Universiteit Utrecht

Disquotationalisme en oneindige conjuncties

Timo Franssen (5959772)

Bachelorscriptie

Begeleider: Johannes Korbmacher - Departement Geesteswetenschappen
Tweede lezer: Jaap van Oosten - Departement Wiskunde

Januari 2019

Inhoudsopgave

Samenvatting

Volgens disquotationalisten is de enige functie van het waarheidspredikaat het mogelijk maken om zogenoemde 'oneindige conjuncties' uit te drukken. De vraag is wat het betekent om een oneindige conjunctie uit de drukken met een waarheidspredikaat waarvoor de getypeerde T-equivalenties ($T(\ulcorner A \urcorner) \leftrightarrow A$) gelden. In deze scriptie bespreken we eerst twee antwoorden op deze vraag die te vinden zijn in de literatuur: de equivalentie benadering en de eindige axiomatisering benadering. Het blijkt dat de eindige axiomatisering benadering het juiste antwoord geeft in het getypeerde geval. Het is echter de vraag of de benadering ook werkt in het type-vrije geval. In het laatste deel onderzoeken we dit en zullen we twee uitbreidingen van het getypeerde geval bespreken. Het blijkt dat als we uitbreiden naar alle T-positieve zinnen waar geen kwantor in voorkomt, de eindige axiomatisering benadering nog steeds werkt.

1 Introductie

Waarheid is een van de centrale onderwerpen binnen de filosofie. Bovendien zijn er een groot aantal kwesties gerelateerd aan waarheid doordat ze afhangen van stellingen over waarheid of stellingen over waarheid impliceren. Sinds mensenheugenis is waarheid al een onderwerp van discussie onder wetenschappers, filosofen en wiskundigen. In feite is het vraagstuk omtrent waarheid makkelijk te verwoorden: wat zijn waarheden en wat maakt deze waarheden waar? Deze vragen kunnen vanuit verschillende perspectieven en op verschillende manieren beantwoord worden. Een waarheidstheorie is een theorie die antwoord probeert te geven op deze vragen. In deze scriptie wordt een waarheidstheorie uitgelicht: het disquotationalisme.

Volgens disquotationalisten is waarheid in veel gevallen iets wat we eigenlijk niet nodig hebben. Beweren dat een uitspraak waar is, is volgens hen namelijk hetzelfde als de uitspraak zelf beweren [13]. Zo is er volgens disquotationalisten geen verschil tussen de zinnen *'het gras is groen' is waar* en *het gras is groen* [12]. We hebben het waarheidspredikaat echter wel nodig als we een oneindig aantal zinnen in een keer willen bevestigen [9]. Zo zouden we bijvoorbeeld willen generaliseren over het zinsdeel 'de lucht is blauw' in de zin *als de lucht blauw is, dan is de lucht blauw.* We willen zeggen dat deze samenstelling nog steeds waar is als het zinsdeel 'de lucht is blauw' vervangen wordt voor iets anders, wat we op geen betere manier kunnen doen dan het grofweg op die manier te zeggen, waarbij we het woord 'waar' dus gebruiken. We zeggen namelijk 'Alle zinnen van de vorm "Als p, dan p" zijn waar'. Deze reductie van een oneindig aantal zinnen (een oneindige conjunctie) naar waarheid is de reden voor het hebben van een waarheidspredikaat [6].

Hoe we een oneindig aantal zinnen kunnen bevestigen in één zin die het waarheidspredikaat bevat is de centrale vraag in deze scriptie.

Deze van grondslag filosofische vraag zullen we op een wiskundige manier proberen te beantwoorden door de vraag te vertalen naar de Peano Rekenkunde: een formalisatie van de rekenkunde. We zullen in Peano rekenkunde onderzoeken wat het betekent voor een zin met het waarheidspredikaat om een oneindige conjunctie uit te drukken en welke regels er moeten gelden voor het waarheidspredikaat om dit te kunnen doen. Hiertoe zijn we in staat omdat waarheid een eigenschap is van zinnen en de wiskundige Gödel een methode heeft ontwikkeld om zinnen te vertalen naar natuurlijke getallen, waardoor we kunnen redeneren over zinnen in Peano Rekenkunde.

Een antwoord op bovengenoemde vragen is uitgewerkt in de artikelen van Halbach [6] en Picollo en Schindler [4] voor het getypeerde geval. Voordat we de argumenten die in deze artikelen worden gepresenteerd analyseren zullen we de technische achtergrond die nodig is om de artikelen te begrijpen bespreken in hoofdstuk 2. In hoofdstuk 3 zullen we eerst op een meer technische manier uitleggen wat het disquotationalisme inhoudt. Daarna zullen we twee antwoorden behandelen op de vraag wat het betekent voor een formule met het waarheidspredikaat om een oneindige conjunctie uit te drukken: de equivalentie benadering en de eindige axiomatisering benadering. We zullen concluderen dat de tweede benadering een bevredigend antwoord geeft op de vraag. Het is echter niet duidelijk of deze benadering ook werkt in het type-vrije geval. In hoofdstuk 4 onderzoeken we of de argumenten die gebruikt werden om de eerste benadering te verwerpen en de tweede te bevestigen ook opgaan in het type-vrije geval.

2 Technische achtergrond

In dit hoofdstuk wordt de voorkennis besproken die nodig is om de artikelen van Halbach [6] en Picollo en Schindler [4] te kunnen analyseren. Niet alle aspecten zullen echter even uitgebreid aan bod komen. Voor een uitgebreidere behandeling van de theorie die hier besproken wordt in het algemeen verwijs ik de lezer door naar [1]. De definities en stellingen die gebruikt worden in dit hoofdstuk komen hoofdzakelijk uit [2], [8], [18] en [17]. Wanneer er gebruik is gemaakt van andere bronnen staat dit vermeld.

2.1 Peano rekenkunde

We zullen in deze scriptie werken in de Peano rekenkunde (PR). In deze paragraaf wordt uitgelegd wat PR is en hiervoor zullen we eerst enkele definities van de eerste-orde logica doorlopen die voor het begrijpen van de materie van belang zijn. We nemen echter aan dat de lezer bekend is met de eerste-orde logica. Het doel van deze paragraaf is niet om de volledige theorie achter de eerste-orde logica te behandelen, maar om notatie en terminologie vast te stellen. Voor precieze definities verwijzen we de lezer door naar [18] en [17].
De Peano rekenkunde is een *theorie* en een theorie gaat altijd uit van een taal. Een (formele) *taal* ($\mathcal{L}$) is opgebouwd aan de hand van een alfabet: een verzameling symbolen. We maken hierbij onderscheid tussen hulpsymbolen en logische en niet-logische symbolen.
De verzameling niet-logische symbolen, ook wel de *signatuur* van een taal genoemd, bestaat uit een verzameling constanten (con($\mathcal{L}$)), een verzameling functiesymbolen (fun($\mathcal{L}$)) en een verzameling relatiesymbolen (rel($\mathcal{L}$)). We kunnen ook schrijven $\mathcal{L} = (\text{con}(\mathcal{L}),\text{fun}(\mathcal{L}),\text{rel}(\mathcal{L}))$.
Voor ieder functiesymbool f en relatiesymbool R is bovendien het aantal argumenten, ook wel de plaatsigheid, gespecificeerd. We geven de plaatsigheid van f (of R) weer met een natuurlijk getal n en noemen het een n-plaatsige functie (of relatie).
De talen die hier aan bod komen maken gebruik van de logische symbolen die horen bij de eerste-orde logica. De logische symbolen van de eerste-orde logica bevatten een oneindige verzameling variabelen (bv. $x_0, x_1, ...$), het gelijkheidsteken ("="), het falsum symbool ($\perp$), de kwantoren $\exists$ en $\forall$ en de logische connectieven $\neg, \wedge$ and $\vee$.
Daarnaast kunnen de hulpsymbolen "(" en ")" gebruikt worden.

Net zoals we in gesproken talen van letters woorden en zinnen kunnen maken, worden in formele talen van de symbolen uit de signatuur termen en formules gemaakt. Een *term* duidt intuïtief gezien een object aan. Een term is recursief gedefinieerd als een constante (c), een variabele (x) of een functionele combinatie van termen. In het volgende is f een n-plaatsig functiesymbool. We definiëren de termen van $\mathcal{L}$ als volgt:

$$t ::= c|x|f(t, ..., t).$$

De *formules* van een taal kunnen beschouwd worden als uitspraken die waar of onwaar kunnen zijn. De verzameling van formules bestaat uit de atomaire formules (formules zonder logische connectieven en kwantoren), de negatie van formules, door logische connectieven gecombineerde formules en de kwantificatie van formules. Laat $t_1, ..., t_n$ termen zijn, x een variabele en R een n-plaatsig relatiesymbool, dan zijn formules als volgt gedefinieerd:

$$\phi ::= (t_1 = t_2)|R(t_1, ..., t_n)|\neg\phi|(\phi \vee \phi)|(\phi \wedge \phi)|\forall x\phi|\exists x\phi.$$

De uitdrukkingen $\phi \to \phi$ en $\phi \leftrightarrow \phi$ beschouwen we als afkortingen van $\neg\phi \vee \phi$ en $(\neg\phi \vee \phi) \wedge (\phi \vee \neg\phi)$. We volgen bovendien de gebruikelijke regels over het weglaten van haakjes in een formule (zie de uitleg onder het kopje *Notational convention* op pagina 13 van [17]).

Variabelen in een formule kunnen gebonden of vrij zijn (zie paragraaf 2.3 van [17] voor de definitie). Een formule zonder vrije variabelen noemen we een gesloten formule, ook wel een *zin*. Een formule met minstens een vrije variabele is niet gesloten en noemen we open. We schrijven $\phi(x)$ om uit te drukken dat de variabele x vrij voorkomt in de formule ϕ. Als t een term is en $\phi(x)$ zoals hierboven noteren we $\phi(t)$ voor het resultaat van het substitueren van de term t voor alle vrije voorkomens van x in ϕ. In het vervolg zullen we de volgende notatie aanhouden: de symbolen $\phi, \psi, \chi, ...$ staan voor formules in het algemeen (zowel gesloten als open), $A, B, C, D, ...$ staan voor zinnen, $X, Y, Z, ...$ voor verzamelingen en Γ, Σ, Δ voor verzamelingen van zinnen.

We houden ons in deze scriptie bezig met *axiomatiseerbare theorieën* (voor precieze definities van de begrippen zie paragraaf 2.8 en 3.1 van [17]). Een taal, een verzameling axioma's en afleidingsregels zijn hierbij gegeven. Nieuwe stellingen kunnen gegenereerd worden door de afleidingsregels toe te passen op de axioma's en de stellingen. Een theorie is een verzameling stellingen die gesloten is onder deductie. Hiermee wordt bedoeld dat alle stellingen die afgeleid kunnen worden door de afleidingsregels toe te passen op de stellingen uit de theorie, ook in de theorie bevat zijn. We gebruiken enkel de afleidingsregels die horen bij eerste-orde logica (waaronder bijvoorbeeld modes ponens, zie [17] sectie 2.4). Laat F een theorie zijn en A een zin in de taal van de theorie. We gebruiken de standaard notatie $F \vdash A$ om aan te duiden dat A afleidbaar is uit F, dat wil zeggen dat er een bewijs is voor A in F, oftewel A is een stelling van F. $F \nvdash A$ betekent dat A niet afleidbaar is uit F. Een andere formulering van de definitie van een theorie aan de hand van deze notatie zou zijn:

$$A \in F \Leftrightarrow F \vdash A$$

Hierbij is F dus een theorie en is A een stelling. In de rest van dit verslag zullen we F blijven gebruiken als symbool voor een theorie.

We kunnen een taal betekenis geven door haar te interpreteren. Dit levert een *structuur* ($\mathcal{M}$) op (zie ook definitie 2.2.1 in [17]). Laat D een verzameling zijn van objecten waarover we ons willen uitspreken, dit noemen we het domein. Een *interpretatie* van een taal $\mathcal{L}$ kent aan iedere constante $c \in \mathcal{L}$ een element $c^{\mathcal{M}}$ uit D toe. Aan ieder n-plaatsig functiesymbool $f \in \mathcal{L}$ kent het een functie $f^{\mathcal{M}} : D^n \to D$ toe en aan ieder n-plaatsig relatiesymbool $R \in \mathcal{L}$ kent het een deelverzameling $R^{\mathcal{M}} \subseteq D^n$ toe. Als een zin (A) waar is in een structuur ($\mathcal{M}$) schrijven we $\mathcal{M} \models A$ (zie definitie 2.3.3 in [2]). We noemen $\mathcal{M}$ een model van theorie F als alle stellingen uit F waar zijn in $\mathcal{M}$. Sommige theorieën worden geassocieerd met een bepaald model omdat dat het model is waar we vooral in geïnteresseerd zijn. Dit model, dat in wezen een willekeurig model is, noemen we het standaard model. Een theorie kan ook niet-standaard modellen hebben, maar omdat we in deze context geen niet-standaard modellen tegen zullen komen gaan we hier niet verder op in.

De theorie Peano rekenkunde (PR) is de verzameling van zinnen die kunnen worden afgeleid uit de Peano axioma's:

Definitie 2.1. *Peano rekenkunde* is een theorie in de taal $\mathcal{L} = \{0, 1; +, \cdot\}$, hierbij zijn 0 en 1 de enige constanten en zijn $+$ en $\cdot$ (de symbolen voor optelling en multiplicatie) de functiesymbolen. Peano rekenkunde heeft de volgende axiomas:

1. $\forall x \neg(x + 1 = 0)$
2. $\forall x \forall y(x + 1 = y + 1 \to x = y)$
3. $\forall x(x + 0 = x)$

4. $\forall x \forall y(x + (y + 1) = (x + y) + 1)$
5. $\forall x(x \cdot 0 = 0)$
6. $\forall x \forall y(x \cdot (y + 1) = x \cdot y + x)$
7. $\phi(0) \wedge \forall x(\phi(x) \to \phi(x + 1)) \to \forall x(\phi(x))$

Door de Peano axioma's worden het getal 0, optelling, vermenigvuldiging en de opvolgerfunctie gedefinieerd. Het zevende axioma is een axioma dat bedoeld is voor iedere formule $\phi(x)$ van de taal. Dit axioma wordt ook wel het inductieaxioma genoemd. Merk op dat PR oneindig veel axioma's bevat omdat een oneindig aantal gevallen van het inductieaxioma (een geval corresponderend met iedere formule $\phi(x)$ van de taal) als axioma's genomen worden. Voor de bewijzen die we in dit verslag geven kan PR als theorie worden gebruikt. In de meeste gevallen is een zwakkere theorie, de Robinson rekenkunde (RR), echter ook al voldoende (zie definitie 1.1 in [19]). RR bevat het zevende axioma (het inductieaxioma) niet. Omdat het dit axioma niet bevat moet het volgende axioma toegevoegd worden (deze stelling is afleidbaar in PR met het inductie axioma):

$$\forall x(\neg(x = 0) \to \exists y(x = y + 1)).$$

Het standaard model van PR is de natuurlijke getallen. De axioma's definiëren als het ware de rekenkundige eigenschappen van de natuurlijke getallen.

