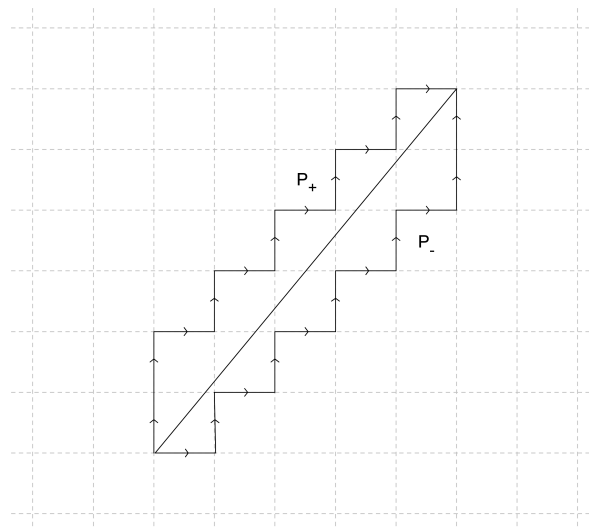


# De slecht benaderbare getallen van het Hurwitz spectrum

Gijs Langenkamp



Master Thesis

Scriptiebegeleider: prof.dr. F. Beukers

augustus 2009

Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht

# Voorwoord

Voor de masteropleiding Mathematical Sciences heb ik een Master Thesis geschreven en het resultaat is datgene wat voor u ligt. Het onderwerp van deze scriptie valt in de categorie getaltheorie. In deze tak van de wiskunde ben ik mij steeds meer gaan interesseren. Ik wilde daarom voor mijn scriptie een getaltheoretisch onderwerp, alleen ik wist niet wat een goed onderwerp zou zijn. Daarom heb ik prof. dr. F. Beukers gevraagd of hij een leuk en interessant onderwerp wist voor een Master Thesis en dat wist hij!

Ik ben prof. dr. F. Beukers dankbaar voor het leuke en interessante onderwerp dat hij mij heeft gegeven. Ook ben ik hem dankbaar voor de begeleiding die hij mij hierbij heeft gegeven. Daarnaast gaat mijn dank uit naar de tweede lezer, dr. K. Dajani, voor de feedback die zij mij heeft gegeven.

Gijs Langenkamp  
Augustus 2009

# Inhoudsopgave

<b>1</b>	<b>Inleiding</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Kettingbreuken</b>	<b>5</b>
2.1	Eindige kettingbreuken . . . . .	5
2.2	Oneindige kettingbreuken . . . . .	6
2.3	Kwadratische getallen . . . . .	11
2.4	Enkele eigenschappen van kettingbreuken . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Markoff getallen</b>	<b>17</b>
3.1	Markoff getallen . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Lagrange spectrum</b>	<b>21</b>
4.1	Lagrange spectrum . . . . .	21
4.2	Resultaten omtrent de Markoff doorsnede . . . . .	25
<b>5</b>	<b>Markoff spectrum</b>	<b>27</b>
5.1	Markoff spectrum . . . . .	27
<b>6</b>	<b>Hurwitz spectrum</b>	<b>29</b>
6.1	Hurwitz spectrum . . . . .	29
6.2	De gemiste $S$ -rij . . . . .	34
6.3	$R$ - en $S$ -rijen . . . . .	35
6.3.1	Eigenschappen van de $R$ -rijen . . . . .	35
6.3.2	Eigenschappen van de $S$ -rijen . . . . .	38
6.3.3	Eigenschappen van $T$ -rijen . . . . .	40
6.3.4	Nog meer eigenschappen van $R$ - en $S$ -rijen . . . . .	42
6.3.5	Bepalen van het supremum $H(\alpha)$ . . . . .	47
6.4	Bewijs van de stellingen . . . . .	49
6.4.1	Bewijs van Stelling 6.1.1 . . . . .	49
6.4.2	Bewijs van Stelling 6.1.2 . . . . .	53
6.4.3	Bewijs van Stelling 6.1.4 . . . . .	54
6.5	Bepalen van alle slecht benaderbare getallen . . . . .	55
6.5.1	Via de Markoff boom . . . . .	55
6.5.2	Via Markoff drietallen . . . . .	55
6.5.3	Via Sturm rijen . . . . .	57
<b>7</b>	<b>Conclusie</b>	<b>63</b>

# Hoofdstuk 1

## Inleiding

Het is al sinds de oudheid bekend dat  $\mathbb{R} \neq \mathbb{Q}$ , om dit aan te tonen kunnen we bijvoorbeeld laten zien dat  $\sqrt{3}$  niet te schrijven is als een breuk. Een hele andere aanpak is om te laten zien dat  $\mathbb{Q}$  een aftelbare verzameling is en  $\mathbb{R}$  niet. Met behulp van aftelbaarheid kunnen we zelfs gemakkelijk laten zien dat de set van transcendente getallen groter is (in de geest van Cantor) dan de set van algebraïsche getallen (over  $\mathbb{R}$ ), immers  $\overline{\mathbb{Q}}$  is aftelbaar.

Een hele andere methode is te laten zien dat  $\mathbb{Q}$  maat nul heeft in  $\mathbb{R}$ : bedek elk rationaal getal  $p/q \geq 0$  door het interval

$$\left[ \frac{p}{q} - \frac{\epsilon}{2^{p+q}}, \frac{p}{q} + \frac{\epsilon}{2^{p+q}} \right].$$

De totale lengte van alle intervallen is naar boven begrensd door

$$\sum_{p,q \geq 1} \frac{2\epsilon}{2^{p+q}} = 2\epsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}} = 2\epsilon.$$

Omdat  $\epsilon > 0$  zo klein mogelijk gekozen mag worden heeft  $\mathbb{Q}$  maat 0 in  $\mathbb{R}$ .

Het is echter wel zo dat  $\mathbb{Q}$  dicht ligt in  $\mathbb{R}$  en hieruit volgt dat voor willekeurig  $\alpha \in \mathbb{R}$  er voor elke  $\epsilon > 0$  oneindig veel  $p, q \in \mathbb{Z}$  zijn,  $\text{ggd}(p, q) = 1$ , zó dat

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \epsilon.$$

We kunnen dus rationale getallen wél gebruiken om irrationale getallen willekeurig dicht te benaderen.

Als we van te voren een willekeurige noemer  $q$  voor een rationale benadering van  $\alpha$  kiezen, dan is het voor de hand liggend om als teller het gehele getal dat het dichtst bij  $q\alpha$  ligt te kiezen. We krijgen dan  $|\alpha q - p| < 1/2$  en dit geeft na deling door  $q$ ,

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q}.$$

Maar dit is een vrij slechte benadering, want er zijn oneindig veel  $p, q \in \mathbb{Z}$ ,  $\text{ggd}(p, q) = 1$  zó dat

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}. \tag{1.1}$$

Met de kettingbreukontwikkeling van  $\alpha$  kunnen we zelfs gemakkelijk oneindig veel  $p, q$  vinden die aan (1.1) voldoen. Hoe dit allemaal zit gaan we in Hoofdstuk 2 uitzoeken.

De exponent in (1.1) kan niet groter worden gemaakt om de bewering nog waar te laten zijn, maar we kunnen  $1/b^2$  wel vervangen door de constante  $1/\sqrt{5}b^2$  zonder afbreuk te doen aan de bewering. We kunnen geen grotere constante dan  $\sqrt{5}$  gebruiken, anders is de bewering niet waar. Als we een bepaalde groep getallen buiten beschouwing laten, dan kunnen we de constante  $\sqrt{5}$  wél groter maken. Dit gaan we in Hoofdstuk 4 nader bekijken, waar we ook het Lagrange spectrum introduceren. Het zal dan ook duidelijk worden wat we in dit geval met een groep getallen bedoelen. Omdat we voor dat hoofdstuk en verder de definitie van Markoff getallen nodig hebben, gaan we eerst in Hoofdstuk 3 de Markoff getallen nader bekijken.

In Hoofdstuk 5 gaan we naar minima van indefinitie kwadratische vormen kijken. We zullen dan ook het Markoff spectrum introduceren, dat vrij veel op het Lagrange spectrum lijkt.

Hoofdstuk 6 is het belangrijkste hoofdstuk van deze scriptie, daar gaan we onderzoeken wat er met de constante gebeurt als we ook eindig veel oplossingen mogen hebben. In dit hoofdstuk wordt het Hurwitz spectrum geïntroduceerd en het grootste doel van deze scriptie was te achterhalen hoe het Hurwitz spectrum eruit ziet in het half open interval  $[0, 3)$ .

De wortels van deze scriptie liggen bij twee artikelen van Markoff ([Mar1] en [Mar2]).

Veel informatie dat in hoofdstuk 2 staat heb ik gehaald van [Beu] en [Roc]. Voor de Hoofdstukken 3,4 en 5 heb ik mij voornamelijk laten informeren door [Cus/Fla]. Voor Hoofdstuk 6 heb ik voornamelijk [Dic] en [Gbu] geraadpleegd.

## Hoofdstuk 2

# Kettingbreuken

### 2.1 Eindige kettingbreuken

Een eindige kettingbreuk is om het simpel te zeggen een breuk in een breuk, in een breuk, enzovoorts, waarbij de tellers van de breuken telkens een waarde van 1 hebben. Preciezer, een eindige kettingbreuk is van de vorm

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}$$

met  $a_0 \in \mathbb{Z}$  en  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ . Om ruimte te besparen en voor de overzichtelijkheid noteren we zo'n kettingbreuk als  $\langle a_0; a_1, \dots, a_n \rangle$ .

Een eindige kettingbreuk levert natuurlijk altijd een rationaal getal op. Omgekeerd geldt ook dat bij elk rationaal getal een eindige kettingbreuk hoort. Om dit in te zien gebruiken we het Euclidische algoritme.

Stel dat we bijvoorbeeld  $\frac{23}{8}$  als een kettingbreuk willen schrijven. Om dit voor elkaar te krijgen passen we het Euclidische algoritme toe op 23 en 8:

$$23 = 2 \cdot 8 + 7$$

$$8 = 1 \cdot 7 + 1$$

$$7 = 7 \cdot 1$$

Met de volgende herschrijving kunnen we gemakkelijk zien welke kettingbreuk er bij  $\frac{23}{8}$  hoort:

$$\begin{aligned} \frac{23}{8} &= 2 + \frac{7}{8} \\ \frac{8}{7} &= 1 + \frac{1}{7} \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat

$$\frac{23}{8} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{7}}$$

Dus  $\frac{23}{8} = \langle 2, 1, 7 \rangle$

Bovenstaand idee werkt ook in het algemeen als we de eindige kettingbreuk van  $\frac{a}{b}$ , met  $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$  willen bepalen:

$$\begin{aligned} a &= a_0b + r_1 & 0 \leq r_1 < b \\ b &= a_1r_1 + r_2 & 0 \leq r_2 < r_1 \\ r_1 &= a_2r_2 + r_3 & 0 \leq r_3 < r_2 \\ &\vdots \\ r_{n-1} &= a_nr_n \end{aligned}$$

Als we nu alle delingen met rest als breuken schrijven, dan krijgen we:

$$\frac{a}{b} = a_0 + \frac{r_1}{b} \tag{2.1}$$

$$\frac{b}{r_1} = a_1 + \frac{r_2}{r_1} \tag{2.2}$$

$$\frac{r_1}{r_2} = a_2 + \frac{r_3}{r_2} \tag{2.3}$$

$$\vdots \tag{2.4}$$

$$\frac{r_{n-1}}{r_n} = a_n \tag{2.5}$$

We zien met dit algoritme dat  $\frac{a}{b} = \langle a_0; a_1, \dots, a_n \rangle$ .

Voor rationale getallen kunnen we dus gemakkelijk en snel (in de zin van polynomiale tijd) de kettingbreuk bepalen.

## 2.2 Oneindige kettingbreuken

We hebben in de vorige paragraaf gekeken naar eindige kettingbreuken, maar kettingbreuken zijn vooral interessant als ze oneindig zijn. Bij oneindige kettingbreuken moeten wel irrationale getallen horen, aangezien elk rationaal te schrijven is als een eindige kettingbreuk.

Zij  $x \in \mathbb{R}$ , noteer  $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ , waarbij  $\lfloor x \rfloor$  het grootste gehele getal  $\leq x$  is.

Voor het bepalen van de kettingbreukontwikkeling van irrationale getallen kunnen we hetzelfde algoritme als in (2.5) toepassen.

Neem een irrationaal getal  $\alpha$ , we krijgen het volgende schema waarin we  $\alpha_0 = \alpha$  noteren:

$$\begin{aligned} a_0 &= \lfloor \alpha_0 \rfloor, & \alpha_1 &= 1/\{\alpha_0\} \\ a_1 &= \lfloor \alpha_1 \rfloor, & \alpha_2 &= 1/\{\alpha_1\} \\ a_2 &= \lfloor \alpha_2 \rfloor, & \alpha_3 &= 1/\{\alpha_2\} \\ &\vdots & & \\ a_n &= \lfloor \alpha_n \rfloor, & \alpha_{n+1} &= 1/\{\alpha_n\} \\ &\vdots & & \end{aligned}$$

Omdat  $\alpha$  irrationaal is, gaat dit algoritme oneindig lang door. We krijgen,

$$\alpha = \langle a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \rangle$$

met  $a_0 \in \mathbb{Z}, a_i \in \mathbb{N}$  voor alle  $i \geq 1$ . Na de  $n$ -de stap zien we dat

$$\alpha = \langle a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, \alpha_n \rangle.$$

De getallen  $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$  noemen we de wijzergetallen van de kettingbreuk genoemd. De breuk  $\frac{p_n}{q_n} = \langle a_0; a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$  noemen we de  $n$ -de convergent van de oneindige kettingbreuk.

Een interessant voorbeeld is om te bekijken wat de kettingbreukontwikkeling van het getal  $\pi$  is. Als we bovenstaand algoritme toepassen op  $\pi$  dan zien we dat

$$\pi = \langle 3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, \dots \rangle.$$

Door nu de kettingbreuk op een bepaald punt af te breken krijgen we een benadering van  $\pi$ . Als we bijvoorbeeld de vierde convergent van  $\pi$  uitrekenen dan zien we dat,

$$\langle 3; 7, 15, 1 \rangle = \frac{355}{113} \approx 3,141592920$$

De eerste vier wijzergetallen van  $\pi$  geven dus al een benadering voor  $\pi$  met een precisie van 6 cijfers. Dit kan natuurlijk toeval zijn, maar later zullen we zien dat kettingbreuken goede benaderingseigenschappen hebben en dit maakt kettingbreuken interessant.

Het uitrekenen van de  $n$ -de convergent van een irrationaal getal kunnen we natuurlijk altijd op de naïeve manier gemakkelijk uitrekenen, maar als  $n$  groot wordt, wordt dit een heel vervelend klusje. Daarom is het fijn dat convergenten aan bepaalde recursieve eigenschappen voldoen.

**Stelling 2.2.1** *Stel  $a_0 \in \mathbb{Z}$  en  $a_1, a_2, \dots \in \mathbb{N}$ . Bepaal voor  $n \geq -2$  de getallen  $p_n, q_n$  als volgt,*

$$\begin{array}{cccccccc} p_{-2} = 0, & p_{-1} = 1, & p_0 = a_0, & \dots, & p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, & \dots \\ q_{-2} = 1, & q_{-1} = 0, & q_0 = 1, & \dots, & q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}, & \dots \end{array}$$

*Er geldt nu voor elke  $n \geq 0$  en elke  $x \in \mathbb{R}$  dat*

$$\langle a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, x \rangle = \frac{x p_{n-1} + p_{n-2}}{x q_{n-1} + q_{n-2}}.$$

*Bewijs* We bewijzen de stelling met volledige inductie naar  $n$ . Voor  $n = 0$  hebben we  $\langle x \rangle = \frac{x p_{-1} + p_{-2}}{x q_{-1} + q_{-2}} = x$ , dus voor  $n = 0$  is de stelling waar. Stel nu dat de stelling waar is voor  $n \geq 0$ . Het is gemakkelijk in te zien dat

$$\langle a_0, a_1, \dots, a_n, x \rangle = \langle a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + 1/x \rangle.$$



Door dit trucje is de kettingbreuk 1 korter geworden. Het toepassen van de inductiehypothese geeft

$$\begin{aligned}
\langle a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + 1/x \rangle &= \frac{(a_n + 1/x)p_{n-1} + p_{n-2}}{(a_n + 1/x)q_{n-1} + q_{n-2}} \\
&= \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2} + p_{n-1}/x}{a_n q_{n-1} + q_{n-2} + q_{n-1}/x} \\
&= \frac{p_n + p_{n-1}/x}{q_n + q_{n-1}/x} \\
&= \frac{x p_n + p_{n-1}}{x q_n + q_{n-1}}.
\end{aligned}$$

Dit laat zien dat de stelling ook waar is voor  $n + 1$ . □

In het bijzonder volgt uit Stelling 2.2.1 dat

$$\langle a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n \rangle = \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{p_n}{q_n}.$$

**Stelling 2.2.2** Voor een kettingbreuk  $\alpha = \langle a_0; a_1, a_2, \dots \rangle$  geldt voor elke  $n \geq 0$  dat

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1},$$

waarbij  $p_n$  de noemer en  $q_n$  de teller van de  $n$ -de convergent zijn.

*Bewijs* Schrijf  $\Delta_n = p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}$ . Van de vorige stelling weten we dat  $p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$  en  $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$ , hieruit volgt dat

$$\Delta_n = (a_n p_{n-1} + p_{n-2})q_{n-1} - p_{n-1}(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) = p_{n-2}q_{n-1} - p_{n-1}q_{n-2} = -\Delta_{n-1}.$$

Door dit te herhalen vinden we dat

$$\Delta_n = -\Delta_{n-1} = \Delta_{n-2} = \dots = (-1)^n \Delta_0 = (-1)^{n-1}.$$

□

Een gevolg van deze stelling is dat de convergenten van  $\alpha$  afwisselend groter en kleiner zijn dan  $\alpha$ .

**Stelling 2.2.3** Er geldt voor elke  $n \geq 0$  dat

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})}.$$

*Bewijs* Als we Stelling 2.2.1 toepassen met  $x = \alpha_{n+1}$  dan vinden we dat

$$\alpha = \langle a_0; a_1, \dots, a_n, \alpha_{n+1} \rangle = \frac{\alpha_{n+1} p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1} q_n + q_{n-1}}.$$

En dus,

$$\begin{aligned}
\alpha - \frac{p_n}{q_n} &= \frac{\alpha_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} \\
&= \frac{p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1}}{q_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})} \\
&= \frac{(-1)^n}{q_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})}.
\end{aligned}$$

□

Uit deze stelling volgt dat

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}.$$

Het blijkt dus dat het kettingbreuk algoritme oneindig veel rationale getallen  $p/q$  oplevert met de eigenschap dat

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}.$$

**Stelling 2.2.4 (Legendre)** *Zij  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  en  $p, q \in \mathbb{Z}$  met  $q > 0$ . Stel dat*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q^2},$$

*dan is  $p/q$  een convergent van  $\alpha$ .*

Om deze stelling te bewijzen maken we gebruik van de volgende stelling:

**Stelling 2.2.5** *Zij  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .*

1. *Voor elke  $n$  geldt dat  $\|q_{n+1}\alpha\| < \|q_n\alpha\|$ .*
2. *Stel  $s \in \mathbb{N}$ ,  $s \neq q_n$  en  $s < q_{n+1}$  er geldt nu dat  $\|s\alpha\| > \|q_n\alpha\|$ .*

*Bewijs* Voor het eerste deel maken we gebruik van Stelling 2.2.3:

$$\|q_n\alpha\| = \frac{1}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}} > \frac{1}{(a_{n+1} + 1)q_n + q_{n-1}} = \frac{1}{q_{n+1} + q_n}.$$

Verder zien we dat

$$\|q_{n+1}\alpha\| = \frac{1}{\alpha_{n+2}q_{n+1} + q_n} < \frac{1}{q_{n+1} + q_n}.$$

Voor het tweede deel van de stelling moeten we meer werk verrichten. Zij  $r$  het gehele getal zó dat  $\|s\alpha\| = |s\alpha - r|$ . Beschouw het volgende stelsel van vergelijkingen

$$\begin{aligned}
r &= p_n x + p_{n+1} y; \\
s &= q_n x + q_{n+1} y.
\end{aligned}$$

Als we  $x, y$  oplossen uit dit stelsel van vergelijkingen dan vinden we dat

$$x = \frac{rq_{n+1} - sp_{n+1}}{p_n q_{n+1} - p_{n+1} q_n} = (-1)^{n+1} (rq_{n+1} - sp_{n+1});$$

$$y = \frac{sp_n - q_n r}{p_n q_{n+1} - p_{n+1} q_n} = (-1)^{n+1} (sp_n - rq_n).$$

Dus  $x, y$  zijn geheel. We gaan nu vier gevallen bekijken voor  $x, y$  die alle mogelijkheden voor  $x, y$  bedekken. Twee van die gevallen leveren een tegenspraak op en twee gevallen zullen de stelling bevestigen.

