

Langmuir-circulatie door windspanning en aardrotatie

C. Huiszoon

June 18, 2019



Figure 1: Langmuir-circulatie op het Marsdiep.

Contents

1	Inleiding	2
2	Vloeistofmechanisch systeem	4
2.1	Het systeem	4
3	Stabiliteit van de homogene Ekman-laag	6
3.1	Afdoende voorwaarde voor stabiliteit	6
3.2	Verstoringsen voor $\Omega_z = 0$, symmetrisch in windrichting	6
3.3	Schatting van R_a	8
4	Enkele opmerkingen omtrent dynamische eigenschappen van vloeistofmechanische systemen	9
4.1	Algemene opmerkingen	9
4.2	Spectrale Galerkin-methodes à la Lorenz 1963	9
5	Conclusie	11

1 Inleiding

Op de foto van het titelblad is convergerend sop in parallelle lijnen op het wateroppervlak te zien. Dit is het gevolg van een stroom die Langmuir-circulatie wordt genoemd. De stroom bestaat uit meerdere evenwijdige 'stroomrollen' parallel aan het wateroppervlak, zodanig dat een rol de tegengestelde rotatierichting heeft van zijn burens. Deze worden waargenomen boven een windsnelheid boven $3.0m/s$. De afstand tussen twee buurrollen en hun diepte is ongeveer gelijk, en in afwezigheid van forse gelaagdheid (zoals in de oceaan) ook gelijk aan de diepte van het water zelf. Deze afstand varieert van 1 tot $200m$. [1]

De meest aangehaalde oorzaak hiervoor is de combinatie van windspanning en zwaartekrachtsgolven aan het wateroppervlak. De wiskundige implementatie hiervan komt van Craig en Lebovich (1979) en behelst dat een Langrangiaans gemiddelde stroom door de golven zich in de Navier-Stokes-vergelijkingen manifesteert door een extra term, de Stokes-drift.[2] Ze hebben vervolgens getoond dat onder invloed van wind en Stokes-drift stroomrollen kunnen ontstaan vergelijkbaar met Langmuir-circulatie. In 1982 werd deze theorie bevestigd door experimentele waarnemingen van Faller & Cartwright[3] met wind en golven in een waterreservoir. Recentelijker zijn de Craig-Lebovich-vergelijkingen en hun adequate voorspelling van Langmuir-circulatie ook bevestigd met *large eddy simulation*. [6]

Echter, zoals Faller in hetzelfde artikel opmerkte, zijn de beschrijvingen van de Langmuir-cellen in die zin algemeen, dat andere onafhankelijke mechanismes ze ook tot stand zouden kunnen brengen. Degene die met name behandeld zal worden, is de combinatie van homogene wind en aardrotatie. Het is bekend [7] dat onder deze omstandigheden zich in het water een bepaalde stroom genaamd Ekman-laag kan voordoen¹. De motivatie van dit werk is dan ook de mogelijkheid dat instabiliteit van deze stroom zou leiden tot Langmuir-circulatie. Er moet hierbij vermeld worden dat de instabiliteit van de Ekman-laag reeds tot op zekere hoogte is onderzocht in de jaren zestig.[5][4] Echter, deze onderzoeken hebben telkens drie tekortkomingen voor een voorspelling van Langmuir-circulatie door windspanning. Ze beschouwen enkel rotatie die loodrecht staat op de randen van het beschouwde domein. Er zal worden aangetoond dat de rotatiecomponent hier evenwijdig aan de randen wel degelijk van invloed is. Ten tweede, er worden randvoorwaarden gebruikt die niet toepasbaar zijn op windspanning. Ten derde, de uitwerkingen zijn niet compleet genoeg door het uitgaan van halfoneindigheid in de verticale richting van het domein.

Als toevoeging op het reeds gegeven argument is er meer om een alternatieve oorzaak te zoeken. Een foto (2) van het IJsselmeer toont dit: aan het oppervlak zijn lijnen van convergerend sop te zien die de aanwezigheid van Langmuir-circulatie verraden. Echter, op deze foto is dit zichtbaar in aan- maar ook in afwezigheid van zichtbare golven loodrecht op de lijnen, in tegenstelling tot de Craig-Lebovich-theorie.