Gegeven een model $\mathcal{M}$ van een theorie in de taal $\mathcal{L}$ definiëren we de taal van dat model $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ als de verzameling die bestaat uit de constanten van $\mathcal{L}$, waaraan we voor ieder element m uit het domein van $\mathcal{M}$ een nieuwe constante $\underline{m}$ toevoegen. Oftewel

$$\mathcal{L}_M = \mathcal{L} \cup \{\underline{m} : m \in \mathcal{M}\}.$$

Hierbij bedoelen we met $m \in \mathcal{M}$ dat m een element is in het domein van het model $\mathcal{M}$. We nemen hierbij aan dat $\text{con}(\mathcal{L}) \cap \{\underline{m} : m \in \mathcal{M}\} = \emptyset$. Als we PR en het standaard model $(\mathbb{N})$ als voorbeeld nemen, zien we dat de taal $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ in dit geval bestaat uit de verzameling $\{0, 1, +, \cdot\}$ en daarnaast voor ieder natuurlijk getal $n \in \mathbb{N}$ een constante $\underline{n}$ bevat. De verzameling van alle zinnen in de taal $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ die waar zijn in $\mathcal{M}$ noemen we het elementaire diagram $el(\mathcal{M})$ van $\mathcal{M}$

Definitie 2.2. $el(\mathcal{M}) = \{A \in \mathcal{L}_M : \mathcal{M} \models A\}$

Met $A \in \mathcal{L}_M$ bedoelen we dat A een zin is in de taal $\mathcal{L}_M$. We spreken af dat als we het over de taal $\mathcal{L}$ hebben zonder verder te specificieren over welke taal we het hebben, we de taal van PR bedoelen.

2.2 Recursieve verzamelingen

De begrippen (primitief) recursieve verzameling en functie zijn van belang om de representeerbaarheidstelling (die later aan bod komt) te kunnen begrijpen. In deze paragraaf worden ze gedefinieerd.

Definitie 2.3. De klasse van *primitief recursieve functies* $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ (met $k \in \mathbb{N}$) is als volgt inductief gedefinieerd:

1. De constante 0-functie is een primitief recursieve functie. Met de constante 0-functie wordt de functie $f_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bedoeld, die gedefinieerd is als $f_0(x) = 0$ voor alle $x \in \mathbb{N}$.

2. De opvolgerfunctie $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, gedefinieerd als $S(x) = x + 1$, is een primitief recursieve functie.

3. De projectiefunctie $\pi_{j,k} : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ met $1 \leq j \leq k$, gegeven door $\pi_{j,k}(x_1, .., x_k) = x_j$ is primitief recursief.

4. Alle composities van primitief recursieve functies zijn primitief recursief: stel $f : \mathbb{N}^l \to \mathbb{N}$ is een primitief recursieve functie en er zijn l functies $g_1, .., g_l : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ die ook primitief recursief zijn. Dan is de functie $h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, gedefinieerd als

$$h(x_1, .., x_k) = f(g_1(x_1, ..., x_k), ..., g_l(x_1, ..., x_k))$$

ook een primitief recursieve functie.

5. Als $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ en $g : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ primitief recursief zijn, dan is de de functie $h : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ die verkregen wordt door primitieve recursie dat ook:

$$h(0, x_1, ..., x_k) = f(x_1, ..., x_k)$$

$$h(S(y), x_1, ..., x_k) = g(y, h(y, x_1, ..., x_k), x_1, ..., x_k)$$

Om te bewijzen dat een functie primitief recursief is moet je laten zien dat de functie wordt verkregen door regels 4 en 5 toe te passen op de basisfuncties uit regels 1,2 en 3 uit de definitie. Als voorbeeld laten we zien dat optelling en multiplicatie primitief recursieve operaties zijn. We beginnen met $h(y, x) = x + y$:

Voorbeeld 2.1. *1. $f(x) = \pi_{1,1}(x) = x$ is primitief recursief omdat het een projectiefunctie is.*

2. $\pi_{2,3}(x, y, z) = y$ is primitief recursief omdat het een projectiefunctie is.

3. $S(x) = x + 1$ is per definitie primitief recursief.

4. $g(x, y, z) = S(\pi_{2,3}(x, y, z)) = y + 1$ is primitief recursief omdat het de compositie is van de primitief recursieve functies uit 2 en 3.

5. Met primitieve recursie definiëren we nu de functie $h(y, x)$ aan de hand van $f(x)$ en $g(x)$ als volgt:

$$h(0, x) = f(x) = \pi_{1,1}(x) = x$$

$$h(S(y), x) = g(y, h(y, x), x) = S(\pi_{2,3}(y, h(x, y), x)) = S(h(y, x)) = h(y, x) + 1$$

We laten nu met een minder formeel bewijs zien dat de functie $k(x, y) = x \cdot y$ primitief recursief is. Omdat we hebben laten zien dat optelling primitief recursief is kunnen we ook gebruik maken van de functie $h(y, x) = x + y$.

Voorbeeld 2.2.

$$k(0, y) = f_0(y) = 0$$

$$k(S(x), y) = \pi_{2,3}(y, h(f(x, y), y), x) = f(x, y) + y$$

Naast primitief recursieve functies bestaan er ook primitief recursieve verzamelingen. Om te begrijpen wat dat zijn moeten we echter eerst weten wat een karakteristieke functie is:

Definitie 2.4. Laat X een verzameling zijn. Voor iedere deelverzameling $Y \subseteq X$ definiëren we de *karakteristieke functie* van Y als $\chi_Y(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x \in Y \\ 0 & \text{als } x \notin Y \end{cases}$

Laat Y nu een deelverzameling zijn van de natuurlijke getallen. Dan is Y een primitief recursieve verzameling dan en slechts dan als de karakteristieke functie χ_Y van Y een primitief recursieve functie is.
Naast de klasse van primitief recursieve functies bestaat er een grote klasse van functies waar de primitief recursieve functies in bevat zijn. Dit is de klasse van *partieel recursieve functies.* Laat X, Y verzamelingen zijn. Een *partiële functie* f van X naar Y is een functie $f : U \to Y$, waarbij $U \subset X$. We noemen U het domein van f en noteren dit met $dom(f) = U$. We schrijven $f : X \rightharpoonup Y$ als f een partiële functie is van X naar Y. Als het domein van f gelijk is aan X noemen we f een totale functie. Partiële functies kunnen ook samengesteld worden: laat $f : X \rightharpoonup Y$ en $g : Y \rightharpoonup Z$ gegeven zijn, dan is de functie $g \circ f : X \rightharpoonup Z$ de functie waarvan $\{x \in X : x \in dom(f) \text{ en } f(x) \in dom(g)\}$ het domein is. De klasse van *partieel recursieve functies* is als volgt gedefinieerd.

Definitie 2.5. De klasse van *partieel recursieve functies* $\mathbb{N}^k \rightharpoonup \mathbb{N}$ (met $k \in \mathbb{N}$) is als volgt inductief gedefinieerd:

1. Alle primitief recursieve functies zijn partieel recursieve functies.

2. Alle composities van partieel recursieve functies zijn partieel recursief: als $f : \mathbb{N}^l \rightharpoonup \mathbb{N}$ en $g_1, .., g_l : \mathbb{N}^k \rightharpoonup \mathbb{N}$ partieel recursieve functies zijn. Dan is de compositie $h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, gedefinieerd door

$$h(x_1, .., x_k) = f(g_1(x_1, ..., x_k), ..., g_l(x_1, ..., x_k))$$

   ook een partieel recursieve functie. Deze functie is gedefinieerd voor alle $(x_1, ..., x_k) \in \cap_{i=1}^{l} dom(g_i)$ waarvoor $(g_1(x_1, ..., x_k), ..., g_l(x_1, ..., x_k)) \in dom(f)$

3. Als $g : \mathbb{N}^{n+1} \rightharpoonup \mathbb{N}$ een partieel recursieve functie is, kan uit g een partieel recursieve functie $f : \mathbb{N}^n \rightharpoonup \mathbb{N}$ verkregen worden door minimalisatie. We definiëren f dan als volgt: $f(x_1, ..., x_n) = m$ dan en slechts dan als $g(n, x_1, ..., x_n) > 0$ voor alle $n \in \{0, ..., m-1\}$ en $g(m, x_1, ..., x_n) = 0$. Deze functie is dus gedefinieerd als voor alle $n \leq m : (n, x_1, ..., x_n) \in dom(g)$.

We noemen een functie een *recursieve functie* als het een partieel recursieve functie is die totaal is. We noemen een verzameling Y van k-tupels van natuurlijke getallen een *recursieve verzameling* als zijn karakteristieke functie χ_Y een recursieve functie is.
Als er een partieel recursieve functie is die precies Y als domein heeft, noemen we Y een *aftelbaar recursieve verzameling.* Dat betekent dat de functie gedefinieerd is dan en slecht dan als de input een element is van Y. Die partiële functie ziet er dan als volgt uit:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x \in Y \\ ongedefinieerd & \text{als } x \notin Y \end{cases}$$

.

2.3 Gödelnummering

In 1931 kwam de wiskundige Kurt Gödel op het idee om aan iedere formele uitspraak in een taal een natuurlijk getal toe te kennen, een techniek die bekend staat als de Gödelnummering. Dit gebruikte hij voor het bewijs van de onvolledigheidsstellingen. In dit verslag zullen we ook gebruik maken van Gödelnummeringen.

In onze taal gebruiken we cijfers om natuurlijke getallen aan te duiden. Er kunnen verschillende systemen gebruikt worden om getallen weer te geven, waaronder het binaire stelsel en het decimale stelsel. In PR, zoals we die hierboven hebben beschreven, is er voor ieder natuurlijk getal n een PR-term: $0+\underbrace{1+\cdots+1}_{n \text{ keer}}$[1]. In deze scriptie zullen we $\underline{n}$, wat we het telwoord voor n noemen, gebruiken als afkorting voor de PR-term voor het natuurlijke getal n. Dus de termen die 1,2,3,... aanduiden zijn $0+1, 0+1+1, 0+1+1+1$ en worden afgekort met $\underline{1}, \underline{2}, \underline{3}$.

Met een Gödelnummering wordt aan iedere uitdrukking in de taal van PR een natuurlijk getal toegekend. We maken hierbij gebruik van een coderingsfunctie (#). Er zijn verschillende coderingsfuncties mogelijk, maar het is van belang dat de functie injectief is. Een manier om hier voor te zorgen is gebruik te maken van de uniciteit van de priemontbinding van natuurlijke getallen. We zullen kort uitleggen hoe coderen met behulp van priemgetallen in zijn werk gaat. Als eerst wordt aan ieder primitief symbool[2] s van de taal een natuurlijk getal $\#^*(s)$, het symboolnummer van s, toegekend. Zouden we een codering van PR maken dan zouden de voorgestelde symboolnummers in de tabel hieronder bijvoorbeeld volstaan.

Symboolnummers van de primitieve symbolen van PR

$\#^*('0') = 1$	$\#^*('=') = 5$	$\#^*('\vee') = 9$	$\#^*('x_i') = 13 + i$
$\#^*('1') = 2$	$\#^*('(') = 6$	$\#^*('\neg') = 10$	
$\#^*('+') = 3$	$\#^*(')') = 7$	$\#^*('\forall') = 11$	
$\#^*('\cdot') = 4$	$\#^*('\wedge') = 8$	$\#^*('\exists') = 12$	

Met deze symboolnummers kunnen we nu aan iedere eindige rij symbolen uit de taal een uniek getal toekennen. Dit doen we door eerst alle symbolen van de uitdrukking te vertalen naar getallen, wat ons een eindige rij getallen geeft. Stel dat de formule die we vertalen n symbolen heeft dan maken we ook een rij van de eerste n priemgetallen: 2,3,5,7,.... Laat nu het n-de getal van de rij symboolnummers de macht van het n-de priemgetal zijn en vermenigvuldig alle priemmachten. Iedere uitdrukking krijgt op deze manier een uniek natuurlijk getal toegewezen: het Gödelnummer van de uitdrukking. Als α een uitdrukking is in de taal van PR noteren we $\#(\alpha)$ voor het Gödelnummer van α.
Als voorbeeld berekenen we $\#(1+0)$. De symboolnummers van $'1'$, $'+'$ en $'0'$ zijn 2, 3 en 1. Dus het Gödelnummer van $1+0$ wordt in dit geval: $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^1 = 540$.
Iedere uitdrukking krijgt dus een natuurlijk getal toegewezen. Voor dit natuurlijke getal is er een PR-term die dat getal uitdrukt waar weer een telwoord voor bestaat. We definiëren de naam van een uitdrukking (α) als het telwoord voor het Gödelnummer van de uitdrukking en dit noteren we als $\ulcorner\alpha\urcorner$. Er geldt dus $\ulcorner\alpha\urcorner = \underline{\#(\alpha)}$. Voor ons eerdere voorbeeld geldt $\ulcorner 1+0 \urcorner = \underline{\#(1+0)} = \underline{540} = 0 + \underbrace{1+\cdots+1}_{540 \text{ keer}}$ en we noemen $\ulcorner 1+0\urcorner$ de naam van de uitdrukking

[1] Voor het gemak laten we haakjes weg.

[2] De primitieve symbolen van een taal zijn de symbolen uit de signatuur, de logische symbolen en de hulpsymbolen.