1. Stel  $x = 0$ , dan  $y \neq 0$ . Er geldt nu dat  $s = yq_{n+1}$ , dit is in tegenspraak met  $s < q_{n+1}$ .
2. Stel  $y = 0$ , dan  $x \neq 0$ . Er geldt nu dat  $s = xq_n$  en omdat  $s \neq q_n$  moet gelden dat  $x > 1$ . Er moet dus gelden dat

$$\|s\alpha\| = |s\alpha - r| = |x||q_n\alpha - p_n| = |x| \|q_n\alpha\| > \|q_n\alpha\|.$$

3. Stel  $xy > 0$ . Omdat  $s = xq_n + yq_{n+1}$  positief is moet gelden  $x, y > 0$ . Maar  $q_n, q_{n+1} > 0$  en dus  $s \geq q_n + q_{n+1}$ , dit is in tegenspraak met  $s < q_{n+1}$ .
4. Stel  $xy < 0$ , dit betekent dat  $x, y$  tegengesteld teken hebben (dus de één is positief en de ander negatief). Van Stelling 2.2.3 weten we dat  $q_n\alpha - p_n$  en  $q_{n+1}\alpha - p_{n+1}$  ook tegengesteld teken hebben en dus hebben  $x(q_n\alpha - p_n)$  en  $y(q_{n+1}\alpha - p_{n+1})$  hetzelfde teken. Hieruit volgt,

$$\begin{aligned} \|s\alpha\| = |s\alpha - r| &= |x(q_n\alpha - p_n) + y(q_{n+1}\alpha - p_{n+1})| \\ &= |x||q_n\alpha - p_n| + |y||q_{n+1}\alpha - p_{n+1}| \\ &= |x| \|q_n\alpha\| + |y| \|q_{n+1}\alpha\| \\ &\geq \|q_n\alpha\| \end{aligned}$$

□

*Bewijs van Stelling 2.2.4* Kies  $n$  zó dat  $q_n \leq q < q_{n+1}$  (zo'n  $n$  bestaat altijd). Als  $p/q = p_n/q_n$ , dan is  $p/q$  een convergent van  $\alpha$  en zijn we klaar. Stel bij wijze van tegenspraak dat  $p/q \neq p_n/q_n$ . Er geldt,

$$\frac{1}{qq_n} \leq \left| \frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| + \left| \alpha - \frac{p}{q} \right|.$$

Vanwege de aanname in de stelling mogen we  $|\alpha - p/q|$  af schatten met  $1/(2q^2)$ . Voor de afschatting van  $|\alpha - p_n/q_n|$  gebruiken we Stelling 2.2.5. Als we het tweede gedeelte van deze stelling toepassen met  $s = q$  dan zien we dat  $|q_n\alpha - p_n| < |q\alpha - p|$ . We vinden dat

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{|q_n\alpha - p_n|}{q_n} < \frac{|q\alpha - p|}{q_n} < \frac{1}{2qq_n}.$$

We hebben nu dat

$$\frac{1}{qq_n} < \frac{1}{2qq_n} + \frac{1}{2q^2}.$$

Vermenigvuldig links en rechts van het  $<$  teken met  $2q^2q_n$ , we krijgen  $2q < q + q_n$  en dus  $q < q_n$ . Maar dit levert een tegenspraak op met dat  $q > q_n$ . Er moet dus wel gelden dat  $p/q = p_n/q_n$ . □

## 2.3 Kwadratische getallen

We beginnen deze paragraaf met twee definities omtrent kwadratische getallen.

**Definitie 2.3.1** Een kwadratisch getal is een getal  $\alpha$  waarvoor er een tweedegraads irreducibel polynoom  $f \in \mathbb{Z}[X]$  is waarvoor  $\alpha$  een nulpunt is van  $f$ .

**Definitie 2.3.2** Een kwadratisch getal  $\alpha \in \mathbb{R}$  is gereduceerd als  $\alpha > 1$  en  $-1 < \bar{\alpha} < 0$ , waarbij  $\bar{\alpha}$  de geconjugeerde van  $\alpha$  is.

We gaan nu voor het kwadratische getal  $\sqrt{2}$  de kettingbreukontwikkeling uitrekenen. Daarvoor volgen we het kettingbreuk algoritme waarbij we de resten in exacte vorm laten staan. Verder maken we gebruik van het feit dat  $(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) = 1$  en dus  $1/(\sqrt{2} - 1) = \sqrt{2} + 1$ :

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= 1 + \sqrt{2} - 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2} - 1} &= \sqrt{2} + 1 = 2 + \sqrt{2} - 1\end{aligned}$$

We hebben nu bij de tweede stap dezelfde rest als bij de eerste stap en daarom zal het wijzergetal bij de derde stap ook 2 zijn enzovoorts. Dus,

$$\sqrt{2} = \langle 1; 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, \dots \rangle.$$

Dit schrijven we verkort op door een streep over het periodieke deel te zetten:

$$\sqrt{2} = \langle 1; \overline{2} \rangle.$$

Hieronder volgt nog een aantal voorbeelden van kwadratische reële getallen:

$$\begin{aligned}\sqrt{5} &= \langle 2; \overline{4} \rangle \\ \sqrt{13} &= \langle 3; \overline{1, 1, 1, 1, 6} \rangle \\ (1 + \sqrt{5})/2 &= \langle \overline{1} \rangle \\ (16 + \sqrt{5}) &= \langle 3; \overline{25, 2, 2, 2, 26} \rangle.\end{aligned}$$

Als de kettingbreukontwikkeling van een getal  $\alpha \in \mathbb{R}$  meteen periodiek is, dat wil zeggen van de vorm  $\langle \overline{a_0; a_1, a_2, \dots, a_n} \rangle$ , dan zeggen we dat  $\alpha$  een zuiver periodieke kettingbreukontwikkeling heeft.

**Stelling 2.3.3** Stel dat  $\alpha \in \mathbb{R}$  een periodieke kettingbreuk heeft, dan is  $\alpha$  een kwadratische getal.

*Bewijs* Stel eerst dat  $\alpha$  een zuiver periodieke kettingbreuk heeft, dus

$$\alpha = \langle \overline{a_0; a_1, \dots, a_n} \rangle.$$

Als we Stelling 2.2.1 toepassen met  $x = \alpha$  dan zien we dat

$$\alpha = \frac{\alpha p_n + p_{n-1}}{\alpha q_n + q_{n-1}}.$$

Hieruit volgt dat  $q_n\alpha^2 + (q_{n-1} - p_n)\alpha - p_{n-1} = 0$ . Dus  $\alpha$  is een nulpunt van het tweedegraads polynoom  $f = q_nX^2 + (q_{n-1} - p_n)X - p_{n-1}$ . Dit polynoom moet wel irreducibel zijn, omdat  $\alpha$  niet rationaal is en  $\text{ggd}(p_n, q_n) = 1$ . Er geldt dus dat  $\alpha$  een kwadratisch getal is.

Stel in het algemene geval dat

$$\alpha = \langle a_0; a_1, \dots, a_n, \overline{b_1, b_2, \dots, b_m} \rangle.$$

Schrijf  $\beta = \langle \overline{b_1, b_2, \dots, b_m} \rangle$ , dan  $\alpha = \langle a_0; a_1, \dots, a_n, \beta \rangle$ . Van bovenstaande weten we dat  $\beta$  een kwadratische getal is en hetzelfde moet wel gelden voor  $\alpha$ .  $\square$

Opmerkelijk is dat het omgekeerde ook waar is.

**Stelling 2.3.4 (Lagrange)** *Zij  $\alpha \in \mathbb{R}$  een kwadratisch getal, dan heeft  $\alpha$  een periodieke kettingbreuk kettingbreuk.*

*Bewijs* Omdat  $\alpha$  een kwadratisch getal is zijn er  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  zodanig dat

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0. \quad (2.6)$$

Vanwege Stelling 2.2.1 kunnen we  $\alpha$  schrijven als een uitdrukking in  $\alpha_n$ :

$$\alpha = \frac{p_n\alpha_{n+1} + p_{n-1}}{q_n\alpha_{n+1} + q_{n-1}}.$$

We kunnen vergelijking (2.6) omschrijven als

$$a(p_n\alpha_{n+1} + p_{n-1})^2 + b(p_n\alpha_{n+1} + p_{n-1})(q_n\alpha_{n+1} + q_{n-1}) + c(q_n\alpha_{n+1} + q_{n-1})^2 = 0.$$

Als we de haakjes uitwerken dan krijgen we

$$A_{n+1}\alpha_{n+1}^2 + B_{n+1}\alpha_{n+1} + C_{n+1} = 0 \quad (2.7)$$

met

- \*  $A_{n+1} = ap_n^2 + bp_nq_n + cq_n^2$ ;
- \*  $B_{n+1} = 2ap_n p_{n-1} + b(p_nq_{n-1} + p_{n-1}q_n) + 2cq_nq_{n-1}$ ;
- \*  $C_{n+1} = ap_{n-1}^2 + bp_{n-1}q_{n-1} + cq_{n-1}^2$ .

Merk alvast op dat  $C_{n+1} = A_n$ . Omdat  $\alpha_{n+1}$  irrationaal is voor alle  $n \geq 0$ , is  $A_{n+1} \neq 0$  voor alle  $n \geq 0$ . Verder hebben we dat

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha_{n+1}) = B_{n+1}^2 - 4A_{n+1}C_{n+1} &= (a^2 - 4bc)(p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n)^2 \\ &= (a^2 - 4bc). \end{aligned}$$

Dit betekent dat de discriminant van  $\alpha_n$  hetzelfde is voor alle  $n \geq 0$ .

Omdat  $|q_n\alpha - p_n| < 1/q_{n+1} < 1/q_n$  is er een  $\epsilon$ , met  $|\epsilon| < 1$  zodanig dat  $p_n = q_n\alpha + \epsilon/q_n$ . We kunnen nu de formules voor  $A_{n+1}$  schrijven als

$$\begin{aligned}
A_{n+1} &= a \left( q_n \alpha + \frac{\epsilon}{q_n} \right)^2 + b \left( q_n \alpha + \frac{\epsilon}{q_n} \right) q_n + c q_n^2 \\
&= (a\alpha^2 + b\alpha + c) q_n^2 + \epsilon(2a\alpha + b) + a \left( \frac{\epsilon}{q_n} \right)^2 \\
&= \epsilon(2a\alpha + b) + a \left( \frac{\epsilon}{q_n} \right)^2
\end{aligned}$$

en we zien vanwege de driehoeksongelijkheid dat

$$|A_{n+1}| < |2a\alpha| + |b| + |a|,$$

dit betekent dat  $|A_{n+1}|$  begrensd is. Omdat  $C_{n+1} = A_n$ , is  $|C_{n+1}|$  ook begrensd en daarmee is ook  $|B_{n+1}|$  begrensd omdat de discriminant constant is. Dus de coëfficiënten van alle vergelijkingen in (2.7) zijn begrensd en er kunnen dus maar eindig veel van dat soort vergelijkingen zijn. Daarom zal er herhaling optreden in de vergelijkingen en er zijn dus  $i, j > 0, i \neq j$  zó dat  $\alpha_i = \alpha_j$ . Hieruit volgt dat  $\alpha$  een periodieke kettingbreuk heeft.  $\square$

**Stelling 2.3.5** *Zij  $\alpha \in \mathbb{R}$  een kwadratisch getal. Dan is  $\alpha$  gereduceerd dan en slechts dan als de kettingbreuk van  $\alpha$  zuiver periodiek is.*

*Bewijs* ( $\Leftarrow$ ) Stel dat  $\alpha$  een zuiver periodieke kettingbreuk heeft, dus  $\alpha = \langle \overline{a_0; a_1, \dots, a_n} \rangle$ . Omdat  $a_0 = a_{n+1}$  geldt  $a_0 \geq 1$  en dus  $\alpha > 1$ .

Beschouw het polynoom  $f(x) = q_n x^2 + (q_{n-1} - p_n)x - p_{n-1}$ , met  $\frac{p_n}{q_n}$  de  $n$ -de convergent en  $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$  de  $(n-1)$ -de convergent van  $\alpha$ . We hebben dat  $f(\alpha) = 0$  (zie Stelling 2.2.1). Omdat  $f(0) = -p_{n-1}$  en  $f(-1) = q_n - q_{n-1} + p_n - p_{n-1} > 0$  moet  $f(x)$  het andere nulpunt tussen  $-1$  en  $0$  liggen. Dit andere nulpunt is  $\bar{\alpha}$ .

( $\Rightarrow$ ) Stel dat  $\alpha$  gereduceerd is. Dit betekent dat  $\alpha > 1$  en  $-1 < \bar{\alpha} < 0$ . Omdat  $\bar{\alpha}_0 = a_0 + 1/\bar{\alpha}_1$  hebben we dat

$$\frac{1}{\bar{\alpha}_1} = -a_0 + \bar{\alpha}_0 < -a_0 \leq -1$$

en dus  $-1 < \bar{\alpha}_1 < 0$ . Met inductie volgt dat  $-1 < \bar{\alpha}_k < 0$  voor  $k \geq 0$ .

Stel nu dat  $\alpha$  niet zuiver periodiek, dus

$$\alpha = \langle a_0; a_1, \dots, a_{m-1}, \overline{a_m, \dots, a_{m+n-1}} \rangle,$$

waarbij  $a_{m-1} \neq a_{m+n-1}$ .

Er geldt vanwege de periodiciteit van  $\alpha$  vanaf het  $m$ -de wijzergetal, dat  $\alpha_m = \alpha_{m+n}$ . Dus

$$\alpha_{m-1} - \alpha_{m+n-1} = \left( a_{m-1} + \frac{1}{\alpha_m} \right) - \left( a_{m+n-1} + \frac{1}{\alpha_{m+n}} \right) = a_{m-1} - a_{m+n-1} \neq 0.$$

Op dezelfde wijze zien we dat  $\bar{\alpha}_{m-1} - \bar{\alpha}_{m+n-1}$  een niet-nul geheel getal is. Maar we zagen dat  $-1 < \bar{\alpha}_{m-1} < 0$ ,  $-1 < \bar{\alpha}_{m+n-1} < 0$ , tegenspraak. De aanname dat  $\alpha$  niet zuiver periodiek is, kan niet waar zijn.  $\square$

**Lemma 2.3.6** *Stel  $\alpha = \langle a_0; a_1, \dots, a_n, \beta \rangle$ , er geldt nu dat*

$$\frac{1}{-\beta} = \left\langle a_n; a_{n-1}, \dots, a_1, a_0, -\frac{1}{\alpha} \right\rangle.$$

*Merk op dat dit niet de echte kettingbreuk van  $-\frac{1}{\beta}$  is omdat het staartstuk  $\langle a_0, -1/\alpha \rangle = a_0 - \alpha < 0$ .*

*Bewijs* Merk op,

$$\begin{aligned} 0 &= -\alpha + \langle a_0, a_1, \dots, a_n, \beta \rangle \\ &= \langle a_0, -1/\alpha \rangle + \langle 0, a_1, \dots, a_n, \beta \rangle. \end{aligned}$$

De inverse van  $\langle a_0; -1/\alpha \rangle$  is  $\frac{1}{a_0 - \alpha}$  en de inverse van  $\langle 0; a_1, \dots, a_n, \beta \rangle$  is  $\frac{1}{\alpha - a_0}$ . Als we van beide termen de inverse nemen en  $a_1$  van de ene term naar de andere term verschuiven krijgen we,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle 0; a_0, -1/\alpha \rangle + \langle a_1, \dots, a_n, \beta \rangle \\ &= \langle a_1; a_0, -1/\alpha \rangle + \langle 0; a_2, \dots, a_n, \beta \rangle. \end{aligned}$$

Dit proces kunnen we herhalen tot we uitkomen op

$$0 = \langle a_n; \dots, a_1, a_0, -1/\alpha \rangle + \langle 0; \beta \rangle.$$

Hieruit volgt dat

$$-\langle 0; \beta \rangle = \frac{1}{-\beta} = \left\langle a_n; a_{n-1}, \dots, a_1, a_0, -\frac{1}{\alpha} \right\rangle.$$

□

**Gevolg 2.3.7** *Stel dat  $\alpha = \langle \overline{a_0; a_1, \dots, a_n} \rangle$ , dan geldt*

$$-\frac{1}{\overline{\alpha}} = \langle \overline{a_n; a_{n-1}, \dots, a_0} \rangle.$$

*Bewijs* Omdat  $\alpha$  een zuiver periodieke kettingbreuk heeft weten we dat

$$\alpha = \langle a_0; a_1, \dots, a_n, \alpha \rangle.$$

Als we Lemma 2.3.6 toepassen dan vinden we dat

$$-\frac{1}{\alpha} = \langle a_n; a_{n-1}, \dots, a_0, -1/\alpha \rangle.$$

Het nemen van de geconjugeerde aan beide zijden levert,

$$-\frac{1}{\overline{\alpha}} = \langle \overline{a_n; a_{n-1}, \dots, a_0, -1/\overline{\alpha}} \rangle.$$

Omdat de kettingbreuk van  $\alpha$  zuiver periodiek is volgt uit Stelling 2.3.5 dat  $\alpha$  gereduceerd is. Dus geldt dat  $-1/\overline{\alpha} > 1$  en we hebben te maken met een echte kettingbreuk. □

## 2.4 Enkele eigenschappen van kettingbreuken

We eindigen dit hoofdstuk met een aantal eigenschappen van kettingbreuken die later nog van pas komen.

**Lemma 2.4.1** *Zij gegeven de kettingbreuk  $\langle a_0; a_1, \dots, a_n \rangle$ ,  $a_i \in \mathbb{N}$ . Er geldt dat*

$$\langle a_n; a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \rangle = p_n/p_{n-1}.$$

*Bewijs* Uit Stelling 2.2.1 volgt dat

$$\langle a_0; a_1, \dots, a_n, -p_{n-1}/p_n \rangle = \frac{p_n(-p_{n-1}/p_n) + p_{n-1}}{q_n(-p_{n-1}/p_n + q_{n-1})} = 0$$

Pas nu Lemma 2.3.6 toe met  $\alpha = 0$  en  $\beta = -p_{n-1}/p_n$  ( $-1/\alpha$  wordt nu weggelaten). We krijgen,

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = \langle a_n, \dots, a_1, a_0 \rangle = \langle a_n, \dots, a_1, a_0 \rangle.$$

□

**Lemma 2.4.2** *Zij gegeven de kettingbreuk  $\langle 0; a_0, a_1, \dots, a_n \rangle$ ,  $a_i \in \mathbb{N}$ . Er geldt dat*

$$\langle 0; a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \rangle = q_{n-1}/q_n.$$

*Bewijs* Merk op dat  $q_n/p_n = \langle a_0; a_1, \dots, a_n \rangle$ . Pas Lemma 2.4.1 toe op de kettingbreuk  $\langle a_0; a_1, \dots, a_n, \dots \rangle$ . We krijgen dat  $\langle a_n; a_{n-1}, \dots, a_1 \rangle = q_n/q_{n-1}$ , het nemen van de inverse geeft het lemma. □

Schrijf  $P(a_1, \dots, a_n)$  als de teller van de kettingbreuk  $\langle a_1; a_2, \dots, a_n \rangle$  en schrijf  $Q(a_1, \dots, a_n)$  als de noemer van dezelfde kettingbreuk.

**Lemma 2.4.3** *Zij gegeven de kettingbreuk  $\langle a_1; a_2, \dots, a_n \rangle$ , met  $a_1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $a_i \in \mathbb{N}$  voor alle  $2 \leq i \leq n$ . Er gelden de volgende eigenschappen,*

1.  $P(a_1, a_2, \dots, a_n) = P(a_n, \dots, a_2, a_1)$ , als  $a_1 \neq 0$ .
2.  $P(a_1, \dots, a_n) = a_1 P(a_2, \dots, a_n) + P(a_3, \dots, a_n)$  (als  $n \geq 3$ ).
3.  $Q(a_1, \dots, a_n) = P(a_2, \dots, a_n)$  (als  $n \geq 2$ ).
4.  $P(\dots, 1, 1) = P(\dots, 2)$ .
5. Als  $a_i, b_i$  positieve gehele getallen zijn en  $n, m \geq 2$ , dan

$$P(a_n, \dots, a_1, b_1, \dots, b_m) = P(a_n, \dots, a_1)P(b_1, \dots, b_m) + P(a_n, \dots, a_2)P(b_2, \dots, b_m).$$



*Bewijs* Eigenschap 1 volgt uit Lemma 2.4.1, Eigenschappen 3, en 4 zijn triviaal, Eigenschap 2 volgt uit Stelling 2.2.1 toegepast op  $P(a_n, \dots, a_1)$  en Eigenschap 1.

Eigenschap 5 bewijzen met volledige inductie naar  $n$ . Voor  $n = 2$  krijgen we na twee keer toepassen van Eigenschap 2,

$$\begin{aligned}
 P(a_2, a_1, b_1, \dots, b_m) &= a_2 P(a_1, b_1, \dots, b_m) + P(b_1, \dots, b_m) \\
 &= a_1 a_2 P(b_1, \dots, b_m) + a_2 P(b_2, \dots, b_m) + P(b_1, \dots, b_m) \\
 &= P(b_1, \dots, b_m)(a_1 a_2 + 1) + a_2 P(b_2, \dots, b_m) \\
 &= P(b_1, \dots, b_m)P(a_1, a_2) + P(a_2)P(b_2, \dots, b_m).
 \end{aligned}$$

Dus voor  $n = 2$  is de bewering waar. Stel dat het waar is voor  $n$ , dan krijgen we na het toepassen van Eigenschap 2 en twee keer toepassen van de inductiehypothese,

$$\begin{aligned}
 P(a_{n+1}, \dots, a_1, b_1, \dots, b_m) &= a_{n+1} P(a_n, \dots, a_1, b_1, \dots, b_m) + P(a_{n-1}, \dots, a_1, b_1, \dots, b_m) \\
 &= (a_{n+1} P(a_n, \dots, a_1) + P(a_{n-1}, \dots, a_1)) P(b_1, \dots, b_m) \\
 &\quad + (a_{n+1} P(a_n, \dots, a_2) + P(a_{n-1}, \dots, a_2)) P(b_2, \dots, b_m) \\
 &= P(a_{n+1}, \dots, a_1) P(b_1, \dots, b_m) \\
 &\quad + P(a_{n+1}, \dots, a_2) P(b_2, \dots, b_m).
 \end{aligned}$$

□

## Hoofdstuk 3

# Markoff getallen

### 3.1 Markoff getallen

We beginnen dit hoofdstuk met de definitie van een Markoff getal.

