

Sned-eliminatie

Yassine Kchiche

Een bachelorscriptie begeleid door Dr. Jaap van
Oosten.



Universiteit Utrecht

8 Juni 2020

Contents

1	Inleiding	2
2	Propositielogica	3
2.1	Syntax van de propositielogica	3
2.2	Semantiek van de propositielogica	4
2.3	Sequenten calculus	6
2.3.1	Introductie sequenten calculus	6
2.3.2	Zwakke structurele regels	6
2.3.3	Propositionele regels	7
2.3.4	De snederegel	8
2.3.5	Lengte van bewijzen	9
2.3.6	De snede-eliminatie stelling	10
3	Predikatenlogica	11
3.1	Syntax van de predikatenlogica	11
3.2	Semantiek van de predikatenlogica	12
3.3	Predikaatlogische sequenten calculus	15
3.3.1	De kwantorregels	15
3.3.2	De snede-eliminatie stelling	15
3.3.3	De vrije snede - eliminatie	16
4	Bewijs snede-eliminatie	18
5	Referenties	21

1 Inleiding

Gerhard Karl Erich Gentzen was een Duitse wiskundige en logicus. Gentzen heeft veel werk verricht op het gebied van bewijstheorie en met name de natuurlijke deductie en de sequenten calculus. Natuurlijke deductie is een methode in de logica om met deductie de geldigheid van een redenering vast te stellen. Systemen van natuurlijke deductie zijn ontwikkeld voor verschillende vormen van logica, waaronder de propositielogica en de predikaatlogica.

Gentzen introduceerde de sequenten calculus voor het eerst in 1935, als een uitbreiding op zijn eerdere bewijssystemen voor natuurlijke deductie. De sequenten calculus is van zichzelf een flexibel systeem voor het schrijven van bewijzen waarbij de snederegel een grote rol speelt binnen de sequentencalculus. Het gebruiken van de snederegel zorgt ervoor dat de bewijzen op een makkelijkere en kortere manier geschreven kunnen worden. Verder zijn er definities en stellingen af te leiden die het verband leggen tussen bewijzen die gebruikmaken van de snederegel en bewijzen die geen gebruik maken van de snederegel.[5]

Er zal gekeken worden naar de syntax en semantiek van de propositielogica om de basisprincipes duidelijk te hebben, zodat de stap gemaakt kan worden naar de sequentencalculus. Er zal gekeken worden naar de afleidingen die gemaakt kunnen worden binnen de sequentencalculus. Met behulp van stellingen en definities zal duidelijk gemaakt worden wat de snederegel en de snede-eliminatie stelling binnen de propositielogica inhouden. Nadat een basis gevormd is door te kijken naar de sequentencalculus binnen de propositielogica, zal naar de syntax en semantiek van de predikatenlogica gekeken worden om de rol die de snede-eliminatie speelt binnen de predikatenlogica te bezien. Als laatste zal er gekeken worden naar een voorbeeld binnen de predikatenlogica dat gebruikmaakt van de snederegel en we zullen kijken naar twee verschillende bewijzen van de snede-eliminatie stelling.

2 Propositielogica

2.1 Syntax van de propositielogica

In deze paragraaf volg ik de behandeling van [2], hoofdstuk 3. Propositielogica is een tak van logica die zich bezighoudt met het redeneren met proposities. Proposities zijn talige uitingen die de waarheidswaarden 0 (onwaar) of 1 (waar) kunnen hebben. Binnen de propositielogica bestaan er atomaire proposities (atomen) en samengestelde proposities. Atomaire proposities zeggen iets over slechts één ding. Zo is de zin "Het is vandaag vrijdag" een atomaire propositie. Een niet-atomaire propositie heet een samengestelde propositie en is op te splitsen in twee of meer atomaire proposities. Zo is de zin "Het is vrijdag en het regent" een samengestelde propositie. We kunnen deze samengestelde propositie opsplitsen in twee atomaire proposities namelijk: 'Het is vrijdag' en 'Het regent'. Een formele taal is een taal die verbandt houdt met wiskunde en bestaat uit symbolen, regels om rijtjes symbolen te vormen, bewerkingen op die symbolen en afspraken over de betekenis van de symbolen. Zo een taal moet gebruikt worden om goed te kunnen werken met proposities. Om te beginnen moeten we constateren dat we hier geïnteresseerd zijn in het (waarheids-)gedrag van (samengestelde) proposities en redeneringen met behulp van proposities. Aangezien proposities worden samengesteld met voegwoorden ligt het voor de hand om voor deze voegwoorden ook symbolen te gebruiken: de voegtekens ofwel connectieven. We beginnen met de definitie van wat een alfabet van de propositielogica is zodat we daarna kunnen kijken naar de uitleg van de betekenis van de diverse tekens. De volgende definities zijn afkomstig uit het dictaat van propositielogica

Definitie 2.1 Een alfabet van de propositielogica bestaat uit:

1. een verzameling propositieletters: $p_0, p_1, p_2, p_3, \dots$
2. een propositieconstante: \perp
3. voegtekens: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
4. hulptekens: $(,)$

De propositieconstante, \perp , wordt *falsum* genoemd omdat hij altijd staat voor de onware propositie, met waarheidswaarde 0. De andere vijf connectieven $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ staan voor "niet", "en", "of", "als...dan", "dan en slechts dan". We kunnen allerlei verschillende proposities maken door gebruik te maken van de connectieven. Dit brengt ons tot de volgende definitie waarbij de verzameling van correcte rijtjes symbolen, de verzameling formules wordt genoemd of kort gezegd 'FOR'.

Definitie 2.2 De verzameling formules FOR van de propositielogica is de kleinste verzameling die voldoet aan het volgende:

1. $p_i \in \text{FOR}$, met $i = 0, 1, \dots$
2. $\perp \in \text{FOR}$
3. als $\phi \in \text{FOR}$, dan ook $\neg \phi \in \text{FOR}$

4. als $\phi, \psi \in \text{FOR}$, dan ook $(\phi \wedge \psi), (\phi \vee \psi), (\phi \rightarrow \psi)$ en $(\phi \leftrightarrow \psi) \in \text{FOR}$

De formules $(\phi \wedge \psi)$ en $(\phi \vee \psi)$ heten een conjunctie en disjunctie waarbij ϕ en ψ de conjuncten en disjuncten zijn. Verder heet de formule $(\phi \rightarrow \psi)$ een implicatie waarbij de ϕ het antecedent heet en ψ het consequent. De formule $(\phi \leftrightarrow \psi)$ heet een bi-implicatie. Verder zijn de formules ϕ en ψ metavariablen ofwel willekeurige formules die gebruikt worden om wat over zo een taal te kunnen zeggen. We zullen in het vervolg aannemen dat Γ en Δ staan voor een verzameling formules.