$1 + 0$. Omdat de coderingsfunctie injectief is heeft iedere formule een unieke naam. Als we een symbool invoeren om het begin en het einde van een formule aan te geven kunnen ook rijen formules en daarmee bewijzen en afleidingen een nummer en dus een naam krijgen.
Het belangrijke aan deze methode is dat de procedure geheel effectief is: iedere uitdrukking in de taal kan geheel mechanisch (i.e. door een computer) worden vertaald naar zijn Gödelnummer. Bovendien is de procedure omkeerbaar: ieder natuurlijk getal heeft een unieke priemontbinding en zodoende codeert ieder natuurlijk getal een unieke rij symbolen. Deze rij symbolen zal in de meeste gevallen geen geldige uitdrukking in de taal opleveren, maar door een computer kan makkelijk onderscheiden worden welke getallen wel een geldige uitdrukking opleveren.

2.4 Representeerbaarheid

In deze paragraaf definiëren we representeerbaarheid. We maken onderscheid tussen zwakke en sterke representeerbaarheid. We geven alleen de definities aan de hand van 1-plaatsige functies en relaties, maar alle kunnen ze gemakkelijk gegeneraliseerd worden naar functies en relaties van willekeurig grote plaatsigheid.

Definitie 2.6. Een verzameling X van natuurlijke getallen is *sterk representeerbaar* in een theorie F als er een formule $\phi(x)$ in de taal van F bestaat met een vrije variabele zo dat voor ieder natuurlijk getal $\mathbf{n}$ geldt:

$$\mathbf{n} \in X \Rightarrow F \vdash \phi(\underline{n});$$

$$\mathbf{n} \notin X \Rightarrow F \vdash \neg\phi(\underline{n})$$

Definitie 2.7. Een verzameling X van natuurlijke getallen is *zwak representeerbaar* in een theorie F als er een formule $\phi(x)$ in de taal van F bestaat met een vrije variabele zo dat voor ieder natuurlijk getal $\mathbf{n}$ geldt:

$$\mathbf{n} \in X \Leftrightarrow F \vdash \phi(\underline{n})$$

Voor functies geldt een soortgelijke definitie:

Definitie 2.8. Een functie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ is *sterk representeerbaar* in een theorie F als er een formule $\phi(x, y)$ in de taal van F bestaat zodat voor alle natuurlijke getallen $\mathbf{n}$,$\mathbf{m}$ geldt:

$$f(\mathbf{n}) = \mathbf{m} \Rightarrow F \vdash \phi(\underline{n}, \underline{m});$$

$$f(\mathbf{n}) \neq \mathbf{m} \Rightarrow F \vdash \neg\phi(\underline{n}, \underline{m})$$

Definitie 2.9. Een functie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ is *zwak representeerbaar* in een theorie F als er een formule $\phi(x, y)$ in de taal van F bestaat zodat voor alle natuurlijke getallen $\mathbf{n}$,$\mathbf{m}$ geldt:

$$f(\mathbf{n}) = \mathbf{m} \Leftrightarrow F \vdash \phi(\underline{n}, \underline{m})$$

Met deze definities op zak kunnen we de representeerbaarheidsstelling voor Peano rekenkunde formuleren:

Stelling 2.1 (De representeerbaarheidsstelling)**.** *In Peano rekenkunde geldt:*

1. *Een verzameling is sterk representeerbaar dan en slechts dan als de verzameling recursief is.*

2. *Een verzameling is zwak representeerbaar dan en slechts dan als de verzameling aftelbaar recursief is.*

3. *Een functie is sterk representeerbaar dan en slechts dan als het een recursieve functie is.*
4. *Een functie is zwak representeerbaar dan en slechts dan als het een partieel recursieve functie is.*

Het bewijs van deze stelling zullen we in dit verslag achterwege laten omdat alleen de definities van de begrippen en de gevolgen van de stelling in dit geval van belang zijn. Voor een volledig bewijs van de stelling zie [7].

2.5 Diagonalisatielemma

Gegeven een Gödelnummering van Peano rekenkunde kunnen syntactische eigenschappen, relaties en operaties nu uitgedrukt worden in functies over de natuurlijke getallen. Zo kunnen we bijvoorbeeld $neg(x)$ definiëren als de rekenkundige functie die het Gödelnummer van een formule stuurt naar het Gödelnummer van de negatie van de formule, oftewel $neg(\ulcorner\phi\urcorner) = \ulcorner\neg\phi\urcorner$. Een belangrijke functie op Gödelnummers is de functie $subst(x, y) = z$, die het Gödelnummer van een formule met een vrije variabele en het Gödelnummer van een telwoord stuurt naar de gesloten formule waarbij het telwoord is ingevuld voor de vrije variabele in de formule: $subst(\ulcorner\phi(x)\urcorner, \ulcorner\underline{n}\urcorner) = \ulcorner\phi(\underline{n})\urcorner$.
Zoals genoemd kunnen we ook eigenschappen uitdrukken in formules van de taal van PR:

$Const(x)$ x is het Gödelnummer van een constante.

$Var(x)$ x is het Gödelnummer van een variabele.

$Term(x)$ x is het Gödelnummer van een term.

$Form(x)$ x is het Gödelnummer van een formule.

Alle syntactische eigenschappen en operaties kunnen dus gesimuleerd worden op het niveau van natuurlijke getallen.
Dat er in PR zinnen bestaan die naar zichzelf verwijzen wordt vastgesteld in het volgende lemma, dat we met de theorie die we tot nu toe ontwikkeld hebben kunnen formuleren:

Lemma 2.1 (het diagonalisatielemma)**.** *Laat $\phi(x)$ een willekeurige formule zijn in de taal van PR met precies een vrije variabele. Er kan een zin D geconstrueerd worden zodat geldt:*

$$PR \vdash D \leftrightarrow \phi(\ulcorner D\urcorner).$$

Ruwweg geformuleerd wil dit lemma zeggen dat gegeven een eigenschap $\phi(x)$, er een zin D bestaat die over zichzelf zegt dat het eigenschap ϕ bezit. Het lemma wordt ook wel het zelf-referentie lemma genoemd. Hoe deze D precies geconstrueerd wordt en het bewijs van het lemma zullen we in dit verslag niet behandelen, zie hiervoor [8].

2.6 Tarski's stelling over de ondefinieerbaarheid van waarheid

De wiskundige Tarski bewees in 1936 dat waarheid ondefinieerbaar is in Peano rekenkunde. Dit resultaat is voor het onderwerp van deze scriptie van groot belang, daarom zullen we twee formuleringen geven van de stelling van Tarski en ze beide bewijzen.

Stelling 2.2 (Tarski's stelling over de ondefinieerbaarheid van waarheid (eerste formulering))**.** *Er bestaat geen formule $\phi(x)$ in de taal van PR zodat voor iedere zin A in de taal van PR geldt:*

$$PR \vdash \phi(\ulcorner A \urcorner) \leftrightarrow A$$

Er bestaat volgens de stelling dus in het bijzonder geen predikaat $T(x)$, een waarheidspredikaat, waarvoor geldt $PR \vdash T(\ulcorner A \urcorner) \leftrightarrow A$, oftewel een predikaat dat zegt over een zin of deze waar is of niet.

Bewijs. Stel dat er wel een functie $\phi(x)$ bestaat zodat

$$PR \vdash \phi(\ulcorner A \urcorner) \leftrightarrow A.$$

We kunnen het diagonalisatielemma (lemma 2.1) toepassen op de negatie van $\phi(x)$. Het lemma vertelt ons dan dat er een zin L bestaat waarvoor geldt:

$$PR \vdash \neg\phi(\ulcorner L \urcorner) \leftrightarrow L.$$

Per aanname volgt ook dat $PR \vdash \phi(\ulcorner L \urcorner) \leftrightarrow L$. We concluderen dat $PR \vdash \phi(\ulcorner L \urcorner) \leftrightarrow \neg\phi(\ulcorner L \urcorner)$. Dit betekent dat PR inconsistent is, wat in tegenspraak is met het feit dat PR een consistente theorie is. □

De zin L wordt ook wel de leugenaarsparadox genoemd en is de zin die grofweg zegt over zichzelf dat hij niet waar is.

Stelling 2.3 (Tarski's stelling over de ondefinieerbaarheid van waarheid (tweede formulering))**.** *Laat $X = \{n \in \mathbb{N} | n$ is het Gödelnummer van een zin A zodat $\mathcal{N} \models A\}$ met $\mathcal{N}$ het standaard model van PR. Dan is X niet recursief.*

Deze formulering zegt dus dat de verzameling Gödelnummers van ware zinnen in het standaard model niet recursief is. In onderstaand bewijs zullen we gebruik maken van het feit dat PR volledig en correct is, zie stelling 2.5.

Bewijs. Stel dat X recursief is. Volgens de representeerbaarheidsstelling (stelling 2.1) is X dan sterk representeerbaar in PR, oftewel er bestaat een formule $\phi(x)$ zodat geldt:

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} : n \in X &\Rightarrow PR \vdash \phi(\underline{n}) \\ n \notin X &\Rightarrow PR \vdash \neg\phi(\underline{n}). \end{aligned} \tag{1}$$

Uit het diagonalisatielemma (lemma 2.1) volgt nu dat er een zin bestaat L zodat geldt:

$$PR \vdash L \leftrightarrow \neg\phi(\ulcorner L \urcorner). \tag{2}$$

Nu is het zo dat L waar of onwaar moet zijn in het standaard model. We onderscheiden daarom twee gevallen:

1. Stel $\mathcal{N} \models L$. Dan volgt dat $\#(L) \in X$. Uit (1) volgt dat $PR \vdash \phi(\ulcorner L \urcorner)$. Hieruit volgt met (2) dat $PR \vdash \neg L$. Wegens correctheid volgt uit $PR \vdash \neg L$ dat $PR \models \neg L$. Omdat $\mathcal{N}$ een model van PR is volgt in het bijzonder dat $\mathcal{N} \models \neg L$. Dit is echter in tegenspraak met onze aanname dat $\mathcal{N} \models L$.

2. Stel $\mathcal{N} \models \neg L$. Dan volgt dat $\#(L) \notin X$, dus uit (1) volgt dat $PR \vdash \neg\phi(\ulcorner L \urcorner)$. Als we (2) toepassen vinden we dat $PR \vdash L$. Wegens correctheid geldt dan dat $PR \models L$. Omdat $\mathcal{N}$ een model is van PR volgt hieruit dat $N \models L$. Dit is echter in tegenspraak met onze aanname dat $\mathcal{N} \models \neg L$.

$\square$

Het bestaan van een waarheidspredikaat in de theorie PR is dus onmogelijk. De bi-implicaties $T(\ulcorner A \urcorner) \leftrightarrow A$ worden ook wel de T-zinnen of T-equivalenties genoemd. Deze T-zinnen zullen in de rest van deze scriptie een belangrijke rol spelen.

2.7 Getypeerde waarheidstheoriën

In de vorige paragraaf hebben we bewezen dat er in de consistente theorie Peano rekenkunde geen waarheidspredikaat $T(x)$ kan bestaan zodat $T(\ulcorner A \urcorner) \leftrightarrow A$ bewezen kan worden in de theorie voor alle zinnen A in de taal. Als we alle zinnen $T(\ulcorner A \urcorner) \leftrightarrow A$ toe zouden voegen als axioma's levert dit namelijk een inconsistente theorie op. Zijn er echter T-equivalenties voor bepaalde zinnen A in de taal die toegevoegd kunnen worden aan PR zonder dat dit tot gevolg heeft dat de theorie inconsistent wordt?
Het blijkt dat we inderdaad een groot deel van de T-equivalenties wel toe kunnen voegen. We geven nu een bewijs dat PR consistent blijft als we de T-equivalenties toevoegen voor alle zinnen A die zelf niet het waarheidspredikaat $T(x)$ bevatten.

Stelling 2.4. *Laat $\mathcal{L}$ de taal van Peano rekenkunde zonder het waarheidspredikaat zijn. Dan is de theorie die verkregen wordt door PR uit te breiden met de verzameling $\{T(\ulcorner A \urcorner) \leftrightarrow A : A \in \mathcal{L}\}$ consistent.*

Bewijs. De theorie is consistent als de axioma's waar gemaakt worden door een model. We weten al dat de natuurlijke getallen een model zijn voor PR (noem dit model $\mathcal{N}$). We breiden dit model uit. Laat S de verzameling zijn van alle zinnen die waar zijn in het model $\mathcal{N}$ en die niet het waarheidspredikaat bevatten (dus $S = \{\#(A) : N \models A, A \in \mathcal{L}\}$). Laat S de interpretatie van het waarheidspredikaat zijn. Dan is $(\mathcal{N}, S)$ een model voor $PA \cup \{T(\ulcorner A \urcorner) \leftrightarrow A : A \in \mathcal{L}\}$. We weten al dat $\mathcal{N}$ de axioma's van PR waarmaakt. Per definitie van S volgt er dat $(\mathcal{N}, S)$ ook de T-equivalenties waar maakt. Dit laatste is als volgt in te zien: stel namelijk dat $\{T(\ulcorner A \urcorner) \leftrightarrow A : A \in \mathcal{L}\}$ niet waar gemaakt zou worden door $(\mathcal{N}, S)$, dan is er een zin $B \in \mathcal{L}$ waarvoor ofwel geldt $(\mathcal{N}, S) \models T(\ulcorner B \urcorner)$ en $(\mathcal{N}, S) \not\models B$, of $(\mathcal{N}, S) \not\models T(\ulcorner B \urcorner)$ en $(\mathcal{N}, S) \models B$. We hebben S echter juist zo gedefinieerd dat $(\mathcal{N}, S) \models T(\ulcorner B \urcorner) \Leftrightarrow (\mathcal{N}, S) \models B$, dus beide opties leiden tot een tegenspraak. $\square$

We hebben PR dus uitgebreid met de T-equivalenties beperkt tot zinnen die zelf niet het waarheidspredikaat bevatten. We noemen een theorie waarbij het waarheidspredikaat niet op zinnen die het waarheidspredikaat bevatten mag worden toegepast een *getypeerde waarheidstheorie* en het predikaat zelf noemen we een *getypeerd waarheidspredikaat.* Dit is een manier om aan een theorie een waarheidspredikaat toe te voegen zonder dat de theorie hierdoor inconsistent wordt, maar waardoor er wel belangrijke restricties worden opgelegd aan het gebruiken van het predikaat. Liever zouden we deze restricties natuurlijk niet op hoeven leggen en een waarheidspredikaat hebben dat op willekeurig welke zin dan ook in de taal mét het waarheidspredikaat toegepast kan worden. Stelling 2.2 en 2.3 sluiten dit echter uit.