Dit verslag is als volgt opgebouwd: in het eerste hoofdstuk beschrijven we het vloeistofmechanisch systeem van de Ekman-laag met bijzondere nadruk op de totstandkoming van de randvoorwaarden (die in zijn eigen artikel wellicht wat onderbedeeld zijn). Vervolgens wordt de stabiliteit van de stationaire Ekman-laag besproken, en in het bijzonder voor het geval dat het systeem zich op de evenaar bevindt en ten opzichte van verstoringen symmetrisch in de windrichting, waarvoor ook numerieke gegevens voor de kritische waarde van de stabiliteitsparameter voor handen is. Het laatste hoofdstuk heeft een supplementair karakter, en poogt de natuurkundige validiteit voor het bekende Lorenz-systeem in algemeen kader te bespreken.

¹Met Ekman-laag wordt hier de klassieke Ekman-laag bedoeld uit 1905 [7]. (Niet de homogene rotatie zonder bijkomende windspanning)



Figure 2: Langmuircellen op het IJsselmeer. In aan- en afwezigheid van zichtbare golven.

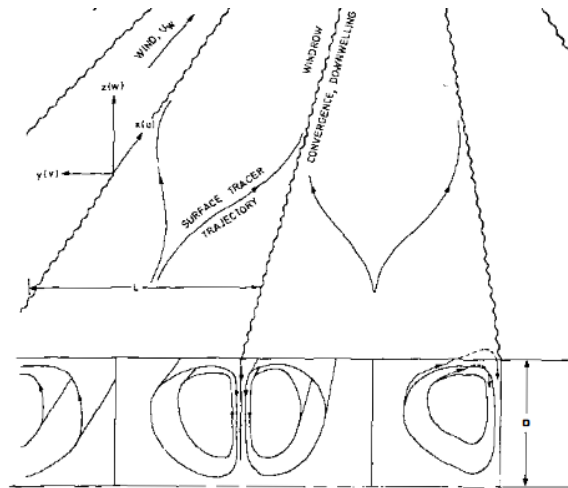


Figure 3: Schematische weergave Langmuir-circulatiecellen uit [1].

2 Vloeistofmechanisch systeem

In dit hoofdstuk wordt het systeem uitgelegd waarin de (constante) Ekman-laag plaatsvindt. Vervolgens wordt de bekende stationaire oplossing (Ekman 1905 [7]) hiervoor expliciet afgeleid.

2.1 Het systeem

Volgens de hypothese ontstaat Langmuir-circulatie onder invloed van een homogene oppervlaktewind en aardrotatie. Onder enkele voorwaarden zijn beide te isoleren van andere factoren. Stel dus dat in een bepaald domein vanaf een bepaald moment de rotatie en de (homogene) wind de stroom domineren, dat wil zeggen: in dit domein is het effect van andere factoren kleiner naar mate een langere tijd en naar mate de afstand tot de randen van het domein groter zijn. Als het domein en de verstreken tijd dan groot genoeg zijn, kunnen in een deel van het domein de andere factoren verwaarloosd worden bij de berekening van de stroom. Hoewel de wind en aardrotatie in het algemeen niet de enige dominante factoren zijn, zullen we dit aannemen. Homogeenheid van de oppervlaktewind betreft de snelheid en druk aldaar. We beperken ons tot het geval dat bodem en wateroppervlak evenwijdige vlakken zijn, dus - zeg - respectievelijk $z = 0$ en $z = H$.

Op de bodem zijn er de logische randvoorwaardes $\mathbf{u} = 0$. De randvoorwaarden aan het oppervlak hangen dus af van gegeven, als constant benaderde eigenschappen van de lucht. Deze volgen uit de gebruikelijke toepassing van impuls aan het oppervlak. Echter, omdat we het systeem vanuit een roterend stelsel bekijken, verschilt de inertiaële impulsflux van de 'geroteerde', nu genoteerd als Π_{ik} . Dit toegepast op het wateroppervlak is

$$\Pi_{iz}^{water} = \Pi_{iz}^{lucht} \quad (1)$$

aangezien \hat{z} loodrecht op het oppervlak $z = H$ staat. De uitdrukking van de tensor Π_{ik} verschilt van de inertiaële impulsfluxtensor door de uniforme rotatie Ω van het referentiestelsel om een punt op de rotatieas van de aarde. In dit stelsel krijgen we voor Π_{iz} de uitdrukking²

$$\rho v_i v_z + 2\rho v_z \epsilon_{kli} \Omega_k r_l + \delta_{iz} \frac{1}{2} \rho (\epsilon_{klm} \Omega_k r_l)^2 + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x_i} \right) + \delta_{iz} p + \rho g x_g, \quad (2)$$

waarbij r_i plaats gemeten van een punt op de rotatieas van de aarde is. Deze uitdrukking klopt, omdat $\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} = \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}$ overeenkomt met de Navier-Stokes-vergelijkingen in dit stelsel (4).