2.2 Semantiek van de propositiologica

In deze paragraaf volg ik de behandeling van [2], hoofdstuk 4,5 en 6. Als we willen kijken naar de semantiek van een formule dan wil dat zeggen dat we gaan kijken naar de betekenis van een formule. De betekenis van een formule kunnen we definiëren door de valuatie van een formule te gebruiken. De valuatie is een functie die de waarde 1 (waar) of 0 (onwaar) kent aan propositievariabelen. Aan de hand van deze valuaties zijn we in staat om wat te zeggen over de valuatie van de formule. Alle valuaties van formules met één connectief zijn hieronder weergegeven in wat we noemen 'een waarheidstabel'. Met deze valuaties kun je de valuaties van complexere formules bepalen.

A	B	$(\neg A)$	$A \wedge B$	$(A \vee B)$	$(A \supset B)$	$(A \leftrightarrow B)$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T

Er zijn formules die een waarheidstafel hebben die uitsluitend enen bevat en er zijn ook formules die een waarheidstafel hebben die uitsluitend nullen bevat.

Definitie 2.3

Een formule ϕ is een *tautologie* d.e.s.d.a. de waarheidstafel van ϕ uitsluitend enen bevat.

Een formule ϕ is een *contradictie* d.e.s.d.a. de waarheidstafel van ϕ uitsluitend nullen bevat.

Een formule ϕ is een *contingentie* d.e.s.d.a. de waarheidstafel van ϕ zowel enen als nullen bevat.

In de logica wordt een valuatie ook vaak gezien als een model dat aangeeft of een formule waar wordt gemaakt of niet. Hiervoor zullen een formele vertaling van 'waar maken' moeten hebben en dat doen we door gebruik te maken van de *dubbele turnstile*, \models . Als we kijken naar $V \models \phi$ dan kan het gelezen

worden als: het model V maakt ϕ waar. Neem bijvoorbeeld: $V \models (\phi \wedge \psi)$, het model V kan $(\phi \wedge \psi)$ waarmaken dan en slechts dan als ϕ en ψ worden waar gemaakt door V ofwel, $V \models \phi$ en $V \models \psi$. De negatie van de *dubbele turnstile*, $\not\models$, kan gelezen worden als 'maakt niet waar'. Als we dus kijken naar $V \not\models \phi$ dan kan dit gelezen worden als: model V maakt ϕ niet waar. Nu we weten hoe het werkt met valuaties is het tijd om te kijken naar de begrippen *vervulbaar* en *strijdig*. Deze begrippen komen voor in de propositie - en predikatenlogica en worden hieronder weergegeven in twee definities.

Definitie 2.4 Een verzameling formules Γ is vervulbaar d.e.s.d.a. er tenminste één valuatie is zodat $V \models \Gamma$.

Definitie 2.5 Een verzameling formules Γ is strijdig d.e.s.d.a. hij niet vervulbaar is.

Als alle formules in een verzameling samen waar kunnen zijn dan is de verzameling formules vervulbaar en mocht dat niet het geval zijn dan is de verzameling formules strijdig. Een verzameling formules Γ is dus strijdig d.e.s.d.a. voor alle valuaties V geldt: $V \not\models \Gamma$. We hebben hierboven de begrippen *tautologie*, *contradictie* en *contingentie* gedefinieerd. Met het idee dat we het nu hebben over valuaties, is het mogelijk om deze begrippen beter te formuleren zoals weergegeven in de definities hieronder.

Definitie 2.6 Een formule ϕ is een tautologie desda voor alle valuaties V geldt dat: $V \models \phi$.

Definitie 2.7 Een formule ϕ is een contradictie desda voor alle valuaties V geldt dat: $V \not\models \phi$.

Definitie 2.8 Een formule ϕ is een contingentie desda er minstens één valuatie V is zodat $V \not\models \phi$ en er minstens één valuatie V' is zodat $V' \models \phi$.

2.3 Sequenten calculus

2.3.1 Introductie sequenten calculus

In de volgende paragrafen volg ik de behandeling van [1], hoofdstuk 2. Zoals ik in de inleiding al heb vermeld was de sequenten calculus voor het eerst geïntroduceerd door Gentzen in 1935, als een uitbreiding op zijn eerdere bewijssystemen voor natuurlijke deductie. De sequenten calculus is een flexibel systeem voor het opschrijven van bewijzen. In tegenstelling tot andere bewijssystemen zul je in de sequenten calculus vooral te maken hebben met sequents (rijen) die de volgende vorm hebben:

$$A_1, \dots, A_k \Longrightarrow B_1, \dots, B_l$$

Hierbij is het belangrijk om te weten dat het symbool \Longrightarrow niet dezelfde pijl is als de implicatiepijl, \rightarrow . De pijl die je in de sequent ziet wordt de sequentpijl genoemd en A_i en B_j zijn formules voor alle i van $1, \dots, k$ en voor alle j van $1, \dots, l$. De rij formules aan de linkerkant van de sequentpijl A_1, \dots, A_k wordt het antecedent genoemd en de rij formules aan de rechterkant van de sequentpijl B_1, \dots, B_l wordt het succedent genoemd. Ze worden beiden de cedenten genoemd. De betekenis van de sequent is het volgende: de conjunctie van de A_i 's impliceert de disjunctie van de B_j 's. We kunnen dit ook vertalen naar een vorm waarin we gebruikmaken van de bekende symbolen. Dit leidt tot de volgende expressie.

$$\bigwedge_{i=1}^k A_i \rightarrow \bigvee_{j=1}^l B_j$$

De symbolen \bigwedge en \bigvee staan voor de conjunctie en disjunctie van de formules waarbij een lege conjunctie de waarheidswaarde 1 (waar) heeft en een lege disjunctie de waarheidswaarde 0 (onwaar). Al eerder is aangegeven dat de verzamelingen van formules wordt weergegeven door Γ en Δ .