**Definitie 3.1.1** Een Markoff getal  $m_1$  is een positief geheel getal met als eigenschap dat er positieve gehele getallen  $m_2, m_3$  zijn zodanig dat

$$m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = 3m_1m_2m_3. \quad (3.1)$$

Het drietal  $(m_1, m_2, m_3)$  noemen we een Markoff drietal. Markoff getallen zijn genoemd naar de Russische wiskundige Andrey Markoff.<sup>1</sup>

Hieronder volgen alle Markoff getallen kleiner dan 1000

$$1, 2, 5, 13, 29, 34, 89, 169, 194, 233, 433, 610, 985.$$

**Lemma 3.1.2** De enige oplossingen voor (3.1) waarvoor  $m_1, m_2$  en  $m_3$  niet alle drie verschillend zijn, zijn op volgorde na  $(1, 1, 1)$  en  $(1, 1, 2)$ .

*Bewijs* Stel dat  $m_1 = m_2$ . We hebben nu dat  $m_1^2 | m_3^2$ , dus er is een  $k \in \mathbb{Z}$  zó dat  $m_3 = km_1$ . We krijgen nu dat  $k^2 + 2 = 3km_1$  en dus moet  $k$  een deler zijn van 2. Hieruit volgt dat  $(1, 1, 1)$  en  $(1, 1, 2)$  de enige oplossingen kunnen zijn.  $\square$

De oplossingen  $(1, 1, 1)$  en  $(1, 1, 2)$  voor vergelijking (3.1) worden de singuliere oplossingen genoemd.

Als  $(m_1, m_2, m_3)$  een niet singuliere oplossing is voor (3.1), dan kunnen we andere oplossingen construeren. Definieer daarvoor

$$m'_1 = 3m_2m_3 - m_1, \quad m'_2 = 3m_1m_3 - m_2, \quad m'_3 = 3m_1m_2 - m_3.$$

Het is gemakkelijk in te zien dat de volgende drietallen oplossingen voor (3.1) zijn

$$(m'_1, m_2, m_3), \quad (m_1, m'_2, m_3), \quad (m_1, m_2, m'_3). \quad (3.2)$$

De oplossingen in (3.2) noemen we de burens van de oplossing  $(m_1, m_2, m_3)$ .

---

<sup>1</sup>A. Markoff 1856-1922.

**Stelling 3.1.3 (Markoff)** *Alle positieve geheeltallige oplossingen  $(m_1, m_2, m_3)$  voor (3.1) worden verkregen door te beginnen met de oplossing  $(1, 1, 1)$  en vervolgens steeds buuroplossingen te bepalen. Daarnaast geldt dat  $\text{ggd}(m_1, m_2, m_3) = 1$ .*

*Bewijs* De kwadratische functie

$$f(x) = x^2 - 3m_2m_3x + m_2^2 + m_3^2$$

heeft als nulpunten  $m_1$  en  $m'_1 = 3m_2m_3 - m_1$ . Als  $(m_1, m_2, m_3)$  een niet singuliere oplossing is met  $m_2 > m_3$  dan

$$f(m_2) = (m_2 - m_1)(m_2 - m'_1) = m_2^2 \left( 2 + \left( \frac{m_3}{m_2} \right)^2 - 3m_3 \right) < 0.$$

Op dezelfde manier zien we dat als  $m_3 > m_2$  dan  $f(m_3) < 0$ . Hieruit volgt dat  $\max(m_2, m_3)$  strikt tussen  $m_1$  en  $m'_1$  in ligt. Neem zonder verlies van algemeenheid aan dat  $m_1 > \max(m_2, m_3)$ , dan hebben we dat

$$m'_1 < \max(m_2, m_3) < m_1$$

en

$$\begin{aligned} m'_2 &= 3m_1m_3 - m_2 > 3m_1 - m_1 = 2m_1 > m_1, \\ m'_3 &= 3m_1m_2 - m_3 > 3m_1 - m_1 = 2m_1 > m_1. \end{aligned}$$

Dus twee van de buren van  $(m_1, m_2, m_3)$  hebben een grootste element dat strikt groter is dan  $m_1$  en de andere heeft een grootste element dat strikt kleiner is dan  $m_1$ .

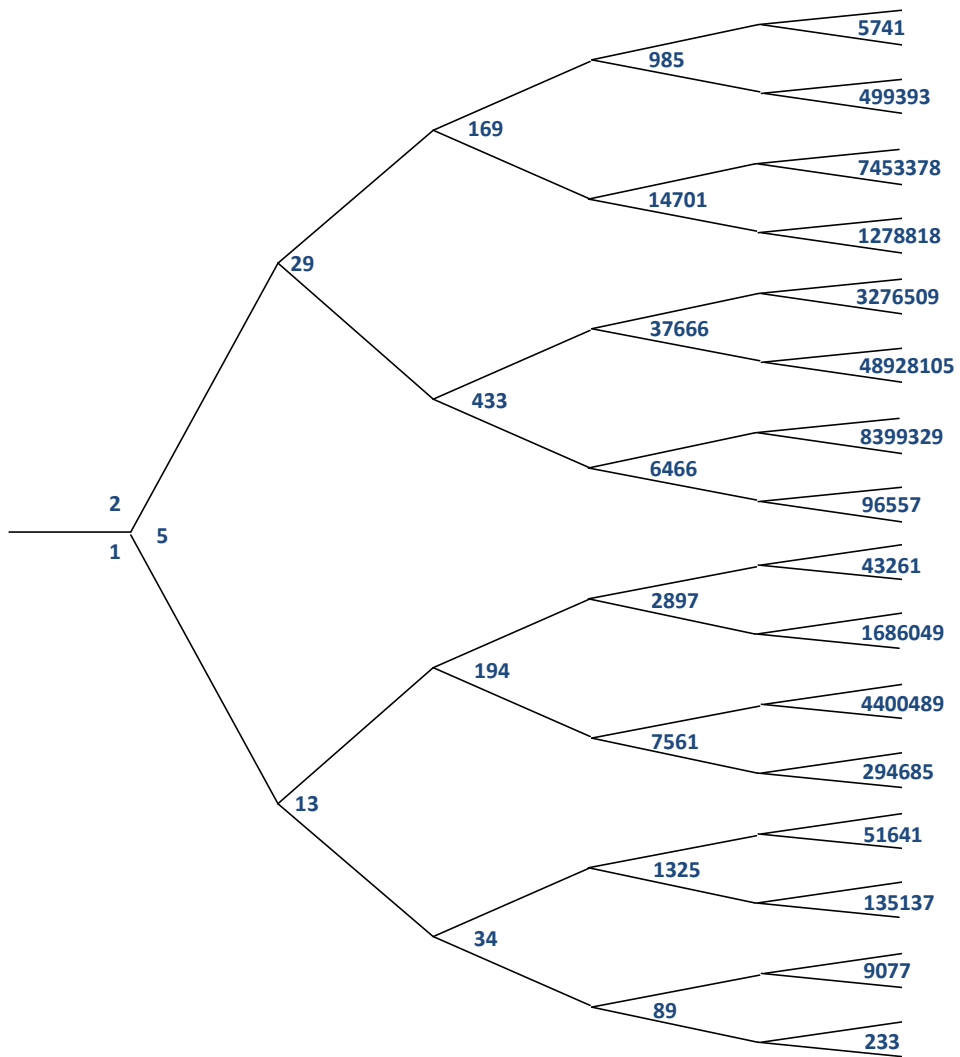
Als we starten met een niet singuliere oplossing  $(m_1, m_2, m_3)$  dan is er een buur  $(n_1, n_2, n_3)$  met grootste element strikt kleiner dan  $m_1$  en  $(n_1, n_2, n_3)$  heeft weer een buur (als  $(n_1, n_2, n_3)$  niet singulier is) met grootste element strikt kleiner dan  $n_1$  enz. Dit proces moet eindigen in een singuliere oplossing en wel bij  $(1, 1, 1)$ .

Het bewijs van het tweede gedeelte van de stelling is nu gemakkelijk. Als van een oplossing  $(m_1, m_2, m_3)$  er twee elementen zijn met grootste gemeenschappelijke deler  $d$ , dan moet  $d$  het derde element ook delen. We zagen dat als we steeds buren nemen met een strikt kleiner maximaal element, we dan bij de singuliere oplossing  $(1, 1, 1)$  eindigen. We moeten dus wel concluderen dat  $d = 1$ .  $\square$

Een gevolg van Stelling 3.1.3 is dat we de Markoff getallen in een boom kunnen weergeven. De relatie dat als  $(m_1, m_2, m_3)$  een oplossing is dat dan zijn buren ook oplossingen zijn is de basis van de gegeven boom in Figuur 3.1. De getallen in de drie regionen rond een hoekpunt zijn Markoff drietallen.

We eindigen dit hoofdstuk met een nog openstaand vermoeden, dat ook wel het Markoff vermoeden of uniciteits vermoeden wordt genoemd.

**Vermoeden 3.1.4** *Stel dat  $(m_1, m_2, m_3)$  en  $(m'_1, m'_2, m_3)$  Markoff drietallen zijn met  $m_1 \leq m_2 \leq m_3$  en  $m'_1 \leq m'_2 \leq m_3$ . Dan geldt dat  $m_1 = m'_1$  en  $m_2 = m'_2$ . Dit is het zelfde als te zeggen dat geen enkel getal  $m$  niet het grootste getal kan zijn in twee verschillende oplossingen voor (3.1).*



Figuur 3.1: Markoff boom

Dit vermoeden kunnen we ook vertalen als: geen enkel getal komt twee keer voor in de boom in Figuur 3.1.

Frobenius poneerde dit vermoeden in 1913 en na bijna 100 jaar is het dus nog steeds niet opgelost. Toch is er wel enig resultaat geboekt omtrent dit vermoeden. Zo is het vermoeden waar voor Markoff getallen van de vorm  $p^n$  of  $2p^n$  voor  $p$  een priemgetal (zie voor een bewijs [Lan/Tan] of [Zha]). En het vermoeden is in ieder geval waar voor alle Markoff getallen  $m \leq 10^{105}$ .

## Hoofdstuk 4

# Lagrange spectrum

### 4.1 Lagrange spectrum

Een bekende stelling op het gebied van Diophantische benaderingen is de volgende:

**Stelling 4.1.1 (Hurwitz)** *Zij  $\alpha$  een irrationaal getal. Er zijn oneindig veel  $p, q \in \mathbb{Z}, q > 0$ ,  $\text{ggd}(p, q) = 1$  zó dat*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}.$$

*De constante  $\sqrt{5}$  is de best mogelijke om de bewering waar te laten zijn.*

*Bewijs* Het bewijs bestaat uit twee delen; we laten eerst zien dat de constante  $1/\sqrt{5}$  een bovengrens is, vervolgens laten we zien dat er een reëel getal is zodanig dat  $1/\sqrt{5}$  een ondergrens is.

Stel dat  $\alpha = \langle a_0; , a_1, a_2, \dots \rangle$  schrijf  $\xi_k = \langle 0; a_k, \dots, a_1 \rangle = q_{n-1}/q_n$  (de laatste gelijkheid volgt uit Lemma 2.4.2).

Eerste deel: We gaan bewijzen dat voor elke drie opeenvolgende convergenten van  $\alpha$  er minstens één voldoet aan:

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}.$$

Stel bij wijze van tegenspraak dat er drie opeenvolgende convergenten zijn zodanig dat

$$\begin{aligned} \alpha_{k+1} + \xi_k &< \sqrt{5}; \\ \alpha_{k+2} + \xi_{k+1} &< \sqrt{5}; \\ \alpha_{k+3} + \xi_{k+2} &< \sqrt{5}. \end{aligned}$$

We kunnen de eerste ongelijkheid schrijven als

$$\alpha_{k+1} + \frac{1}{\alpha_{k+2}} + \xi_k < \sqrt{5}.$$

En hieruit volgt dat

$$\frac{1}{\alpha_{k+2}} < \sqrt{5} - \alpha_{k+1} - \xi_k = \sqrt{5} - \frac{1}{\xi_{k+1}}.$$

De tweede ongelijkheid kunnen we herschrijven als  $\alpha_{k+2} < \sqrt{5} - \xi_{k+1}$ . We hebben dus dat,

$$1 < \left( \sqrt{5} - \frac{1}{\xi_{k+1}} \right) (\sqrt{5} - \xi_{k+1})$$

en hieruit volgt dat

$$\xi_{k+1}^2 - \sqrt{5}\xi_{k+1} + 1 < 0.$$

Op dezelfde manier zien we als we de tweede en derde ongelijkheid combineren dat,

$$\xi_{k+2}^2 - \sqrt{5}\xi_{k+2} + 1 < 0.$$

Er moet dus wel gelden dat  $\xi_{k+1}, \xi_{k+2} \in ((\sqrt{5}-1)/2, (\sqrt{5}+1)/2)$ . Maar omdat  $\xi_{k+2} = 1/(a_{k+2} + \xi_{k+1})$  en  $a_{k+2} \geq 1$  hebben we tevens dat,

$$\xi_{k+2} < \frac{1}{(\sqrt{5}-1)/2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Tegenspraak. Dit bewijst het eerste deel.

Tweede deel: *Claim* Zij  $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ , dan heeft

$$\left| \varphi - \frac{p}{q} \right| < \frac{C}{q^2}$$

op zijn hoogst eindig veel oplossingen voor elke  $C < 1/\sqrt{5}$ .

*Bewijs van de claim* Omdat  $\varphi = \langle \bar{1} \rangle$  volgt uit Lemma 2.4.2 dat  $\lim_{k \rightarrow \infty} q_{k+1}/q_k = \varphi$  en  $\xi_k = 1/\varphi + \epsilon_k$ , waarbij  $\epsilon_k \rightarrow 0$  als  $k \rightarrow \infty$ . Dus  $\alpha_{k+1} + \xi_k = \sqrt{5} + \epsilon_k$  en uit Stelling 2.2.3 volgt nu,

$$\left| \varphi - \frac{p_k}{q_k} \right| = \frac{1}{q_k^2(\sqrt{5} + \epsilon_k)}.$$

Voor elke  $C < 1/\sqrt{5}$  geldt dat  $C < 1/(\sqrt{5} + \epsilon_k)$  voor voldoende grote  $k$ , dit bewijst het tweede gedeelte. □

Door links en rechts van de ongelijkheid in Stelling 4.1.1 met  $q^2$  te vermenigvuldigen en van beide kanten de inverse te nemen zien we dat er oneindig veel  $p, q \in \mathbb{Z}, q > 0, \text{ggd}(p, q) = 1$  zijn zó dat

$$\left| \frac{1}{q(q\alpha - p)} \right| > \sqrt{5}.$$

Zij  $x \in \mathbb{R}$ , noteer  $\|x\|$  als de afstand van  $x$  tot het dichtst bijzijnde gehele getal. Stelling 4.1.1 is nu equivalent met te zeggen dat  $q \|q\alpha\| < \frac{1}{\sqrt{5}}$  oneindig veel oplossingen heeft voor  $q \in \mathbb{N}$ . Dit impliceert dat

$$\limsup_{q > 0} \frac{1}{q \|q\alpha\|} \geq \sqrt{5}.$$

Definieer  $L(\alpha) := \limsup_{q \geq 0} \frac{1}{q \|q\alpha\|}$ . Stel  $L(\alpha) < \infty$ , dan heeft  $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{(L(\alpha) - \epsilon)q^2}$  oneindig veel oplossingen voor elke  $0 < \epsilon < L(\alpha)$ .

Als we nu van elk reëel getal  $\alpha$ , de  $L(\alpha)$  uitrekenen dan krijgen we een spectrum van getallen, dat het Lagrange spectrum wordt genoemd, notatie  $\mathcal{L}$ :

$$\mathcal{L} = \{L(\alpha) | \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

We hebben vanwege Hurwitz' stelling dat  $L(\alpha) \geq \sqrt{5}$  voor alle  $\alpha \in \mathbb{R}$ .  $L(\alpha) = \sqrt{5}$  dan en slechts dan als  $\alpha$ ,  $GL_2(\mathbb{Z})$ -equivalent is met de gulden snede  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , dat wil zeggen er zijn  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ,  $ad - bc = \pm 1$  zó dat  $\alpha = \frac{a\varphi+b}{c\varphi+d}$ . En  $\alpha = \frac{a\varphi+b}{c\varphi+d}$  dan en slechts dan als de staartstukken van de kettingbreuken van  $\alpha, \varphi$  hetzelfde zijn (zie Stelling 4.1.3). Stel dat  $\alpha$  niet  $GL_2(\mathbb{Z})$ -equivalent is met  $\varphi$  dan zijn er oneindig veel  $p, q \in \mathbb{Z}, q > 0$ ,  $\text{ggd}(p, q) = 1$  zó dat  $|\alpha - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{\sqrt{8}q^2}$ . De constante  $1/\sqrt{8}$  kan niet kleiner gemaakt worden als  $\alpha$   $GL_2(\mathbb{Z})$ -equivalent is met  $\eta := 1 + \sqrt{2}$ . Een resultaat van Markoff is dat de doorsnede  $\mathcal{L} \cap (0, 3)$  een discrete verzameling is, deze doorsnede noemen we de Markoff doorsnede<sup>1</sup>.

G. Freiman heeft in 1975 bewezen dat het Lagrange spectrum elk reëel getal bevat groter dan of gelijk aan

$$\mu = 4 + \langle 0; 3, 2, 1, 1, \overline{3, 1, 3, 1, 2, 1} \rangle + \langle 0; 4, 3, 2, 2, \overline{3, 1, 3, 1, 2, 1} \rangle.$$

Wat er precies tussen 3 en  $\mu$  gebeurt is (nog) niet bekend.



Figuur 4.1: Lagrange spectrum

**Stelling 4.1.2** *Stel dat  $\alpha \in (0, 1)$ , met kettingbreukontwikkeling  $\alpha = \langle 0; a_1, a_2, \dots \rangle$ , dan*

$$L(\alpha) = \limsup_{n>0} a_{n+1} + \langle 0; a_{n+2}, a_{n+3}, \dots \rangle + \langle 0, a_n, \dots, a_1 \rangle.$$

*Bewijs* Gebruik makend van Stelling 2.2.4 impliceert de ongelijkheid  $|q(q\alpha - p)| < \frac{1}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}$  dat  $p/q$  gelijk is aan een van de convergenten van  $\alpha$ , dus

$$\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n} = \langle 0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \rangle$$

voor een  $n$ . Vanwege Stelling 2.2.3 weten we dat

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})}.$$

<sup>1</sup>Dit is geen standaard benaming voor die doorsnede.



Hieruit kunnen we afleiden dat

$$|\alpha q_n^2 - p_n q_n| = \frac{1}{\alpha_{n+1} + q_{n-1}/q_n}.$$

Vanwege Lemma 2.4.2 weten we dat  $q_{n-1}/q_n = \langle 0; a_n, \dots, a_1 \rangle$ . Hieruit volgt dat,

$$\frac{1}{|\alpha q_n^2 - p_n q_n|} = \alpha_{n+1} + \frac{q_{n-1}}{q_n} = \langle a_{n+1}; a_{n+2} a_{n+3}, \dots \rangle + \langle 0; a_n, \dots, a_1 \rangle \Rightarrow$$

$$L(\alpha) = \limsup_{n \geq 0} a_{n+1} + \langle 0; a_{n+2}; a_{n+3}, \dots \rangle + \langle 0; a_n, \dots, a_1 \rangle.$$

□

Merk op dat de restrictie  $0 \leq \alpha \leq 1$  geen restrictie is voor  $\mathcal{L}$ , omdat  $L(\alpha) = L(\alpha + z)$ , voor alle  $z \in \mathbb{Z}$ .

**Stelling 4.1.3 (Serret)** *Twee reële getallen  $\alpha, \beta$  zijn  $GL_2(\mathbb{Z})$ -equivalent dan en slechts dan als de staartstukken van de kettingbreuken van  $\alpha$  en  $\beta$  overeenkomen.*

*Bewijs* Schrijf  $\alpha \sim \alpha'$  als de staartstukken van de kettingbreuken van  $\alpha$  en  $\alpha'$  overeenkomen. Het is gemakkelijk in te zien dat dit een equivalentie relatie is. Als  $\alpha \sim \alpha'$ , dan is er een  $A \in GL_n(\mathbb{Z})$  zodanig dat  $\alpha' = A(\alpha)$  (immers  $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\alpha')$ ) en we willen dat  $A(\alpha) \sim \alpha$ , als  $A \in GL_2(\mathbb{Z})$ . Omdat  $GL_2(\mathbb{Z})$  voortgebracht wordt door de twee matrices

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

is het voldoende om na te gaan dat  $G^{\pm 1}(\alpha) \sim \alpha$  en  $I(\alpha) \sim \alpha$ .