De eerste en tweede term zijn nul doordat $v_z = 0$ aan het oppervlak. Hierdoor vereenvoudigt (1) tot de voorwaarde van continuïteit voor de uitdrukking

$$\sigma'_{iz} = \delta_{iz} \frac{1}{2} \rho (\epsilon_{klm} \Omega_k r_l)^2 + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x_i} \right) + \delta_{iz} p + \rho g x_g. \quad (3)$$

De richting van de zwaartekracht is meestal normaal op het wateroppervlak, $x_g = z$. Aangezien de eigenschappen van de luchtstroom aan het oppervlak constant zijn, is de enige term van (3) die daar langs het oppervlak varieert, de middelpuntvliedende term. Vergeleken echter met de variatie door gz loodrecht op het oppervlak, is dit zeer klein, zodat (3) constant is op een oppervlak waarvoor $z \simeq H$.

De Navier-Stokes-vergelijkingen in een roterend stelsel zijn [8]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u = \nu \Delta u + 2u \times \Omega + \nabla \left(-\frac{p}{\rho} - gz + 1/2(\Omega \times r)^2 \right) \quad (4)$$

$$\text{div } u = 0$$

²We nemen altijd aan dat de lucht- en waterdichtheid constant zijn.

Er bestaat voor het omschreven systeem een oplossing waarbij het wateroppervlak gegeven wordt door $z = H$ en de oplossing $(\mathbf{u}, p' = p - 1/2(\Omega \times r)^2)$ enkel afhangt van z en $w = 0$. Nu kiezen we y zodat $\sigma'_{yz} = 0$ op $z = H$ ($\sigma'_{iz} \simeq$ constant op $z = H$). Uit (4) volgt dan

$$\begin{aligned} 0 &= 2\Omega_z v + \nu \frac{d^2 u}{dz^2} \\ 0 &= \nu \frac{d^2 v}{dz^2} - 2\Omega_z u \\ 0 &= u\Omega_y - v\Omega_x - \frac{1}{\rho} \left(\frac{dp'}{dz} + \rho g \right) \end{aligned} \quad (5)$$

en uit continuïteit van (3) en randvoorwaarden op de bodem

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\sigma_{zx}}{\mu^{(w)}} \quad \text{op } z = H \\ \mathbf{u} &= 0 \quad \text{op } z = 0 \\ \sigma'_{zz} &= \text{constant} \quad \text{op } z = H, \end{aligned} \quad (6)$$

waarbij σ_{zx} de gegeven (constante) schuifspanning door de wind, en $\mu^{(w)}$ de dynamische viscositeit van het water. Doordat (\mathbf{u}, p') enkel een functie is van z , kan altijd aan $\sigma'_{zz} =$ constant op $z = H$ worden voldaan door de passende constante bij $p'(z)$ op te tellen, en dus komt σ'_{zz} niet expliciet in de oplossing $\mathbf{u}(z)$ voor.³

Met de substitutie van $\mathbf{u}_k(z) = \mathbf{u}_k e^{\lambda_k z}$ in de x - en y -componenten van (5) vinden we een homogeen lineair stelsel van vergelijkingen. Hieraan wordt voldaan indien de determinant van de matrix

$$\begin{bmatrix} \nu \lambda_k^2 & 2\Omega_z \\ 2\Omega_z & -\nu \lambda_k^2 \end{bmatrix}$$

gelijk is aan nul en (\mathbf{u}_k) de bijbehorende eigenvectoren zijn. Dit levert $\lambda_k = \sqrt{\frac{2|\Omega_z|}{\nu}} e^{i\pi/4 + \pi i k/2}$, en voor de eigenvectoren $\mathbf{u}_k = (e^{\pi i/2 + \pi i k}, 1)$ en $k \in \{-1, 0, 1, 2\}$. Aldus is de algemene reële oplossing met $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$$u(z) = e^{\frac{z}{\delta}} \left(b \sin\left(\frac{z}{\delta}\right) - a \cos\left(\frac{z}{\delta}\right) \right) + e^{-\frac{z}{\delta}} \left(c \cos\left(\frac{z}{\delta}\right) - d \sin\left(\frac{z}{\delta}\right) \right) \quad (7)$$