Definitie 2.9 Een sequent is een paar van rijtjes van formules. Een sequent bestaat uit de verzamelingen Γ , Δ en wordt geschreven als $\Gamma \Longrightarrow \Delta$

2.3.2 Zwakke structurele regels

In de propositionale sequenten calculus bestaat het bewijs vooral uit een boom waarbij de sequent die je moet bewijzen onderaan de boom staan. Deze sequent wordt *endsequent* genoemd. Aan de top van de boom hebben we de *beginsequenten* en die zijn afkomstig van de logische axioma's die de vorm $A \Longrightarrow A$ hebben. Elke sequent in het bewijssysteem van de propositionale sequenten calculus moet afgeleid worden uit bepaalde gevolgtrekkingen. Deze gevolgtrekkingen worden zwakke structurele regels genoemd en worden geschreven in de vorm $\frac{S_1}{S}$ of $\frac{S_1 \quad S_2}{S}$. De eerste regel betekent dat S afleidbaar is uit S_1 , ofwel S is te bewijzen uit S_1 en de tweede regel betekent dat S afleidbaar is

uit het paar S_1 en S_2 , ofwel S is te bewijzen uit het paar S_1 en S_2 . Hierin wordt S de *lower sequent* genoemd en het paar S_1 en S_2 de hypothesen, ofwel de *upper sequent*. De zwakke structurele regels zijn hieronder weergegeven waarbij een onderscheid is gemaakt tussen de linker- en de rechter zwakke structurele regels.

$$\text{Exchange} : \text{left} \frac{\Gamma, A, B, \Pi \Longrightarrow \Delta}{\Gamma, B, A, \Pi \Longrightarrow \Delta} \quad \text{right} \frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta, A, B, \Lambda}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, B, A, \Lambda} \quad (1, 2)$$

$$\text{Contraction} : \text{left} \frac{A, A, \Gamma \Longrightarrow \Delta}{A, \Gamma \Longrightarrow \Delta} \quad \text{right} \frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, A} \quad (3, 4)$$

$$\text{Weakening} : \text{left} \frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta}{A, \Gamma \Longrightarrow \Delta} \quad \text{right} \frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, A} \quad (5, 6)$$

De zwakke structurele regels worden ook zwakke gevolgtrekkingen genoemd. De rest van de regels worden sterke gevolgtrekkingen genoemd. De structurele regels bestaan uit de zwakke structurele regels en de snede regel.

2.3.3 Propositionele regels

Naast de zwakke structurele regels hebben we ook propositionele regels nodig voor de connectieven. Elk connectief heeft zijn eigen regel voor zowel de linkerkant als voor de rechterkant. Hiermee kan je op de juiste wijze afleidingen maken om tot een bewijs voor een sequent te komen.

$$\neg : \text{left} \frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \Lambda}{\neg \Lambda, \Gamma \Longrightarrow \Delta} \quad \neg : \text{right} \frac{\Lambda, \Gamma \Longrightarrow \Delta}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \neg \Lambda} \quad (7, 8)$$

$$\wedge : \text{left} \frac{A, B, \Gamma \Longrightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Longrightarrow \Delta} \quad \frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Longrightarrow \Delta, B}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, A \wedge B} \quad (9, 10)$$

$$\vee : \text{left} \frac{A, \Gamma \Longrightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Longrightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Longrightarrow \Delta} \quad \vee : \text{right} \frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, A \vee B} \quad (11, 12)$$

$$\supset : \text{left} \frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta, A \quad B, \Gamma \Longrightarrow \Delta}{A \supset B, \Gamma \Longrightarrow \Delta} \quad \supset : \text{right} \frac{A, \Gamma \Longrightarrow \Delta, B}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, A \supset B} \quad (13, 14)$$

Er wordt nu kort gekeken naar de \wedge : *links* regel. Deze regel vertelt ons dat als we $A \wedge B, \Gamma \Longrightarrow \Delta$ willen bewijzen, we eerst moeten weten dat $A, B, \Gamma \Longrightarrow \Delta$

waar is. Hierin zijn A en B formules afkomstig uit Γ . Als we kijken naar de \wedge : *rechtsregel* dan zien we dat het net andersom is. De regel vertelt ons namelijk dat als we $\Gamma \implies \Delta, A \wedge B$, willen bewijzen, we eerst moeten weten dat $\Gamma \implies \Delta, A$ en $\Gamma \implies \Delta, B$ waar zijn voordat we die conclusie kunnen trekken. In de linkerregel kun je A en B aannemen om tot de lower sequent te komen terwijl je in de rechterregel A en B eerst moet bewijzen om tot de lower sequent te komen. De combinatie van deze propositionele regels geeft je de mogelijkheid om complexe sequents te bewijzen, alleen zullen het in een hoop gevallen hele lange bewijzen worden.

2.3.4 De snederegel

We hebben te maken gehad met de zwakke structurele regels die ook wel zwakke gevolgtrekkingen worden genoemd en de propositionele regels, die sterke gevolgtrekkingen worden genoemd. De structurele regels bestaan uit de zwakke gevolgtrekkingen en de snederegel. Eerder is aangegeven dat de snederegel een belangrijke rol speelt binnen de sequenten calculus. Bij het gebruikmaken van de sterke gevolgtrekkingen zal de formule zowel in de upper als in de lower sequent voor moeten komen. Dit is bij de snederegel niet het geval, omdat deze gebruikmaakt van het elimineren van een formule in de hypothesen. De snederegel wordt gegeven door:

$$\frac{\Gamma \implies \Delta, A \quad A, \Gamma \implies \Delta}{\Gamma \implies \Delta}$$

De snederegel vertelt ons dat als uit Γ , Δ met daarin de formule A volgt en als Δ volgt uit Γ met daarin de formule A dan volgt Δ uit Γ ofwel de sequent $\Gamma \implies \Delta$ is waar. We zien dat de formule A wordt geëlimineerd en we zien ook dat de snederegel een vorm van transitiviteit is. Transitiviteit houdt in dat als $a \rightarrow b$ en $b \rightarrow c$ dan $a \rightarrow c$. De formule A in de snederegel wordt de snedeformule genoemd en een toepassing van de snederegel wordt een snede genoemd. We zullen in het vervolg gaan kijken naar wat voor invloed de snederegel heeft op de lengte van een bewijs. Hiervoor zullen we definities en stellingen gebruiken om uiteindelijk de snede-eliminatie stelling te kunnen weergeven. Een bewijs dat geen gebruik maakt van een snede, wordt een snede-vrij bewijs genoemd.