Dat  $G^{\pm 1}(\alpha) \sim \alpha$  is gemakkelijk in te zien, immers  $G^{\pm 1}(\langle a_0, x \rangle) = \langle a_0 \pm 1, x \rangle$  en we zien dat de staartstukken van de kettingbreuken overeenkomen. Voor de involutie  $I$  moeten we meer werk voor verrichten. We breken daarvoor het probleem op in tien verschillende gevallen, die gezamenlijk het probleem oplossen:

- Als  $a_0 \geq 1$ , dan  $I(\langle a_0, x \rangle) = \langle 0; a_0, x \rangle$ ;
- $I(\langle 0; x \rangle) = \langle x \rangle$ ;
- Als  $a_1 > 2$ , dan  $I(\langle -1; a_1, x \rangle) = \langle -2; 1, a_1 - 2, x \rangle$ ;
- $I(\langle -1; 2, a_2, x \rangle) = \langle -2; a_2 + 1, x \rangle$ ;
- Als  $a_3 > 1$ , dan  $I(\langle -1; 1, a_2, a_3, x \rangle) = \langle -a_2 - 2; 1, a_3 - 1, x \rangle$ ;
- $I(\langle -1; -1, a_2, 1, a_4, x \rangle) = \langle -a_2 - 2; a_4 + 1, x \rangle$ ;
- Als  $a_1 > 1$ , dan  $I(\langle -2; a_1, x \rangle) = \langle -1; 2, a_1 - 1, x \rangle$ ;
- $I(\langle -2; 1, a_2, x \rangle) = \langle -1; a_2 + 2, x \rangle$ ;
- Als  $a_0 \leq -3, a_1 > 1$ , dan  $I(\langle a_0; a_1, x \rangle) = \langle -1; 1, -a_0, -2, 1, a_1 - 1, x \rangle$ ;
- Als  $a_0 \leq -3$ , dan  $I(\langle a_0; 1, a_2, x \rangle) = \langle -1; 1, -a_0 - 2, a_2 + 1, x \rangle$ .

We zijn nu alle mogelijkheden nagegaan en bij al die mogelijkheden komen de staartstukken overeen. Hieruit volgt dat  $I(\alpha) \sim \alpha$ .  $\square$

Stel  $\alpha \in \mathbb{R}$  met kettingbreukontwikkeling  $\alpha = \langle a_0; a_1, a_2, \dots \rangle$  en dat  $L(\alpha) < 3$ , dan is het staartstuk van de kettingbreuk van  $\alpha$  periodiek (zie [Cus/Fla]), dus

$$\alpha = \langle a_0; a_1, a_2, \dots, a_k, \overline{b_1, \dots, b_n} \rangle.$$

Uit Stelling 4.1.2 volgt nu dat dat  $L(\alpha)$  te schrijven is als som van twee zuiver periodieke kettingbreuken:

$$L(\alpha) = \langle \overline{b_i; b_2, \dots, b_{i+n-1}} \rangle + \langle 0; \overline{b_{i+n-1}, \dots, b_i} \rangle,$$

waarbij  $b_i, \dots, b_{i+n-1}$  een cyclische permutatie is van  $b_1, \dots, b_n$ .

Het is gemakkelijk in te zien dat  $b_j \in \{1, 2\}$  voor alle  $1 \leq j \leq n$ .

Waar geen ambiguïteit kan optreden, laten we vanaf nu de komma's in de kettingbreuk weg. Daarnaast zullen we getallen die  $GL_2(\mathbb{Z})$ -equivalent zijn vanaf nu equivalente getallen noemen.

## 4.2 Resultaten omtrent de Markoff doorsnede

In deze paragraaf sommen we een aantal resultaten omtrent de Markoff doorsnede op. We bewijzen die resultaten niet, maar de bewijzen kunnen allemaal teruggevonden worden in [Cus/Fla]. We beginnen met een lemma, dat we bij wijze van uitzondering wel bewijzen.

**Lemma 4.2.1** *Stel  $\alpha \in (0, 1)$  en  $L(\alpha) = \langle \overline{a_{i+1}; a_{i+2}, \dots, a_{i+n}} \rangle + \langle 0; \overline{a_{i+n}; \dots, a_{i+1}} \rangle < 3$ . Als  $\alpha$  niet equivalent is aan de gulden snede of  $1 + \sqrt{2}$ , dan zijn er oneindig veel wijzergetallen die 1 zijn en oneindig veel wijzergetallen die een 2 zijn. Daarnaast mogen we aannemen dat  $a_{i+1} = 2, a_{i+2} = 1$ .*

*Bewijs* Het eerste deel van het lemma is gemakkelijk in te zien. Als er maar eindig veel wijzergetallen 2 zijn, dan is  $\alpha$  equivalent met de gulden snede. Als er maar eindig veel wijzergetallen 1 zijn, dan is  $\alpha$  equivalent met  $1 + \sqrt{2}$ .

Voor het bewijs van het tweede gedeelte maken we gebruik van de volgende constatering:

$$\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2} = \langle 0; \overline{2, 1} \rangle \leq \langle 0; \overline{a_j, \dots, a_{j+n-1}} \rangle \leq \langle 0; \overline{1, 2} \rangle = \sqrt{3} - 1.$$

Gebruik makend van bovenstaande grenzen zien we dat

$$1 + \sqrt{3} - 1 + \sqrt{3} - 1 = 2\sqrt{3} - 1 < 2 + \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2} = \sqrt{3} + 1 \leq L(\alpha).$$

Er moet dus wel gelden dat  $a_{i+1} = 2$ .

Met een zelfde soort beredenering zien we dat  $a_{i+2} = 1$ .  $\square$

In de rest van dit hoofdstuk is  $\alpha$  een reëel getal, waarvoor  $L(\alpha) < 3$ . Zulke getallen noemen we de slecht benaderbare getallen van het Lagrange spectrum.

Een opvallend resultaat van Markoff is dat de kettingbreukontwikkeling van het staartstuk van  $\alpha$  er uit ziet als

$$\left\langle \overline{22(11)_{r_1} 22(11)_{r_2} 22 \dots 22(11)_{r_n}} \right\rangle,$$

waarbij  $R_n = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$  een rij van niet negatieve gehele getallen. (Natuurlijk kan dit staartstuk ook geschreven worden als een cyclische permutatie van bovenstaande wijzergetallen.)

Het blijkt dus zo te zijn dat de enen en tweeën in blokken van even lengte voorkomen. Zie voor een bewijs [Cus/Fla] Hoofdstuk 1.

Stel dat  $\alpha$  niet equivalent is aan de gulden snede of  $1 + \sqrt{2}$ . Nu weten we zonder verlies van algemeenheid dat  $L(\alpha) = \langle 2; 11a_4 \dots a_{n-1}2 \rangle + \langle 02a_{n-1} \dots a_4112 \rangle$ .

**Lemma 4.2.2** *De rij  $(a_4, \dots, a_{n-1})$  is symmetrisch, dat wil zeggen  $a_{4+i} = a_{n-1-i}$ .*

*Bewijs* Zie [Cus/Fla] p. 26. □

**Stelling 4.2.3 (Markoff, 1879)** *Zij  $\epsilon > 0$ . Er zijn eindig veel  $\alpha \in (0, 1)$  (modulo de getallen die equivalent zijn aan  $\alpha$ ) waarvoor geldt dat  $L(\alpha) < 3 - \epsilon$ . Daarbij heeft de kettingbreuk van  $\alpha$  een periodiek staartstuk. De verzameling getallen kleiner dan 3 in het Lagrange (of Markoff) spectrum is aftelbaar en discreet en heeft 3 als enig limiet punt.*

*Bewijs* Zie [Cus/Fla] Stelling 5 op blz. 8. □

**Stelling 4.2.4 (Markoff, 1879)** *Het Lagrange spectrum in het interval  $(0, 3)$  bestaat uit de kwadratische getallen van de vorm  $\sqrt{9 - 4/m^2}$ , met  $m$  een Markoff getal. Daarnaast is er voor elk Markoff getal een  $\alpha \in \mathbb{R}$  zodanig dat  $L(\alpha) = \sqrt{9 - 4/m^2}$ .*

*Bewijs* Zie [Cus/Fla] hoofdstuk 2 en 3. □

Hieronder volgt een tabel met bijbehorende  $\alpha$  van de eerste tien Markoff getallen.

$\alpha$	$L(\alpha)$
$\langle 0; \bar{1} \rangle$	$\sqrt{5} = \langle \bar{1} \rangle + \langle 0; \bar{1} \rangle$
$\langle 0; \bar{2} \rangle$	$\sqrt{8} = \langle \bar{2} \rangle + \langle 0; \bar{2} \rangle$
$\langle 0; \bar{2211} \rangle$	$\sqrt{221/5} = \langle \bar{2}; \bar{112} \rangle + \langle 0; \bar{2112} \rangle$
$\langle 0; \bar{221111} \rangle$	$\sqrt{1517/13} = \langle \bar{2}; \bar{11112} \rangle + \langle 0; \bar{211112} \rangle$
$\langle 0; \bar{222211} \rangle$	$\sqrt{7565/29} = \langle \bar{2}; \bar{11222} \rangle + \langle 0; \bar{222112} \rangle$
$\langle 0; \bar{221}_6 \rangle$	$\sqrt{2600/17} = \langle \bar{2}; \bar{1}_6\bar{2} \rangle + \langle 0; \bar{21}_6\bar{2} \rangle$
$\langle 0; \bar{221}_8 \rangle$	$\sqrt{71.285/89} = \langle \bar{2}; \bar{1}_8\bar{2} \rangle + \langle 0; \bar{21}_8\bar{2} \rangle$
$\langle 0; \bar{2}_6\bar{11} \rangle$	$\sqrt{257.045/169} = \langle \bar{2}; \bar{112}_5 \rangle + \langle 0; \bar{2}_5\bar{112} \rangle$
$\langle 0; \bar{2211221}_4 \rangle$	$\sqrt{84.680/97} = \langle \bar{2}; \bar{1}_4\bar{22112} \rangle + \langle 0; \bar{211221}_4\bar{2} \rangle$
$\langle 0; \bar{221}_{10} \rangle$	$\sqrt{488.597/233} = \langle \bar{2}; \bar{1}_{10}\bar{2} \rangle + \langle 0; \bar{21}_{10}\bar{2} \rangle$

Tabel 4.1: De eerste tien waarden van het Lagrange spectrum

We zien in de tabel dat inderdaad de kettingbreuk van  $\alpha$  steeds uit enen en tweeën bestaan die in blokken van even lengte voorkomen. Een interessante vraag is welke mogelijkheden van enen en tweeën er zijn. Met een tegenvoorbeeld is het makkelijk in te zien dat niet alle mogelijke combinaties van 11 en 22 mogen voorkomen. Neem bijvoorbeeld  $\alpha = \langle \bar{1}; \bar{1112222} \rangle$ , dan is  $L(\alpha) \geq 3$ . Welke combinaties er wel mogelijk zijn laten we nu nog in het midden. In Hoofdstuk 6 komen we hier uitgebreid op terug.

## Hoofdstuk 5

# Markoff spectrum

### 5.1 Markoff spectrum

Beschouw een indefiniete reële binaire kwadratische vorm met positieve discriminant  $\Delta$

$$F(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2.$$

Definieer

$$M(F) = \sup_{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{\sqrt{\Delta}}{F(x, y)}.$$

Als er  $(x_1, y_1) \in \mathbb{Z}^2$  met  $(x_1, y_1) \neq (0, 0)$  zijn waarvoor  $F(x_1, y_1) = 0$ , dan zeggen we dat  $M(F) = \infty$ .

De set van alle indefiniete reële binaire kwadratische vormen met positieve discriminant noteren we als  $\mathcal{F}$ .

Definieer het Markoff spectrum,  $\mathcal{M}$ , als volgt:

$$\mathcal{M} = \{M(F) | F \in \mathcal{F}\}.$$

Net zoals bij het Lagrange spectrum kunnen we kettingbreuken gebruiken om waarden in dit spectrum te bepalen.

Zij  $A$  een dubbele oneindige rij van positieve gehele getallen:

$$A = \dots, a_{-j}, \dots, a_0, a_1, \dots, a_k, \dots$$

Definieer voor elk geheel getal  $i$

$$\lambda_i := \langle a_i, a_{i+1}, \dots \rangle + \langle 0, a_{i-1}, a_{i-2}, \dots \rangle,$$

en definieer  $M(A) := \sup \lambda_i(A)$ .

Een resultaat van Markoff is dat de verzameling  $\{M(A) | A\}$  gelijk is aan  $\mathcal{M}$  (zie [Mar1]). Ook is het zo dat als  $M(A) < 3$  dat dan  $A$  volledig periodiek is. Een gemakkelijk in te zien gevolg hiervan is dat  $\mathcal{L} \cap (2, 3) = \mathcal{M} \cap (2, 3)$ , aangezien we voor volledig periodieke  $A$  hebben dat  $\limsup M(A) = \sup M(A)$ . G. Freiman bewees in 1973 dat het Lagrange en Markoff spectrum niet hetzelfde zijn. Het grootste getal dat bekend is dat wel in  $\mathcal{M}$  zit maar niet in  $\mathcal{L}$ , is

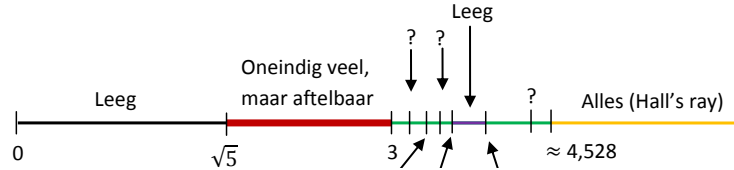
$$\langle \overline{2; 1_2, 2_3, 1} \rangle + \langle 0; 1, 2_3, 1_2, 2, 1, 2_4, \overline{1, 2, 1_2, 2_3} \rangle =: \beta.$$

Echter is het wel zo dat het Lagrange spectrum een onderverzameling van het Markoff spectrum is. We vatten dit samen in een stelling:

**Stelling 5.1.1** *Er geldt dat  $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$  en  $\mathcal{L} \cap [0, 3) = \mathcal{M} \cap [0, 3)$ .*

*Bewijs* Zie [Cus/Fla] Hoofdstuk 3. □

We zagen dat het Lagrange spectrum elk reëel getal groter dan  $\mu \approx 4.5278\dots$  bevat, dit geldt dus ook voor het Markoff spectrum. Wat er precies tussen 3 en  $\mu$  gebeurt is (nog) niet bekend, wel is het bijvoorbeeld bekend dat er een gat is tussen  $\sqrt{12}$  en  $\sqrt{13}$  en dat  $\sqrt{12}, \sqrt{13} \in \mathcal{M}$ . Tevens lijkt het erop dat  $\mathcal{L}$  en  $\mathcal{M}$  vanaf  $\sqrt{12}$  overeenkomen.



Figuur 5.1: Markoff spectrum

Zij  $(m_1, m_2, m)$  een Markoff drietal met  $\max(m_1, m_2, m) = m$ . Definieer

$$F_m(x, y) = mx^2 + (3m - 2u)xy + (v - 3u)y^2,$$

waarbij  $u$  de kleinste positieve oplossing is voor  $\pm m_2 x \equiv (\text{mod } m)$  (deze oplossing bestaat altijd, omdat  $\text{ggd}(m_2, m) = 1$ ) en  $v$  is zodanig dat  $u^2 + 1 = vm$ . Deze kwadratische vormen worden ook wel Markoff vormen genoemd. Merk op dat we voor  $m_2$  ook  $m_1$  hadden mogen kiezen, omdat  $m_1^2 \equiv -m_2^2 \pmod{m}$ .

**Stelling 5.1.2** *Zij  $F_m(x, y) = mx^2 + (3m_3 - 2u)xy + (v - 3u)y^2$ , met  $m, u, v$  als hierboven. Er geldt:*

1. *De discriminant van  $F_m(x, y)$  is  $9m^2 - 4$ .*
2. *Het minimum van  $|F_m(x, y)|$  genomen over alle gehele getallen  $x, y$ , niet beide 0, is  $F_m(1, 0) = m$ .*

*Bewijs* Zie Stelling 2 op p. 20 van [Cus/Fla] en het daarop volgend bewijs. □

Uit deze stelling volgt dat  $M(F_m) = \sqrt{9 - \frac{4}{m^2}}$  en we hebben dus dat

$$\left\{ \sqrt{9 - \frac{4}{m^2}} \mid m \text{ Markoff getal} \right\} \subset \mathcal{M}.$$

Maar we zien nu ook, omdat  $\sqrt{9 - \frac{4}{m^2}} < 3$  voor alle Markoff getallen  $m$ , dat

$$\left\{ \sqrt{9 - \frac{4}{m^2}} \mid m \text{ Markoff getal} \right\} \subset \mathcal{L}.$$

## Hoofdstuk 6

# Hurwitz spectrum

### 6.1 Hurwitz spectrum

Stel  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Definieer  $H(\alpha)$  als volgt:

$$H(\alpha) := \sup_{q \geq 0} \frac{1}{q \|q\alpha\|}.$$

Dus waar we bij  $L(\alpha)$  de limsup moeten uitrekenen, rekenen we voor de Hurwitz waarde  $H(\alpha)$  het supremum uit. Als we dit voor alle reële getallen doen krijgen we een spectrum van getallen dat we het Hurwitz spectrum zullen noemen, notatie  $\mathcal{H}$ . Dus

$$\mathcal{H} = \{H(\alpha) | \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Vanwege dezelfde beredenering als bij Stelling 4.1.2 geldt dat als  $\alpha = \langle 0; a_1, a_2, a_3, \dots \rangle$ , dat

$$H(\alpha) = \sup_{n \geq 0} a_{n+1} + \langle 0; a_{n+2}, a_{n+3}, \dots \rangle + \langle 0; a_n, \dots, a_1 \rangle.$$

Merk op de restrictie  $0 \leq \alpha \leq 1$  geen restrictie is voor  $\mathcal{H}$ , omdat  $H(\alpha) = H(\alpha + z)$ , voor alle  $z \in \mathbb{Z}$ .

Definieer voor  $n \geq 1$

$$H_n(\alpha) := a_n + \langle 0; a_{n+1}, a_{n+2}, \dots \rangle + \langle 0; a_{n-1}, \dots, a_1 \rangle,$$

waarbij  $H_1 = a_1 + \langle 0; a_2, a_3, \dots \rangle$ .

Het doel van dit hoofdstuk is om de volgende stellingen te bewijzen:

**Stelling 6.1.1 (Gbur, Gurwood)** *Stel  $\rho \in \mathcal{H}$  en neem aan dat  $\rho < 3$ . Er bestaat een Markoff getal  $m$ , zodanig dat*

$$\rho = \frac{3}{2} + \frac{1}{2m} \sqrt{9m^2 - 4}.$$

**Stelling 6.1.2 (Gbur, Gurwood)** Voor elk Markoff getal  $m$  is er een  $\alpha \in \mathbb{R}$  zodanig dat

$$H(\alpha) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2m} \sqrt{9m^2 - 4}.$$

Daarnaast willen we weten voor welke irrationale getallen  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $H(\alpha) < 3$  is. Zulke getallen noemen we de slecht benaderbare (irrationale) getallen van het Hurwitz spectrum, maar voor het gemak noemen we ze in dit hoofdstuk slecht benaderbare getallen.

Hieronder volgt een tabel voor de eerste 6 Markoff getallen met alle bijbehorende  $\alpha$ 's.

$m$	$\rho_m$	Bijbehorende $\alpha$ 's
1	$3/2 + \sqrt{5}/2$	$3/2 - \sqrt{5}/2 = \langle 0; 2\bar{1} \rangle$ $\sqrt{5}/2 - 1/2 = \langle 0; \bar{1} \rangle$
2	$3/2 + \sqrt{2}$	$-1 + \sqrt{2} = \langle 0; \bar{2} \rangle$ $2 - \sqrt{2} = \langle 0; 1\bar{1}\bar{2} \rangle$
5	$3/2 + \sqrt{221}/10$	$-11/10 + \sqrt{221}/10 = \langle 0; 2\bar{1}1\bar{2} \rangle$ $-9/10 + \sqrt{221}/10 = \langle 0; \bar{1}1\bar{2}\bar{2} \rangle$ $19/10 - \sqrt{221}/10 = \langle 0; 2\bar{2}\bar{2}1\bar{1} \rangle$ $21/10 - \sqrt{221}/10 = \langle 0; 1\bar{1}\bar{1}1\bar{2}\bar{2} \rangle$
13	$3/2 + \sqrt{1517}/26$	$-29/26 + \sqrt{1517}/26 = \langle 0; 2\bar{1}11\bar{1}\bar{1}\bar{2} \rangle$ $-23/26 + \sqrt{1517}/26 = \langle 0; \bar{1}111\bar{1}\bar{2}\bar{2} \rangle$ $55/26 - \sqrt{1517}/26 = \langle 0; 1\bar{1}\bar{1}\bar{1}11\bar{1}\bar{2}\bar{2} \rangle$ $49/26 - \sqrt{1517}/26 = \langle 0; 2\bar{1}1\bar{2}\bar{2}1\bar{1} \rangle$
29	$3/2 + \sqrt{7565}/58$	$-63/58 + \sqrt{7565}/58 = \langle 0; \bar{2}\bar{2}\bar{2}1\bar{1}\bar{2} \rangle$ $-53/58 + \sqrt{7565}/58 = \langle 0; \bar{1}\bar{1}\bar{2}\bar{2}\bar{2}\bar{2} \rangle$ $121/58 - \sqrt{7565}/58 = \langle 0; 1\bar{1}\bar{2}\bar{2}1\bar{1}\bar{2}\bar{2} \rangle$ $111/58 - \sqrt{7565}/58 = \langle 0; 2\bar{2}\bar{2}\bar{2}\bar{2}1\bar{1} \rangle$
34	$3/2 + 5\sqrt{26}/17$	$-19/17 + 5\sqrt{26}/17 = \langle 0; 2\bar{1}1111\bar{1}\bar{1}\bar{2} \rangle$ $-15/17 + 5\sqrt{26}/17 = \langle 0; \bar{1}1111\bar{1}\bar{1}\bar{2}\bar{2} \rangle$ $36/17 - 5\sqrt{26}/17 = \langle 0; 1\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}11\bar{1}\bar{1}\bar{2}\bar{2} \rangle$ $32/17 - 5\sqrt{26}/17 = \langle 0; 2\bar{1}111\bar{1}\bar{2}\bar{2}1\bar{1} \rangle$

Tabel 6.1: De eerst zes waarden van het Hurwitz spectrum

Als we bovenstaand tabel met Tabel 4.1 vergelijken dan zien we duidelijk overeenkomsten. We zullen zien dat er inderdaad een sterke relatie is tussen het Lagrange spectrum en het Hurwitz spectrum.

