi\rangle_1 \oplus 0_2 \leftrightarrow |\phi\rangle \in \mathcal{H}_1, \quad (\text{II. 87})$$

$$0_1 \oplus |\psi\rangle_2 \leftrightarrow |\psi\rangle \in \mathcal{H}_2, \quad (\text{II. 88})$$

and

$$|\phi\rangle \oplus |\psi\rangle = |\phi\rangle + |\psi\rangle. \quad (\text{II. 89})$$

Now the direct sum \oplus is nothing but the summation in \mathcal{H} , which was given in (II. 1) as a general property of \mathcal{H} . This means that every Hilbert space can be written as a direct sum of an arbitrary subspace and its orthocomplement. Here we also see that it holds in general that the dimension of $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ is the sum of the dimensions of \mathcal{H}_1 and \mathcal{H}_2 ,

$$\dim(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2) = \dim \mathcal{H}_1 + \dim \mathcal{H}_2. \quad (\text{II. 90})$$

II. 5. 2 DIRECT PRODUCT

Let \mathcal{H}_1 and \mathcal{H}_2 be two Hilbert spaces. By definition we call the space $\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ the direct product space if the following requirements have been satisfied.

- (i) The space $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ has as its elements *at least* all ordered pairs $(|\phi\rangle_1, |\psi\rangle_2)$, with $|\phi\rangle_1 \in \mathcal{H}_1$ and $|\psi\rangle_2 \in \mathcal{H}_2$, which we now write as $|\phi\rangle_1 \otimes |\psi\rangle_2$.

(ii) The summation and scalar multiplication on $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ satisfy

$$|\phi\rangle_1 \otimes |\psi\rangle_2 + |\phi\rangle_1 \otimes |\chi\rangle_2 = |\phi\rangle_1 \otimes (|\psi\rangle_2 + |\chi\rangle_2). \quad (\text{II. 91})$$

and

$$a (|\phi\rangle_1 \otimes |\psi\rangle_2) = a |\phi\rangle_1 \otimes |\psi\rangle_2 = |\phi\rangle_1 \otimes a |\psi\rangle_2 \quad (\text{II. 92})$$

(iii) The inner product is multiplicative,

$$({}_1\langle\phi| \otimes {}_2\langle\chi|) (|\psi\rangle_1 \otimes |\xi\rangle_2) = {}_1\langle\phi|\psi\rangle_1 {}_2\langle\chi|\xi\rangle_2. \quad (\text{II. 93})$$

(iv) $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ is the smallest Hilbert space spanned by vectors of the form $|\phi\rangle_1 \otimes |\psi\rangle_2 \in \mathcal{H}$ and their linear combinations.

If $|\alpha_1\rangle_1, \dots, |\alpha_{N_1}\rangle_1$ is an orthonormal basis in \mathcal{H}_1 , and $|\beta_1\rangle_2, \dots, |\beta_{N_2}\rangle_2$ is likewise in \mathcal{H}_2 , with $N_1 = \dim \mathcal{H}_1$, $N_2 = \dim \mathcal{H}_2$, their direct products yield, using (II. 93), an orthonormal set of vectors in $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$,

$${}_1\langle\alpha_j|\alpha_m\rangle_1 {}_2\langle\beta_k|\beta_n\rangle_2 = ({}_1\langle\alpha_j| \otimes {}_2\langle\beta_k|) (|\alpha_m\rangle_1 \otimes |\beta_n\rangle_2) = \delta_{jm} \delta_{kn}. \quad (\text{II. 94})$$

Because orthonormal vectors are independent, the dimension of $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ cannot be smaller than the product of the separate dimensions. But furthermore, according to (iv) it holds that all vectors in $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ are obtainable as linear combinations of vectors of the form $|\phi\rangle_1 \otimes |\psi\rangle_2$, which in turn are linear combinations of the vectors $|\alpha_j\rangle_1 \otimes |\beta_k\rangle_2$. Therefore, these vectors also span the entire space $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, such that $|\alpha_1\rangle_1 \otimes |\beta_1\rangle_2, |\alpha_2\rangle_1 \otimes |\beta_1\rangle_2, \dots, |\alpha_{N_1}\rangle_1 \otimes |\beta_{N_2}\rangle_2$ is also a basis for $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. For the dimension of $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ we thus find

$$\dim(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2) = \dim \mathcal{H}_1 \cdot \dim \mathcal{H}_2. \quad (\text{II. 95})$$