Definitie 2.10 Snedevrij bewijs is een bewijs dat geen toepassing van de snederegel bevat.

We merkten hierboven al op dat als we alleen de sterke gevolgtrekkingen gebruiken voor een bewijs, de formule zowel in de uppersequent als in de lowersequent voor moeten komen. Als we dit samen met definitie 2.10 gebruiken komen we op de subformulestelling die ons vertelt dat elke formule in bewijs P , waarin de snederegel niet is toegepast, een subformule is in de laatste sequent van het bewijs P .

Stelling 2.1 (*Subformule stelling*) Elke formule in een snede-vrij bewijs P is een subformule van een formule in de laatste sequent van P .

2.3.5 Lengte van bewijzen

In deze paragraaf zullen we gaan kijken of we de lengte van een bewijs P kunnen meten. Een bewijs P is altijd in de vorm van een boom, ofwel een *tree-like* bewijs. Deze kunnen verschillende lengtes hebben omdat het afhangt van de sequent die je moet bewijzen maar ook of je de snederegels gebruikt of niet. Eerder is aangegeven dat bewijzen veel korter zullen zijn als de snederegels wordt toegepast. We zullen hierin vooral kijken naar een bewijs P waarin geen snede voorkomt. We zullen zien dat het aantal sterke gevolgtrekkingen invloed zal hebben, daarom zullen we in het vervolg altijd aannemen dat de bewijzen *tree-like* zijn en we nemen aan dat $\|P\|$ aangeeft hoeveel sterke gevolgtrekkingen je hebt gebruikt voor je bewijs P .

Stelling 2.2 (*Correctheid stelling*) De propositionele sequenten calculus is *correct*. Dat betekent dat elke sequent of elke formule, die bewijsbaar is in de propositionele sequenten calculus, een tautologie is.

Samuel Buss zegt in zijn boek 'Basic Proof Theory': 'De correctheid stelling is al bewezen door op te merken dat de regels van de gevolgtrekkingen van propositionele sequenten calculus de eis bevatten dat sequents tautologieën zijn.'

Stelling 2.3 (*volledigheids stelling*) De 'volledigheidsstelling' voor propositionele sequenten calculus zegt dat elke sequent dat een tautologie is, bewezen kan worden binnen de propositionele sequenten calculus. Dit, in combinatie met de 'correctheid' stelling, laat zien dat de bewijsbare sequents in de propositionele sequenten calculus precies de sequents zijn die een tautologie zijn.

De correctheidsstelling geeft aan dat een sequent dat bewijsbaar is in de propositionele sequenten calculus een tautologie is, terwijl de volledigheid stelling aangeeft dat elke sequent dat een tautologie is bewezen kan worden door de propositionele sequenten calculus. Dit leidt ons naar de volgende stelling en het volgende lemma.

Stelling 2.4 Als $\Gamma \implies \Delta$ een tautologie is, dan heeft het een bewijs in de propositionele sequenten calculus waarin geen snede voorkomt.

Lemma 2.1 Laat $\Gamma \implies \Delta$ een sequent zijn dat een tautologie is waarin er m logische connectieven in voorkomen. Dan is er een *tree-like*, snede-vrij bewijs P van $\Gamma \implies \Delta$ waarin er minder dan 2^m sterke gevolgtrekkingen in worden gebruikt.

Door gebruik te maken van lemma 2.1 kan je jezelf een kader geven van hoeveel sterke gevolgtrekkingen het bewijs nodig heeft gehad. Dit weet je door te kijken naar het aantal logische connectieven die in de sequent voorkomen. Hierdoor weet je ook veel meer over de lengte van je bewijs in zijn geheel. Met deze definities, stellingen en lemma 2.1 kunnen we de snede-eliminatie stelling vormen. We zullen in de volgende paragraaf hiernaar kijken.

2.3.6 De snede-eliminatie stelling

De volledigheds stelling en correctheidsstelling vormen de basis voor de snede-eliminatie stelling. Er geldt dat elke sequent een tautologie moet zijn volgens de correctheidsstelling maar hetzelfde sequent heeft ook een snede-vrij bewijs volgens de volledigheds stelling. De snede-eliminatie stelling is een direct gevolg van de correctheidsstelling en volledigheds stelling, omdat de snede-eliminatie stelling zegt dat als een sequent bewijsbaar is in de propositionele sequenten calculus, het ook een snede-vrij bewijs heeft.

Stelling 2.5 (*Snede – eliminatie stelling*)

Stel dat P een bewijs is in de propositionele sequenten calculus van $\Gamma \implies \Delta$. Dan heeft $\Gamma \implies \Delta$ een snede-vrij, bewijsboom in de propositionele sequenten calculus met een aantal sterke gevolgtrekkingen die kleiner of gelijk zijn aan $2^{\|P\|}$.

3 Predikatenlogica

3.1 Syntax van de predikatenlogica

We hebben in het vorige hoofdstuk gezien dat propositielogica een tak van de logica is die zich vooral bezighoudt met het redeneren met proposities. Predikatenlogica is een wiskundig-formele logica waarin eigenschappen van verzamelingen en objecten worden beschreven maar ook de relaties tussen verzamelingen en objecten worden beschreven. Predikaatlogica kan ook worden gezien als een uitbreiding van het bewijssysteem voor de propositielogica. In de predikaatlogica maken we gebruik van predikaatletters, constanten, variabelen, de propositielogische connectieven, het falsum en de kwantoren. Verder eisen we voor elke predikaatletter de plaatsigheid eisen, ofwel welke ariteit de predikaatletter heeft. In deze paragraaf volg ik de behandeling van [3], hoofdstuk 3 en 4.

Definitie 3.1 Een signatuur Σ is een rijtje $\langle Pred, Cons \rangle$. Hier is $Pred$ de verzameling predikaatsymbolen van diverse ariteit en Con de verzameling constanten.

Een voorbeeld van een signatuur, die staat in het dictaat predikatenlogica geschreven door H.Hendrik, zou kunnen zijn: $\langle K^1, S^2, i, j \rangle$. Hier zou Kx kunnen staan voor "x is kapper" en Sxy voor "x scheert y". De constante i zou kunnen staan voor "ik" en de constante voor "Janssens". We zien dat de predikaatletter K eenplaatsig is en de predikaatletter S is tweepplaatsig. Verder zijn de voegtekens $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ tweepplaatsig, \neg is eenplaatsig en \perp is nulplaatsig.