Als  $H(\alpha) < 3$  dan geldt ook zeker dat  $L(\alpha) < 3$  en dus weten we dat het staartstuk van de kettingbreuk van  $\alpha$  periodiek moet zijn. Dit gegeven gebruiken we niet en zullen Stelling 6.1.1 en Stelling 6.1.2 bewijzen zonder gebruik te maken van resultaten van het Lagrange spectrum. Een direct gevolg van Stelling 6.1.1 is het volgende:

**Gevolg 6.1.3** Zij  $\alpha \in \mathbb{R}$  en  $\varphi^2 = 3/2 + \sqrt{5}/2$ . Er zijn  $p, q \in \mathbb{Z}$ , met  $q > 0$  zó dat

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\varphi^2 q^2}.$$

De constante  $\varphi^2$  is de best mogelijke.

Aangenomen dat Vermoeden 3.1.4 waar is gaan we ook de volgende stelling bewijzen.

**Stelling 6.1.4** *Neem aan dat Vermoeden 3.1.4 waar is. Stel dat  $m > 2$  een Markoff getal is, dan zijn er precies vier verschillende  $\alpha \in (0, 1)$  waarvoor*

$$H(\alpha) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2m} \sqrt{9m^2 - 4}.$$

Als een Markoff getal groter dan 2 uniek is, dan zijn er precies vier verschillende  $\alpha \in (0, 1)$  met een Hurwitz waarde van  $3/2 + \frac{1}{2m} \sqrt{9m^2 - 4}$ . Omdat het uniciteits vermoeden van de Markoff getallen waar is voor getallen kleiner dan  $10^{105}$  weten we zeker dat we in Tabel 6.1 geen slecht benaderbare getallen hebben overgeslagen.

Omdat  $\|q\alpha\| = \|q - q\alpha\|$  geldt dat

$$H(\alpha) = \sup_{q \geq 1} \frac{1}{q \|q\alpha\|} = \sup_{q \geq 1} \frac{1}{q \|q(1 - \alpha)\|} = H(1 - \alpha).$$

Voor het Hurwitz spectrum mogen we ons dus beperken tot  $0 \leq \alpha \leq 1/2$ .

Definieer voor elke indefiniete binaire kwadratische vorm  $f(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$ , die nul representeert (dit betekent dat  $f$  een niet triviaal geheel nulpunt heeft):

$$\hat{H}(f) := \sup_{(x,y) \in \mathbb{Z} \setminus \{(x,y) | f(x,y)=0\}} \frac{\sqrt{\Delta}}{f(x,y)}.$$

Als we voor elk indefiniete binaire kwadratische vorm  $f$  die nul representeert,  $\hat{H}(f)$  uitrekenen, krijgen we een spectrum van getallen, notatie  $\hat{\mathcal{H}}$ . Dus

$$\hat{\mathcal{H}} = \left\{ \hat{H}(f) | f(x, y), f \text{ een indefiniete binaire kwadratische vorm die nul representeert} \right\}.$$

**Definitie 6.1.5** *Twee binaire kwadratische vormen*

$$f_1(x, y) = a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2, f_2(x, y) = a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2$$

*zijn equivalent,  $f_1 \sim f_2$ , als*

$$f_1(x, y) = f_2(Ax + by, Cx + dy),$$

*met  $A, B, C, D \in \mathbb{Z}$  zó dat  $AD - BC = \pm 1$ .*

**Lemma 6.1.6** *De relatie  $\sim$  is een equivalentie relatie.*

*Bewijs* Het is duidelijk dat  $\sim$  aan de eerste twee eisen van de definitie van een equivalentie relatie voldoet. De transitiviteit eis volgt uit de samenstelling van unimodulaire transformatie.  $\square$

Het is gemakkelijk in te zien dat als  $f \sim g$ , dan  $\hat{H}(f) = \hat{H}(g)$ , aangezien  $\Delta(f) = \Delta(g)$ .



**Stelling 6.1.7** *Er geldt dat  $\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{H}$ .*

*Bewijs* (⊃) Dat  $\mathcal{H} \subset \hat{\mathcal{H}}$  is duidelijk, aangezien  $f(x, y) = yx - \alpha x^2$  een nul representerende indefiniete binaire kwadratische vorm is met discriminant 1.

(⊂) Laat  $f(x, y) = a_3x^2 + a_2xy + a_1xy^2$  een indefiniete binaire kwadratische vorm zijn, die nul representeert. Omdat een reëel kwadratische binaire vorm met een niet triviaal geheel nulpunt altijd equivalent is aan een reëel kwadratische binaire vorm met een niet triviaal geheel nulpunt met de eigenschap dat  $f(1, 0) = 0$ , mogen we aannemen dat  $a_3 = 0$ . Ook geldt voor alle  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \neq 0$  dat  $\hat{H}(\lambda f) = \hat{H}(f)$ . We mogen daarom aannemen dat  $a_2 = 1$ .

Als we gebruik maken van de transformatie  $x' = x + ky, y' = y$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , zien we dat we mogen aannemen dat  $a_1 \in [-1/2, 1/2]$ . Door nu  $\alpha = c$  of  $\alpha = -c$  te kiezen hebben we dat  $0 \leq \alpha \leq 1/2$ .

Samenvattend hebben we nu  $f$  gereduceerd tot  $y(x - \alpha y)$  met  $0 \leq \alpha \leq 1/2$ ,  $\Delta(y(x - \alpha y)) = 1$ . Hieruit volgt dat

$$\hat{H}(f) = \sup \frac{1}{|y(x - \alpha y)|},$$

waar het supremum berekend wordt over gehele  $x, y$  met  $y \neq 0$  en  $x \neq \alpha y$ . □

We zien nu ook dat het probleem van het vinden van slecht benaderbare irrationale getallen gereduceerd is tot  $\alpha$ 's, waarvoor  $0 \leq \alpha \leq 1/2$ .

We gaan nu op zoek naar irrationale getallen  $\alpha$  waarvoor  $H(\alpha) < 3$ . Een opmerking vooraf; voor het gemak zullen we een kettingbreuk van de vorm  $\alpha = \langle 0; \overline{a_1, a_2, \dots, a_n} \rangle$  ook zuiver periodiek noemen.

De volgende twee stellingen zijn belangrijk voor het bepalen van de slecht benaderbare getallen en zullen veelvuldig worden toegepast.

**Stelling 6.1.8** *Neem aan dat  $\alpha = \langle a_0; a_1 \dots a_n b_1 b_2 \dots \rangle$  en  $\beta = \langle a_0; a_1 \dots a_n c_1 c_2 \dots \rangle$ , waarbij  $n \geq 0, a_0 \in \mathbb{Z}, a_1, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, c_1, c_2, \dots \in \mathbb{N}$ , met  $b_1 \neq c_1$ . Er geldt nu voor oneven  $n$  dat  $\alpha > \beta$  dan en slechts dan als  $b_1 > c_1$ ; voor even  $n$  geldt dat  $\alpha > \beta$  dan en slechts dan als  $b_1 < c_1$ .*

*Bewijs* Volledige inductie naar  $n$ . □

**Stelling 6.1.9** *Voor alle even  $r \geq 2$  en alle  $\alpha \geq 1, \beta \geq 1$  geldt dat:  $\langle 2; 1_r \alpha \rangle + \langle 0; 21_{r-2} \beta \rangle \leq 3$  dan en slechts dan als  $\beta \leq \alpha$ . We hebben een gelijkheid dan en slechts dan als  $\beta = \alpha$ .*

*Bewijs* Voor elke  $x \geq 1$  geldt,

$$\langle 2; 11x \rangle + \langle 0; 2x \rangle = 3. \tag{6.1}$$

Voor even  $r \geq 2$  zij  $x = \langle 1_{r-2} \alpha \rangle$ . Vanwege Stelling 6.1.8 en (6.1) hebben we dat

$$\langle 2; 1_r \alpha \rangle + \langle 0; 21_{r-2} \beta \rangle < 3 \Leftrightarrow \langle 0; 21_{r-2} \beta \rangle < \langle 0; 2x \rangle \Leftrightarrow \beta < \alpha.$$

Hiermee is de stelling bewezen. □

We gaan nu een aantal beperkingen opleggen voor de wijzergetallen van de kettingbreukontwikkeling van slecht benaderbare getallen  $\alpha$ .

Stel dat alle wijzergetallen van  $\alpha$  allemaal 1 zijn, dus  $\alpha = \langle 0; \bar{1} \rangle$ . Het is gemakkelijk in te zien dat

$$H(\alpha) = 1 + \langle 0; \bar{1} \rangle + \langle 0; 1 \rangle = 2 + \frac{\sqrt{5} - 1}{2},$$

immers  $\langle 0; 1 \rangle > \langle 0; (1)_n \rangle$  voor alle  $n > 1$ . Verder geldt dat  $1 - \alpha = \langle 0; 2\bar{1} \rangle$  en  $H(\alpha) = H(1 - \alpha)$ .

Stel nu dat alle wijzergetallen van  $\alpha$  een waarde hebben van 2, dan is het gemakkelijk in te zien dat

$$H(\alpha) = 2 + \langle 0; \bar{2} \rangle + \langle 0; 2 \rangle = \frac{3}{2} + \sqrt{2},$$

immers  $\langle 0; 2 \rangle > \langle 0; (2)_n \rangle$  voor alle  $n > 1$ .

We mogen ons nu beperken tot de slecht benaderbare getallen waarvoor er een  $n \geq 2$  bestaat, waarvoor  $a_n = 2$  en  $a_{n-1} = 1$  of  $a_{n+1} = 1$ .

Stel dat  $a_n = 2$  en  $a_{n-1} = a_{n+1} = 1$ , dan

$$H(\alpha) \geq H_n(\alpha) \geq \langle 2; 11 \rangle + \langle 0; 11 \rangle = 3.$$

Het tweede  $\geq$  teken volgt uit Stelling 6.1.8. Het rijtje 121 kan dus niet voorkomen in de kettingbreukontwikkeling van  $\alpha$ .

Stel nu dat  $a_n = 2, a_{n+1} = 1, a_{n+2} = 2, n \geq 2$ , dan weten we van voorgaande dat  $a_{n-1} = 2$  (121 kan niet voorkomen). We krijgen,

$$H(\alpha) \geq H_n(\alpha) = \langle 2; 12 \dots \rangle + \langle 0; 2 \dots \rangle \geq \langle 2; 12 \rangle + \langle 0; 21 \rangle > 3.$$

Als  $n = 1$ , dan

$$H(\alpha) \geq H_3(\alpha) = \langle 2; \dots \rangle + \langle 0; 12 \rangle \geq 2 + \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{13}{6} + \frac{1}{2}\sqrt{3} > 3.$$

Het rijtje 212 kan eveneens niet voorkomen in de kettingbreukontwikkeling van  $\alpha$ .

**Stelling 6.1.10** *Zij  $\alpha$  een slecht benaderbaar getal, nu geldt het volgende:*

*In de kettingbreuk van  $\alpha$  komen de enen in blokken van even lengte voor. Als we het eerste wijzergetal van de kettingbreukontwikkeling van  $\alpha$  niet meetellen, dan komen de tweeën ook in blokken van even lengte voor:*

$$\alpha = \langle 0; 2(11)_{r_1} 22(11)_{r_2} 2 \dots \rangle,$$

voor een oneindige rij  $R = \{r_1, r_2, \dots\}$  van niet negatieve gehele getallen.

*Bewijs* We hebben al gezien dat we ons mogen beperken tot  $\alpha = \langle 0; 2a_2 \dots \rangle$  waarvoor er een  $n \geq 2$  is met  $a_n = 2$  en  $a_{n-1} = 1$  of  $a_{n+1} = 1$ . Omdat het voor onderstaand argument niet uitmaakt of  $a_{n-1} = 1$  of  $a_{n+1} = 1$  nemen we aan dat  $a_{n+1} = 1$ . We hebben

$$\alpha = \langle 0; a_1 \dots a_{n-2} 2211 a_{n+3} \dots \rangle.$$

Noteer  $x = \langle a_{n+3} a_{n+4} \dots \rangle, y = \langle a_{n-2} \dots a_1 \rangle$ . Omdat  $H_n(\alpha) < 3$  moet omwille van Stelling 6.1.9 gelden dat  $x > y$ .

Stel dat  $a_{n-2} = 1$ , dan moet gelden, omdat 212 niet kan voorkomen, dat  $a_{n-3} = 1$ . Uit  $H_{n-1}(\alpha) < 3$  volgt nu dat  $\langle 1; 1x \rangle < \langle a_{n-4}; a_{n-5} \dots \rangle$  en dus ook  $\langle 1; 111x \rangle < \langle 1; 1a_{n-4}a_{n-5} \dots \rangle$ . Er geldt dus dat  $y > \langle 1; (1)_3x \rangle$ .

Stel dat  $a_{n-2} = 2$ , dan geldt ook zeker dat  $y > \langle 1; (1)_3x \rangle$ .

We hebben nu dat als  $H(\alpha) < 3$ , dan

$$x > y > \langle 1; (1)_3x \rangle > \langle 1; (1)_3y \rangle$$

$\Rightarrow x > y > \langle \bar{1} \rangle$ . Hieruit volgt dat in de kettingbreukontwikkeling van  $\alpha$  de enen in blokken van even lengte voorkomen.

Stel dat er een blok van tweeën is van lengte  $k + 1$  en noem het eerste wijzergetal van dat blok  $a_n$ , dus  $a_n = a_{n+1} = a_{n+2} = \dots = a_{n+k} = 2$  en  $a_{n+k+1} = 1$ . Neem nu aan dat  $a_{n-1}$  bestaat, dan weten we omdat 212 niet voorkomt en  $a_1 = 2$  dat  $a_{n-1} = a_{n-2} = 1$ . Schrijf  $x = \langle a_{n-3}; a_{n-4}, \dots, a_1 \rangle$  en  $y = \langle a_{n+k+1}; a_{n+k+2}, \dots \rangle$ . Uit  $H_n(\alpha) < 3$  en Stelling 6.1.9 volgt dat  $x > \langle 2_{k-1}y \rangle$  en dus ook,

$$\langle 2; (2)_ky \rangle < \langle 2; 2x \rangle. \quad (6.2)$$

Omdat  $a_{n-2} = 1$  en  $a_1 = 2$  weten we dat  $a_{n-3}$  bestaat en er moet gelden dat  $a_{n-3} = 2$  omdat de enen in blokken van even lengte voorkomen. Als  $n - 3 = 1$ , dan hebben we dat  $x = \langle 2 \rangle$ . Als  $n - 3 > 1$ , dan  $a_{n-4} = 2$  (121 kan niet voorkomen). Uit  $H_{n-3}(\alpha) < 3$  en Stelling 6.1.9 volgt dat

$$x < \langle 2; (2)_{k+2}y \rangle. \quad (6.3)$$

Als we nu (6.2) en (6.3) combineren dan zien we dat

$$\langle 2; (2)_ky \rangle < \langle \bar{2} \rangle.$$

Maar omdat  $a_{n+k+1} = 1$  is vanwege Stelling 6.1.8,  $k$  even alleen als  $y = 0$  en dus moet  $k$  oneven zijn. □

## 6.2 De gemiste $S$ -rij

In [Gbu] wordt er beweerd dat de slecht benaderbare irrationale getallen tussen 0 en  $1/2$  zuiver periodiek zijn. Maar als we de Tabel 6.1 bekijken dan zien we dat dit niet waar kan zijn, want er staan niet zuiver periodieke getallen tussen.

Vooruitlopend op de volgende paragraaf over  $R$ - en  $S$ -rijen laten we zien dat het mis gaat bij de afleiding van de  $S$ -rijen op p.98-100:

We zien daar dat er twee mogelijke Types zijn voor een  $R$ -rij:

Type 1:  $R = \{(r)_\infty\}$

Type 2:  $R = \{(r-1)_{s_1}, r, (r-1)_{s_2}, \dots\}$

Waarbij  $S = \{s_1, s_2, s_3, \dots\}$  een oneindige rij is van niet negatieve gehele getallen.

En we zien dat er twee Types zijn voor een  $S$ -rij:

Type 1:  $S = \{(s)_\infty\}$

Type 2:  $S = \{s, (s-1)_{t_1}, s, (s-1)_{t_2}, \dots\}$

Waarbij  $T = \{t_1, t_2, t_3, \dots\}$  een oneindige rij is van niet negatieve gehele getallen.

Als voorbeeld bekijken we de kettingbreuk  $\langle 0; \overline{22211} \rangle$ . De bijbehorende  $R$ -rij is van Type 2:  $R = \{0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots\}$ , de  $S$ -rij is niet van Type 1, dus het moet wel van Type 2 zijn, maar,  $S = \{1, 0, 0, 0, 0, \dots\}$ , dit betekent dat  $t_1 = \infty$ , dus  $S$  is niet van Type 2. Tegenspraak met dat er maar twee types zijn.

In de volgende paragraaf zal blijken dat de extra  $S$ -rij van de vorm  $S = \{s, (s-1)_\infty\}$  is.

## 6.3 $R$ - en $S$ -rijen

### 6.3.1 Eigenschappen van de $R$ -rijen

Een oneindige rij  $\{r_1, r_2, \dots\}$  van niet negatieve gehele getallen, waarvoor

$$\alpha = \langle 0; 2(11)_{r_1} 22(11)_{r_2} 2 \dots \rangle$$

een slecht benaderbaar getal is, noemen we een  $R$ -rij. We gaan in deze paragraaf eigenschappen van zo'n  $R$ -rij bewijzen.

**Lemma 6.3.1** *Twee opeenvolgende elementen van een  $R$ -rij verschillen maximaal 1.*

*Bewijs* Stel dat er twee opeenvolgende elementen  $r_j, r_{j+1}$  van een  $R$ -rij een verschil hebben die groter is dan 2, dus  $|r_j - r_{j+1}| \geq 2$ . We kunnen nu twee verschillende gevallen onderscheiden, enerzijds dat  $r_j - r_{j+1} \geq 2$ , anderzijds dat  $r_j - r_{j+1} \leq -2$ .

- $r_j - r_{j+1} \geq 2$ : Omdat  $r_j \geq r_{j+1} + 2$  en

$$\langle 2; (11)_{r_j} 2 \dots 2(11)_{r_1} 2 \rangle + \langle 0; 2(11)_{r_{j+1}} 22(11)_{r_{j+2}} 2 \dots \rangle \leq H(\alpha) < 3,$$

moet volgens Stelling 6.1.9 gelden dat

$$\langle (11)_{r_j - r_{j+1} - 1} 22(11)_{r_{j-1}} \dots 2(11)_{r_1} 2 \rangle > \langle 22(11)_{r_{j+2}} 2 \dots \rangle.$$

Omdat  $r_j - r_{j+1} - 1 > 0$  is de linkerzijde strikt kleiner dan 2, maar de rechterzijde is groter dan 2, tegenspraak .

- $r_j - r_{j+1} \leq -2$ : Omdat  $r_j \leq r_{j+1} - 2$  en

$$\langle 2; (11)_{r_{j+1}} 22(11)_{r_{j+2}} 2 \dots \rangle + \langle 0; 2(11)_{r_j} 2 \dots 2(11)_{r_1} 2 \rangle \leq H(\alpha) < 3,$$

moet volgens Stelling 6.1.9 gelden dat

$$\langle (11)_{r_{j+1} - r_j - 1} 22(11)_{r_{j+2}} \dots \rangle > \langle 22(11)_{r_{j-1}} 2 \dots 2(11)_{r_1} 2 \rangle.$$

Omdat  $r_j - r_{j+1} - 1 > 0$  is de linkerzijde strikt kleiner dan 2, maar de rechterzijde is groter dan 2, tegenspraak .

Hieruit volgt dat twee opeenvolgende elementen van een  $R$ -rij een maximaal verschil van 1 hebben.  $\square$

We gaan nu de  $R$ -rijen bekijken waarvoor er  $j$  bestaan waarvoor geldt dat  $r_j \neq r_{j+1}$ . Als we de verschillen

$$r_{j-1} - r_{j+2}, r_{j-2} - r_{j+3}, \dots, r_1 - r_{2j} \tag{6.4}$$

bekijken dan kunnen we meer eigenschappen van de  $R$ -rij afleiden.

We krijgen nu twee gevallen:

- Geval 1:  $r_j - r_{j+1} = 1$ . Omdat  $r_j = r_{j+1} + 1$  en

$$\langle 2; (11)_{r_j} 22(11)_{r_{j-1}} 2 \dots 2(11)_{r_1} 2 \rangle + \langle 0; 2(11)_{r_{j+1}} 22(11)_{r_{j+2}} 22 \dots \rangle \leq H(\alpha) < 3,$$

moet gelden vanwege Stelling 6.1.9

$$\langle 22(11)_{r_{j-1}} 2 \dots 2(11)_{r_1} 2 \rangle > \langle 22(11)_{r_{j+2}} 22 \dots \rangle. \quad (6.5)$$

De verschillen in (6.4) kunnen niet allemaal nul zijn, vanwege Stelling 6.1.9.

We hebben nu drie mogelijkheden:

- Geval 1A:  $j = 1$ .
- Geval 1B: Minimaal één van de verschillen in (6.4) is niet nul, dus er is een  $1 \leq t < j$  zó dat  $r_{j-t} \neq r_{j+1+t}$ . Kies de kleinste  $t$  dan moet volgens (6.5) gelden dat

$$\langle (11)_{r_{j-t}} 2 \dots 2(11)_{r_1} 2 \rangle > \langle (11)_{r_{j+t+1}} 22 \dots \rangle$$

$\Rightarrow r_{j-t} < r_{j+t+1}$ . Dus het eerste niet nul verschil in (6.4) is  $\leq -1$ , vanwege Lemma 6.3.1 moet gelden dat het eerste niet nul verschil -1 is.