Consequently, an arbitrary vector $|\chi\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ can, in this product basis $|\alpha_j\rangle_1 \otimes |\beta_k\rangle_2$, be written as

$$|\chi\rangle = \sum_{j=1}^{N_1} \sum_{k=1}^{N_2} c_{jk} |\alpha_j\rangle_1 \otimes |\beta_k\rangle_2 \quad \text{with} \quad c_{jk} = ({}_1\langle\alpha_j| \otimes {}_2\langle\beta_k|) |\chi\rangle \in \mathbb{C}. \quad (\text{II. 96})$$

For vectors of the form $|\phi\rangle_1 \otimes |\psi\rangle_2$ it holds that

$$\sum_{j=1}^{N_1} a_j |\alpha_j\rangle_1 \otimes \sum_{k=1}^{N_2} b_k |\beta_k\rangle_2 = \sum_{j=1}^{N_1} \sum_{k=1}^{N_2} a_j b_k |\alpha_j\rangle_1 \otimes |\beta_k\rangle_2. \quad (\text{II. 97})$$

We see that (II. 97) is a special case of (II. 96), that is, where $c_{jk} = a_j b_k$. The special vectors which can be written as (II. 97), i.e., in the form $|\phi\rangle_1 \otimes |\psi\rangle_2$, are called *direct product vectors*, or *factorizable*. In a direct sum space $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ all vectors can be written in the form $|\phi\rangle_1 \oplus |\psi\rangle_2$, but in a direct product

space $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ not all vectors can be written in the form $|\phi\rangle_1 \otimes |\psi\rangle_2$. Further on we will see that states for which c_{jk} cannot be written as $a_j b_k$ give rise to typical quantum mechanical behavior, as in the thought experiment of EPR where *composite systems* are considered, corresponding to states on $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ which cannot be factorized. Such states are called *non-factorizable* or *entangled* states.

If A and B are operators on \mathcal{H}_1 and \mathcal{H}_2 , respectively, the *direct product operator* $A \otimes B$ is the operator on $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, defined by

$$(A \otimes B) (|\phi\rangle_1 \otimes |\psi\rangle_2) := A |\phi\rangle_1 \otimes B |\psi\rangle_2. \quad (\text{II. 98})$$

It follows that, with operators $C \in \mathcal{H}_1$ and $D \in \mathcal{H}_2$,

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD). \quad (\text{II. 99})$$

Similar to vectors, operators on the direct product space $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ are not always factorizable. The total momentum operator $P_1 + P_2$ and the distance operator $Q_1 - Q_2$ of EPR, with P as defined in section I. 2, (I. 1), and Q likewise, are examples of such non-factorizable direct product operators,

$$P_1 \otimes \mathbb{1}_2 + \mathbb{1}_1 \otimes P_2 \quad \text{and} \quad Q_1 \otimes \mathbb{1}_2 - \mathbb{1}_1 \otimes Q_2. \quad (\text{II. 100})$$

EXERCISE 12. Calculate the commutator of these operators, given that $[P_i, Q_j] = -i\hbar\delta_{ij}$.

The following properties of the direct product of operators will, further on, be used frequently:

$$\begin{aligned} A \otimes 0 &= 0 \otimes B = 0, \\ (A_1 + A_2) \otimes B &= (A_1 \otimes B) + (A_2 \otimes B), \\ \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} &= \mathbb{1}, \\ aA \otimes bB &= ab(A \otimes B), \\ (A \otimes B)^{-1} &= A^{-1} \otimes B^{-1}, \\ (A \otimes B)^\dagger &= A^\dagger \otimes B^\dagger, \\ \text{Tr}(bA \otimes cB) &= bc \text{Tr} A \cdot \text{Tr} B. \end{aligned} \quad (\text{II. 101})$$

EXERCISE 13. Prove the properties of \otimes in (II. 101).