$$v(z) = -e^{\frac{z}{\delta}} \left(a \sin\left(\frac{z}{\delta}\right) + b \cos\left(\frac{z}{\delta}\right) \right) - e^{-\frac{z}{\delta}} \left(c \sin\left(\frac{z}{\delta}\right) + d \cos\left(\frac{z}{\delta}\right) \right) \quad (8)$$

met $\delta = \sqrt{\frac{\nu}{|\Omega_z|}}$, en onder de gegeven randvoorwaarden

$$u(z) = A \sinh(z/\delta) \cos(z/\delta) - B \cosh(z/\delta) \sin(z/\delta) \quad (9)$$

$$v(z) = A \sinh(z/\delta) \cos(z/\delta) + B \cosh(z/\delta) \sin(z/\delta) \quad (10)$$

$$A = \frac{\sigma_{zx} \delta \cosh(H/\delta) \cos(H/\delta) + \sinh(H/\delta) \sin(H/\delta)}{\mu^{(w)} \cosh(2H/\delta) + \cos(2H/\delta)} \quad (11)$$

$$B = \frac{\sigma_{zx} \delta \cosh(H/\delta) \cos(H/\delta) - \sinh(H/\delta) \sin(H/\delta)}{\mu^{(w)} \cosh(2H/\delta) + \cos(2H/\delta)} \quad (12)$$

We zullen op de eigenschappen van deze oplossing, zoals besproken door Ekman, verder niet te veel ingaan, gezien de algemene bekend hiervan.

³Ekman zelf negeert de noodzaak van de continuïteit op σ'_{zz} , maar gezien σ'_{zz} niet expliciet in $u(z)$ voorkomt, maakt dit de conclusies omtrent deze oplossing niet minder valide.

3 Stabiliteit van de homogene Ekman-laag

Eerst wordt een noodzakelijke voorwaarde gegeven voor stabiliteit van de Ekman-laag. Verder tonen we de grote overeenkomst aan tussen de Ekman-laag voor $\Omega_z = 0$ met Rayleigh-Bénard-convectie voor verstoringen symmetrische in richting van de windspanning. Hierdoor kunnen we voor dit geval uitspraak doen over de stabiliteit van de Ekman-laag met behulp van de beschikbare gegevens van het convectiemodel uit de literatuur. De vraag omtrent de afdoende voorwaarde voor instabiliteit voor de stroom van $\Omega_z \neq 0$ blijft open.

3.1 Afdoende voorwaarde voor stabiliteit

Stel de Ekman-laag heeft de toestand bereikt die wordt beschreven door (5). Vervolgens beweegt een vloeistofelement adiabatisch over een infinitesimale afstand (alsof het niet gehinderd wordt door visceuze krachten) van z naar $z + dz$; het behoudt daarom zijn impuls, en zo zijn snelheid. Het ondervindt dan een Coriolis-kracht door zijn eigen snelheid, en een kracht door de drukgradiënt aldaar, namelijk

$$\begin{aligned} F &= -\frac{dp'}{dz}(z + dz) - \rho g + \rho(u(z)\Omega_y - v(z)\Omega_z) \\ &= \rho(-u(z + dz)\Omega_y + v(z + dz)\Omega_x + u(z)\Omega_y - v(z)\Omega_z) \\ &= \rho\left(-\frac{du}{dz}\Omega_y + \frac{dv}{dz}\Omega_x\right)dz \end{aligned}$$

Dus als

$$-\frac{du}{dz}\Omega_y + \frac{dv}{dz}\Omega_x < 0 \quad (13)$$

zorgt de druk ervoor dat hij terug naar zijn oorspronkelijke plaats wordt gedreven, en is de Ekman-laag stabiel tegen dergelijke bewegingen. In de realiteit spelen de visceuze krachten wel degelijk een rol en hebben een stabiliserende werking. Hierdoor is (13) een afdoende voorwaarde voor stabiliteit.