Definitie 3.2 Zij Σ is een signatuur $\langle Pred, Cons \rangle$. Het alfabet van de predikatenlogische taal L_Σ dat gebaseerd is op Σ , bestaat uit de volgende symbolen.

1. De predikaatsymbolen uit $Pred$
2. De constanten uit $Cons$
3. Variabelen: x_1, x_2, \dots
4. Voegtekens: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
5. Kwantoren: \exists, \forall
6. Haakjes: $(,)$

De voegtekens die we in de propositielogica gebruiken worden ook gebruikt in de predikatenlogica, zoals in definitie 3.2 ook te zien is. We zien verder twee nieuwe symbolen, namelijk de universele kwantor \forall en de existentiële kwantor \exists . De universele kwantor spreek je uit als "voor alle" en de existentiële kwantor spreek je uit als "er is" en beide kwantoren worden gevolgd door precies één variabele. Kwantoren die gevolgd worden door een variabele zijn van de vorm $\forall x_i$ en $\exists x_i$. Hierbij wordt de variabele x_i de *eigenvariabele* van de kwantor genoemd. De logische taal L_Σ is op te delen in drie delen die hieronder in definitie 3.3 zijn weergegeven.

Definitie 3.3

1. De voegtekens en kwantoren vormen de *logische – constanten* van L_Σ .
2. De predikaatletters en constanten vormen samen de klasse van *niet–logische constanten* van l_Σ .
3. De constanten en variabelen vormen samen de klasse van *termen* van l_Σ .

We zullen nu gaan kijken naar wat de formules binnen de predikatenlogica betekenen door te kijken naar de verzameling FOR. Deze verzameling hebben we in hoofdstuk 2.1 ook gezien en deze zal in vele opzichten lijken op de definitie van de formules van de propositielogica, alleen zal deze uitgebreider zijn.

Definitie 3.4 De klasse FOR van formules van de predikatenlogische taal L_Σ gebaseerd op een signatuur $\Sigma = \langle Pred, Cons \rangle$ is de kleinste verzameling die voldoet aan de volgende regels (waarbij $P^n \in Pred$, en $t_i \in Term$).

1. $P^n t_1, \dots, t_n \in FOR$ en $\perp \in FOR$
2. als $\phi \in FOR$, dan ook $\neg \phi \in FOR$
3. als $\phi, \psi \in FOR$, dan ook $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$ en $(\phi \leftrightarrow \psi) \in FOR$
4. als $\phi \in FOR$, dan ook $\forall x_i \phi \in FOR$ en $\exists x_i \phi \in FOR$

De predikatenlogica kent twee klassen van variabelen namelijk *gebonden variabelen* en *vrije variabelen*. We zullen kijken naar twee voorbeelden om een duidelijk beeld te krijgen van wat gebonden en vrije variabelen zijn.

Voorbeeld 1. $\exists x(Sx \rightarrow \forall xRx)$.

Als we kijken naar dit voorbeeld, zien we dat het eerste voorkomen van x wordt gebonden door de kwantor $\exists x$ en het tweede voorkomen van x wordt gebonden door de kwantor $\forall x$.

Voorbeeld 2. $\exists xSx \rightarrow Rx$.

Als we kijken naar dit voorbeeld, zien we dat het eerste voorkomen van x wordt gebonden door de kwantor $\exists x$ en het tweede voorkomen van x is een vrije variabele omdat het niet door een kwantor wordt gebonden.

Definitie 3.5 Een voorkomen van een variabele x_i in een formule ϕ heet een gebonden voorkomen als dat voorkomen in ϕ door een kwantor gebonden voorkomen gebonden wordt. Anders heet dat voorkomen van x_i een vrij voorkomen. We zeggen ook wel dat het voorkomen van x_i een gebonden, respectievelijk vrije variabele is.

3.2 Semantiek van de predikatenlogica

In deze paragraaf volg ik de behandeling van [3], hoofdstuk 5 en 6. Net zoals we in hoofdstuk 1 deden voor propositielogica zullen we nu naar de semantiek kijken van de predikatenlogica. Dat betekent dat we gaan kijken naar de betekenis van de logische taal. In de propositielogica zagen we dat een propositielogisch

model een toekenning van waarheidswaarden aan atomen is. Dit noemden we een valuatie. Een predikatenlogisch model werkt in zijn geheel hetzelfde alleen zal een predikatenlogisch model complexer zijn dan een propositielogisch model, omdat de predikatenlogica complexer is dan de propositielogica. We zullen in de volgende definitie laten zien wat een model, \mathcal{M} , inhoudt in een predikatenlogisch model.

Definitie 3.6 Een model \mathcal{M} van signatuur $\Sigma = \langle Pred, Cons \rangle$ is een paar $\langle D, I \rangle$, waar:

1. D is een niet-lege verzameling, het domein
2. I is een functie zodanig dat:
 - $I(c) \in D$ voor elke constante c
 - $I(P) \in \{0, 1\}$ voor elk nulplaatsig predikaat P
 - $I(P) \subseteq D$ voor elk unair predikaat P
 - $I(P) \subseteq D^n$ voor elk n -air predikaat P

Modellen maken bepaalde uitspraken waar terwijl het in een ander model ook onwaar kan zijn. Het is net zoals een propositie die in de ene valuatie de waarheidswaarde 1 krijgt en in de andere valuatie waarheidswaarde 0. De waarheid van een zin hangt dus af van het model. Het is wel zo dat het model in de predikatenlogica dezelfde rol speelt als de valuatie in de propositielogica. Dit brengt ons bij de volgende definitie waarin de waarheidsregels voor de samengestelde zinnen worden gedefinieerd. Samengestelde zinnen zijn zinnen van de vorm: $\neg\phi$, $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$ en $(\phi \leftrightarrow \psi)$.