2.8 Compactheid en volledigheid

De compactheidsstelling zullen we later gebruiken in meerdere bewijzen. Daarom geven we hier het bewijs. We zullen gebruik maken van het feit dat de eerste-orde logica volledig en correct is. Met $F \models A$ bedoelen we dat A waar is in ieder model van F.

Stelling 2.5 (Correctheid en volledigheid)**.** *Laat F een theorie en A een zin in de taal van F zijn, dan geldt*

$$F \vdash A \Leftrightarrow F \models A.$$

Voor een bewijs van deze stelling zie [2]. Voor het bewijs van de compactheidsstelling bewijzen we eerst de volgende hulplemma's.

Lemma 2.2. *Laat Γ een verzameling zinnen zijn. Dan geldt dat $\Gamma \nvdash \perp$ als voor alle eindige deelverzamelingen $\Gamma' \subseteq \Gamma$ geldt dat $\Gamma' \nvdash \perp$*

Bewijs. We geven een bewijs met contrapositie en leiden een tegenspraak af. Stel $\Gamma \vdash \perp$ en neem aan dat voor alle eindige deelverzamelingen $\Gamma' \subseteq \Gamma$ geldt dat $\Gamma' \nvdash \perp$. Uit $\Gamma \vdash \perp$ volgt dat er een bewijs is voor $\perp$, oftewel er is een eindige rij zinnen in Γ die een bewijs vormt voor $\perp$: $(B_1, B_2, ..., B_n)$ met $n \in \mathbb{N}$. Laat $\Gamma' = \{B_1, B_2, ..., B_n\}$ dan volgt dat $\Gamma' \subseteq \Gamma$ en $\Gamma' \vdash \perp$. Dit levert een tegenspraak op. □

We noemen een verzameling zinnen vervulbaar als het een model heeft.

Lemma 2.3. *Laat Δ een verzameling zinnen en A een zin zijn. Dan geldt*

$$\Delta \models A \Leftrightarrow \Delta \cup \{\neg A\} \textit{ is niet vervulbaar.}$$

Bewijs. Stel $\Delta \models A$. Dat betekent dat A in ieder model $\mathcal{M}$ van Δ waar is. Stel dat $\Delta \cup \{\neg A\}$ wel vervulbaar is. Dat betekent dat er een model $\mathcal{N}$ is van Δ waarin $\neg A$ waar is. Dat zou betekenen dat $\mathcal{N} \models A \wedge \neg A$, dus we hebben een tegenspraak afgeleid.
Stel $\Delta \cup \{\neg A\}$ is niet vervulbaar. Er bestaat dus geen model $\mathcal{M}$ van Δ waarvoor geldt $\mathcal{M} \models \neg A$. Dat betekent dat voor ieder model geldt $\mathcal{M} \not\models \neg A$, dus $\mathcal{M} \models A$. Oftewel $\Delta \models A$.
Hiermee hebben we het lemma bewezen. □

Gevolgtrekking 2.1.

$$\Delta \models \perp \Leftrightarrow \Delta \textit{ is niet vervulbaar.} \tag{3}$$

$$\Delta \not\models \perp \Leftrightarrow \Delta \textit{ is vervulbaar.} \tag{4}$$

Gevolgtrekking 2.1 vinden we door lemma 2.3 toe te passen op de zin $A = \perp$. Omdat $\Delta \cup \{\neg \perp\} = \Delta$ concluderen we dat (3) geldt. Uit (3) volgt (4) direct.
Uit de volledigheid en correctheid van de eerste-orde logica volgt dat

$$\Delta \nvdash \perp \Leftrightarrow \Delta \text{ is vervulbaar.} \tag{5}$$

Stelling 2.6 (De compactheidsstelling)**.** *Laat Γ een verzameling zinnen zijn. Dan geldt dat Γ vervulbaar is als iedere eindige deelverzameling $\Gamma' \subseteq \Gamma$ vervulbaar is.*

Bewijs. We passen (5) toe op lemma 2.2. Dit geeft het gewenste resultaat. □

3 Disquotationalisme en oneindige conjuncties

Wanneer is een uitspraak waar? Dat is een vraag die mensen al lange tijd bezighoudt. Een waarheidstheorie zou hier een antwoord op moeten geven. In de vorige paragraaf hebben we een aspect van waarheid onderzocht: wat betekent het in een formele theorie voor een zin om waar te zijn? We hebben bewezen dat de verzameling van Gödelnummers van ware zinnen in het standaard model van PR $\{\#(A) : \mathcal{N} \models A\}$ niet recursief is. Uit stelling 2.1, de representeerbaarheidsstelling, blijkt dat er geen formule $\phi(x)$ bestaat waarvoor geldt dat

$$\mathcal{N} \models A \Leftrightarrow PR \vdash \phi(\ulcorner A \urcorner).$$

In het bijzonder bestaat er dus geen waarheidspredikaat $T(x)$ waarvoor deze equivalentie geldt. Maar wat houdt deze equivalentie precies in?

$$\mathcal{N} \models A \Rightarrow PR \vdash T(\ulcorner A \urcorner)$$

betekent dat als A waar is in het standaard model van PR, dat het dan bewijsbaar is in PR dat A waar is. Andersom betekent

$$\mathcal{N} \models A \Leftarrow PR \vdash T(\ulcorner A \urcorner)$$

dat wanneer het bewijsbaar is in PR dat A waar is, dat A dan ook waar is in het standaard model. Een waarheidspredikaat dat beide kanten van deze bi-implicatie waarborgt is dus onmogelijk, maar we zouden graag een waarheidspredikaat willen waarbij zoveel mogelijk van de bovengenoemde equivalentie behouden blijft. Een andere formulering van de stelling van Tarski (stelling 2.2) is dat er geen waarheidspredikaat $T(x)$ kan bestaan in PR zodat geldt

$$PR \vdash T(\ulcorner A \urcorner) \leftrightarrow A.$$

Dit noemen we ook wel de T-equivalenties en zullen we veel gebruiken in de rest van deze scriptie. Met welk doel en hoe deze bi-implicatie nagebootst moet worden kan op verschillende manieren benaderd worden. We zullen in deze scriptie een benadering uitlichten: het disquotationalisme.

Het disquotationalisme is een deflationaire waarheidstheorie [9]. Volgens deflationaire waarheidstheoriën is beweren dat een uitspraak waar is hetzelfde als het beweren van de uitspraak zelf. Het is waar dat sneeuw wit is, is bijvoorbeeld equivalent met de uitspraak 'sneeuw is wit' [6],[11]. Er is verder niets wat waarheid behelst en in deze zin hebben we dus ook geen waarheidspredikaat nodig [12].

Soms willen we echter een bewering doen over de waarheidswaarde van een groot aantal of zelfs oneindig aantal uitspraken tegelijk. Volgens disquotationalisten hebben we het waarheidspredikaat dan wel echt nodig [13]. Stel dat we het bijvoorbeeld eens zijn met alles wat de paus ooit gezegd heeft. Het is praktisch onmogelijk om alles wat de paus ooit gezegd heeft op te sommen en op die manier uit te drukken dat die uitspraken waar zijn. We kunnen echter wel zeggen 'alles wat de Paus gezegd heeft is waar', maar hiervoor gebruiken we dus het zinsdeel 'is waar', oftewel we hebben het waarheidspredikaat nodig [5].

Als we zouden willen zeggen dat alle logische waarheden waar zijn, spreken we daadwerkelijk over een oneindig aantal zinnen: als A namelijk een logische waarheid (ook wel tautologie) is, is $\neg\neg A$ ook een logische waarheid. Dus is $\neg\neg\neg\neg A$ ook een logische waarheid, enzovoort. Dit levert ons oneindig veel logische waarheden op. Het is bekend dat we alle logische waarheden kunnen nummeren.

Stel dat er geen waarheidspredikaat zou zijn. De enige manier om tot uitdrukking te brengen dat alle logische waarheden waar zijn zou dan zijn:

$$LW_1 \wedge LW_2 \wedge LW_3 \wedge ...$$

waarbij LW_i een logische waarheid is voor iedere $i \in \mathbb{N}$. Maar dit is niet mogelijk in een eindige logica (zoals de standaard eerste-orde logica) omdat er oneindig veel LW's zijn en we in de eerste-orde logica niet kunnen conjugeren over een oneindig aantal zinnen. Om dit soort oneindige conjuncties toch tot uitdrukking te kunnen brengen gebruiken disquotationalisten het waarheidspredikaat [5]. Met een waarheidspredikaat kunnen we namelijk wel een oneindig aantal zinnen waar verklaren zonder dat we iedere zin hoeven te benoemen. Als $\phi(x)$ een eigenschap is van zinnen, dan kan een oneindige conjunctie met een waarheidspredikaat $T(x)$ namelijk als volgt uitgedrukt worden:

$$\forall x(\phi(x) \to T(x)).$$

We zullen deze formule *InfC* noemen. Als we naar ons voorbeeld kijken van de logische waarheden en we schrijven $LW(x)$ voor het predikaat dat over een zin zegt of het een logische waarheid is of niet, dan zouden we dus willen dat

$$\forall x(LW(x) \to T(x))$$

en $LW_1 \wedge LW_2 \wedge LW_3 \wedge ...$ hetzelfde betekenen.
Volgens het disquotationalisme is het uitdrukken van dit soort oneindige conjuncties ook de enige functie van het waarheidspredikaat [6]. De vraag is echter wat het betekent voor InfC om een oneindige conjunctie uit te drukken. In de rest van dit verslag zullen we proberen hier een antwoord op te geven. We zullen de oneindige conjunctie van alle objecten die in een theorie PR onder het predikaat $\phi(x)$ vallen voortaan noteren als $\bigwedge_{\substack{PR\vdash\phi(\ulcorner A\urcorner)\\ A\in\mathcal{L}}} A$. Merk op dat we dus een predikaat beschouwen dat uitspraak doet over zinnen in de taal zonder waarheidspredikaat. Omdat we werken in een eindige logica is $\bigwedge_{\substack{PR\vdash\phi(\ulcorner A\urcorner)\\ A\in\mathcal{L}}} A$ eigenlijk geen geldige uitdrukking. We gebruiken het echter als afkorting voor alle zinnen A in de taal waarvoor geldt $PR \vdash \phi(\ulcorner A\urcorner)$. Als we dus schrijven $PR \vdash \bigwedge_{\substack{PR\vdash\phi(\ulcorner A\urcorner)\\ A\in\mathcal{L}}} A$, bedoelen we dat PR alle zinnen A in de taal bewijst waarvoor geldt dat PR $\phi(\ulcorner A\urcorner)$ bewijst. Op dezelfde manier bedoelen we met de uitdrukking $PR \vdash \bigwedge_{\substack{PR\vdash\phi(\ulcorner A\urcorner)\\ A\in\mathcal{L}}}(\phi(\ulcorner A\urcorner) \to A)$ dat PR alle zinnen $\phi(\ulcorner A\urcorner) \to A$ met $A \in \mathcal{L}$ bewijst waarvoor het $\phi(\ulcorner A\urcorner)$ bewijst.
We zullen onderzoeken welke regels er voor het waarheidspredikaat $T(x)$ moeten gelden om te zorgen dat InfC een oneindige conjunctie uitdrukt.

In de artikelen van Picollo en Schindler [4] en Halbach [6] komen twee antwoorden op de vraag wat het betekent voor InfC om een oneindige conjunctie uit te drukken naar voren: de equivalentie benadering en de eindige axiomatisering benadering. De eerstgenoemde eist dat InfC en de oneindige conjunctie equivalent zijn. De tweede eist dat InfC en de oneindige conjunctie equivalent zijn in hun gevolgen. We zullen beide benaderingen uitlichten en uitleggen waarom ze wel of niet toereikend zijn.

3.1 Equivalentie

Laat $\mathcal{L}$ de taal van PR zijn. Laat $\mathcal{L}_T$ de taal zijn die we krijgen door het toevoegen van het symbool $T(x)$ aan de taal van PR.

Definitie 3.1. PR_1 is de theorie die we krijgen als we PR uitbreiden met de verzameling van alle instanties van de T-equivalenties toegepast op zinnen zonder het waarheidspredikaat, oftewel de verzameling $\{T(\ulcorner A \urcorner) \leftrightarrow A : A \in \mathcal{L}\}$.

We beperken ons in eerste instantie dus tot een getypeerd waarheidspredikaat. In stelling 2.4 hebben we bewezen dat de theorie PR_1 consistent is.
De meest voor de hand liggende interpretatie van wat equivalentie inhoudt in deze context is wederzijdse implicatie. We zouden dan dus willen dat geldt

$$PR_1 \vdash \forall x(\phi(x) \to T(x)) \Leftrightarrow PR_1 \vdash \bigwedge_{\substack{PR \vdash \phi(\ulcorner A \urcorner) \\ A \in \mathcal{L}}} A.^3 \tag{6}$$

Met andere woorden, we willen dat als PR_1 InfC bewijst, dit impliceert dat PR_1 de verzameling van alle zinnen die vallen onder het predikaat $\phi(x)$ bewijst en omgekeerd. We zullen nu uitleggen waarom dat niet mogelijk is.
We kunnen wel bewijzen dat als PR_1 de formule InfC bewijst, PR_1 de oneindige conjunctie van alle A's die vallen onder $\phi(x)$ vallen bewijst.

Stelling 3.1.

$$PR_1 \vdash \forall x(\phi(x) \to T(x)) \Rightarrow PR_1 \vdash \bigwedge_{\substack{PR \vdash \phi(\ulcorner A \urcorner) \\ A \in \mathcal{L}}} A.$$

Bewijs. We geven een afleiding:

1. Stel $PR_1 \vdash \forall x(\phi(x) \to T(x))$.
2. Laat $A \in \mathcal{L}$ een willekeurige zin zijn en stel $PR \vdash \phi(\ulcorner A \urcorner)$.
3. Uit (1) concluderen we dat $PR_1 \vdash \phi(\ulcorner A \urcorner) \to T(\ulcorner A \urcorner)$.
4. Uit (2) en (3) leiden we af dat $PR_1 \vdash T(\ulcorner A \urcorner)$.
5. PR_1 bevat de T-equivalenties als axioma's dus geldt $PR_1 \vdash T(\ulcorner A \urcorner) \leftrightarrow A$ omdat $A \in \mathcal{L}$.
6. Uit (4) en (5) leiden we af dat $PR_1 \vdash A$.