3.2 Verstoringen voor $\Omega_z = 0$, symmetrisch in windrichting

Voor het geval $\Omega_z = 0$ (van toepassing rond de evenaar) is er een veel sterkere stabiliteitsvoorwaarde voor handen dan (13) voor verstoringen symmetrisch in de richting van de windspanning (x -richting). Dit laat de introductie van een stroomfunctie ψ toe, waarvoor $v = \frac{\partial\psi}{\partial z}$, $w = -\frac{\partial\psi}{\partial y}$. De vergelijkingen zijn

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi + \frac{\partial(\Delta\psi, \psi)}{\partial(y, z)} &= \nu\Delta\Delta\psi - 2(\Omega grad)u \\ \frac{\partial}{\partial t}u + \frac{\partial(u, \psi)}{\partial(y, z)} &= \nu\Delta u + 2(\Omega grad)\psi \end{aligned} \quad (14)$$

Er zal nu worden aangetoond dat voor kleine van dergelijke verstoringen de randvoorwaarden

$$\begin{aligned} z = H : \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} &= 0 \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial u'}{\partial z} = 0 \\ z = 0 : \quad \frac{\partial\psi}{\partial z} &= 0 \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0 \quad u' = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

gelden. De totale stroom en het wateroppervlak $z = \zeta(y, z)$ moeten in het algemeen natuurlijk zodanig zijn dat de continuïteit van $\sigma'_{i\zeta}$ (3) op het oppervlak en de homogene Dirichlet-randvoorwaarden op de bodem $z = 0$ weer gewaarborgd zijn (vergelijk (6)). Bij kleine verstoringen is de variatie in de y -richting van σ'_{zz} door variatie van de druk en $\frac{\partial w}{\partial z}$ klein vergeleken met zijn z -variatie door toedoen van de term gz . Voor deze verstoringen is σ'_{zz} dus een functie van z alleen. Voor dezelfde gegeven homogene eigenschappen van de wind aan het oppervlak (als in (6)) kan er dus altijd aan de continuïteitsvoorwaarde op $z = H$ van σ'_{zz} worden voldaan. Gegeven dus $z = H$ voor wateroppervlak volgen de randvoorwaarden (15) als homogene variant van (6).

Indien $\Omega_z = 0$ (op de evenaar) is er de stationaire oplossing $\psi = 0$ en $u = \frac{\sigma_{zx}}{\mu^{(w)}}z$. Voor de afwijking van dit stationaire profiel (ψ, u') geldt⁴

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi + \frac{\partial(\Delta\psi, \psi)}{\partial(y, z)} &= \nu\Delta\Delta\psi - 2\Omega_y \frac{\partial u'}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial t}u' + \frac{\partial(u', \psi)}{\partial(y, z)} &= \nu\Delta u' + (2\Omega_y + \frac{\sigma_{zx}}{\mu^{(w)}})\frac{\partial\psi}{\partial y}.\end{aligned}\tag{16}$$

Met de substitutie

$$\psi \rightarrow \nu\psi \quad u' \rightarrow \frac{-\nu^2}{2H^3\Omega_y}u' \quad \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}H \quad t \rightarrow tH^2/\nu\tag{17}$$

krijgt men een dimensieloze vorm van (16)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi + \frac{\partial(\Delta\psi, \psi)}{\partial(y, z)} &= \Delta\Delta\psi + \frac{\partial u'}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial t}u' + \frac{\partial(u', \psi)}{\partial(y, z)} &= \Delta u' + R_a \frac{\partial\psi}{\partial y}\end{aligned}\tag{18}$$

met

$$R_a = -2\Omega_y(2\Omega_y + \frac{\sigma_{zx}}{\mu^{(w)}})H^4\nu^{-2}.\tag{19}$$

Dit leggen we naast de vergelijkingen voor de tweedimensionale verstoring van het bewegingsloze evenwicht in het Rayleigh-Bénard-systeem (onder de Oberbeck-Boussinesque-benadering, tussen twee horizontale vlakken). Zij de verstoring in de temperatuur T' en in de stroomfunctie ψ , dan voldoen deze aan

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi + \frac{\partial(\Delta\psi, \psi)}{\partial(y, z)} &= Pr\Delta\Delta\psi + Pr\frac{\partial T'}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial t}T' + \frac{\partial(T', \psi)}{\partial(y, z)} &= \Delta T' + R_a \frac{\partial\psi}{\partial y}.\end{aligned}\tag{20}$$

Dit vergelijkend met (16), zien we dat de verstoring van de stroomfunctie en de x -snelheid in de Ekman-laag aan dezelfde vergelijkingen voldoen als de verstoring van de stroomfunctie en de temperatuur in het convectiemodel bij $Pr = 1$ en $R_a = -2\Omega_y(2\Omega_y + \frac{\sigma_{zx}}{\mu^{(w)}})H^4\nu^{-2}$. De parameter ruimte is dus beperkter: het Prandtl-getal neemt slechts een enkele waarde aan, maar het Rayleigh heeft hetzelfde bereik: de reële getallen.