Finally, the matrix $A \otimes B$ of the operator $A \otimes B$ in the direct product space $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ is of the form

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1N_2} \\ \vdots & \ddots & \\ b_{N_2 1} & & b_{N_2 N_2} \end{pmatrix} & \cdots & a_{1N_1} B \\ & & \vdots \\ & a_{22} B & \\ \vdots & & \ddots \\ a_{N_1 1} B & \cdots & a_{N_1 N_1} B \end{pmatrix}, \quad (\text{II. 102})$$

where $a_{ij} = \langle \alpha_i | A | \alpha_j \rangle$ and $b_{kl} = B_{kl} = \langle \beta_k | B | \beta_l \rangle$, as in (II. 24). This matrix is called the *Kronecker product* of the matrices A and B .

II. 6 ADDENDUM: INFINITE - DIMENSIONAL HILBERT SPACES

This section is intended for the more interested readers, who wish to gain more in - depth knowledge of Hilbert spaces.

In physical applications of quantum mechanics we nearly always need infinite - dimensional Hilbert spaces, which already applies to the examination of a free particle in one spatial dimension. The mathematical theory of infinite - dimensional Hilbert spaces is in some aspects more difficult than that of finite - dimensional ones.

II. 6. 1 THE STRUCTURE OF VECTOR SPACES

An infinite - dimensional space \mathcal{H} is a space where for n independent vectors in \mathcal{H} , with n arbitrarily large, it is always possible to find still another vector in \mathcal{H} that is independent of these vectors. In rough approximation it can be said that all formulas of the previous sections remain valid if we replace the sums from 1 to N by sums from 1 to infinity. But, of course, attention must be given to the convergence of such sums. This leads to two assumptions which were superfluous in the theory of finite - dimensional spaces.

- (i) *Separability*. A Hilbert space \mathcal{H} is called *separable* if it has a *countable* basis, i.e., a countable set of independent vectors $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, \dots, |\phi_j\rangle, \dots \in \mathcal{H}$ exists such that every vector $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$ can, analogously to (II. 14), be written as

$$|\phi\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} c_j |\phi_j\rangle \quad \text{with} \quad c_j = \langle \phi_j | \phi \rangle. \quad (\text{II. 103})$$

This equation is shorthand for

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \phi - \sum_{j=1}^m c_j \phi_j \right\| = 0. \quad (\text{II. 104})$$

Hereafter, we will assume the Hilbert spaces to be separable.

- (ii) *Completeness*. We require that the space is *complete*, which means that every *Cauchy sequence*, i.e., a sequence of vectors $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, \dots, |\phi_j\rangle, \dots \in \mathcal{H}$, for which

$$\lim_{j, k \rightarrow \infty} \|\phi_j - \phi_k\| = 0, \quad (\text{II. 105})$$

has a *limit vector* $|\phi\rangle$ in \mathcal{H} ,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\phi_m - \phi\| = 0. \quad (\text{II. 106})$$

As an example, in this sense \mathbb{Q} , the set of rational numbers, is incomplete, since many Cauchy sequences of rational terms exist which have no limit in \mathbb{Q} , for instance the series expansions of π and e . If the limiting points of all Cauchy sequences are added to \mathbb{Q} , we obtain exactly \mathbb{R} . \mathbb{Q} is called a *countably infinite* set, \mathbb{R} is called an *uncountably infinite* set. This also illustrates that the requirement of separability is not obvious.

EXERCISE 14. Prove that every finite - dimensional complex vector space with an inner product is separable and complete.

▷ *Remark*

From the exercise it is clear that in the finite - dimensional case the requirements of separability and completeness are indeed superfluous. ◁

The next two spaces are examples of well - known infinite - dimensional Hilbert spaces.

- (i) The space of all complex, square integrable functions,

$$L^2(\mathbb{R}) := \left\{ \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{\mathbb{R}} |\psi(q)|^2 dq < \infty \right\}, \quad (\text{II. 107})$$

with an inner product defined as

$$\langle \psi | \phi \rangle := \int_{\mathbb{R}} \psi^*(q) \phi(q) dq, \quad (\text{II. 108})$$

and likewise for $L^2(\mathbb{R}^n)$ with arbitrary $n \in \mathbb{N}^+$.