In de afleiding hebben we de zin $A \in \mathcal{L}$ willekeurig gekozen. We concluderen dat voor alle $A \in \mathcal{L}$ geldt dat $PR_1 \vdash \phi(\ulcorner A \urcorner) \Rightarrow PR_1 \vdash A$. Omdat $PR \subset PR_1$ geldt bovendien dat $PR \vdash \phi(\ulcorner A \urcorner) \Rightarrow PR_1 \vdash \phi(\ulcorner A \urcorner)$, dus PR_1 bewijst alle $A \in \mathcal{L}$ waarvoor PR $\phi(\ulcorner A \urcorner)$ bewijst. Dit is precies wat we bedoelen met $PR_1 \vdash \bigwedge_{\substack{PR \vdash \phi(\ulcorner A \urcorner) \\ A \in \mathcal{L}}} A$, dus we concluderen dat dit geldt. $\square$

We gaan bewijzen dat de implicatie de andere kant op niet geldt:

Stelling 3.2.

$$PR_1 \vdash \bigwedge_{\substack{PR \vdash \phi(\ulcorner A \urcorner) \\ A \in \mathcal{L}}} A \not\Rightarrow PR_1 \vdash \forall x(\phi(x) \to T(x))$$

.

[3] Deze equivalentie kan in een oneindige logica makkelijk bewezen worden. We willen ons echter beperken tot eindige logica's (zoals de eerste-orde logica) in dit geval omdat het gebruik van oneindige logica's andere problemen met zich meebreng (zo kan de compactheidsstelling bijvoorbeeld niet bewezen worden in oneindige logica's), zie [14] en [15] voor een uitgebreide uitleg.

Hiervoor bewijzen we eerst het volgende lemma:

Lemma 3.1 (Halbach 1999, p. 10, proposition 2)**.** *Als er een model $\mathcal{M}$ is van PR zodat de uitbreiding van $\phi(x) \in \mathcal{L}$ in $\mathcal{M}$ oneindig is, dan $PR_1 \nvdash \forall x(\phi(x) \rightarrow T(x))$.*

Hierbij bedoelen we met de uitbreiding van $\phi(x)$ in $\mathcal{M}$ de verzameling $\{a : a \in \mathcal{M}, \mathcal{M} \models \phi(\underline{a})\}$, waarbij $\underline{a}$ de naam is van het object a uit het domein van $\mathcal{M}$. We zullen de uitbreiding van $\phi(x)$ noteren met Φ.

Bewijs. Kies een model $\mathcal{W}$ van PR waarin de uitbreiding van $\phi(x)$ oneindig is. Laat Γ het elementaire diagram zijn (zoals gedefinieerd in definitie 2.2) van $\mathcal{W}$, $\underline{c}$ een nieuwe constante niet in Γ en definieer Δ als volgt:

$$\Delta = \Gamma \cup \{\underline{c} \neq \underline{a} : a \in \mathcal{W}\} \cup \{\phi(\underline{c}), \neg T(\underline{c})\} \cup \\ \{T(\ulcorner A \urcorner) : \mathcal{W} \models A\} \cup \{\neg T(\ulcorner A \urcorner) : \mathcal{W} \not\models A\}.$$

$a \in \mathcal{W}$ wil hier zeggen dat a, waarvoor $\underline{a}$ de naam is, een element is in het domein van het model $\mathcal{W}$. De functie die aan iedere zin A zijn naam $\ulcorner A \urcorner$ toekent is injectief. Dat betekent dat iedere zin in de taal een unieke naam heeft. Merk op dat de verzamelingen $\{\underline{c} \neq \underline{a} : a \in \mathcal{W}\}$ en $\{T(\ulcorner A \urcorner) : \mathcal{W} \models A\}$ beiden oneindig zijn. We passen nu de compactheidsstelling toe. Laat Δ' een eindige deelverzameling van Δ zijn. De uitbreiding van $\phi(x)$ in $\mathcal{W}$ is oneindig, dus er zijn oneindig veel $a \in \mathcal{W}$, waarvoor $\mathcal{W} \models \phi(\underline{a})$. Δ' bevat maar eindig veel zinnen uit de verzamelingen $\{\underline{c} \neq \underline{a} : a \in \mathcal{W}\}$ en $\{T(\ulcorner A \urcorner) : \mathcal{W} \models A\}$, dus er bestaat altijd een $a_i \in \Phi$, waarvoor geldt dat $(\underline{c} \neq \underline{a_i}) \notin \Delta'$ en $T(\underline{a_i}) \notin \Delta'$. We definiëren de uitbreiding S van het waarheidspredikaat als de verzameling zinnen $A \in \mathcal{L}$ waarvoor $T(\ulcorner A \urcorner) \in \Delta'$. Dan is $(\mathcal{W}, S)$ een model voor Δ' als we c interpreteren als a_i (dus $\underline{c} = \underline{a_i}$). We concluderen dat Δ' vervulbaar is. Omdat Δ' een willekeurige eindige deelverzameling van Δ is kunnen we concluderen dat voor iedere $\Delta' \subset \Delta$ geldt dat er een model is voor Δ'. Met de compactheidsstelling volgt hieruit dat Δ vervulbaar is. Laat V een model zijn van Δ. Dan geldt dat $V \models \phi(\underline{c}) \wedge \neg T(\underline{c})$, waaruit volgt dat $V \not\models \forall x(\phi(x) \rightarrow T(x))$. Bovendien geldt dat $V \models PR_1$. Hieruit volgt met stelling 2.5 dat $PR_1 \nvdash \forall x(\phi(x) \rightarrow T(x))$. $\square$

We hebben bewezen dat wanneer er een model van de theorie PR is waarin de uitbreiding van $\phi(x)$ oneindig, dat $\forall x(\phi(x) \rightarrow T(x))$ dan geen stelling is van PR uitgebreid met de T-equivalenties voor het getypeerde waarheidspredikaat. We gebruiken dit om stelling 3.2 te bewijzen.

Bewijs stelling 3.2. Stel $PR_1 \vdash \bigwedge_{\substack{PR \vdash \phi(\ulcorner A \urcorner) \\ A \in \mathcal{L}}} A$ en $\mathcal{M}$ is een model van PR_1 (deze bestaat want PR_1 is vervulbaar). Stel dat $\bigwedge_{\substack{PR \vdash \phi(\ulcorner A \urcorner) \\ A \in \mathcal{L}}} A$ daadwerkelijk oneindig veel A's beslaat, dan is de verzameling $\{A : PR \vdash \phi(\ulcorner A \urcorner)\}$ oneindig. Uit de correctheid en volledigheid van PR_1 (zie stelling 2.5) volgt dat $\forall A \in \{A : PR \vdash \phi(\ulcorner A \urcorner)\} : PR \vdash \phi(\ulcorner A \urcorner) \Rightarrow PR \models \phi(\ulcorner A \urcorner)$. Er geldt dan dus $\forall A \in \{A : PR \vdash \phi(\ulcorner A \urcorner)\} : \mathcal{M} \models \phi(\ulcorner A \urcorner)$. Uit de representeerbaarheidsstelling volgt dat $\#(A) \in \Phi \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \phi(\ulcorner A \urcorner)$. Omdat de functie die aan iedere zin zijn Gödelnummer toekent injectief is[4], volgt hieruit dat Φ oneindig veel elementen bevat als $\{A : PR \vdash \phi(\ulcorner A \urcorner)\}$ oneindig veel elementen bevat. De uitbreiding van $\phi(x)$ in $\mathcal{M}$ is dus oneindig. Omdat $PR \subset PR_1$ en $\mathcal{M} \models PR_1$ volgt $\mathcal{M} \models PR$. Dus $\mathcal{M}$ is een model van PR waarin de uitbreiding van $\phi(x)$ oneindig is. We passen nu lemma 3.1 toe, waaruit volgt dat $PR_1 \nvdash \forall x(\phi(x) \rightarrow T(x))$, wat ons het gewenste resultaat geeft. $\square$

[4] Iedere zin heeft namelijk een uniek Gödelnummer

We concluderen dat wederzijdse implicatie zoals in (6), waarbij we PR met de getypeerde T-equivalenties uitbreiden, dus niet mogelijk is.

De equivalentie benadering geeft ons dus geen bevredigend antwoord op de vraag wat het betekent voor InfC om een oneindige conjunctie uit te drukken omdat wederzijdse implicatie niet mogelijk is.[5] Daarom zullen we ons nu richten op de andere benadering: de eindige axiomatisering.

3.2 Eindige axiomatisering

Halbach kwam in zijn artikel [6] met een alternatieve benadering van wat het betekent voor InfC om een oneindige conjunctie uit te drukken. Volgens hem is het voldoende als InfC en $\bigwedge_{\substack{PR\vdash\phi(\ulcorner A\urcorner)\\ A\in\mathcal{L}}} A$ equivalent zijn in de gevolgen die er uit getrokken kunnen worden. We zullen dit idee verder uitwerken en bewijzen dat InfC en een oneindige conjunctie in deze zin wel hetzelfde kunnen uitdrukken.
Laten we het eerdere voorbeeld over de logische waarheden weer bekijken. Volgens de eindige axiomatisering benadering is het niet van belang of de uitspraak 'als x een logische waarheid is, dan is x waar' bewijsbaar, waar of wat dan ook is. Wat voor disquotationalisten van belang is, is dat het alle logische waarheden impliceert en meer ook niet.
We bekijken nog een voorbeeld:

$$\text{Alles wat de Paus heeft gezegd is waar.} \tag{7}$$

Van deze zin verwachten we niet dat het een stelling van de theorie is (in tegenstelling tot de zin 'alle logische waarheden zijn waar'). Toch spelen ook dit soort zinnen een belangrijke rol in het bestuderen van oneindige conjuncties. We zien namelijk dat (7) alle zinnen van de volgende vorm impliceert:

$$\text{Als de Paus “A” heeft gezegd, dan A.} \tag{8}$$

Hierbij eisen we dat A het waarheidspredikaat niet bevat om paradoxen te vermeiden. We vragen ons nu af wat het voor (7) betekent om ook een oneindige conjunctie uit te drukken. We zien dat alle zinnen zoals in (8) volgen uit (7). Er zijn echter meer zinnen waar alle zinnen zoals in (8) uit volgen, bijvoorbeeld $B \wedge \neg B$. De zin $B \wedge \neg B$ is namelijk een contradictie en uit een contradictie volgt alles. Het verschil is dat (7) geen andere zinnen in de taal impliceert dan alle zinnen uit (8) en de zinnen die weer volgen uit instanties van (8). We zouden dus kunnen zeggen dat (7) en de verzameling zinnen zoals (8) equivalent zijn in hun T-vrije gevolgen. Nu kunnen (7) en (8) op een specifieke manier dus equivalent zijn zonder dat (7) geïmpliceerd hoeft te worden door de verzameling van alle zinnen zoals (8). Dus volgens deze benadering zijn de oneindige conjunctie en InfC geen equivalente zinnen in de taal, maar in hun gevolgen zonder het waarheidspredikaat zijn ze wel equivalent.
Merk op dat we hier feitelijk niet werken met de oneindige conjunctie, maar met de verzameling zinnen $\{\phi(\ulcorner A\urcorner) \rightarrow A : A \in \mathcal{L}\}$. Als we ons voorbeeld bekijken en als predikaat $\phi(x)$ nemen *de paus heeft 'x' gezegd*, dan bestaat de verzameling $\{\phi(\ulcorner A\urcorner) \rightarrow A : A \in \mathcal{L}\}$ uit alle zinnen van de

[5] In het artikel van Piccolo en Schindler [4] worden ter volledigheid meer manieren uitgelicht waarop InfC en de oneindige conjunctie equivalent kunnen zijn (bijvoorbeeld door gebruik te maken van de ω-regel). Omdat deze overige manieren voor het vervolg van deze uiteenzetting echter niet van belang zijn en we hebben laten zien dat ze niet equivalent kunnen zijn door wederzijdse implicatie, gaan wij hier niet verder op in. Zie [4] voor een uitleg waarom de ω-regel en andere manieren ook geen uitkomst bieden.

vorm "Als de Paus "A" heeft gezegd, dan A". Het is makkelijk na te gaan dat

$$PR \vdash \bigwedge_{\substack{PR \vdash \phi(\ulcorner A \urcorner) \\ A \in \mathcal{L}}} A \Leftrightarrow PR \vdash \bigwedge_{\substack{PR \vdash \phi(\ulcorner A \urcorner) \\ A \in \mathcal{L}}} (\phi(\ulcorner A \urcorner) \to A).$$

Dus als we laten zien dat $\{\phi(\ulcorner A \urcorner) \to A : A \in \mathcal{L}\}$ en $\forall x(\phi(x) \to T(x))$ equivalent zijn in hun T-vrije gevolgen, dan is $\bigwedge_{\substack{PR \vdash \phi(\ulcorner A \urcorner) \\ A \in \mathcal{L}}} A$ dat ook.
We zullen nu de volgende stelling bewijzen:

Stelling 3.3 (Halbach 1999, p. 13, proposition 2)**.** *Laat PR een theorie zijn, $\phi(x)$ een predikaat voor zinnen in $\mathcal{L}$ met precies x als vrije variabele, InfC de formule $\forall x(\phi(x) \to T(x))$ en definieer PR' als de theorie die ontstaat door PR uit te breiden met alle zinnen $\phi(\ulcorner A \urcorner) \to A$, waarbij $A \in \mathcal{L}$. Dan bewijzen PR' en $PR_1 \cup \{InfC\}$ dezelfde $\mathcal{L}$-formules.*

Merk op dat we dus nog steeds redeneren met een getypeerd waarheidspredikaat.