Door deze opmerkelijke overeenkomstigheid kan men gemaakte conclusies omtrent de stabiliteit van dit model overhevelen naar de Ekman-laag. Ten eerste, het Rayleigh-getal is het enige

⁴ Ω_y is dan de aardrotatie vermenigvuldigd met de cosinus van de hoek tussen x -richting en de richting van het westen.

getal dat de stabiliteit van het evenwicht beïnvloed. Ten tweede, de kritieke waarde van het Rayleigh-getal R_a^c (waarboven het evenwicht zijn stabiliteit verliest) voor de lineaire stabiliteit valt altijd samen met dat voor de globale stabiliteit. Ten derde, bij $R_a > R_a^c$ ontstaan stationaire rolstromingen [9]. Ten slotte, voor de minder gebruikelijke randvoorwaarden (15) is er door Gelfgat [10] een numerieke berekening uitgevoerd. Zijn resultaat was

$$R_a^c = 669. \quad (21)$$

3.3 Schatting van R_a

In turbulente stromen hebben de fluctuaties van de gemiddelde stroom vanzelfsprekend invloed op de gemiddelde stroom zelf. Het resultaat tot dusverre kan alsnog toegepast worden op dergelijke stromen met het gebruik van een turbulente viscositeit ν_T als statistische benadering van deze invloed. De waarde van ν_T die nu zal worden gebruikt om R_a te berekenen is wat arbitrair, aangezien die afhangt van de mate van turbulentie. Stel dan $\nu_T = 0.001m^2/s$. Verder gebruiken we een empirisch verband voor de windspanning[11]

$$\sigma_{zx} = C\rho^{(lucht)}v^2 \quad \text{met } C = 0.001, \quad (22)$$

en verder uitgaand van de waardes $v = 3.0m/s$, $\rho^{(lucht)} = 1kg/m^3$, $H = 5m$, diepte van IJsselmeer, $\rho^{(water)} = 1000kg/m^3$ (voor $\mu = \rho\nu$). Verder nemen we de windspanning- en symmetrierichting in oostelijke richting, zodat $\Omega_y = -7.3 \times 10^{-5}s^{-1}$. Dit geeft dan

$$R_a = 805, \quad (23)$$

zodat er instabiliteit is. Het is belangrijk op te merken dat R_a groter zou zijn bij een turbulente viscositeit dichter bij de moleculaire. Bij de moleculaire waarde $\nu = 10^{-6}m^2/s$ zou dit getal R_a grofweg een miljard keer zo groot zijn. Bij zulke moleculaire viscositeit overschrijdt R_a zijn kritische (bij verdere dezelfde toestand) reeds bij een diepte van $3cm$. Het zou dus in principe mogelijk moeten zijn op kleine schaal circulatie op te wekken.

4 Enkele opmerkingen omtrent dynamische eigenschappen van vloeistofmechanische systemen

Dit hoofdstuk heeft een supplementair en algemeen beschrijvend karakter, in plaats van onderzoekend. De inhoud van het eerste deel wordt het best omschreven door de titel van dit hoofdstuk. Tegelijkertijd schetst het een algemeen kader voor het tweede deel van dit hoofdstuk waarin commentaar gegeven wordt op de fysische betekenis van het stelsel gewone differentiaalvergelijkingen zoals in het bekende artikel van Lorenz in 1963 [15]. Dit enerzijds omwille van de bekendheid hiervan, anderzijds als antwoord op de - naar het idee van de auteur - overschatte fysische betekenis die het model in de specifieke vloeistofmechanische context wordt toegeschreven.