Definitie 3.7 Zij een signatuur Σ gegeven. Bezie een model \mathcal{M} van signatuur Σ , die ook geldt voor atomaire formules. We hebben:

1. sem \neg : $\mathcal{M} \models \neg\phi \Leftrightarrow \mathcal{M} \not\models \phi$
2. sem \wedge : $\mathcal{M} \models (\phi \wedge \psi) \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \phi$ en $\mathcal{M} \models \psi$
3. sem \vee : $\mathcal{M} \models (\phi \vee \psi) \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \phi$ of $\mathcal{M} \models \psi$
4. sem \rightarrow : $\mathcal{M} \models (\phi \rightarrow \psi) \Leftrightarrow \mathcal{M} \not\models \phi$ of $\mathcal{M} \models \psi$
5. sem \leftrightarrow : $\mathcal{M} \models (\phi \leftrightarrow \psi) \Leftrightarrow [\mathcal{M} \models \phi$ en $\mathcal{M} \models \psi]$ of $[\mathcal{M} \not\models \phi$ en $\mathcal{M} \not\models \psi]$

We gaan nu naar een methode kijken die ervoor zorgt dat we een constante kunnen toekennen aan een variabele x . Deze methode wordt de substitutiemethode genoemd. De notatie die wordt gebruikt voor het invullen van een constante c voor x in ϕ wordt gegeven door: $[c/x]\phi$. Dit kan worden gelezen als: 'c ingevuld voor x in ϕ '.

Definitie 3.8 $[c/x]\phi$ staat voor de formule die we verkrijgen als we alle vrije voorkomens van x in ϕ vervangen door c .

In hoofdstuk 1 hebben we gekeken naar formules en hun valuaties en aan de hand daarvan definities opgesteld, die ons vertellen wanneer een formule een tautologie of een contradictie is. Deze regels zijn vrijwel hetzelfde voor de predikatenlogica. De definities zijn hieronder weergegeven.

Definitie 3.9 Een formule ϕ is een *tautologie* desda voor alle modellen \mathcal{M} geldt: $\mathcal{M} \models \phi$.

Definitie 3.10 Een formule ϕ is een *contradictie* desda voor alle modellen \mathcal{M} geldt: $\mathcal{M} \not\models \phi$.

Definitie 3.11 Een formule ϕ is een *contingent* desda hij noch een tautologie, noch een contradictie is.

Met alle definitie die hierboven zijn weergegeven is het nu mogelijk om te kijken naar de sequenten calculus binnen de predikatenlogica.

3.3 Predikaatlogische sequenten calculus

3.3.1 De kwantorregels

In deze paragraaf volg ik de behandeling van [1], hoofdstuk 2.3 en 2.4. De predikatenlogica is een uitbreiding op de propositielogica die ook alle structurele regels en propositionele regels van de propositielogica bevat. Een deel van de uitbreidingen binnen de predikatenlogica zijn de kwantoren. Net zoals bij de connectieven moeten ook de kwantorregels hebben om tot een bewijs te kunnen komen. De kwantorregels en de correctheidsstelling worden hieronder weergegeven. [1]

$$\forall : left \frac{A(t), \Gamma \Longrightarrow \Delta}{(\forall x)A(x), \Gamma \Longrightarrow \Delta} \quad \forall : right \frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta, A(b)}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, (\forall x)A(x)} \quad (15, 16)$$

$$\exists : left \frac{A(b), \Gamma \Longrightarrow \Delta}{(\exists x)A(x), \Gamma \Longrightarrow \Delta} \quad \exists : right \frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta, A(t)}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, (\exists x)A(x)} \quad (17, 18)$$

Stelling 2.5 (*correctheidsstelling*) Laat $\Gamma \Longrightarrow \Delta$ een willekeurig sequent zijn.

1. Als $\Gamma \Longrightarrow \Delta$ bewijsbaar is in de predikaten logica, dan heeft het een snedevrij bewijs.
2. Laat Π een verzameling sequenten zijn. Als $\Gamma \Longrightarrow \Delta$ een bewijs heeft, dan $\Pi \models \Gamma \Longrightarrow \Delta$.

3.3.2 De snede-eliminatie stelling

Eerder is al beschreven hoe we de lengte van een bewijs P kunnen meten. Een bewijs P is namelijk altijd in de vorm van een boom, ofwel een *tree-like* bewijs. Een *tree-like* bewijs kan verschillende lengtes hebben, dat hangt af van het sequent dat je moet bewijzen maar ook of je de snede regel hebt gebruikt. Verder is het zo dat $\|P\|$ aangeeft hoeveel sterke gevolgtrekkingen je hebt gebruikt voor je bewijs P . De lengte van een *tree-like* bewijs wordt *depth* genoemd en heeft te maken met de complexiteit van een formule.

Definitie 3.12 De *depth*, $dp(A)$, van een formule A is gelijk aan de lengte van de *tree-like* bewijs van de formule.

1. $dp(A) = 0$, met A is een atoom.
2. $dp(A \wedge B) = dp(A \vee B) = dp(A \supset B) = 1 + \max\{dp(A), dp(B)\}$
3. $dp(\neg A) = dp((\exists x)(A)) = dp((\forall x)A) = 1 + dp(A)$.

Stelling 2.6 (*Snede-eliminatie-stelling*) Laat P een bewijs binnen de predikatenlogica en neem aan dat elke snede-formule in P een *depth* heeft die

kleiner of gelijk is aan d . Er is dan een snede-vrij bewijs, P^* , met dezelfde eindsequent als P , met lengte:

$$\|P^*\| < 2^{\|P\|}_{2d+2}$$

De snede-eliminatie stelling zegt dus dat elk bewijs met een *depth* die kleiner of gelijk is aan d ook een bewijs heeft waarin er geen gebruik wordt gemaakt van de snede-eliminatie. Dit wordt ook wel een snede-vrij bewijs genoemd. In de propositielogica is het zo dat $\Gamma \implies \Delta$ een snede-vrij bewijs heeft d.e.s.d.a. P een bewijs is van $\Gamma \implies \Delta$. Verder zijn de aantal sterke gevolgtrekkingen voor het snede-vrij bewijs kleiner of gelijk aan $2^{\|P\|}$.

De meeste bewijzen van de snede-eliminatie stelling zijn gebaseerd op het originele bewijs van Gentzen. Hierbij was het belangrijk om het aantal keer dat de snede werd gebruikt, ofwel de rang van een snede, te verminderen. Dit wordt gedaan door lokale veranderingen te maken in het bewijs. Samuel Buss doet het anders in zijn handbook, hij geeft een bewijs waarin de rang van een snede verminderd door globale veranderingen te maken in het bewijs zodat de snede-eliminatie proces overzichtelijker wordt. De snede-eliminatie-stelling is een direct gevolg van de hieronder gegeven lemma.