- (ii) The space of square summable sequences of complex numbers, defined by Erhard Schmidt,

$$l^2(\mathbb{N}) := \left\{ c : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \mid \sum_{j=0}^{\infty} |c_j|^2 < \infty \right\}, \quad (\text{II. 109})$$

with inner product

$$\langle c | d \rangle := \sum_{j=0}^{\infty} c_j^* d_j. \quad (\text{II. 110})$$

The proof that these vector spaces are complete is not simple, however, the proof that the remaining requirements for a Hilbert space have been met, is.

These two spaces correspond to two versions of quantum mechanics, where $L^2(\mathbb{R})$ corresponds to Schrödinger's *wave mechanics* (1926) and $l^2(\mathbb{N})$ to the *matrix mechanics* of Heisenberg, Born, and Jordan (1925), that is, if we take matrix mechanics in the enriched version of Von Neumann, since the original version did not contain a 'state space'. These two versions of quantum mechanics are mathematically equivalent, see F.A. Muller (1997a, 1997b and 1999) for historical details.

II. 6. 2 OPERATORS

More serious complications occur at the consideration of operators on infinite - dimensional Hilbert spaces. First, we will see that such operators are in general 'unbounded', therefore they cannot be defined on the entire Hilbert space. Consequently, the definition of sum and product of operators, as well as their adjoints, becomes more cumbersome, and the terms 'self - adjoint' and 'Hermitian' no longer coincide. Second, these operators do not always have eigenvectors in \mathcal{H} . Therefore it is more difficult to give a useful version of the spectral theorem.

▷ *Remark*

The second problem can also occur in case of bounded self - adjoint operators. ◁

For position and momentum both complications occur together which is shown as an example.

EXAMPLE

Consider the position operator

$$Q : \psi(q) \mapsto q \psi(q), \quad (\text{II. 111})$$

and the momentum operator

$$P : \psi(q) \mapsto -i \hbar \frac{d}{dq} \psi(q), \quad (\text{II. 112})$$

both acting on $L^2(\mathbb{R})$.

The first problem is that these operators do not map every vector in $L^2(\mathbb{R})$ to another vector in $L^2(\mathbb{R})$. For instance, every non - differentiable function in $L^2(\mathbb{R})$ is outside the domain of P . Vice versa, taking for Q , for example, $\psi(q) = (a + q)^{-\frac{3}{2}}$ with $a \in \mathbb{R}$, we have $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, but $Q\psi \notin L^2(\mathbb{R})$.

The second problem is that the eigenvalue equation for momentum, $-i\hbar \frac{d}{dq} \psi(q) = p\psi(q)$, has solutions $\psi(q) \propto e^{\frac{i}{\hbar} p q}$ for $p \in \mathbb{R}$, but these functions are not square integrable and therefore they are not in \mathcal{H} . Something similar applies to the eigenvalue equation $Q\psi(q) = q_0\psi(q)$ and its solutions $\psi(q) = \delta(q - q_0)$.

II. 6. 2. 1 UNBOUNDED OPERATORS

Let us start with a definition: an operator A on Hilbert space \mathcal{H} is called *bounded* if the set of positive numbers $\|A\chi\| = \|\langle \chi | A | \chi \rangle\|$ has an upper bound for all unit vectors $|\chi\rangle$, where the least upper bound, or *supremum*, is called the *norm* of A ,

$$\|A\| = \sup \left\{ \|A\chi\| \in \mathbb{R} \mid \|\chi\| = 1 \right\}. \quad (\text{II. 113})$$

The set of all bounded operators on \mathcal{H} is written as $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$.