4.1 Algemene opmerkingen

Wanneer de (in)stabiliteitsvoorwaarde van een laminaire stroom bepaald is, zou het natuurlijk kunnen zijn om de dynamische eigenschappen van de stroom te kunnen onderzoeken bij instabiliteit van de laminaire stroom. Een deel van het onderzoek hieromtrent heeft als uitgangspunt gehad dat ook bij turbulentie in de faseruimte van de stroom een stabiele invariante variëteit van eindige dimensie zou bestaan, en dat hierop de stroomtoestand ieder moment met een eindig aantal parameters volledig kan worden beschreven. In andere woorden, het langetermijngedrag van het systeem zou worden beschreven door een gewoon stelsel van differentiaalvergelijkingen. Een gebruikt argument hiervoor is dat snelheidsfluctuaties op kleinere schalen snel worden gedempt door de viscositeit, en dat ze zo klein zouden zijn dat daarom hun invloed op de dynamische eigenschappen verwaarloosbaar zouden zijn. Op die manier zouden de genoemde eindige parameters van het systeem de grootte van fluctuaties op grotere schaal zijn. Voor de Hausdorff-dimensie van zo'n stabiele invariante variëteit bestaat (bij afwezigheid van ontwikkeling van singulariteiten in de stroom) voor de Navier-Stokes-vergelijking de schatting afhankelijk van het Reynoldsgetal $\sim R^{9/4}$ [14]. Aangezien het Reynoldsgetal bij instabiliteit reeds van orde 100 of 1000 is en de specifieke parameters te vinden waarmee de gehele invariante variëteit kan worden 'bereikt' op zijn minst lastig is, is dit zowel analytisch als numeriek niet praktisch. Men zou kunnen zeggen dat huidige numerieke methoden voor vloeistofmechanische systemen deels de vrijheidsgraden van de invariante stabiele variëteit zo goed als mogelijk in hun aanpak proberen te vatten, en anderdeels de turbulentie op (te) kleine schaal statistisch.

4.2 Spectrale Galerkin-methodes à la Lorenz 1963

Met spectrale Galerkin-methodes à la Lorenz 1963 worden stelsels van gewone differentiaalvergelijkingen bedoeld verkregen door een spectrale Galerkin-methode voor de discretisatie van de ruimte. Concreet is dit het expanderen van de onbekende functies in de vorm

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \psi_0(\mathbf{x}) + \sum_{n=1}^m \psi_n(t) \Psi_n(\mathbf{x}), \quad (24)$$

waarbij Ψ_n compleet zijn in het ruimtelijke vloeistofmechanische domein van functies in C^∞ die aan homogene randvoorwaarden voldoen. $\psi_0(\mathbf{x})$ is een stationaire laminaire oplossing, voldoende aan inhomogene randvoorwaarden. Het is van belang dat de fluctuaties van $\Psi_n(\mathbf{x})$ op steeds kleinere schaal variëren voor een grotere n . Dit maakt in het perspectief van het voorgaande het aannemelijk dat naar gelang m groter is, een betere benadering van de stabiele invariante

variëteit met de functies $\Psi_n(\mathbf{x})$ waarvoor $n \leq m$ mogelijk wordt.

De functies $\psi_n(t)$ moeten vervolgens voldoen aan een gewoon stelsel van differentiaalvergelijkingen, dat volgt uit de Galerkin-procedure toegepast op het partiële stelsel differentiaalvergelijkingen die de exacte vloeistofstroom van het systeem beschrijven met toetsfuncties (24). In de exacte vergelijkingen (bij Lorenz dus de Navier-Stokes-vergelijkingen met Boussinesq-benadering) komen de onbekende functies dan lineair of kwadratische voor, en komen de tijdafgeleides ervan enkel lineair voor. De Galerkin geeft dus differentiaalvergelijkingen van de vorm

$$\dot{\psi}_n = \langle \Psi_n | (\psi)_k \rangle \psi_k + \langle \Psi_n | (\psi\psi)_{kl} \rangle \psi_k \psi_l, \quad (25)$$

waarbij $\langle \dots \rangle$ functionaalproducten over het ruimtelijke domein van het vloeistofmechanisch systeem, en de functies (ψ) en $(\psi\psi)$ staan voor functies die direct resulteren uit de gebruikelijke Galerkin-methode. Lorenz zelf gebruikte voor de functies Ψ_n trigonometrische functies, twee golfgetallen voor de temperatuur en één voor de stroomfunctie.

Om een idee te geven van de accuraatheid en convergentie van een dergelijk stelsel gewone differentiaalvergelijkingen van zo'n methode, presenteren we een bekend resultaat voor een dergelijke methode voor de gewone Navier-Stokes-vergelijkingen met homogene Dirichlet-randvoorwaarden. Hierbij worden de Ψ_n gegeven door eigenfuncties met de m kleinste eigenwaardes λ_n van de Stokes-operator $-P\Delta$ met P de projectie-operator op de divergentieloze functies. De galerkin-methode geeft hier dus weer een stelsel gewone differentiaalvergelijkingen met de vorm (25). De oplossingen van dit stelsel gewone differentiaalvergelijkingen ψ_m bij m eigenfuncties hebben hiervoor een maximale afwijking van de exacte oplossing ψ gegeven door [16]

$$|\psi(t) - \psi_m(t)| \leq ce^{ct} \lambda_{m+1}^{-2}, \quad (26)$$

waarbij c een constante is die afhangt van de begintoestand, het Reynoldsgetal en het domein. Bovendien blijft de L2-norm van de benaderde oplossing voor iedere tijd t begrensd. De maximale fout wordt dus exponentieel groter met de tijd.