Bewijs. Als de T-equivalenties gelden dan volgt $PR' \subset PR_1 \cup \{InfC\}$, dus bewijzen ze ook dezelfde $\mathcal{L}$-formules. De formules $T(\ulcorner A \urcorner) \to A$ en $\forall x(\phi(x) \to T(x))$ impliceren namelijk de formule $\phi(\ulcorner A \urcorner) \to A$.
We bewijzen nu de andere kant op. Stel $PR_1 \cup \{InfC\} \vdash \chi$, met $\chi \in \mathcal{L}$. We bewijzen dat $PR' \vdash \chi$ dan ook geldt. Als $PR_1 \cup \{InfC\} \vdash \chi$, volgt hieruit dat $PR_1 \vdash InfC \to \chi$. Dit is een gevolg van de deductiestelling, die zegt dat $\Gamma \vdash A \to B \Leftrightarrow \Gamma \cup \{A\} \vdash B$ [6]. Dus er is een bewijs in de theorie PR_1 voor $InfC \to \chi$. Omdat een bewijs eindig is, wordt er gebruik gemaakt van een eindig aantal stellingen uit PR_1. PR_1 bevat alle axioma's van PR en de T-equivalenties. Dus in het bewijs van $InfC \to \chi$ komen ook maar een eindig aantal T-equivalenties voor. Zonder verlies van algemeenheid nemen we aan dat de enige T-equivalenties die voorkomen in het bewijs de volgende zijn: $T(\ulcorner A_1 \urcorner) \leftrightarrow A_1, ..., T(\ulcorner A_n \urcorner) \leftrightarrow A_n$, waarbij $A_i \in \mathcal{L}$ voor $1 \leq i \leq n$. Om te bewijzen dat PR' ook χ bewijst gaan we de formule $Tr(x)$ gebruiken. We definiëren $Tr(x)$ als volgt:

$$Tr(x) = (x = \ulcorner A_1 \urcorner \wedge A_1) \vee (x = \ulcorner A_2 \urcorner \wedge A_2) \vee ...(x = \ulcorner A_n \urcorner \wedge A_n) \vee \\ (x \neq \ulcorner A_1 \urcorner \wedge x \neq \ulcorner A_2 \urcorner \wedge ... \wedge x \neq \ulcorner A_n \urcorner).$$

Hieruit volgt:

(i) $PR \vdash Tr(\ulcorner A_i \urcorner) \leftrightarrow A_i$ voor alle $1 \leq i \leq n$

(ii) $PR' \vdash \forall x(\phi(x) \to Tr(x))$

We laten eerst zien dat (i) geldt.
Stel $PR \vdash Tr(\ulcorner A_i \urcorner)$, voor een $i \in \{1...n\}$. $Tr(A_i)$ is waar als een van de disjuncten waar is. We zien dat $PR \nvdash (\ulcorner A_i \urcorner \neq \ulcorner A_1 \urcorner \wedge \ulcorner A_i \urcorner \neq \ulcorner A_2 \urcorner \wedge ... \wedge \ulcorner A_i \urcorner \neq \ulcorner A_n \urcorner)$, want $PR \nvdash \ulcorner A_i \urcorner \neq \ulcorner A_i \urcorner$. Dus een van de andere disjuncten moet gelden. Er is dus een $j \in \{1, ..., n\}$ zodat $PR \vdash \ulcorner A_i \urcorner = \ulcorner A_j \urcorner \wedge A_j$ (namelijk $j = i$). Omdat $PR \vdash \ulcorner A_i \urcorner = \ulcorner A_j \urcorner$ volgt hieruit dat $PR \vdash A_i$. Dus $PR \vdash Tr(\ulcorner A_i \urcorner) \to A_i$.
Stel nu dat $PR \vdash A_i$ voor een zeker $1 \leq i \leq n$. Dan gelt $PR \vdash \ulcorner A_i \urcorner = \ulcorner A_i \urcorner \wedge A_i$, dus $PR \vdash Tr(A_i)$. We concluderen dat (i) geldt.
We laten nu zien dat (ii) geldt.
We willen bewijzen dat $PR' \vdash \forall x(\phi(x) \to Tr(x))$. Dit doen we door te laten zien dat

[6] Voor een bewijs van de deductiestelling zie [16].

$PR' \vdash \phi(x) \rightarrow Tr(x)$. Stel $PR' \vdash \phi(x)$. We hebben aangenomen dat $\phi(x)$ een eigenschap van zinnen is. Hieruit volgt dat $PR' \vdash \forall x(\phi(x) \rightarrow sent(x))$ (waarbij $sent(x)$ het predikaat is voor de eigenschap van het zijn van een zin). Dus uit $PR' \vdash \phi(x)$ leiden we af dat $PR' \vdash sent(x)$. We nemen nu aan dat de syntaxis theorie het volgende bewijst: $PR' \vdash \bigvee_{i \in I}(x = \ulcorner A_i \urcorner) \vee \bigwedge_{i \in I}(x \neq \ulcorner A_i \urcorner)$, met $I = \{1, ..., n\}$. Dus als $PR' \vdash \phi(x)$, dan $\exists i \in I$ zodat $x = \ulcorner A_i \urcorner$ of $\forall i \in I : x \neq \ulcorner A_i \urcorner$.

Stel $PR' \vdash \phi(x)$ en $\exists i \in I$ zodat $x = \ulcorner A_i \urcorner$. Omdat $\forall A \in \mathcal{L} : (\phi(\ulcorner A \urcorner) \rightarrow A) \in PR'$ geldt dat $PR' \vdash \phi(\ulcorner A_i \urcorner) \rightarrow A_i$. We hebben bewezen dat $PR \vdash Tr(\ulcorner A_i \urcorner) \leftrightarrow A_i$ voor alle $i \in I$, omdat $PR \subset PR'$ volgt dat dit ook bewijsbaar is in PR', dus uit $PR' \vdash A_i$ volgt dat $PR' \vdash Tr(\ulcorner A_i \urcorner)$. Omdat $x = \ulcorner A_i \urcorner$ volgt hieruit dat $PR' \vdash Tr(x)$.

Stel nu dat $PR' \vdash \phi(x)$ en $\forall i \in I : x \neq \ulcorner A_i \urcorner$. Dan geldt $PR' \vdash (x \neq \ulcorner A_1 \urcorner \wedge x \neq \ulcorner A_2 \urcorner \wedge ... \wedge x \neq \ulcorner A_n \urcorner)$, dus $PR' \vdash Tr(x)$. We concluderen dat ook in dit geval $PR' \vdash \phi(x) \rightarrow Tr(x)$.
We hebben hiermee bewezen dat $PR' \vdash \forall x(\phi(x) \rightarrow Tr(x))$.

We bekijken nu het bewijs van $InfC \rightarrow \chi$ in PR_1. Iedere keer dat $T(x)$ voorkomt in dit bewijs vervangen we het voor $Tr(x)$ en de T-equivalenties die gebruikt worden vervangen we voor $Tr(\ulcorner A_i \urcorner) \leftrightarrow A_i$. Dit geeft ons een bewijs van $\forall x(\phi(x) \rightarrow Tr(x)) \rightarrow \chi$. Vanwege (ii) is χ nu ook bewijsbaar in PR'. Dus alles wat bewijsbaar is in $PR_1 \cup \{InfC\}$ is ook bewijsbaar in PR'. We concluderen dat ze dezelfde T-vrije gevolgen hebben. □

We hebben aangetoond dat PR uitgebreid met $\{\phi(\ulcorner A \urcorner) \rightarrow A : A \in \mathcal{L}\}$ en PR uitgebreid met de getypeerde T-equivalenties en $\forall x(\phi(x) \rightarrow T(x))$ equivalent zijn in hun T-vrije gevolgen:

$$PR' \vdash A \Leftrightarrow PR_1 \cup \{\forall x(\phi(x) \rightarrow T(x)\} \vdash A$$

waarbij $A \in \mathcal{L}$. Dus als we een getypeerd waarheidspredikaat hebben waarvoor de T-equivalenties gelden, zijn $\forall x(\phi(x) \rightarrow T(x))$ en de oneindige conjunctie van alle zinnen waarvoor $\phi(x)$ geldt equivalent in hun T-vrije gevolgen. In deze specifieke context, wanneer we equivalent zijn definiëren als het hebben van dezelfde T-vrije gevolgen, zijn de oneindige conjunctie en InfC dus equivalent.

Halbachs propositie kunnen we zien als een uitwerking van de claim van disquotationalisten dat een oneindige conjunctie uitgedrukt kan worden in een taal die een waarheidspredikaat bevat dat gekarakteriseerd wordt door de T-equivalenties. Picollo en Schindler geven in hun paper [4] echter een verscherping van Halbachs stelling. Het blijkt namelijk dat de volledige T-equivalenties niet nodig zijn om het resultaat te verkrijgen; de implicatie van links naar rechts (ook wel T-uit, of T-elim genoemd)

$$T(\ulcorner A \urcorner) \rightarrow A$$

is namelijk voldoende om hetzelfde resultaat te krijgen. We zullen nu een bewijs geven van deze bewering.

Stelling 3.4 (Picollo, Schindler 2017, p. 908, proposition 4)**.** *Laat PR, $\phi(x)$, $InfC$ en PR' zijn zoals in stelling 3.3 en laat $PR_2 = PR \cup \{T(\ulcorner A \urcorner) \rightarrow A : A \in \mathcal{L}\}$. Dan bewijzen PR' en $PR_2 \cup \{InfC\}$ dezelfde $\mathcal{L}$-formules.*

Bewijs. Stel $PR_2 \cup \{InfC\} \vdash \chi$, met $\chi \in \mathcal{L}$. Dan geldt dat $PR_2 \cup \{T(\ulcorner A \urcorner) \leftarrow A : A \in \mathcal{L}\} \cup \{InfC\} \vdash \chi$. Merk op dat $PR_2 \cup \{T(\ulcorner A \urcorner) \leftarrow A : A \in \mathcal{L}\} = PR_1$. Dus uit stelling 3.3 volgt dat $PR' \vdash \chi$.

Stel nu dat $PR' \vdash \chi$. We willen aantonen dat $PR_2 \cup \{InfC\} \vdash \chi$. Omdat bewijzen eindig zijn komt er een eindig deel van de verzameling $\{\phi(\ulcorner A \urcorner) \to A : A \in \mathcal{L}\}$ voor in het bewijs. Merk op dat geldt

$$\forall x(\phi(x) \to T(x)), T(\ulcorner A \urcorner) \to A \vdash \phi(\ulcorner A \urcorner) \to A.$$

Omdat $\forall A \in \mathcal{L} : (T(\ulcorner A \urcorner) \to A) \in PR_2$ volgt dat alle zinnen uit $\{\phi(\ulcorner A \urcorner) \to A : A \in \mathcal{L}\}$ die voorkomen in het bewijs van χ ook bewezen worden door $PR_2 \cup \{InfC\}$. We concluderen dat $PR_2 \cup \{InfC\} \vdash \chi$. $\square$

Stelling 3.4 zegt dus dat voor alle $A \in \mathcal{L}$ geldt:

$$PR' \vdash A \Leftrightarrow PR_2 \cup \{\forall x(\phi(x) \to T(x)\} \vdash A.$$

We hebben dus laten zien dat de eindige axiomatisering benadering het aannemen van de T-equivalenties als waarheidstheorie niet rechtvaardigt, maar enkel T-uit.

In de eindige axiomatisering benadering wordt er een zware beperking opgelegd aan het waarheidspredikaat, de T-equivalenties en T-uit: ze zijn beperkt tot zinnen waar het waarheidspredikaat zelf niet in voorkomt. Zoals Picollo en Schindler opmerken in hun artikel is het niet duidelijk hoe we de eindige axiomatisering benadering kunnen uitbreiden naar het type-vrije geval. In het volgende hoofdstuk gaan we hier verder op in.

4 Type-vrije eindige axiomatisering

We willen onderzoeken of de eindige axiomatisering ook een antwoord biedt op de vraag wat het betekent voor InfC om een oneindige conjunctie uit te drukken in PR in het type-vrije geval. Net als eerder schrijven we PR' voor de theorie PR uitgebreid met de verzameling zinnen $\{\phi(\ulcorner A \urcorner) \to A : A \in \mathcal{L}\}$ en PR_1 voor de theorie die we krijgen door PR uit te breiden met de verzameling $\{T(\ulcorner A \urcorner) \leftrightarrow A : A \in \mathcal{L}\}$. Met de eindige axiomatisering benadering hebben we gekeken naar T-vrije gevolgen. We hebben bewezen dat voor alle $A \in \mathcal{L}$:

$$PR' \vdash A \Leftrightarrow PR_1 \cup \{\forall x(\phi(x) \leftrightarrow T(x)\} \vdash A.$$

Dus de theorieën zijn equivalent in hun T-vrije gevolgen. Hoe kunnen we dit uitbreiden naar een algemener geval waarbij we niet alleen kijken naar de T-vrije gevolgen, maar ook naar gevolgen die $T(x)$ wel bevatten?

Tot nu toe hebben we op drie verschillende manieren restricties opgelegd aan het soort zinnen dat we beschouwen:

(i) PR_1 bevat alleen de T-equivalenties voor zinnen zonder het waarheidspredikaat.

(ii) Als zinnen die vallen onder het predikaat $\phi(x)$ hebben we alleen zinnen zonder het waarheidspredikaat toegestaan.

(iii) Bij het vergelijken van de gevolgen van PR' en $PR_1 \cup \{InfC\}$ hebben we alleen naar zinnen zonder het waarheidspredikaat gekeken.

Deze beperkingen hebben we allemaal met een reden opgelegd, maar omdat op het moment van introduceren wellicht niet duidelijk was waarom deze beperking noodzakelijk was en we nu geïnteresseerd zijn in het wegnemen van deze beperkingen zullen we ze opnieuw verklaren.
De restrictie uit (i) hebben we opgelegd omdat de theorie $PR \cup \{T(\ulcorner A \urcorner) \leftrightarrow A : A \in \mathcal{L}_T\}$ inconsistent is (zie stelling 2.2). Stel dat we restrictie (ii) vervolgens niet hadden opgelegd. Dan kan de verzameling van zinnen $\{A : PR_1 \vdash \phi(\ulcorner A \urcorner)\}$ een zin bevatten waar het waarheidspredikaat in voorkomt. Stel $A_1 \in \{A : PR \vdash \phi(\ulcorner A \urcorner)\}$ en A_1 bevat het waarheidspredikaat. Er geldt dan dat $PR \cup \{InfC\} \vdash T(\ulcorner A_1 \urcorner)$, maar omdat $A_1 \notin \mathcal{L}$ kunnen we de T-equivalentie niet op $T(\ulcorner A_1 \urcorner)$ toepassen, dus A_1 kunnen we niet bewijzen. Dat zou betekenen dat InfC überhaupt al niet alle zinnen die vallen onder $\phi(x)$ kan uitdrukken. We kunnen concluderen dat we (ii) op moeten leggen.
Stel nu dat we in tegenstelling tot (*iii*) ook gevolgen van PR' en $PR_1 \cup \{InfC\}$ zouden beschouwen die wel het waarheidspredikaat bevatten. Omdat geldt $PR_1 \cup \{InfC\} \vdash InfC$ zou PR' de formule InfC dan ook moeten bewijzen. Uit stelling 3.2 volgt echter dat

$$PR_1 \nvdash \bigwedge_{\substack{PR \vdash \phi(\ulcorner A \urcorner) \\ A \in \mathcal{L}}} A \to \forall x(\phi(x) \to T(x)).$$

Met de deductiestelling volgt $PR_1 \cup \{A \in \mathcal{L} : PR \vdash \phi(\ulcorner A \urcorner)\} \vdash A$ wat equivalent is met $PR_1 \cup \{\phi(\ulcorner A \urcorner) \to A : A \in \mathcal{L}\} \vdash A$. Omdat $PR \subset PR_1$ volgt hieruit

$$PR \cup \{\phi(\ulcorner A \urcorner) \to A : A \in \mathcal{L}\} \nvdash InfC.$$

Dus stelling 3.3 zou dan niet meer opgaan.