Lemma 3.1 Als P een bewijs is waarbij de *depth* op z'n hoogst d is dan is er een bewijs P^* met dezelfde eindsequent waarbij de *depth* strikt kleiner is dan d . Er geldt:

$$\|P^*\| < 2^{2\|P\|}$$

3.3.3 De vrije snede - eliminatie

De verzameling Υ is een geloten verzameling van sequenten die gesloten zijn onder substitutie. In deze paragraaf zullen we gaan kijken naar mogelijkheden om geen sneden meer te gebruiken in de bewijzen, waarbij de initial sequents afkomstig zijn uit Υ .

Definitie 3.13 Laat P een bewijs zijn waarbij de begin sequenten afkomstig zijn uit Υ . Een formule, die voorkomt in P , is *anchored* als het een directe descendent is van een formule die voorkomt in een beginsequent in Υ . Een snede gevolgtrekking in P is *anchored* als :

1. De snede formule is geen atoom en tenminste een van de twee voorvallen van de snede formule in de upper sequenten is *anchored*, of
2. De snede formule is een atoom en beide voorvallen van de snede formule in de upper sequenten is *anchored*.

Een snede-vrije gevolgtrekking dat niet *anchored* is wordt *vrij* genoemd. Het bewijs P is vije-snede vrij als het geen vrije-snede bevat.

Een formule in een bewijs P is *only weakly introduced* in P als het geen directe ancestor heeft die verschijnt in een begin sequent of het is een formule van een sterke gevolgtrekking. Om dit duidelijk te maken: Laat dat de gevolgtrekking

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta, A \quad A, \Gamma \Longrightarrow \Delta}{\Gamma \Longrightarrow \Delta}$$

waarbij de A optreedt in de upper sequent $A, \Gamma \Longrightarrow \Delta$ die *only weakly introduced* is. Nu kan het zo zijn dat de subproof van $\Gamma \Longrightarrow \Delta, A$ een formule B heeft in Γ of Δ dat *anchored* is terwijl het in de andere subproof $A, \Gamma \Longrightarrow \Delta$ niet *anchored* is. Deze snede kan je elimineren door alle directe ancestors van de A in de rechter upper sequent te verwijderen waardoor je een bewijs voor $\Gamma \Longrightarrow \Delta$ krijgt. Hierna verwijder je de linker upper sequent en zijn bewijs wat ervoor zorgt dat B *only weakly introduced* is in de nieuwe subproof van $\Gamma \Longrightarrow \Delta$. Ofwel, de verschijning van B in het sequent $\Gamma \Longrightarrow \Delta$ wordt *unanchored*. Dus als een direct descendent van B later wordt gebruikt als een snede formule, dan zou de eliminatie van de snede van A de snede veranderen van een *anchored snede* naar een vrije-snede.

Stelling 2.7 (*Vrije – snede – Eliminatiestelling*). Laat Υ een verzameling van sequenten zijn die gesloten zijn onder substitutie.

1. Als $\vdash \Gamma \Longrightarrow \Delta$, dan is er een vrije-snede vrij bewijs van $\Gamma \Longrightarrow \Delta$
2. Laat P een bewijs zijn met begin sequenten uit Υ en stel dat iedere *anchored* snede-formule in P een *depth* heeft die kleiner of gelijk is aan d . Dan is er een vrije-snede vrij bewijs P^* met hetzelfde endsequent als P , met grootte:

$$\|P^*\| < 2_{2d+2}^{\|P\|}$$

4 Bewijs snede-eliminatie

In dit hoofdstuk zullen we twee bewijzen, afkomstig uit [1] hoofdstuk 2.4, van de snede-eliminatie uitwerken. We hebben eerder al aangegeven dat de meeste bewijzen zijn gebaseerd op het originele bewijs van Gentzen, waarin er lokale veranderingen in het bewijs worden gemaakt om de aantal sneden te verminderen. Buss heeft een bewijs opgesteld waarin de aantal sneden worden vermindert door globale veranderingen te maken in het bewijs. We zullen ook naar een ander bewijs van de snede-eliminatie stelling kijken waarin we de grenzen veranderen.

We hebben eerder al gezien dat de snede-eliminatie stelling een direct gevolg is van lemma 3.1. Hierom zullen we dus lemma 3.1 bewijzen omdat de snede-eliminatie stelling dan ook is bewezen.

Bewijs: De lemma zal bewezen worden door inductie op het aantal sneden d in P . Het geval waarin er geen sneden zijn is triviaal omdat $\|P^*\| < 2^{2\|P\|}$. Voor de inductiestap is het van belang dat we kijken waar P eindigt met een snede-gevolgtrekking.

$$\frac{\begin{array}{c} [Q] \\ \vdots \\ \Gamma \Longrightarrow \Delta, A \end{array} \quad \begin{array}{c} [R] \\ \vdots \\ A, \Gamma \Longrightarrow \Delta \end{array}}{\Gamma \Longrightarrow \Delta}$$

Hierbij zijn Q en R sub-bewijzen voor $\Gamma \Longrightarrow \Delta, A$ en $A, \Gamma \Longrightarrow \Delta$. Verder is de depth van de snede formule A gelijk aan d . Neem aan dat het sub-bewijs R geen sterke gevolgtrekkingen heeft, dan geldt $\|R\| = 0$. R bevat dus de axioma $A \Longrightarrow A$ of het bevat directe ancestors van de snede formule A . In het laatste geval geldt dat A in Δ moet zitten en het bewijs P^* kan dan uit Q worden geformuleerd. In het tweede geval zou P^* uit R getrokken kunnen worden door alle zwakke gevolgtrekkingen van links, die directe ancestors van de snede formule A introduceren, te verwijderen. In het geval van $\|Q\| = 0$, geldt precies hetzelfde als bij $\|R\| = 0$. In beide gevallen geldt: $\|P^*\| < \|P\| < 2^{2\|P\|}$. Stel nu dat $\|Q\|$ en $\|R\|$ beiden niet gelijk aan 0 zijn dan geldt uit de inductiehypothese dat er bewijzen Q^* en R^* met aantal sneden kleiner (depth) dan d . Verder geldt er:

$$\|Q^*\| < 2^{2\|Q\|} \quad \|R^*\| < 2^{2\|R\|} \quad (19, 20)$$

Als we nu lemma 3.1 gebruiken voor het bewijs

$$\frac{\begin{array}{c} [Q] \\ \vdots \\ \Gamma \Longrightarrow \Delta, A \end{array} \quad \begin{array}{c} [R] \\ \vdots \\ A, \Gamma \Longrightarrow \Delta \end{array}}{\Gamma \Longrightarrow \Delta}$$

Dan krijgen we een bewijs P^* voor $\Gamma \Longrightarrow \Delta$ waarbij het aantal sneden kleiner is dan d zo dat:

$$\|P^*\| < (\|Q^*\| + \|R^*\| + 1)^2 \leq (2^{2\|Q\|} + 2^{2\|R\|} - 1)^2 < 2^{2\|Q\| + \|R\| - 1} = 2^{2\|P\|}.$$

Merk op dat de laatste ongelijkheid geldt omdat $\|Q\|, \|R\| \geq 1$.