- Geval 1C:  $r_{j-t} = r_{j+1+t}$  voor alle  $j > t \geq 1$ . Maar ongelijkheid (6.5) impliceert dan dat  $2 > \langle 2; 2 \dots \rangle > 2$ , tegenspraak. Geval 1C kan dus niet optreden.

- Geval 2:  $r_j - r_{j+1} = -1$ . Nu hebben we dat  $r_{j+1} = r_j + 1$  en

$$\langle 2; (11)_{r_{j+1}} 22 \dots \rangle + \langle 0; 2(11)_{r_j} 2 \dots 2(11)_{r_1} 2 \rangle < 3,$$

impliceert dat

$$\langle 22(11)_{r_{j+2}} 2 \dots \rangle > \langle 22(11)_{r_{j-1}} 2 \dots 2(11)_{r_1} 2 \rangle. \quad (6.6)$$

We hebben nu drie mogelijkheden:

- Geval 2A:  $j = 1$ .
- Geval 2B: Minimaal één van de verschillen in (6.4) is niet nul, dus er is een  $1 \leq t < j$  zó dat  $r_{j-t} \neq r_{j+1+t}$ . Kies de kleinste  $t$  dan moet volgens (6.5) geldt dat

$$\langle (11)_{r_{j+t+1}} 22 \dots \rangle > \langle (11)_{r_{j-t}} 2 \dots 2(11)_{r_1} 2 \rangle$$

$\Rightarrow r_{j-t} > r_{j+t+1}$ . Dus het eerste niet nul verschil in (6.4) is  $\geq 1$ , vanwege Lemma 6.3.1 moet gelden dat het eerste niet nul verschil 1 is.

- Geval 2C:  $r_{j-t} = r_{j+1+t}$  voor alle  $j > t \geq 1$ , dus de verschillen in (6.4) zijn allemaal nul.

**Lemma 6.3.2** *Elke twee elementen van een  $R$ -rij verschillen maximaal 1.*

*Bewijs* Stel dat er twee elementen van een  $R$ -rij zijn die meer dan 1 verschillen. Als er meer van dat soort paren zijn, kies dan het paar met het kleinste index verschil, zeg dat dit verschil  $s + 1$  is. Vanwege Lemma 6.3.1 moet gelden dat  $s \geq 1$ , tevens moet gelden vanwege dit lemma dat het verschil van het (gekozen) paar 2 is. Noteer het grootste element van het paar als  $r_j = r$ .

Neem eerst aan dat de index van de andere groter is dan  $j$ :  $r_{j+s+1} = r - 2$ . Dan is de  $R$ -rij van de vorm

$$R = \{r_1, \dots, r_{j-1}, r = r_j, (r-1)_s, r-2 = r_{j+s+1}, \dots\}.$$

We hebben nu dat  $r_{j+s} - r_{j+s+1} = 1$  en we zitten in Geval 1B ( $r_{j+s-1}$  bestaat). Beschouw nu de volgende verschillen

$$r_{j+s-1} - r_{j+s+2}, r_{j+s-2} - r_{j+s+3}, \dots, r_1 - r_{2j+s} \quad (6.7)$$

De verschillen in (6.7) kunnen niet allemaal nul zijn, aangezien we in Geval 1B zitten. Kies nu de kleinste  $t$  zó dat  $r_{j+s-t} - r_{j+s+t+1} = -1$ . We gaan nu twee mogelijkheden bekijken, enerzijds dat  $t < s$ , anderzijds  $t \geq s$ :

- Als  $t < s$ , dan  $r_{j+s-t} = r-1$  en omdat  $r_{j+s-t} - r_{j+s+t} = -1$  moet gelden dat  $r_{j+s+t+1} = r$ . Maar nu hebben we dat  $r_{j+s+1} - r_{j+s+t+1} = -2$  en  $(j+s+t+1) - (j+s+1) = t < s+1$ , tegenspraak met de minimaliteit van  $s$ .
- Als  $t \geq s$ , dan geldt in het bijzonder dat  $r_{j+2s+1} = r_j = r$ . Maar nu hebben we dat  $r_{j+s+1} - r_{j+2s+1} = -2$  en  $(j+2s+t+1) - (j+s+1) = s < s+1$ , tegenspraak met de minimaliteit van  $s$ .

Neem nu aan dat  $j$  de grootste index is van het paar. De  $R$ -rij is nu van de vorm

$$R = \{r_1, \dots, r_{j-s-2}, r-2 = r_{j-s-1}, (r-1)_s, r = r_j, \dots\}.$$

We hebben nu dat  $r_{j-1} - r_j = -1$  en we zitten in Geval 2. Maar als we dezelfde bewijsvoering gebruiken als voor het geval dat  $r_{j-1} - r_j = 1$ , dan zien we dat we in zowel Geval 2A als Geval 2B een tegenspraak krijgen met de minimaliteit van  $s$ .

□

Laat  $r$  het grootste element zijn van een  $R$ -rij. We hebben nu dat elke  $R$ -rij een van de volgende vier vormen moet zijn:

$$\begin{aligned} \text{Type 1: } & R = \{(r_\infty)\} \\ \text{Type 2: } & R = \{(r-1)_{s_1}, r, (r-1)_{s_2}, \dots\}, s_1 \geq 1 \\ \text{Type 3: } & R = \left\{r, (r-1)_{s'_1}, r, (r-1)_{s'_2}, \dots\right\} \\ \text{Type 4: } & R = \{(r-1)_{s_1}, r, \dots, r, (r-1)_{s_n}, r, (r-1)_\infty\}, s_1 \geq 1 \end{aligned}$$

Waarbij  $S = \{s_1, s_2, \dots\}$  een oneindige rij van niet negatieve gehele getallen is met  $s_1 \geq 1$ . We noemen deze rij een  $S$ -rij. En  $S' = \{s'_1, s'_2, \dots\}$  is een oneindige rij van niet negatieve gehele getallen, waarbij er minimaal één getal groter is dan 0, of een eindige rij waarbij er een  $n$  is zó dat  $s'_n = \infty$ .

Stel dat  $R$  van Type 3 is, dan is er een  $k$  zó dat  $s'_k \geq 1$ . Noteer  $r_{j+1}$  als de eerste term van  $(r-1)_{s'_k}$ . We hebben nu dat  $r_j - r_{j+1} = 1$  en we zitten in Geval 1. Stel eerst dat er een  $k > 1$  is zó dat  $s'_k \geq 1$ , dan is er een  $1 \leq t \leq j$  zó dat  $r_{j-t} - r_{j+t+1} = -1$ . Maar  $r_{j-t} = r$  en dus moet gelden dat  $r_{j+s+1} = r+1$ , tegenspraak met dat  $r$  het grootste element is van de  $R$ -rij.

Stel nu dat  $k = 1$  en dat dit de enige is, dan geldt dat  $r_1 - r_2 = 1$ . Er moet gelden dat

$$\langle 0; 2(11)_{r_2} 22(11)_{r_3} 2 \dots \rangle + \langle 2; (11)_{r_1} 2 \rangle \leq H(\alpha) < 3$$

Maar uit Stelling 6.1.9 volgt nu dat  $\langle 22(11)_{r_3}2\dots \rangle \leq 2$ , tegenspraak. Type 3 kan dus niet voorkomen als  $R$ -rij.

Stel dat  $R$  van Type 4 is, neem dan het eerste element van  $(r-1)_\infty$  en noem die  $r_{j+1}$ . We hebben nu dat  $r_j - r_{j+1} = 1$  en we zitten in Geval 1. Er is een  $1 \leq t \leq j$  zó dat  $r_{j-t} - r_{j+t+1} = -1$ . Maar  $r_{j+t+1} = r-1$  en omdat  $r_{j-t} - r_{j+t+1} = -1$  moet gelden dat  $r_{j-t} = r-2$ , tegenspraak. Type 4 kan dus niet voorkomen als  $R$ -rij.

We hebben nu de volgende stelling bewezen.

**Stelling 6.3.3** *Een  $R$ -rij is van Type 1 of Type 2 zijn.*

Samenvattend voldoet een  $R$ -rij  $= \{r_1, r_2, r_3, \dots\}$  aan de volgende eigenschappen:  $r_i \in \{r, r-1\}$  voor alle  $i \geq 1$  en voor elke  $j > 1$  geldt:

- Als  $r_j - r_{j+1} = 1$ , dan is er een  $t$ ,  $1 \leq t < j$  zó dat  $r_{j-t} - r_{j+1+t} = -1$  en  $r_{j-\tau} - r_{j+1+\tau} = 0$ , voor  $\tau = 1, \dots, t-1$ .
- Als  $r_j - r_{j+1} = -1$ , dan ofwel  $r_{j-\tau} - r_{j+1+\tau} = 0$ , voor  $\tau = 1, \dots, j-1$  ofwel er is een  $t$ ,  $1 \leq t < j$  zó dat  $r_{j-t} - r_{j+1+t} = 1$  en  $r_{j-\tau} - r_{j+1+\tau} = 0$ , voor  $\tau = 1, \dots, t-1$ .

Met behulp van deze eigenschappen hebben we, op het uitsluiten van Type 3 na, Stelling 6.3.3 bewezen.

### 6.3.2 Eigenschappen van de $S$ -rijen

We gaan in deze paragraaf bekijken wat de eigenschappen zijn van een  $S$ -rij. Om deze eigenschappen af te leiden gebruiken we de eigenschappen van een  $R$ -rij.

**Lemma 6.3.4** *Twee opeenvolgende elementen van een  $S$ -rij verschillen maximaal 1.*

*Bewijs* Stel er is een index  $j$  waarvoor geldt dat  $|s_j - s_{j+1}| \geq 2$ , schrijf dan  $r_k$  als de laatste term van  $(r-1)_{s_j}$ . Het kan zo zijn dat  $s_j = 0$ , noteer dan  $r_{k+2}$  als de eerste term van  $(r-1)_{s_{j+1}}$ .

Als  $s_{j+1} \geq s_j + 2$ , beschouw dan het verschil  $r_{k+1} - r_{k+2} = 1$ . We zitten in Geval 1. Omdat  $s_{j+1} \geq s_j + 2$  hebben we dat het eerste niet nul verschil in (6.4) gelijk is aan  $r_{k-s_j} - r_{k+s_j+1} = 1$ , tegenspraak.

Als  $s_j \geq s_{j+1} + 2$ , beschouw dan het verschil  $r_k - r_{k+1} = -1$ . We zitten nu in Geval 2. Omdat  $s_j \geq s_{j+1} + 2$  hebben we dat het eerste niet nul verschil in (6.4) gelijk is aan  $r_{k-s_{j+1}} - r_{k+s_{j+1}+1} = -1$ , tegenspraak. Hieruit volgt dat elk twee opvolgende elementen van een  $S$ -rij maximaal maar 1 verschillen.  $\square$

We gaan nu de  $S$ -rijen bekijken waarvoor er  $k$  bestaan waarvoor  $s_k \neq s_{k+1}$ . Als we de verschillen

$$s_{k-1} - s_{k+2}, s_{k-2} - s_{k+2}, \dots, s_1 - s_{2k} \quad (6.8)$$

onderzoeken, dan kunnen we weer twee gevallen onderscheiden.

- Geval 1\*:  $s_k - s_{k+1} = 1$ . We hebben nu 3 mogelijkheden:

– Geval 1\*A:  $k = 1$ .

- Geval 2\*B: Er is een niet nul verschil in (6.8). Als we  $r_j$  als het laatste element van  $(r-1)_{s_k}$  noteren, dan geldt dat  $r_j - r_{j+1} = -1$  en we zitten in Geval 2. Als de verschillen in (6.8) niet allemaal nul zijn, dan moet vanwege Geval 2 gelden dat het eerste niet nul verschil in (6.4) +1 moet zijn. Hieruit volgt dat het eerste niet nul verschil in (6.8) -1 moet zijn.
- Geval 1\*C: Alle verschillen in (6.8) zijn nul.
- Geval 2\*:  $s_k - s_{k+1} = -1$ . We kunnen weer drie gevallen onderscheiden.
  - Geval 2\*A:  $s_k = s_1$ .
  - Geval 2\*B: Er is een niet nul verschil in (6.8). Als we  $r_{j+1}$  als de eerste term van  $(r-1)_{s_{k+1}}$  noteren, dan geldt dat  $r_j - r_{j+1} = 1$  en we zitten in Geval 1. Niet alle verschillen in (6.8) kunnen nul zijn, dus het eerste niet nul verschil in (6.4) moet -1 zijn. Hieruit volgt dat het eerste niet nul verschil in (6.8) +1 moet zijn.
  - Geval 2\*C: Alle verschillen in (6.8) zijn nul. Als we weer  $s_{j+1}$  als de laatste term van  $(s-1)_{t_l}$  noteren, dan geldt  $r_j - r_{j+1} = 1$  en we zitten in Geval 1. Maar als alle verschillen in (6.8) nul zijn, dan zijn alle verschillen in (6.4) ook nul, tegenspraak. Geval 2\*C kan dus niet optreden.

**Lemma 6.3.5** *Elke twee elementen van een S-rij verschillen maximaal 1.*

*Bewijs* Stel dat er twee elementen van een S-rij zijn, die meer dan 1 verschillen. Als er meer paren zijn die meer dan 1 verschillen, kies dan het paar met het kleinste index verschil, zeg dat dit verschil  $v+1$  is. Vanwege Lemma 6.3.4 moet gelden dat  $v+1 \geq 2$ , tevens moet gelden vanwege dit lemma dat het verschil van het (gekozen) paar 2 is. Noteer het grootste element van het paar als  $s_k = s$ .

Neem eerst aan dat de index van de andere groter is dan  $k$ :  $s_{k+v+1} = s_k - 2$ . De S-rij is van de vorm

$$S = \{s_1, \dots, s_{k-1}, s_k = s, (s-1)_v, s_{k+v+1} = s-2, \dots\}$$

We hebben nu dat  $s_{k+v} - s_{k+v+1} = 1$  en we zitten in Geval 1\*. Maar in zowel Geval 1A\* als Geval 1B\*, krijgen we op eenzelfde manier als bij het bewijs voor Stelling 6.3.2 een tegenspraak met de minimaliteit van  $v$ .

Neem nu aan dat de index van de andere kleiner is dan  $k$ :  $s_{k-v-1} = s_k - 2$ . De S-rij is van de vorm

$$S = \{s_1, \dots, s_{k-1}, s_{k-v-1} = s-2, (s-1)_v, s_k = s, \dots\}$$

We hebben nu dat  $s_{k-1} - s_k = -1$  en we zitten in Geval 2B\*. Maar we krijgen nu een tegenspraak met de minimaliteit van  $v$ .

□

Laat  $s$  het grootste element zijn van een S-rij. We hebben nu dat elke S-rij een van de volgende vijf vormen moet zijn:

- Type 1:  $S = \{(s_\infty)\}$
- Type 2:  $S = \{s, (s-1)_{t_1}, s, (s-1)_{t_2}, \dots\}$
- Type 3:  $S = \{s, (s-1)_\infty\}$
- Type 4:  $S = \left\{ (s-1)_{t'_1}, s, (s-1)_{t'_2}, s, \dots \right\}, t'_1 > 0$
- Type 5:  $S = \{s, (s-1)_{t_1}, s, \dots, s, (s-1)_{t_n}, s, (s-1)_\infty\}$



Hier is  $T = \{t_1, t_2, \dots\}$  een oneindige rij van niet negatieve gehele getallen met minimaal één getal groter dan 0. We noemen deze rij een  $T$ -rij. En  $T' = \{t'_1, t'_2, \dots\}$  is een oneindige rij van niet negatieve gehele getallen, waarbij er minimaal één getal groter is dan 0, of een eindige rij waarbij er een  $n$  is zó dat  $t'_n = \infty$ .

Als  $S$  van Type 4 is, noteer dan  $s_k$  als de laatste term van  $(s-1)_{t_1}$ , dan geldt dat  $s_k - s_{k+1} = -1$  en we zitten in Geval 2\*. Als  $t_1 > 1$ , dan moet het eerste niet nul verschil in (6.4) -1 zijn, tegenspraak. Blijft nog over het geval dat  $t_1 = 1$ . We hebben nu dat  $s_k - s_{k+1} = -1$ . Noteer  $r_{j+1}$  als de eerste term van  $(r-1)_{s_{k+1}}$ , er geldt nu dat  $r_j - r_{j+1} = 1$  en we zitten in Geval 1. De verschillen in (6.4) zijn allemaal nul, aangezien  $s_2 = s_1 + 1$ , tegenspraak.

Als  $S$  van Type 5 is, noteer dan  $s_{k+1}$  als de eerste term van  $(s-1)_\infty$ , dan geldt dat  $s_k - s_{k+1} = 1$  en we zitten in Geval 1\*B (de verschillen in (6.8) zijn duidelijk niet allemaal nul). Maar dan moet het eerste niet nul verschil in (6.8) -1 zijn en dat is niet waar. We moeten wel de conclusie trekken dat een  $S$ -rij niet van Type 5 kan zijn.

We hebben nu de volgende stelling bewezen:

**Stelling 6.3.6** *Een  $S$ -rij is van Type 1,2 of 3.*

Samenvattend voldoet een  $S$ -rij  $= \{s_1, s_2, s_3, \dots\}$  aan de volgende eigenschappen:  $s_i \in \{s, s-1\}$  voor alle  $i \geq 1$  en voor elke  $k > 1$  geldt:

- Als  $s_k - s_{k+1} = 1$ , dan ofwel  $s_{k-\tau} - s_{k+1+\tau} = 0$ , voor  $\tau = 1, \dots, k-1$  ofwel er is een  $t$ ,  $1 \leq t < k$  zó dat  $s_{k-t} - s_{k+1+t} = -1$  en  $s_{k-\tau} - s_{k+1+\tau} = 0$ , voor  $\tau = 1, \dots, t-1$ .
- Als  $s_k - s_{k+1} = -1$ , dan is er een  $t$ ,  $1 \leq t < k$  zó dat  $s_{k-t} - s_{k+1+t} = 1$  en  $s_{k-\tau} - s_{k+1+\tau} = 0$ , voor  $\tau = 1, \dots, t-1$ .

Met behulp van deze eigenschappen hebben we Stelling 6.3.6 bewezen.

Merk op dat het verschil tussen  $R$ - en  $S$ -rijen is dat we voor het geval  $s_k - s_{k+1} = 1$  mogen hebben dat  $s_{k-\tau} - s_{k+1+\tau} = 0$ ,  $\tau = 1, \dots, k-1$  en voor het geval  $s_k - s_{k+1} = -1$  we niet mogen hebben dat  $s_{k-\tau} - s_{k+1+\tau} = 0$ ,  $\tau = 1, \dots, k-1$ . Bij de  $R$ -rijen is dit precies omgekeerd.

### 6.3.3 Eigenschappen van $T$ -rijen

We gaan in deze paragraaf bekijken wat de eigenschappen zijn van een  $T$ -rij. Om deze eigenschappen af te leiden gebruiken we de eigenschappen van een  $S$ -rij en impliciet de eigenschappen van  $R$ -rijen.

**Lemma 6.3.7** *Twee opeenvolgende elementen van een  $T$ -rij verschillen maximaal 1.*

*Bewijs* Stel er is een index  $l$  waarvoor geldt dat  $|t_l - t_{l+1}| \geq 2$ , noteer dan  $s_k$  als de laatste term van  $(s-1)_{t_l}$ . Het kan zo zijn dat  $t_l = 0$ , schrijf dan  $s_{k+2}$  als de eerste term van  $(s-1)_{t_{l+1}}$ . Als  $t_{l+1} \geq t_l + 2$ , beschouw dan het verschil  $s_{k+1} - s_{k+2} = 1$ . We zitten in Geval 1\*. Omdat  $t_{l+1} \geq t_l + 2$  hebben we dat het eerste niet nul verschil in (6.8) gelijk is aan  $s_{k-t_l} - s_{k+t_{l+1}} = 1$ , tegenspraak.

Als  $t_l \geq t_{l+1} + 2$ , beschouw dan het verschil  $s_k - s_{k+1} = -1$ . We zitten in Geval 2\*. Omdat  $t_l \geq t_{l+1} + 2$  hebben we dat het eerste niet nul verschil in (6.8) gelijk is aan  $s_{k-t_{l+1}} - s_{k+t_{l+1}+1} = -1$ , tegenspraak.

Hieruit volgt dat elk twee opvolgende elementen van een  $T$ -rij maximaal maar 1 verschillen.

□

We gaan nu de  $T$ -rijen bekijken waarvoor er  $l$  bestaan zó dat  $t_l \neq t_{l+1}$ . Als we de verschillen

$$t_{l-1} - t_{l+2}, t_{l-2} - t_{l+2}, \dots, t_1 - t_{2l} \quad (6.9)$$

onderzoeken, dan kunnen we weer twee gevallen onderscheiden.

- Geval 1\*\* :  $t_l - t_{l+1} = 1$ .

We krijgen drie mogelijkheden:

- Geval 1\*\*A:  $l = 1$ .
  - Geval 2\*\*B: Er is een niet nul verschil in (6.9). Als we  $s_k$  als de laatste term van  $(s-1)_{t_l}$  noteren, dan geldt  $s_k - s_{k+1} = -1$  en we zitten in Geval 2\*. Als de verschillen in (6.8) niet allemaal nul zijn, dan moet vanwege Geval 2 gelden dat het eerste niet nul verschil in (6.8) +1 is Hieruit volgt dat het eerste niet nul verschil in (6.9) -1 moet zijn.
  - Geval 1\*\*C: De verschillen in (6.9) zijn allemaal nul. Als we weer  $s_k$  als de laatste term van  $(s-1)_{t_l}$  noteren, dan geldt  $s_k - s_{k+1} = -1$  en we zitten in Geval 2\*. Maar als alle verschillen in (6.9) nul zijn, dan zijn alle verschillen in (6.8) ook nul, tegenspraak. Geval 1\*\*C kan dus niet optreden.
- Geval 2\*\* :  $t_l - t_{l+1} = -1$ . We kunnen weer drie gevallen onderscheiden.