We zijn geïnteresseerd in het versoepelen van de drie bovengenoemde restricties.
Stel we versoepelen de restrictie op de T-equivalenties en laten bepaalde zinnen met het waarheidspredikaat toe. We zijn geïnteresseerd in de vraag of de eindige axiomatisering benadering ons nog steeds het antwoord geeft op de vraag wat het betekent voor InfC om een oneindige conjunctie uit te drukken met deze versoepeling, dus diezelfde zinnen met het waarheidspredikaat zullen we ook toelaten als gevolg van $PR_1 \cup \{InfC\}$. Als we de restrictie op (ii) niet mee veranderen krijgen we hetzelfde probleem als we eerder zagen: $PR_1 \cup \{InfC\}$ kan zinnen bewijzen die PR' zoals in (ii) nooit zal kunnen bewijzen, dus we zullen dezelfde zinnen met het waarheidspredikaat als mogelijke zinnen in de oneindige conjunctie moeten toelaten.
Als we restrictie (ii) willen versoepelen zullen we op eenzelfde manier concluderen dat we de andere restricties simultaan moeten veranderen.
We concluderen dat als we het soort zinnen dat we beschouwen willen veranderen, we restricties (i),(ii) en (iii) op dezelfde manier moeten aanpassen.

We willen de verzameling zinnen die we beschouwen vergroten van $\mathcal{L}$ naar een deelverzameling van $\mathcal{L}_T$. Noem X de nieuwe verzameling, dan moet dus gelden $\mathcal{L} \subset X \subset \mathcal{L}_T$. Omdat we hierbij alle drie de restricties moeten versoepelen (dit hebben we zojuist aangetoond) moeten we ten eerste weten of de theorie die we krijgen door PR uit te breiden met de T-equivalenties voor zinnen uit X consistent is. We weten hierdoor direct dat $X = \mathcal{L}_T$ niet mogelijk is, omdat de theorie $PR \cup \{T(\ulcorner A \urcorner) \to A : A \in \mathcal{L}_T\}$ inconsistent is (zie weer stelling 2.2). In de rest van dit hoofdstuk zullen we twee andere uitbreidingen $X \subsetneq \mathcal{L}_T$ behandelen waarvoor $PR \cup \{T(\ulcorner A \urcorner) \to A : A \in X\}$ wel consistent is. Eerst zullen we de verzameling beschouwen die alle zinnen $A \in \mathcal{L}_T$ bevat, waarvoor geldt dat A een zin is waarin het waarheidspredikaat alleen voorkomt in het bereik van een even aantal negatiesymbolen. Daarna zullen we de verzameling beschouwen die alle zinnen $A \in \mathcal{L}_T^+$ bevat waarin geen kwantor voorkomt. Voor beide gevallen zullen we onderzoeken of het argument van de eindige axiomatisering benadering nog steeds opgaat.

4.1 Positieve disquotatie

In sectie 2.6 hebben we laten zien dat als we PR uitbreiden met de T-equivalenties voor alle zinnen (met en zonder het waarheidspredikaat) we een zin kunnen construeren die tegelijk waar en onwaar is (de leugenaarsparadox) waardoor de theorie inconsistent werd. Een manier om de leugenaarsparadox te voorkomen is door de T-equivalenties te beperken tot zinnen waarin het waarheidspredikaat alleen voorkomt in het bereik van een even aantal negatiesymbolen, wat ook wel positieve disquotatie genoemd wordt.

Definitie 4.1. Een formule $\phi \in \mathcal{L}_T$ is T-positief dan en slechts dan als $T(x)$ niet voorkomt in ϕ in het bereik van een oneven aantal negatiesymbolen

Voor deze definitie is het belangrijk dat alleen $\neg$, $\wedge$ en $\vee$ logische connectieven van $\mathcal{L}_T$ zijn en $\to$ en $\leftrightarrow$ niet.

Definitie 4.2. $\mathcal{L}_T^+$ is de verzameling van alle T-positieve zinnen uit $\mathcal{L}_T$.

Voorbeelden van T-positieve zinnen zijn $T(T(\ulcorner 0 = 0 \urcorner))$, $\neg\neg(T(T(\ulcorner 0 = 0 \urcorner)))$ en alle zinnen $A \in \mathcal{L}$. Ook InfC blijkt een T-positieve zin te zijn. Er geldt namelijk dat $\forall x(\phi(x) \to T(x))$ equivalent is met $\forall x(\neg\phi(x) \vee T(x))$, en omdat we tot nu toe hebben aangenomen dat $\phi(x) \in \mathcal{L}$ volgt dat $InfC \in \mathcal{L}_T^+$. Voorbeelden van niet T-positieve zinnen zijn $\neg T(\ulcorner 1 = 0 \urcorner)$, $\neg T(\ulcorner A \urcorner) \leftrightarrow \neg A$ (deze zin is namelijk equivalent met $(T(\ulcorner A \urcorner) \vee \neg A) \wedge (\neg T(\ulcorner A \urcorner) \vee A))$ en $T(\ulcorner A \urcorner) \leftrightarrow A$ (deze zin is namelijk equivalent met $(\neg T(\ulcorner A \urcorner) \vee A) \wedge (T(\ulcorner A \urcorner) \vee \neg A)$).

Definitie 4.3. PR_3 is de theorie die ontstaat door PR uit te breiden met de verzameling zinnen $\{T(\ulcorner A \urcorner) \leftrightarrow A : A \in \mathcal{L}_T^+\}$

Een deel van de zinnen die het waarheidspredikaat bevatten zijn nu dus toegestaan in de T-equivalenties. Als A een zin is die het waarheidspredikaat niet bevat, is de zin $T(T(\ulcorner A \urcorner)) \leftrightarrow T(\ulcorner A \urcorner)$ bijvoorbeeld een stelling van PR_3. Hieruit kunnen we bijvoorbeeld het volgende voorbeeld afleiden:

Voorbeeld 4.1. $PR_3 \vdash T(T(\ulcorner 0 = 0 \urcorner)) \rightarrow 0 = 0$

Onze theorie is dus zeker sterker geworden en we kunnen nu voor de hand liggende dingen zoals in voorbeeld 4.1 afleiden. Het blijkt bovendien dat we op deze manier inderdaad de leugenaarsparadox vermijden: de theorie PR_3 is namelijk consistent. Een bewijs voor de consistentie van PR_3 zullen we niet geven, maar kan gevonden worden in [5].

We kunnen ons nu afvragen of voor de theorie PR_3 ook geldt dat de formule InfC niet geïmpliceerd wordt door de verzameling van alle zinnen $A \in \mathcal{L}_T^+$ die vallen onder $\phi(x)$, oftewel

$$PR_3 \vdash \bigwedge_{\substack{PR_3 \vdash \phi(\ulcorner A \urcorner) \\ A \in \mathcal{L}_T^+}} A \not\Rightarrow PR_3 \vdash \forall x(\phi(x) \rightarrow T(x)). \tag{9}$$

Het blijkt dat we een soortgelijk argument kunnen geven als voor lemma 3.1. We zullen een schets geven van het bewijs.
Stel $PR_3 \vdash \bigwedge_{\substack{PR_3 \vdash \phi(\ulcorner A \urcorner) \\ A \in \mathcal{L}_T^+}} A$. We weten dat PR_3 consistent is, waaruit volgt dat PR_3 vervulbaar is. Laat $\mathcal{M}$ een model van PR_3 zijn. Dan volgt uit volledigheid van PR_3 dat de uitbreiding van $\phi(x)$ in $\mathcal{M}$ oneindig is (voor details waarom dit zo is zie het bewijs van stelling 3.1). Laat Γ het elementaire diagram zijn van $\mathcal{M}$, $\underline{c}$ een nieuwe constante niet in Γ en definieer Δ als volgt:

$$\Delta = \Gamma \cup \{\underline{c} \neq \underline{a} : a \in \mathcal{M}\} \cup \{\phi(\underline{c}), \neg T(\underline{c})\} \cup \\ \{T(\ulcorner A \urcorner) : \mathcal{M} \models A\} \cup \{\neg T(\ulcorner A \urcorner) : \mathcal{M} \not\models A\}.$$

Het verschil met lemma 3.1 is onder andere dat er zinnen waar zijn in $\mathcal{M}$ die het waarheidspredikaat bevatten. Omdat we kunnen laten zien dat iedere eindige deelverzameling $\Delta' \subset \Delta$ vervulbaar is kunnen we met de compactheidsstelling concluderen dat Δ vervulbaar is en dus een model heeft. Laat $\mathcal{N}$ een model van Δ zijn. Er geldt dat $\mathcal{N} \models \phi(\underline{c}) \wedge \neg T(\underline{c})$, waaruit volgt dat $\mathcal{N} \not\models \forall x(\phi(x) \rightarrow T(x))$. Er geldt bovendien dat $\mathcal{N} \models PR_3$, dus uit volledigheid volgt dat $PR_3 \not\vdash \forall x(\phi(x) \rightarrow T(x))$. We concluderen dat 9 geldt.

De vraag is nu of de eindige axiomatisering benadering nog opgaat, oftewel of we kunnen bewijzen dat

$$PR'' \vdash A \Leftrightarrow PR_3 \cup \{\forall x(\phi(x) \rightarrow T(x)\} \vdash A \tag{10}$$

voor alle $A \in \mathcal{L}_T^+$ en $PR'' = PR \cup \{\phi(\ulcorner A \urcorner) \rightarrow A : A \in \mathcal{L}_T^+\}$. We zullen bewijzen dat dit niet geldt.

Lemma 4.1. *Er bestaat een predikaat $\phi(x)$ en een zin $A \in \mathcal{L}_T^+$ zodat geldt*

$$PR_3 \cup \{\forall x(\phi(x) \rightarrow T(x)\} \vdash A \not\Rightarrow PR'' \vdash A.$$

Bewijs. Merk als eerste op dat er altijd een zin in de taal $\mathcal{L}_T^+$ is die $PR_3 \cup \{\forall x(\phi(x) \rightarrow T(x)\}$ bewijst, namelijk InfC. Er geldt dus nooit dat $PR_3 \cup \{\forall x(\phi(x) \rightarrow T(x)\}$ niets bewijst.
We moeten een predikaat en een zin in de taal $\mathcal{L}_T^+$ vinden zodat $PR_3 \cup \{\forall x(\phi(x) \rightarrow T(x)\} \vdash A$ en $PR'' \nvdash A$. Laat $\phi(x)$ het predikaat $LW(x)$ zijn dat zegt over een zin of het een logische waarheid is of niet (dit voorbeeld hebben we ook gebruikt in hoofdstuk 3). We kiezen de zin B als een logische waarheid waar het waarheidspredikaat niet in voorkomt (deze bestaat). Dan geldt $PR_3 \cup \{\forall x(\phi(x) \rightarrow T(x)\} \vdash \phi(\ulcorner B \urcorner)$, waar uit volgt dat $PR_3 \cup \{\forall x(\phi(x) \rightarrow T(x)\} \vdash T(\ulcorner B \urcorner)$. Merk op dat $T(\ulcorner B \urcorner)$ geen logische waarheid is omdat we een model kunnen construeren waarin de zin niet waar is (neem een willekeurig model van PR en breidt deze uit met een uitbreiding van het waarheidspredikaat, die je zo definieert dat de term $\ulcorner B \urcorner$ er niet in voorkomt). Er geldt dus dat $PR_3 \nvdash \phi(\ulcorner T(\ulcorner B \urcorner) \urcorner)$. Dus we kunnen geen axioma van de vorm $\phi(\ulcorner A \urcorner) \rightarrow A$ van PR'' op de zin $\phi(\ulcorner T(\ulcorner B \urcorner) \urcorner)$ toepassen. We kunnen de zin $T(\ulcorner B \urcorner)$ ook niet afleiden uit de andere axioma's van PR'' (verder bevat PR'' enkel nog de axioma's van PR) omdat die geen regels voor het waarheidspredikaat bevatten (PR'' bevat de T-equivalenties immers niet). We concluderen dat er geen bewijs is voor $T(\ulcorner B \urcorner)$ in PR'', dus $PR'' \nvdash T(\ulcorner B \urcorner)$. Merk op dat $T(\ulcorner B \urcorner) \in \mathcal{L}_T^+$ (we hadden immers aangenomen dat B het waarheidspredikaat niet bevat). Dus we hebben een zin en een predikaat gevonden waarvoor de stelling geldt. □

We zien dat de axiomatisering benadering op deze manier geformuleerd niet werkt wanneer we ook bepaalde gevolgen met het waarheidspredikaat beschouwen, in de eerste plaats omdat PR'' de T-equivalenties niet bevat en daardoor veel minder sterk is dan PR_3. We zullen PR'' dus ook moeten uitbreiden met de T-equivalenties om de eindige axiomatisering benadering te laten werken.

Definitie 4.4. PR_3' is de theorie PR_3 uitgebreid met alle zinnen $\phi(\ulcorner A \urcorner) \rightarrow A$ met $A \in \mathcal{L}_T^+$.

Het blijkt echter dat de eindige axiomatisering benadering geformuleerd met PR_3' in plaats van PR'' nog steeds niet opgaat, oftewel er geldt niet voor alle $A \in \mathcal{L}_T^+$ dat:

$$PR_3' \vdash A \Leftrightarrow PR_3 \cup \{\forall x(\phi(x) \rightarrow T(x)\} \vdash A. \tag{11}$$

Dat (11) niet geldt voor alle $A \in \mathcal{L}_T^+$ blijkt uit het volgende lemma.