Q.E.D.

Het voorbeeld, afkomstig uit [4] hoofdstuk 3, dat volgt zal laten zien dat het hernoemen van gebonden variabelen en de snede regel erg belangrijk is binnen de predikatenlogica. We zijn namelijk niet in staat om bijvoorbeeld $\forall x \forall y (Ry \wedge Qx) \rightarrow Qy$ op te lossen zonder de snede regel te gebruiken.

$$\frac{\frac{\frac{Qt \rightarrow Qy}{Rs \wedge Qt \rightarrow Qy}}{\forall y (Ry \wedge Qt) \rightarrow Qy}}{\forall x \forall y (Ry \wedge Qx) \rightarrow Qy}$$

De top kan alleen een axiom zijn als $t \equiv y$, dus dit is een ongeldige substitutie want t is niet vrij voor x in $\forall y (Ry \wedge Qt)$. We zullen nu zien dat we met de snede regel wel een bewijs kunnen geven:

$$\frac{\frac{\frac{\frac{Qz \rightarrow Qz}{Ry \wedge Qt \rightarrow Qz}}{\forall y (Ry \wedge Qz) \rightarrow Qz}}{\forall x \forall y (Ry \wedge Qx) \rightarrow Qz} \quad \frac{Qy \rightarrow Qy}{\forall z Qz \rightarrow Qy}}{\forall x \forall y (Ry \wedge Qx) \rightarrow Qy} \text{ Cut}$$

Het feit dat het onmogelijk is om een snede-vrij bewijs te formuleren komt doordat de variabelen als vrije - en gebonden variabelen kunnen voorkomen in hetzelfde sequent.

Als we nu naar de snede-eliminatie stelling kijken dan zien we dat bovengrens $2^{\|P\|}$ niet alleen gebaseerd is op P maar ook op het maximale aantal sneden in P . Om een algemene grens voor de snede-eliminatie te hebben kunnen we gebruikmaken van een methode, die ervoor zorgt dat de grens alleen maar in termen van P geformuleerd kan worden.

Propositie. Stel P is een bewijs van het sequent $\Gamma \Longrightarrow \Delta$. Dan is er een snede-vrij bewijs P^* van hetzelfde sequent met lengte $\|P^*\| < 2^{\|P\|}$.

Bewijs: De propositie is waar als P geen sneden heeft dus neem aan dat P tenminste een snede heeft. Twee semiformules zijn *termvariant* als ze dezelfde logische structuren hebben. Hierdoor kan de ene logische structuur worden omgezet in de andere logische structuur door alleen de semi termen te veranderen. Verder is de *termvariant* een equivalentie relatie want voor elke equivalentieklasse van *termvariant*, is er een *skeleton* formule $R(\tau_1, \dots, \tau_k)$ zodat de equivalentieklasse de semi formules bevat. Deze semi formules zijn van de vorm $R(\tau_1, \dots, \tau_k)$ waarbij τ_1, \dots, τ_k semi termen zijn. Laat c_1, c_2, c_3, \dots een oneindige reeks zijn van vrije variabelen. Voor een skeleton formule $R(\dots)$, voor een term variant klasse gebruiken we een nieuwe predikatensymbool, P_R . We kunnen de atomische semiformule $P_R(t_1, \dots, t_k)$ vormen en de gebonden variabelen komen overeen met de gebonden variabelen die voorkomen in $R(\vec{t})$. Verder is een formule A actief in P als enkele sterke gevolgtrekkingen in P een term variant heeft of A als een principal formule. Neem aan dat A niet-atomisch en niet actief is in P ; laat $R(\dots)$ de term variant klasse geven. Voor elke term variant $R(t_1, \dots, t_k)$ dat werkt als een subformule van een formule in P moet vervangen worden met $P_R(t_1, \dots, t_k)$. Door deze transformatie te herhalen, krijgen we een bewijs P' waarin elke subformule atomisch is of een term variant van een principal formule van een sterke gevolgtrekking in P' . We weten dat er op z'n hoogst $\|P\|$ sterke gevolgtrekkingen en tenminste een snede gevolgtrekking in P' zijn. De begin sequenten bevatten alleen de atomische formules wat dus impliceert dat elke formule in P' een lengte heeft die kleiner is dan $\|P\|$. Er is dus een snede-vrij bewijs P'' , met dezelfde endsequent met lengte $\|P''\| < 2^{\|P\|}$. Het bewijs P'' heeft de gewenste lengte maar het is niet langer een bewijs voor $\Gamma \Longrightarrow \Delta$ omdat het subformules van de vorm $P_R(t_1, \dots, t_k)$. Als we al deze subformules in P'' vervangen met de formule $R(t_1, \dots, t_k)$, dan krijgen we het bewijs voor $\Gamma \Longrightarrow \Delta$.

Q.E.D.

5 Referenties

- [1] An Introduction to Proof Theory. Geschreven door Samuel R. Buss
- [2] Parvulae Logicales: Propositielogica. Geschreven door: Hendrik Jan Veenstra Herman Hendriks Jesse Mulder Vincent van Oostrom Albert Visser
- [3] Parvulae Logicales: Predikatenlogica. Geschreven door: Hendrik Jan Veenstra Herman Hendriks Jesse Mulder Vincent van Oostrom Albert Visser
- [4] Basic Proof Theory, Second Edition. Geschreven door: A.S. Troelstra
- [5] <https://builds.openlogicproject.org/content/history/biographies/gerhard-gentzen.pdf>