- Geval 2\*\*A:  $l = 1$ .
- Geval 2\*\*B: Er is een niet nul verschil in (6.9). Als we  $s_{k+1}$  als de eerste term van  $(s-1)_{t_{l+1}}$  noteren, dan geldt dat  $s_k - r_{k+1} = 1$  en we zitten in Geval 1\*B. Hieruit volgt dat het eerste niet nul verschil in (6.9) +1 moet zijn.
- Geval 2\*\*C: Alle verschillen in (6.9) zijn nul.

We hebben dus dat een  $T$ -rij aan precies dezelfde eigenschappen voldoet als die bij een  $R$ -rij. Stelling 6.3.2 hebben we bewezen met behulp van de ze eigenschappen.

Laat  $t$  het grootste element zijn van een  $T$ -rij. We hebben nu dat elke  $T$ -rij een van de volgende vier vormen moet zijn:

- Type 1:  $T = (t_\infty)$
- Type 2:  $T = \{(t-1)_{z_1}, t, (t-1)_{z_2}, \dots\}, z_1 \geq 1$
- Type 3:  $T = \{t, (t-1)_{z'_1}, t, (t-1)_{z'_2}, \dots\}$
- Type 4:  $T = \{(t-1)_{z_1}, t, \dots, t, (t-1)_{z_n}, r, (t-1)_\infty\}, z_1 \geq 1$

Waarbij  $Z = \{z_1, z_2, \dots\}$  een oneindige rij van niet negatieve gehele getallen is. En  $Z' = \{z'_1, z'_2, \dots\}$  is een oneindige rij van niet negatieve gehele getallen of een eindige rij waarbij er een  $n$  is zó dat  $z'_n = \infty$ .

Om te laten zien dat een  $T$ -rij alleen maar van Type 1 of 2 kan zien hoeven we alleen nog maar de de rij  $T = \{t, (t-1)_\infty\}$  uit te sluiten. De voorgaande rij, wat een  $S$ -rij is, ziet er uit

als  $\{s, (s-1)_t, s, (s-1)_{t-1}, s, (s-1)_{t-1}, \dots\}$ . Noteer nu  $s_k$  als de laatste term van  $(s-1)_t$ , we hebben nu dat  $s_k - s_{k+1} = -1$  en we zitten in Geval 2\*. Maar we hebben nu dat de verschillen in (6.8) allemaal gelijk zijn, tegenspraak.

We hebben dus dat een  $T$ -rij eigenlijk een  $R$ -rij is. Als de  $T$ -rij niet van Type 1 is, dan heeft de rij een onderliggende rij dat een  $S$ -rij is. Als we dit proces continueren dan zien we dat de rijen die we krijgen alterneren tussen  $R$ - en  $S$ -rijen.

**Lemma 6.3.8** *Er zijn maar eindig veel rijen afgeleid van een  $R$ -rij.*

*Bewijs* Beschouw een  $R$ -rij van Type 2 (als die van Type 1 is, dan is er geen onderliggende  $S$ -rij), die een  $S$ -rij van Type 2 heeft. Omdat beide rijen van Type 2 zijn, bestaan er  $j, k$  zodanig dat  $r_j \neq r_{j+1}$  en  $s_k \neq s_{k+1}$ . Er bestaat ook een maximale  $\rho = \rho(j)$  en een maximale  $\sigma = \sigma(k)$  waarvoor

$$r_{j-h} = r_{j+1+h}, \text{ voor alle } h = 1, 2, \dots, \rho;$$

$$s_{k-h} = s_{k+1+h}, \text{ voor alle } h = 1, 2, \dots, \sigma.$$

Omdat  $H(\alpha) < 3$  en vanwege Stelling 6.1.9 bestaat zowel  $\rho_0 = \max_j \rho(j)$  als  $\sigma_0 = \max_k \sigma(k)$ .

We bekijken het probleem nu voor twee gevallen, namelijk  $s_k > s_{k+1}$  en  $s_{k+1} > s_k$ :  
Voor elke  $k$  met  $s_k > s_{k+1}$  kan het aantal termen in

$$(r-1)_{s_{k+1}}, r, \dots, r, (r-1)_{s_k + \sigma + 1}, r$$

niet groter zijn dan  $\rho_0$ :

$$(\sigma+1)(s-1) + \sigma + 1 \leq \rho_0 \Rightarrow (\sigma+1)s \leq \rho_0.$$

Voor elke  $k$  met  $s_{k+1} > s_k$  kan het aantal termen in

$$(r-1)_{s_k - \sigma - 1}, r, \dots, r, (r-1)_{s_k}, r$$

niet groter zijn dan  $\rho_0$ :

$$(\sigma+1)(s-1) + \sigma + 1 \leq \rho_0 \Rightarrow (\sigma+1)s \leq \rho_0.$$

Omdat beide gevallen voor elke  $k$  geldt moet wel gelden dat  $(\sigma_0+1)s \leq \rho_0$ , waaruit volgt dat  $\sigma < \rho_0$ . Dit idee kunnen we voortzetten net zolang tot we bij een afgeleide rij komen dat een  $R$ -rij van Type 1 is of een  $S$ -rij van Type 1 of Type 3 is. We krijgen zo een strikt dalende rij,  $\rho_0, \sigma_0, \tau_0, \dots$  van positieve gehele getallen. Deze rij moet wel eindig zijn en dit impliceert dat er maar eindig veel afgeleide rijen kunnen zijn. □

### 6.3.4 Nog meer eigenschappen van $R$ - en $S$ -rijen

Er zijn dus maar eindig veel rijen afgeleid van  $R$ , zeg  $R_N = R, R_{N-1}, \dots, R_0$ . Er zijn nu twee mogelijkheden voor  $R_0$ , namelijk  $R_0 = \{(c_0)_\infty\}$  of  $R_0 = \{c_0, (c_0-1)_\infty\}$ .

We nemen eerst aan dat  $R_0 = \{(c_0)_\infty\}$ . Schrijf het grootste element van  $R_i$  als  $c_i$ . We noemen  $C = (c_0; c_1, \dots, c_N)$  de  $C$ -set van  $\alpha$ . Als  $\alpha$  bijvoorbeeld als  $C$ -set  $(c_0; c_1)$  heeft, dan is

de periode van de  $R$ -rij van  $\alpha$  gelijk aan  $\{(c_1 - 1)_{c_0}, c_1\}$ , dit noemen we de periode van de  $C$ -set  $(c_0; c_1)$  van  $\alpha$ . In het algemeen; als de periode van  $(c_0; \dots, c_k)$  gelijk is aan  $(\gamma_{i_1}, \dots, \gamma_{i_l})$ , dan is de periode van  $(c_0; \dots, c_{k+1})$  gelijk aan

$$\begin{cases} c_{k+1}, (c_{k+1} - 1)_{\gamma_{i_1}}, c_{k+1}, (c_{k+1} - 1)_{\gamma_{i_2}}, \dots, (c_{k+1} - 1)_{\gamma_{i_l}}, c_{k+1}, & \text{als } k+1 \not\equiv N \pmod{2}, \\ (c_{k+1} - 1)_{\gamma_{i_1}}, c_{k+1}, (c_{k+1} - 1)_{\gamma_{i_2}}, c_{k+1}, \dots, c_{k+1}, (c_{k+1} - 1)_{\gamma_{i_l}}, & \text{als } k+1 \equiv N \pmod{2}. \end{cases}$$

Bijvoorbeeld  $(1; 1, 3)$  heeft als periode  $2, 3, 3$  ( $1 \rightarrow 1, 0 \rightarrow 2, 3, 3$ ) en  $(1; 1, 3, 2)$  heeft als periode  $1_3, 2, 1_3, 2, 1_2, 2$ .

We gaan nu voor alle  $i \geq 1$  tupels  $P_1(i), P_2(i)$  inductief construeren:

$$P_1(0) = (c_0); \quad P_1(1) = (c_1); \quad P_2(1) = ((c_1 - 1)_{c_0}).$$

Als we voor  $i \geq 2$  gedefinieerd hebben

$$P_1(i-1) = (\omega_1, \dots, \omega_{h-1}); \quad P_2(i-1) = (\omega_h, \dots, \omega_m);$$

construeren we  $P_1(i), P_2(i)$  als volgt

$$\begin{aligned} P_1(i) &= (c_i, (c_i - 1)_{\omega_h}, c_i, \dots, c_i, (c_i - 1)_{\omega_m}, c_i); \\ P_2(i) &= ((c_i - 1)_{\omega_1}, c_i, \dots, c_i, (c_i - 1)_{\omega_{h-1}}). \end{aligned}$$

We hebben aangenomen dat  $R_0 = \{c_0\}$  en we weten dat de afgeleide rijen alterneren tussen  $R$ - en  $S$ -rijen. Daarom krijgen we, vanwege onze constructie, dat voor elke  $1 \leq i \leq N$ ,

$$R_i = \begin{cases} \{(P_1(i), P_2(i))_\infty\}, & \text{als } i \not\equiv N \pmod{2} \\ \{(P_2(i), P_1(i))_\infty\}, & \text{als } i \equiv N \pmod{2} \end{cases}$$

Aan de hand van de tupels  $P_1(i), P_2(i)$  kunnen we nog meer eigenschappen van de  $R$ - en  $S$ -rijen bepalen.

Stel dat

$$P_1(i) = (\omega_1, \dots, \omega_{h-1}), \quad P_2(i) = (\omega_h, \dots, \omega_m)$$

**Lemma 6.3.9** *Stel dat  $N \geq 1$ , dan geldt voor elke  $1 \leq i \leq N$  dat*

$$(\omega_1, \dots, \omega_{h-1}) = (\omega_{h-1}, \dots, \omega_1); \tag{6.10}$$

$$(\omega_h, \dots, \omega_m) = (\omega_m, \dots, \omega_h); \tag{6.11}$$

$$(\omega_2, \dots, \omega_{m-1}) = (\omega_{m-1}, \dots, \omega_2); \tag{6.12}$$

$$(\omega_1) = (\omega_m + 1). \tag{6.13}$$

*Bewijs* We bewijzen deze vier gelijkheden met volledige inductie naar  $i$ . Voor  $i = 1$  zijn de vier beweringen duidelijk waar ( $c_0$  is groter dan nul, want stel dat  $c_0 = 0$  dan is  $N = 0$ ). Stel nu dat de vier beweringen waar zijn voor  $i - 1$ , we hebben

- $P_1(i) = (c_i, (c_i - 1)_{\omega_h}, c_i, \dots, c_i, (c_i - 1)_{\omega_m}, c_i);$

- $P_2(i) = ((c_i - 1)_{\omega_1}, c_i, \dots, c_i, (c_i - 1)_{\omega_{h-1}})$ .

Het is gemakkelijk in te zien dat uit de inductiehypothese volgt dat (6.10),(6.11) en (6.13) waar zijn. En uit (6.10),(6.11) en (6.13) volgt (6.12).  $\square$

Voordat we nog meer eigenschappen van de  $R$ - en  $S$ -rijen gaan bewijzen voeren we eerst een notatie in. Noteer  $(t_1, \dots, t_v) < (z_1, \dots, z_w)$  als er een  $i$  bestaat zó dat  $t_k = z_k$  voor alle  $k = 1, \dots, i$  en  $t_{i+1} < z_{i+1}$ .

**Lemma 6.3.10** *Voor elke  $1 < j \leq m$  geldt dat*

$$(\omega_1, \dots, \omega_m) > (\omega_j, \dots, \omega_m, \omega_1, \dots, \omega_{j-1}); \quad (6.14)$$

$$(\omega_m, \dots, \omega_1) \leq (\omega_j, \dots, \omega_1, \omega_m, \dots, \omega_{j+1}). \quad (6.15)$$

*Bewijs* We bewijzen dit lemma met volledige inductie naar  $i$ . Voor  $i = 1$  zijn beide beweringen waar. Stel dat de dubbele bewering waar is voor  $i$ . Schrijf

$$\begin{aligned} (c_{i+1}, (c_{i+1} - 1)_{\omega_h}, c_{i+1}, \dots, c_{i+1}, (c_{i+1} - 1)_{\omega_m}, c_{i+1}, (c_{i+1} - 1)_{\omega_1}, c_{i+1}, \dots, c_{i+1}, (c_{i+1} - 1)_{\omega_{h-1}}) \\ = (\omega'_1, \omega'_2, \dots, \omega'_l) = T. \end{aligned}$$

Schrijf een cyclische permutatie van  $T$  als

$$P_s = (\omega'_s, \omega'_{s+1}, \dots, \omega'_l, \omega'_1, \dots, \omega'_{s-1}).$$

We gaan eerst bewijzen dat voor alle  $1 \leq s \leq l$

$$\begin{aligned} T &= (\omega'_1, \omega'_2, \dots, \omega'_l) \\ &\geq (\omega'_s, \omega'_{s+1}, \dots, \omega'_l, \omega'_1, \dots, \omega'_{s-1}) = P_s \end{aligned}$$

Als  $P_s$  begint met  $c_{i+1} - 1$ , dan is het duidelijk dat  $T > P_s$ , aangezien nu

$$\omega'_1 - \omega'_s = c_{i+1} - (c_{i+1} - 1) = 1.$$

Dus we mogen vanaf nu aannemen dat  $P_s = (c_{i+1}, (c_{i+1} - 1)_{\omega_v}, \dots)$ , met  $1 \leq v \leq m$ .

- Als  $\omega_v \neq \omega_h = \omega_m$ , dan moet gelden volgens (6.15) (inductiehypothese) dat  $\omega_h = \omega_v - 1$  en de eerste bewering is waar voor dit geval.
- Als  $\omega_v = \omega_h = \omega_m$ ,  $\omega_{v+1} \neq \omega_{h+1} = \omega_{m-1}$ , dan moet volgens (6.15) gelden dat  $\omega_{h+1} = \omega_{v-1} - 1$  en de eerste bewering is ook waar voor dit geval.
- enz.

Hiermee is aangenomen de inductiehypothese de eerste bewering bewezen.

De tweede bewering volgt op eenzelfde wijze als hierboven, alleen moeten we nu de omgekeerde set van  $T$  gebruiken en als inductiehypothese gebruiken we nu (6.14).  $\square$

**Lemma 6.3.11** *Voor elke  $2 \leq j \leq m$  geldt dat*

$$(\omega_1, \dots, \omega_{h-1}) > (\omega_j, \dots, \omega_m); \quad (6.16)$$

$$(\omega_m, \dots, \omega_h) < (\omega_{j-1}, \dots, \omega_1); \quad (6.17)$$

$$(\omega_m, \dots, \omega_h) \leq (\omega_j, \dots, \omega_m); \quad (6.18)$$

$$(\omega_1, \dots, \omega_{h-1}) \geq (\omega_{j-1}, \dots, \omega_1). \quad (6.19)$$

*Bewijs* We bewijzen eerst (6.16) en (6.17) met volledige inductie naar  $i$ . Het is gemakkelijk in te zien dat beide beweringen waar zijn voor  $i = 1$ . Stel nu dat beide beweringen waar zijn voor elke  $i \leq k$ . Voor het gemak noteren we  $c_{k+1} = b$ . We hebben

$$P_1(k+1) = (\omega'_1, \dots, \omega'_{l-1}) = (b, (b-1)_{\omega_h}, \dots, (b-1)_{\omega_m}, b); \quad (6.20)$$

$$P_2(k+1) = (\omega'_l, \dots, \omega'_n) = ((b-1)_{\omega_1}, b, \dots, b, (b-1)_{\omega_{h-1}}). \quad (6.21)$$

Om (6.16) te bewijzen moeten we laten zien dat

$$(\omega'_1, \dots, \omega'_{l-1}) > (\omega'_j, \dots, \omega'_n) \text{ voor elke } 2 \leq j \leq n. \quad (6.22)$$

Als  $\omega'_j = b - 1$ , dan zijn we klaar, aangezien  $\omega'_1 = b$ . We nemen daarom aan dat er een  $s$  is met  $1 \leq s \leq m$  waarvoor

$$(\omega'_j, \dots, \omega'_n) = (b, (b-1)_{\omega_s}, b, \dots, b, (b-1)_{\omega_{h-1}}). \quad (6.23)$$

Vanwege (6.10) en (6.11) is er een  $t$  met  $1 \leq t \leq m$  waarvoor

$$(\omega_s, \dots, \omega_{h-1}) = (\omega_t, \omega_{t-1}, \dots, \omega_1)$$

en dit is groter dan  $(\omega_m, \dots, \omega_h) = (\omega_h, \dots, \omega_m)$  (inductiehypothese). Uit (6.20) en (6.23) volgt nu (6.22).

Om (6.17) te bewijzen moeten we laten zien dat

$$(\omega'_n, \dots, \omega'_l) < (\omega'_{j-1}, \dots, \omega'_1). \quad (6.24)$$

Als  $\omega'_{j-1} = b$  dan zijn we klaar, aangezien  $\omega'_n = b - 1$ . We nemen daarom aan dat er een  $s$  is met  $1 \leq s \leq m$  waarvoor

$$(\omega'_{j-1}, \dots, \omega'_1) = ((b-1)_{\omega_s}, b, \dots, b, (b-1)_{\omega_h}, b). \quad (6.25)$$

Vanwege (6.10) en (6.11) is er een  $t$  met  $1 \leq t \leq m$  waarvoor

$$(\omega_s, \omega_{s+1}, \dots, \omega_h) = (\omega_t, \omega_{t+1}, \dots, \omega_m)$$

en dit is strikt kleiner dan  $(\omega_1, \dots, \omega_{h-1}) = (\omega_{h-1}, \dots, \omega_1)$  (inductiehypothese). Uit (6.21) en (6.25) volgt (6.24).

Op eenzelfde manier kunnen we (6.18) en (6.19) bewijzen. □

Als het eindstation van de afgeleide rijen  $\{(c_n)_\infty\}$  is, dan zagen we dat  $\alpha$  zuiver periodiek is en daarnaast hebben we een aantal bruikbare eigenschappen bewezen van de  $R$ -rij.

Als het eindstation van de afgeleide rijen  $\{c_n, (c_n - 1)_\infty\}$  is, dan hebben we voor  $l < \infty$  dat

$$\alpha = \left\langle 0; 2(11)_{b_1} 2 \dots 2(11)_{b_l} \overline{22(11)_{\omega_m} 2 \dots 2(11)_{\omega_1}} \right\rangle,$$

waarbij  $\{\omega_1, \dots, \omega_m\}$  alle eigenschappen heeft van (6.10) tot en met (6.19). En er moet gelden dat  $N$  moet dus even zijn, omdat  $R_0$  nu een  $S$ -rij is.

**Lemma 6.3.12** *Als het eindstation van de afgeleide rijen van de  $R$ -rij van  $\alpha$  gelijk is aan  $\{(c_0), (c_0 - 1)_\infty\}$ , dan is  $\alpha$  op de eerste twee wijzergetallen na zuiver periodiek.*

*Bewijs* Stel dat een  $S$ -rij gelijk is aan  $\{s, (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n = s - 1)_\infty\}$ , dan is de  $R$ -rij gelijk aan

$$\begin{aligned} & \{(r - 1)_s, (r, (r - 1)_{\beta_1}, r, \dots, r, (r - 1)_{\beta_n})_\infty\} = \\ & \{(r - 1, (r - 1)_{s-1}, r, (r - 1)_{\beta_1}, r, \dots, r, (r - 1)_{\beta_{n-1}}, r)_\infty\}. \end{aligned}$$

Stel dat een  $R$ -rij gelijk is aan  $\{r - 1, (\gamma_1, \dots, \gamma_m = r)_\infty\}$ , dan is de  $S$ -rij gelijk aan

$$\begin{aligned} & \{s, (s - 1)_{r-1}, (s, (s - 1)_{\gamma_1}, s, \dots, s, (s - 1)_{\gamma_m})_\infty\} = \\ & \{s, ((s - 1)_{r-1}, s, (s - 1)_{\gamma_1}, s, \dots, s, (s - 1)_{\gamma_{m-1}}, s, s - 1)_\infty\}. \end{aligned}$$

Hieruit volgt met een inductie argument dat als  $R_0 = \{a_n, (a_n - 1)_\infty\}$  is, dat dan

$$R_N = R = \{r - 1, ((r - 1)_{\lambda_1}, r, \dots, r, (r - 1)_{\lambda_l}, r)_\infty\}$$

en dit impliceert dat

$$\alpha = \left\langle 0; \overline{2(11)_{b_1} 22(11)_{b_2} 2 \dots 2(11)_{b_w}} \right\rangle.$$

De rij  $\{b_1, \dots, b_w\}$  is een  $R$ -rij. □

We weten nu dat  $(11)_{b_1} 22(11)_{b_2} 2 \dots 2(11)_{b_w} 22$  een cyclische permutatie is van  $(11)_{\omega_1} 22(11)_{\omega_2} 2 \dots 2(11)_{\omega_m} 22$ , bijgevolg  $w = m$ . Hieruit volgt dat  $b_1$  de kleinste waarde uit de  $R$ -rij moet zijn, anders is of de kettingbreuk van  $\alpha$  zuiver periodiek of komen er in de  $R$ -rij twee elementen voor die meer dan 1 verschillen.