Lemma 4.2. *Er is een $A \in \mathcal{L}_T^+$ waarvoor geldt*

$$PR_3 \cup \{\forall x(\phi(x) \rightarrow T(x))\} \vdash A \not\Rightarrow PR_3' \vdash A.$$

Bewijs. Er geldt dat $\forall x(\phi(x) \rightarrow T(x)) \in \mathcal{L}_T^+$, dus $PR_3 \cup \{\forall x(\phi(x) \rightarrow T(x))\} \vdash \forall x(\phi(x) \rightarrow T(x))$. Uit (9) volgt $PR_3 \nvdash \bigwedge_{\substack{PR_3 \vdash \phi(\ulcorner A \urcorner) \\ A \in \mathcal{L}_T^+}} A \rightarrow \forall x(\phi(x) \rightarrow T(x))$, waaruit we kunnen afleiden (zie het bewijs dat we gebruikten om restrictie (iii) uit te leggen) dat $PR_3' \nvdash \forall x(\phi(x) \rightarrow T(x))$. Dus $A = InfC$ bewijst de stelling. □

PR_3' en $PR_3 \cup \{InfC\}$ zijn dus niet equivalent in hun gevolgen in de taal $\mathcal{L}_T^+$. We zullen meer restricties moeten opleggen aan de T-equivalenties en het soort gevolgen die we beschouwen, oftewel, we zullen de verzameling zinnen die we beschouwen verder moeten verkleinen.

4.2 Kwantorvrij

Een logische vervolg stap in de poging om de eindige axiomatisering benadering te laten werken in het type-vrije geval is om de T-equivalenties te beperken tot zinnen $A \in \mathcal{L}_T^+$ waar geen kwantor in voorkomt.

Definitie 4.5. $\mathcal{L}^+_{T,KV}$ is de verzameling zinnen die alle zinnen $A \in \mathcal{L}^+_T$ bevat waar geen kwantor in voorkomt.

Merk op dat $\forall x(\phi(x) \to T(x)) \notin \mathcal{L}^+_{T,KV}$ en $\mathcal{L}^+_{T,KV} \subset \mathcal{L}^+_T \subset \mathcal{L}_T$.

Definitie 4.6. PR_4 is de theorie die ontstaat door PR uit te breiden met de verzameling zinnen $\{T(\ulcorner A \urcorner) \leftrightarrow A : A \in \mathcal{L}^+_{T,KV}\}$

Omdat PR_3 consistent is en $PR_4 \subset PR_3$ volgt dat PR_4 consistent is. Laat PR'_4 de theorie zijn die ontstaat door PR_4 uit te breiden met de verzameling zinnen $\{\phi(\ulcorner A \urcorner) \to A : A \in \mathcal{L}^+_{T,KV}\}$. We hebben nu in ieder geval voorkomen dat InfC een gevolg van zichzelf is in de taal $\mathcal{L}^+_{T,KV}$. We kunnen ons afvragen of het nu wel mogelijk is om te bewijzen dat InfC en de oneindige conjunctie van de zinnen A in de taal $\mathcal{L}^+_{T,KV}$ die vallen onder $\phi(x)$ equivalent zijn in hun gevolgen in de taal $\mathcal{L}^+_{T,KV}$.

Stelling 4.1. *Laat $\phi(x)$ een predikaat voor zinnen in $\mathcal{L}^+_{T,KV}$ zijn. Laat InfC, PR'_4 en PR_4 als hierboven. Dan bewijzen PR'_4 en $PR_4 \cup \{InfC\}$ dezelfde $\mathcal{L}^+_{T,KV}$-formules.*

Dit is stelling 3.3 uitgebreid naar een groter aantal zinnen. We zullen een schets van het bewijs geven.

Bewijs. Omdat we uit de formule $\forall x(\phi(x) \to T(x))$ met de T-equivalenties voor zinnen A in de taal $\mathcal{L}^+_{T,KV}$ $(T(\ulcorner A \urcorner) \leftrightarrow A)$ alle zinnen $\phi(\ulcorner A \urcorner) \to A$ met $A \in \mathcal{L}^+_{T,KV}$ kunnen afleiden volgt dat $PR'_4 \subset PR_4 \cup \{InfC\}$. Dus $PR'_4 \vdash A \Rightarrow PR_4 \cup \{InfC\} \vdash A$ voor alle $A \in \mathcal{L}^+_{T,KV}$.
Stel $PR_4 \cup \{InfC\} \vdash \chi$ voor zekere $\chi \in \mathcal{L}^+_{T,KV}$. Dan geldt $PR_4 \vdash InfC \to \chi$ als gevolg van de deductiestelling. Dus er is een bewijs in PR_4 voor $InfC \to \chi$ dat alleen gebruik maakt van de axioma's van PR en een eindig aantal T-equivalenties. Neem zonder verlies van algemeenheid aan dat de enige T-equivalenties die voorkomen zijn: $T(\ulcorner A_1 \urcorner) \leftrightarrow A_1, ..., T(\ulcorner A_n \urcorner) \leftrightarrow A_n$, met $A_i \in \mathcal{L}^+_{T,KV}$ voor $1 \leq i \leq n$. We definiëren de formule $Tr(x)$ als volgt:

$$\begin{aligned} Tr(x) = (x = \ulcorner A_1 \urcorner \wedge A_1) \vee (x = \ulcorner A_2 \urcorner \wedge A_2) \vee ...(x = \ulcorner A_n \urcorner \wedge A_n) \vee \\ (x \neq \ulcorner A_1 \urcorner \wedge x \neq \ulcorner A_2 \urcorner \wedge ... \wedge x \neq \ulcorner A_n \urcorner). \end{aligned}$$

We kunnen hieruit de volgende twee beweringen bewijzen:

(i) $PR_4 \vdash Tr(\ulcorner A_i \urcorner) \leftrightarrow A_i$ voor alle $1 \leq i \leq n$

(ii) $PR'_4 \vdash \forall x(\phi(x) \to Tr(x))$

De bewijzen hiervoor zullen we nu niet geven maar gaan op eenzelfde manier als in het bewijs voor stelling 3.3. Als we nu in het bewijs van $InfC \to \chi$ alle voorkomens van $T(x)$ vervangen voor $Tr(x)$ en de regel $Tr(\ulcorner A_i \urcorner) \leftrightarrow A_i$ gebruiken waar nodig (die bewijsbaar zijn in PR'_4 volgens (i)) krijgen we een bewijs voor $\forall x(\phi(x) \to Tr(x)) \to \chi$. Omdat $PR'_4 \vdash \forall x(\phi(x) \to Tr(x))$ volgens (ii) concluderen we dat $PR'_4 \vdash \chi$. $\square$

De eindige axiomatisering benadering gaat dus ook op als we niet alleen zinnen zonder het waarheidspredikaat, maar ook T-positieve zinnen zonder kwantoren beschouwen.

We zien echter dat de verscherping zoals geformuleerd in stelling 3.4 niet meer opgaat. We zullen uitleggen waarom: Laat PR_4, $\phi(x)$, InfC en PR'_4 zijn zoals in stelling 4.1 en laat $PR_5 = PR \cup \{T(\ulcorner A \urcorner) \to A : A \in \mathcal{L}^+_{T,\mathcal{KV}}\}$. De claim is dat PR'_4 en $PR_5 \cup \{InfC\}$ dezelfde

$\mathcal{L}^+_{T,KV}$-formules bewijzen.
Er geldt nog wel dat $PR_5 \cup \{InfC\} \vdash A \Rightarrow PR'_4 \vdash A$ voor all $A \in \mathcal{LT}, \mathcal{KV}^+$:
Stel $PR_5 \cup \{InfC\} \vdash \chi$, met $\chi \in \mathcal{L}^+_{T,KV}$. Dan geldt dat $PR_5 \cup \{T(\ulcorner A \urcorner) \leftarrow A : A \in \mathcal{L}^+_{T,KV}\} \cup \{InfC\} \vdash \chi$. Merk op dat $PR_5 \cup \{T(\ulcorner A \urcorner) \leftarrow A : A \in \mathcal{L}^+_{T,KV}\} = PR_4$. Dus uit stelling 4.1 volgt dat $PR'_4 \vdash \chi$.
Voor het bewijs de andere kant op gebruikten we in het bewijs voor stelling 3.4 dat als $PR' \vdash \chi$, er in het bewijs voor χ in PR' alleen axioma's van PR en zinnen van de vorm $\phi(\ulcorner A \urcorner) \rightarrow A$ gebruikt kunnen worden die ook allemaal afleidbaar zijn in PR_1. Nu bevat PR'_4 echter ook de T-equivalenties dus kunnen die ook voorkomen in het bewijs. Stel $PR'_4 \vdash \chi$ voor zekere $\chi \in \mathcal{L}^+_{T,KV}$. Als er in het bewijs voor χ in PR'_4 een zin van de vorm $T(\ulcorner A \urcorner) \leftarrow A$ voorkomt is χ niet bewijsbaar in $PR_5 \cup \{InfC\}$. We concluderen dat de verscherping inderdaad niet opgaat.

5 Conclusie en discussie

We hebben ons de vraag gesteld hoe we de oneindige conjunctie van alle zinnen die vallen onder een predikaat $\phi(x)$ op een eindige manier kunnen uitdrukken in PR. Met een waarheidspredikaat waarvoor de T-equivalenties gelden leek dit op de voor de hand liggende manier te kunnen door te zeggen $\forall x(\phi(x) \rightarrow T(x))$ (InfC). Het blijft echter de vraag wat het betekent voor InfC om een oneindige conjunctie uit te drukken. We hebben twee antwoorden op de vraag overwogen: de equivalentie benadering en de eindige axiomatisering benadering. Volgens de equivalentie benadering zouden InfC en de oneindige conjunctie van alle A's waarvoor $\phi(\ulcorner A \urcorner)$ bewijsbaar is op een bepaalde manier equivalent moeten zijn. Volgens de eindige axiomatisering benadering zouden InfC en de oneindige conjunctie dezelfde zinnen moet impliceren met beperking tot zinnen die het waarheidspredikaat niet bevatten. We hebben in deze scriptie argumenten gegeven waarom de eerste benadering niet kan kloppen, maar voor de tweede benadering hebben we een bewijs gegeven waarom die wel klopt, mits we ons beperken tot het getypeerde geval. Vervolgens hebben we een verscherping van dit argument gegeven, waaruit we concluderen dat de getypeerde T-equivalenties niet nodig zijn als waarheidstheorie, maar alleen T-uit ook voldoende is voor de eindige axiomatisering benadering.

In het laatste hoofdstuk hebben we onderzocht of we dezelfde conclusies kunnen trekken over de equivalentie benadering en de eindige axiomatisering in het type-vrije geval. We hebben twee verzamelingen van zinnen als mogelijke vervanging voor verzameling met alleen de zinnen zonder het waarheidspredikaat beschouwd: de verzameling van alle T-positieve zinnen en de verzameling van alle T-positieve zinnen waar geen kwantor in voorkomt. We concluderen dat de equivalentie benadering in deze gevallen ook niet klopt en dat de eindige axiomatisering alleen werkt wanneer we de verzameling T-positieve zinnen zonder kwantor beschouwen. Daarnaast blijkt dat we in dit geval de T-equivalenties nodig hebben en alleen T-uit niet voldoende is.

We hebben niet onderzocht wat de gevolgen zijn van het feit dat T-uit alleen voldoende is als waarheidstheorie om de eindige axiomatisering benadering te laten kloppen. Het is niet duidelijk in hoeverre we het getypeerde geval kunnen uitbreiden wanneer we T-uit als waarheidstheorie nemen en dit zou een mogelijke vraag kunnen zijn voor verdere studie van het onderwerp.

Referenties

[1] J. van Oosten, *Gödel's Incompleteness Theorems*, lecture notes, 2015.

[2] I.Moerdijk, J. van Oosten. *Sets, Models and Proofs*, Springer Undergraduate Mathematics Series, 2018.

[3] T.Franzén. *Gödel's theorem, An incomplete guide to its use and abuse*, A K Peters, Wellesley, 2005.

[4] L. Picollo, T. Schindler, Disquotation and Infinite Conjunctions, *Erkenntnis*,**5**, Vol. 83 (2017),899-928

[5] V. Halbach. *Axiomatic theories of thruth*, Camebridge University Press, New York, 2011.

[6] V.Halbach, Disquotationalism and Infinite Conjunctions, *Mind*,**5**,vol. 108, no. 429 (1999),1-22

[7] A. Ehrenfeucht, S. Feferman, Representability of recursively enumerable sets in formal theories, *Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung*,**1-2**,Vol. 5 (1959) ,37-41

[8] Raatikainen, Panu, *Gödel's Incompleteness Theorems*, The Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2018, beschikbaar via `https://plato.stanford.edu/archives/fall2018/entries/goedel-incompleteness/`.

[9] D. Stoljar, N. Damnjanovic, *The Deflationary Theory of Truth*, The Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2014, beschikbaar via `https://plato.stanford.edu/archives/fall2014/entries/truth-deflationary/`.

[10] H. Veenstra, V. van Oostrom, A. Visser, J. Mulder, *Parvulae Logicales: Propositielogica*, 1991.

[11] F.P. Ramsey, Facts and Propositions, *Proceedings of the Aristotelian Society*,**7** (1927) ,153-170.

[12] G. Frege, *Logical Investigations*, Blackwell, Oxford, 1977.

[13] A. Gupta, A critique of deflationism, *Philosophical Topics*, **21** (1993), 57–81.

[14] J. Bell, *Infinitary Logic*, The Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2016, beschikbaar via `https://plato.stanford.edu/archives/win2016/entries/logic-infinitary/`.

[15] C. Karp, *Languages with Expressions of Infinite Length*, North-Holland, Amsterdam, 1964.

[16] V. Detlovs, K. Podnieks. *Introduction to mathematical logic*, Riga, 2012.

[17] D. van Dalen. *Logic and structures*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1980.

[18] H.B. Enderton. *A Mathematical Introduction to Logic*, Harcourt/Academic press, Burlington, 1972.

[19] P. Hájek, P. Pudlák., *Metamathematics of First-Order Arithmetic*, Cambridge University Press, Cambridge, 2017.