In finite - dimensional Hilbert spaces all operators are bounded, but this is not the case in infinite - dimensional Hilbert spaces. As we want to hold on to the requirement that every vector $A|\psi\rangle$ has a finite norm, we have to exclude from the domain of A the set of vectors $|\phi\rangle$ for which

$$\frac{\|A\chi\|}{\|\chi\|} \rightarrow \infty \quad \text{if} \quad |\chi\rangle \rightarrow |\phi\rangle. \quad (\text{II. 114})$$

Therefore, as from now an operator A is a linear mapping of a subset of \mathcal{H} to \mathcal{H} . This subset is called the domain of A , written as $\text{Dom } A \subset \mathcal{H}$. Hence, an operator is a linear mapping

$$\psi \in \text{Dom } A, \quad A : \psi \mapsto A\psi \in \mathcal{H}. \quad (\text{II. 115})$$

We will, however, always assume that $\text{Dom } A$ is *dense* in \mathcal{H} which means that every vector ϕ in \mathcal{H} can be approximated arbitrarily well by vectors in $\text{Dom } A$. The foregoing implies that also sums and products of operators are generally defined on a limited domain only,

$$\text{Dom } (A + B) = \text{Dom } A \cap \text{Dom } B \quad (\text{II. 116})$$

$$\text{Dom } (AB) = \left\{ \psi \in \text{Dom } B : B\psi \in \text{Dom } A \right\}. \quad (\text{II. 117})$$

It is more difficult to introduce the adjoint A^\dagger of an operator A . The operator is again called Hermitian if

$$\langle \phi | A | \psi \rangle = \langle \psi | A | \phi \rangle^* \quad \forall \phi, \psi \in \text{Dom } A, \quad (\text{II. 118})$$

but this definition is no longer sufficient for our purposes, as can be seen in the next example.

EXAMPLE

Consider the operator P from (II. 112), now acting on $L^2([0, \infty))$, and choose as its domain

$$\text{Dom } P = \left\{ \psi : \int_0^\infty |\psi(q)|^2 dq < \infty, \int |P\psi(q)|^2 dq < \infty, \psi(0) = 0 \right\}. \quad (\text{II. 119})$$

This operator is indeed Hermitian, which can be checked using integration by parts, where the non - integral term cancels out because of the boundary condition $\psi(0) = 0$. But the operator is not self - adjoint, as we will see in the next exercise.

To introduce the adjoint of an operator we first delimit the domain. Let $\text{Dom } A^\dagger$ be the set of all vectors $|\phi\rangle$ such that a vector $|\eta\rangle$ exists for which

$$\langle\phi|A|\psi\rangle = \langle\eta|\psi\rangle \quad \forall |\psi\rangle \in \text{Dom } A. \quad (\text{II. 120})$$

Using the assumption that $\text{Dom } A$ is dense in \mathcal{H} it is possible to show that if such a vector $|\eta\rangle$ exists it is also unique. The adjoint A^\dagger of operator A is now, by definition, the mapping

$$A^\dagger : |\phi\rangle \in \text{Dom } A^\dagger \mapsto |\eta\rangle := A^\dagger |\phi\rangle, \quad (\text{II. 121})$$

and the operator is called self-adjoint if

$$A = A^\dagger \quad \text{and} \quad \text{Dom } A = \text{Dom } A^\dagger. \quad (\text{II. 122})$$

This requirement is *stronger* than Hermiticity; it can be shown that in general it holds for Hermitian operators that $\text{Dom } A \subset \text{Dom } A^\dagger$, instead of (II. 122).

EXERCISE 15. Verify that the domain of P^\dagger , with P as in the example above, is indeed larger than the domain of P .

II. 6. 2. 2 CONTINUOUS SPECTRA

Another aspect in which infinite-dimensional Hilbert spaces deviate from finite-dimensional ones is the possibility for an operator to have a continuous spectrum, a mathematical impossibility in the finite-dimensional case since the term ‘spectrum’ was defined as the set of eigenvalues of operators. Examples of operators with continuous spectra are, again, the position operator and the momentum operator, whose spectra consist of the entire line of real numbers \mathbb{R} . Therefore, the term ‘spectrum’ needs to be redefined. The spectrum of operator A is now defined as the set of all values $\lambda \in \mathbb{C}$ for which the operator $A - \lambda\mathbb{1}$ has *no* inverse operator. To illustrate the deviations from the finite-dimensional case we give two examples, the angle operator and the angular momentum operator.

EXAMPLE

Consider the Hilbert space $L^2([0, 2\pi])$ and the angle operator

$$Q : \psi(q) \mapsto q\psi(q), \quad 0 \leq q \leq 2\pi. \quad (\text{II. 123})$$

This operator has, analogous to (II. 111), eigenfunctions which are not in \mathcal{H} , its spectrum is the interval $[0, 2\pi]$, but it is bounded, $\|Q\| = 2\pi$.