In een artikel Moon et al. [17] werd een onderzoek beschreven naar de convergentie van het langetermijngedrag van de dynamische eigenschappen van hogere orde Lorenz-systemen (tot en met orde 11) die in benadering die van de tweedimensionale Rayleigh-Bénard-systeem zouden moeten beschrijven. Er werd onder anderen gekeken met numerieke integratie naar een maat voor periodiciteit van de oplossing na een lange tijd voor een bepaald parameterdomein. De verschillende gedragingen werden weergegeven in een bifurcatiediagram als vlakken. Er zal hier niet worden ingegaan op details, maar het was duidelijk dat geen van de diagrammen op de gegeven schaal diffeomorf was met een van een andere orde. Ook vonden ze bijvoorbeeld dat het chaotische regime bij orde drie en vijf een veel groter gedeelte van de parameter ruimte besloeg dan bij hogere onderzochte orden.

5 Conclusie

Hoewel er aangetoond is dat een overgang van een laminair regime naar Langmuir-circulatie reeds op laboratoriumschaal en met een zachte bries kan worden bewerkstelligd, laat dit resultaat zich niet zomaar vertalen naar de schaal van een meer of een zee, aangezien hiervoor een twijfelachtige benadering met een homogene turbulente viscositeit werd vereist. Voor een betrouwbaarder resultaat voor deze gevallen zou een betere statistische benadering van turbulentie dus wenselijk zijn.

Anderzijds ligt het nu voor de hand het gebrek aan inzicht wat betreft de stabiliteit van de algemene laminaire Ekman-laag ten opzichte van algemenere tweedimensionale verstoringen te onderzoeken voor de gebruikte randvoorwaarden die een bodem en een water-luchtscheiding adequaat modelleren. Dat wil zeggen: een arbitraire rotatierichting en arbitraire symmetriërichting van de verstoringen.

Ten slotte, het zou de wetenschappelijke literatuur dienen indien er de convergentie van Lorenzachtige modellen onderzocht zou zijn, en hiervoor een foutmarge zoals (26) zou een mooie volgende stap zijn.

References

- [1] Leibovich, 1983. The Form and Dynamics of Langmuir circulations
- [2] Leibovich, 1979. On wave-current interaction theories of Langmuir circulations
- [3] Faller & Cartwright, 1982. Laboratory Studies of Langmuir Circulations
- [4] Douglas K. Lilly, 1966. On the Instability of Ekman Boundary Flow
- [5] Alan J. Faller & Robert E. Kaylor, 1966. A Numerical Study of the Instability of the Laminar Ekman Boundary Layer
- [6] Peng Wang T. M. Özgökmen, 2017. Langmuir Circulation With Explicit Surface Waves From Moving-Mesh Modeling
- [7] Ekman, 1905. On the influence of the Earth's rotation on ocean currents. Arch. Math. Astron. Phys., 2, 1-52
- [8] ML Combrinck, LN Dala, 2014. Eulerian Derivations of Non-inertial Navier-Stokes Equations
- [9] D. Joseph, 1976. Stability of Fluid Motions II, Springer Texts in Natural Philosophy
- [10] Alexander Yu. Gelfgat, Different Modes of Rayleigh–Bénard Instability in Two- and Three-Dimensional Rectangular Enclosures, Journal of Computational Physics, Volume 156, Issue 2, 1999
- [11] G. Neumann, 1954 Wind Stress on Water Surfaces
- [12] Drazin & Reid, Hydrodynamic Stability. 1981
- [13] Lars Bengtsson, Conclusions about turbulent exchange coefficients from model studies
- [14] Peter Constantin, Ciprian Foias, Roger Temam, 1985. Attractors Representing Turbulent Flows, Deel 1

- [15] Lorenz, 1963. Non-periodic Deterministic Flow
- [16] Yinnian He ,Yanren Hou, 2011. Galerkin and sub space decomposition methods inspace and time for the Navier–Stokes equations
- [17] Moon et al., 2017. Periodicity and Chaos of High-Order Lorenz Systems