The angular momentum operator

$$L : \psi(q) \mapsto -i \hbar \frac{d}{dq} \psi(q), \quad (\text{II. 124})$$

with domain

$$\text{Dom } L = \left\{ \psi : \|L\psi\| < \infty, \psi(0) = \psi(2\pi) \right\}, \quad (\text{II. 125})$$

does have normalized eigenfunctions,

$$\psi(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{i}{\hbar} l q}, \quad (\text{II. 126})$$

and a discrete spectrum $l \in \mathbb{Z}$. But, since l can be arbitrarily large, it is unbounded.

II. 6. 2. 3 SPECTRAL THEOREM

Von Neumann succeeded in proving the spectral theorem, in the version of II. 3. 1, for infinite-dimensional Hilbert spaces for which we can formulate the theorem now.

SPECTRAL THEOREM:

To every normal operator A , bounded or unbounded, corresponds a unique mapping of subsets of $\text{Spec } A$ to the set $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ of projectors on \mathcal{H} , $\Delta \mapsto P^A(\Delta)$, having the following properties:

- (i) $P_{\emptyset} = 0$
- (ii) $P_{\mathbb{C}} = \mathbb{1}$
- (iii) $P_{\cup_i \Delta_i} = \sum_i P_{\Delta_i}$ for all Δ_i mutually disjoint. (II. 127)

For the position operator Q we have an explicit expression for the spectral family of eigenprojectors of Q ,

$$P^Q(\Delta) \psi(q) = \begin{cases} q \psi(q) & \text{if } q \in \Delta \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad (\text{II. 128})$$

hence, $P^Q(\Delta)$ is in fact a multiplication with the characteristic function of Δ . The spectral family of the momentum operator is obtained by applying a Fourier transform to the aforementioned expression.

The probability of finding upon measurement for the physical quantity \mathcal{A} , which corresponds to the normal operator A if the physical system is in the state $\psi \in \mathcal{H}$, a value $a \in \Delta \subset \mathbb{R}$, is

$$\text{Prob}^\psi(\mathcal{A} : \Delta) = \langle \psi | P^A(\Delta) | \psi \rangle, \quad (\text{II. 129})$$

which, using (II. 128), yields for the physical quantity position \mathcal{Q}

$$\text{Prob}^\psi(\mathcal{Q} : \Delta) = \langle \psi(q) | P^{\mathcal{Q}}(\Delta) | \psi(q) \rangle = \int_{\Delta} q |\psi(q)|^2 dq. \quad (\text{II. 130})$$

All empirical statements of quantum mechanics can therefore be expressed in terms of projectors, or, more precisely, all empirical statements of quantum mechanics concerning physical quantities \mathcal{A} can be expressed in terms of the spectral family of A .

II. 6. 3 DIRAC

Finally we remark that quantum mechanics *à la* Dirac willingly and knowingly violates Von Neumann's postulates by going outside the Hilbert space. Dirac writes (1958, p. 40)

The bra and ket vectors that we now use form a more general space than a Hilbert space.

To make Dirac's approach mathematically expressible, the French mathematician Laurent Schwarz developed the theory of *distributions*, and the Russian mathematical physicist I.M. Gel'fand developed the theory of *rigged Hilbert spaces*. Contrary to Schrödinger and Von Neumann, Dirac regarded wave mechanics as a *generalization* of matrix mechanics, going from a discrete index to a continuous index, making a transition from square summable sequences of complex numbers to wave functions, and from infinite matrices to integral kernels.

II. 6. 4 SUMMARY

A *complex Hilbert space* is, by definition, a complete, separable complex vector space with an inner product which is related to the norm by $\|\psi\|^2 = \langle \psi | \psi \rangle$, its dimension is finite or countably infinite. Contrary to the infinite - dimensional case, the requirements of separability and completeness are superfluous in the finite - dimensional case because they are derivable from the other properties of a Hilbert space, but in the vast majority of physical applications infinite - dimensional Hilbert spaces and unbounded operators are required.