Nu kunnen we afleiden welke cyclische permutaties van  $(11)_{\omega_1} 22(11)_{\omega_2} 2 \dots 2(11)_{\omega_m} 22$  er voor de periode van  $\alpha$  mogelijk zijn. We gaan hiervoor een ondergrens voor  $H(\alpha)$  bepalen:

$$\left\langle \overline{2(11)_{\omega_1} 22(11)_{\omega_2} 2 \dots 2(11)_{\omega_m} 2} \right\rangle + \langle 0; 2(11)_{\omega_m} 2 \dots 2(11)_{\omega_h} 22(11)_{b_1} 2 \rangle \leq H(\alpha) < 3 \Rightarrow$$

$$\left\langle \overline{(11)_{\omega_1-1} 22(11)_{\omega_2} 2 \dots 2(11)_{\omega_m} 22(11)} \right\rangle > \langle (11)_{\omega_m} 2 \dots 2(11)_{\omega_h} 22(11)_{b_1} 2 \rangle \Leftrightarrow$$

$$\langle (11)_{\omega_m-h+2} 22 \dots \rangle > \langle (11)_{b_1} 2 \rangle.$$

De enkelvoudige implicatie volgt uit Stelling 6.1.9. De dubbele implicatie is waar omdat  $(\omega_2, \dots, \omega_{m-1}) = (\omega_{m-1}, \dots, \omega_2)$  en  $\omega_1 = \omega_m + 1$ .

$b_1$  kan niet kleiner zijn dan  $\omega_{m-h+2}$ , omdat anders het teken omklapt. Maar  $b_1$  kan ook niet strikt groter zijn dan  $\omega_{m-h+2}$  omdat  $b_1$  de kleinste waarde aanneemt in de  $R$ -rij. Hieruit volgt dat  $b_1 = \omega_{m-h+2}$ , maar dit kan alleen als  $h = 2$  (anders is  $\alpha$  zuiver periodiek).

We hebben dus dat als  $R_0 = \{c_n, (c_n - 1)_\infty\}$  dat dan

$$\alpha = \left\langle 0; \overline{2(11)_{\omega_1-1} 22(11)_{\omega_2} 2 \dots 2(11)_{\omega_m}} \right\rangle.$$

### 6.3.5 Bepalen van het supremum $H(\alpha)$

We gaan in deze paragraaf bepalen wat het supremum  $H(\alpha)$  is voor slecht benadere getallen met  $0 \leq \alpha \leq 1/2$ . Dit doen we in drie delen. In het eerste deel bepalen we het supremum  $H(\alpha)$  voor slecht benaderbare getallen waarbij  $R_0 = \{(c_0)_\infty\}$  en  $N > 0$ . In het tweede deel gaan we het supremum bepalen voor slecht benaderbare getallen met  $R = \{(r)_\infty\}$  (dus  $N = 0$ ). In het laatste deel gaan we het supremum bepalen voor slecht beadere getallen waarbij  $R_0 = \{c_0, (c_0 - 1)_\infty\}$ .

Deel 1: Voor gegeven  $C = \{c_0, c_1, \dots, c_N\}$ , met  $N \geq 1$  noteer

$$P_1(N) = (\omega_1, \dots, \omega_{h-1}), P_2(N) = (\omega_h, \dots, \omega_m). \quad (6.26)$$

Het slecht benaderbaar getal  $\alpha$  met  $C$ -set  $C$  en  $R_0 = \{(c_0)_\infty\}$  heeft als  $R$ -rij

$$R = \{(\omega_h, \dots, \omega_m, \omega_1, \dots, \omega_{h-1})_\infty\}.$$

Uit (6.11) en (6.12) volgt dat

$$\begin{aligned} \alpha &= \left\langle 0; \overline{2(11)_{\omega_h} 2 \dots 2(11)_{\omega_m} 22(11)_{\omega_1} 2 \dots 2(11)_{\omega_{h-1}} 2} \right\rangle \\ &= \left\langle 0; \overline{2(11)_{\omega_m} 2 \dots 2(11)_{\omega_1} 2} \right\rangle. \end{aligned}$$

We gaan nu bewijzen dat

$$H(\alpha) = \langle 2; (11)_{\omega_1} 2 \dots 2(11)_{\omega_m} 2 \rangle + \left\langle 0; \overline{2(11)_{\omega_m} 2 \dots 2(11)_{\omega_1} 2} \right\rangle. \quad (6.27)$$

*Bewijs* Noteer  $A = \langle (11)_{\omega_1} 2 \dots 2(11)_{\omega_m} \rangle$  en noteer het omgekeerde van  $A$  als  $A^T$ ; dus  $A^T = \langle (11)_{\omega_m} 2 \dots 2(11)_{\omega_1} \rangle$ . De som (6.27) ziet er met deze notatie als volgt uit:

$$H(\alpha) = \langle 2; A, 2 \rangle + \left\langle 0; \overline{2, A^T, 2} \right\rangle.$$

De beweringen (6.16), (6.17) impliceren dat voor elke  $2 \leq j \leq m$  en voor elke  $t \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \langle 0; A, 2 \rangle &> \langle 0; (11)_{\omega_j} 2 \dots 2(11)_{\omega_m} 2(2, A, 2)_t \rangle; \\ \left\langle 0; \overline{2, A^T, 2} \right\rangle &> \left\langle 0; \overline{2(11)_{\omega_{j-1}} 2 \dots 2(11)_{\omega_1} 2 \dots 2(11)_{\omega_j} 2} \right\rangle. \end{aligned}$$

De som in (6.27) is dus groter dan

$$\langle 0; (11)_{\omega_j} 2 \dots 2(11)_{\omega_m} 2(2, A, 2)_t \rangle + \left\langle 0; \overline{2(11)_{\omega_{j-1}} 2 \dots 2(11)_{\omega_1} 2 \dots 2(11)_{\omega_j} 2} \right\rangle.$$



Uit (6.18) en (6.19) volgt dat voor elke  $2 \leq j \leq m$  en elke  $t \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \langle 0; A, 2 \rangle &\geq \left\langle 0; \overline{(11)_{\omega_{j-1}} 2 \dots 2(11)_{\omega_1} 2 2(11)_{\omega_m} 2 \dots 2(11)_{\omega_j}} \right\rangle; \\ \left\langle 0; \overline{2, A^T, 2} \right\rangle &\geq \langle 0; 2(11)_{\omega_j} 2 \dots 2(11)_{\omega_m} 2(2, A, 2)_t \rangle. \end{aligned}$$

De som in (6.27) is dus groter of gelijk aan

$$2 + \left\langle 0; \overline{(11)_{\omega_{j-1}} 2 \dots 2(11)_{\omega_1} 2 2(11)_{\omega_m} 2 \dots 2(11)_{\omega_j}} \right\rangle + \langle 0; 2(11)_{\omega_j} 2 \dots 2(11)_{\omega_m} 2(2, A, 2)_t \rangle.$$

Omdat  $\langle 0; A, 2, (2, A, 2)_t \rangle > \langle 0; A, 2, (2, A, 2)_z \rangle$  voor  $t < z$  is voor niet negatief geheel getal  $t$  de som in (6.27) strikt groter dan

$$\langle 2; A, 2, (2, A, 2)_t \rangle + \left\langle 0; \overline{2, A^T, 2} \right\rangle.$$

Als we nu nog bewijzen dat

$$\langle 2; A, 2 \rangle + \left\langle 0; \overline{2, A^T, 2} \right\rangle > \langle 2; (2, A, 2)_t \rangle + \left\langle 0; \overline{A^T, 2, 2} \right\rangle.$$

voor alle  $t \geq 1$  dan zijn we klaar:

Omdat  $\omega_1 = c_n = \omega_m + 1$  volgt uit Stelling 6.1.8 dat

$$\begin{aligned} \langle 0; A, 2 \rangle &> \left\langle 0; \overline{A^T, 2, 2} \right\rangle; \\ \left\langle 0; \overline{2, A^T, 2} \right\rangle &> \left\langle 0; \overline{2, A, 2} \right\rangle > \langle 0; (2, A, 2)_t \rangle \end{aligned}$$

dus,

$$\langle 2; A, 2 \rangle + \left\langle 0; \overline{2, A^T, 2} \right\rangle > \langle 2; (2, A, 2)_t \rangle + \left\langle 0; \overline{A^T, 2, 2} \right\rangle.$$

□

Deel 2: Het slecht benaderbare getal  $\alpha$  met  $C = (c_0)$  moet als  $R$ -rij  $R = \{(c_0)_\infty\}$  hebben (een  $R$ -rij kan niet van de vorm  $\{c_0, (c_0 - 1)_\infty\}$  zijn). Dus  $\alpha = \left\langle 0; \overline{2(11)_{c_0} 2} \right\rangle$ . Omwille van Stelling 6.1.8 hebben we dat

$$\langle 2; (11)_{c_0} 2 \rangle + \left\langle 0; \overline{2(11)_{c_0} 2} \right\rangle > \left\langle 2; (11)_{c_0} 2 \right\rangle + \langle 0; 2(11)_{c_0} 2 \rangle$$

en we hebben dat voor alle  $t > 0$   $\langle 2; (11)_{c_0} 2 \rangle > \langle (2; (11)_{c_0} 2)_t \rangle$ . Uit deze twee ongelijkheden volgt,

$$H(\alpha) = \langle 2; (11)_{c_0} 2 \rangle + \left\langle 0; \overline{2(11)_{c_0} 2} \right\rangle.$$

Deel 3: Het slecht benaderbare getal dat bij de  $C$ -set  $C = (c_0, c_1, \dots, c_N)$ ,  $N > 0$ , met  $R_0 = \{c_0, (c_0 - 1)_\infty\}$  hoort heeft als  $R$ -rij

$$R = \{\omega_1 - 1, (\omega_2, \dots, \omega_m, \omega_1)_\infty\}.$$

Noteer het getal dat hoort bij deze  $R$ -set als  $\alpha_2$ :

$$\alpha_2 = \left\langle 0; \overline{2(11)_{\omega_1-1} 2 2(11)_{\omega_2} 2 \dots 2(11)_{\omega_m} 2 2 1 1} \right\rangle.$$

Als we het eerste wijzergetal in de kettingbreuk van  $\alpha$  veranderen in 11 dan krijgen we

$$\beta = \left\langle 0; \overline{11\omega_1 2 \dots 2(11)_{\omega_m} 22} \right\rangle.$$

Het is gemakkelijk in te zien dat  $H(\alpha_2) = H(\beta)$ .

Omdat de periode van  $\beta$  precies het omgekeerde is van de periode bij (6.27) kunnen we dezelfde argumenten gebruiken om  $H(\alpha_2)$  te bepalen, als we voor  $\alpha = \left\langle 0; \overline{2(11)_{\omega_m} 2 \dots 2(11)_{\omega_1} 2} \right\rangle$  hebben gebruikt om  $H(\alpha)$  te bepalen. We zien dan dat

$$H(\alpha_2) = \langle 2; 2(11)_{\omega_m} 2 \dots 2(11)_{\omega_1-1} 2 \rangle + \left\langle 0; \overline{(11)_{\omega_1} 2 \dots 2(11)_{\omega_1} 22} \right\rangle.$$

## 6.4 Bewijs van de stellingen

### 6.4.1 Bewijs van Stelling 6.1.1

We gaan in deze paragraaf Stelling 6.1.1 bewijzen. We gebruiken daarvoor de eigenschappen van  $R$ -rijen, die we in de vorige paragraaf hebben afgeleid.

Neem aan dat  $0 \leq \alpha \leq 1/2$  een slecht benaderbaar getal is met zuiver periodieke kettingbreukontwikkeling en niet gelijk is aan  $\varphi$  of  $\sqrt{2} - 1$ , dan weten we dat

$$\alpha = \left\langle 0; \overline{2(11)_{\omega_m} 2 \dots 2(11)_{\omega_1} 2} \right\rangle,$$

waarbij  $\{(\omega_m, \dots, \omega_1)_\infty\}$  een  $R$ -rij is.<sup>1</sup>

Schrijf

$$P/Q = p_n/q_n \langle 2; 2(11)_{\omega_m} 2 \dots 2(11)_{\omega_1} \rangle. \quad (6.28)$$

$$P'/Q' = p_{n-1}/q_{n-1} \langle 2; 2(11)_{\omega_m} 2 \dots 2(11)_{\omega_1-1} 1 \rangle. \quad (6.29)$$

Merk op dat  $\omega_1 - 1 \geq 0$ , omdat  $\omega_1 = \omega_m + 1$  of in het geval dat  $m = 1$  dan moet  $\omega_1 > 0$ , omdat  $\alpha$  niet gelijk is aan  $\sqrt{2} - 1$ .

**Lemma 6.4.1** *Er geldt het volgende:*

1.  $PQ' - P'Q = 1$ ;
2.  $P = 3Q - Q'$ .

*Bewijs* De eigenschap dat  $PQ' - P'Q = 1$  volgt uit Stelling 2.2.2.

We gaan nu de tweede eigenschap bewijzen. Schrijf  $S = (11)_{\omega_m} 2 \dots 2(11)_{\omega_1-1}$ . Vanwege (6.12) en (6.13) is  $S$  een symmetrische string van enen en tweeën is. We hebben nu dat

$$P/Q = \langle 2; 2S11 \rangle; \quad (6.30)$$

$$P'/Q' = \langle 2; 2S1 \rangle. \quad (6.31)$$

---

<sup>1</sup>Om typografische redenen begint de  $R$ -rij met  $\omega_m$  en niet met  $\omega_1$ .

Om te bewijzen dat  $P = 3Q - Q'$  gebruiken we de vijftal eigenschappen van Lemma 2.4.3 en het resultaat dat  $S$  symmetrisch is.

Uit eigenschap 4 van lemma 2.4.3 volgt dat  $Q = P(2S11)$ . We hebben dus dat,

$$P = P(22S11), \quad Q = P(2S11), \quad Q' = P(2S1).$$

Uit eigenschappen 2 en 4 van Lemma 2.4.3 volgt dat

$$P = 2Q + A, \text{ met } A = P(S11) = P(S2)$$

Uit eigenschappen 2 en 3 en tot slot weer eigenschap 2 van Lemma 2.4.3 volgt nu dat,

$$Q = P(11S2) = P(1S2) + A = Q' + A.$$

Dus  $P = 2Q + A$  en  $Q = Q' + A$ , hieruit volgt dat

$$P + Q' = 3Q.$$

□

Van Paragraaf (6.3.5) weten we dat

$$H(\alpha) = 2 + \langle 0; (11)_{\omega_1} 2 \dots 2(11)_{\omega_m} 2 \rangle + \left\langle 0; \overline{2(11)_{\omega_m} 2 \dots 2(11)_{\omega_1} 2} \right\rangle.$$

Schrijf  $x = 2 + \left\langle 0; \overline{2(11)_{\omega_m} 2 \dots 2(11)_{\omega_1} 2} \right\rangle$ . Uit Lemma 6.4.1 volgt dat

$$\begin{aligned} x &= \langle 2; 2(11)_{\omega_m} 2 \dots 2(11)_{\omega_1}, x \rangle \\ &= \frac{Px + P'}{Qx + Q'} \\ &= \frac{PQx + P'Q}{Q^2x + Q'Q} \\ &= \frac{(3Q^2 - QQ')x + Q'(3Q - Q') - 1}{Q^2x + QQ'} \end{aligned}$$

En dus

$$Q^2x^2 + (2Q' - 3Q)Qx + (Q' - 3Q)Q' + 1 = 0.$$

Omdat  $x > 2$  hebben we dat,

$$x = \frac{3Q - 2Q' + \sqrt{9Q^2 - 4}}{2Q}.$$

Verder volgt uit Lemma 2.4.2 volgt dat

$$\langle 0; (11)_{\omega_1} 2 \dots 2(11)_{\omega_m} 2 \rangle = \frac{Q'}{Q}.$$

Dus,

$$\begin{aligned} H(\alpha) &= \frac{3Q - 2Q' + \sqrt{9Q^2 - 4}}{2Q} + \frac{Q'}{Q} \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{9 - 4/Q^2}. \end{aligned}$$

We gaan nu bewijzen dat  $Q$  een Markoff getal is:

Voor elke  $C$ -set  $(c_0, \dots, c_n)$  schrijf  $P/Q$  als in (6.28) en schrijf

$$Q(c_0, \dots, c_n) = Q.$$

**Stelling 6.4.2** *Als  $c_0 + 1, c_1, \dots, c_n$  positieve gehele getallen zijn en*

$$Q_1 = Q(c_0, c_1, \dots, c_n), \quad Q_2 = Q(c_1 - 1, c_2, \dots, c_n), \quad Q_3 = Q(c_0 + 1, c_1, \dots, c_n), \quad (6.32)$$

dan,

$$Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 = 3Q_1Q_2Q_3. \quad (6.33)$$

We zeggen dat  $Q_2 = Q(c_1 - 1)$  als  $n = 1$  en  $Q_2 = 1$  als  $n = 0$ .

*Bewijs* Schrijf het slecht benaderbare getal dat hoort bij  $C_1 = (c_0, c_1, \dots, c_n)$  als  $\alpha$ , het slecht benaderbare getal dat hoort bij  $C_2 = (c_1 - 1, c_2, \dots, c_n)$  als  $\beta$  en het slecht benaderbare getal dat hoort bij  $C_3 = (c_0 + 1, c_1, \dots, c_n)$  als  $\gamma$ . Schrijf de periode van de bijbehorende  $R$ -rij van  $\alpha$  als  $\rho_1 = \omega_1, \dots, \omega_i$ , schrijf de bijbehorende  $R$ -rij van  $C_2$  als  $\rho_2 = \phi_1, \dots, \phi_j$  en schrijf de bijbehorende  $R$ -rij van  $C_3$  als  $\rho_3 = \sigma_1 \dots, \sigma_l$ . Tot slot schrijf  $\rho_1 + \rho_2$  als de periode die we krijgen door achter de periode van  $\rho_1$ , de periode  $\rho_2$  te plakken. We gaan nu eerst bewijzen dat

$$\rho_3 = \begin{cases} \rho_1 + \rho_2, & \text{als } n \text{ oneven} \\ \rho_2 + \rho_1, & \text{als } n \text{ even} \end{cases}$$

We bewijzen dit met volledige inductie naar  $n$ . Voor  $n = 1$  hebben we dat

$$\rho_1 = (c_1 - 1)_{c_0, c_1}, \quad \rho_2 = c_1 - 1, \quad \rho_3 = (c_1 - 1)_{c_0+1, c_1},$$

dus voor  $n = 1$  is het waar. Stel nu dat het waar is voor  $n$ , met  $n$  oneven. Schrijf  $c = c_{n+1}$ . Volgens de inductiehypothese hebben we dat de periode van de  $C$ -set  $= (c_0 + 1, c_1, \dots, c_n)$  gelijk is aan  $\omega_1, \dots, \omega_i, \phi_1, \dots, \phi_j$ . Per definitie hebben we dat de periode van de  $C$ -set  $(c_0 + 1, c_1, \dots, c_n, c)$  gelijk is aan

$$(c - 1)_{\omega_1, c, \dots, c, (c - 1)_{\omega_i, c}; (c - 1)_{\phi_1, c, \dots, c, (c - 1)_{\phi_j, c}}.$$

Dit is precies wat we wilden, want de periode die hoort bij de  $C$ -set  $(c_0, \dots, c_n, c)$  is  $(c - 1)_{\omega_1, c, \dots, c, (c - 1)_{\omega_i, c}}$  en de periode die hoort bij de  $C$ -set  $(c_1 - 1, \dots, c_n, c)$  is gelijk aan  $(c - 1)_{\phi_1, c, \dots, c, (c - 1)_{\phi_j, c}}$ .

Voor  $n$  is even verwissel dan in het bewijs voor  $n$  is oneven de letters  $\omega$  en  $\phi$ .

We hebben nu dat de periodes van respectievelijk  $\alpha, \beta, \gamma$  van de volgende vorm zijn:

- Periode van  $\alpha$  :  $2S_1112$ ;
- Periode van  $\beta$  :  $2S_2112$ ;
- Periode van  $\gamma$ :  $\begin{cases} 2S_11122S_2112, & \text{als } n \text{ oneven} \\ 2S_21122S_1112, & \text{als } n \text{ even} \end{cases}$

Waarbij  $S_2$  net zoals  $S_1$  een symmetrische string van enen en tweeën is.

We nemen nu aan dat  $n$  oneven is, het onderstaande bewijs voor  $n$  oneven gaat op analoge wijze. Schrijf

$$\begin{aligned} P_1/Q_1 &= \langle 2; S_1112 \rangle, & P_2/Q_2 &= \langle 2; S_2112 \rangle, & P_3/Q_3 &= \langle 2; S_11122S_2112 \rangle. \\ P'_1/Q'_1 &= \langle 2; S_111 \rangle, & P'_2/Q'_2 &= \langle 2; S_211 \rangle, & P'_3/Q'_3 &= \langle 2; S_11122S_211 \rangle. \end{aligned}$$

**Lemma 6.4.3** *Er gelden de volgende vergelijkingen*

1.  $P_i Q'_i - P'_i Q_i = 1$ , voor  $i = 1, 2, 3$ .
2.  $P_3 = P_1 P_2 + P'_1 Q_2$ ,  $P'_3 = P_1 P'_2 + P_1 Q'_2$ .
3.  $Q_3 = Q_1 P_2 + Q'_1 Q_2$ ,  $Q'_3 = Q_1 P'_2 + Q'_1 Q'_2$ .

*Bewijs* Onderdeel 1 volgt uit Stelling 2.2.2, onderdeel 2 is eigenschap 5 van Lemma 2.4.3 waarop toegepast eigenschap 3 van Lemma 2.4.3 en onderdeel 3 volgt uit eigenschappen 1, 3 en 5 van Lemma 2.4.3.  $\square$

Lemma 6.4.1 zegt dat  $P_i Q'_i - P'_i Q_i$  en  $P_i + Q'_i = 3Q_i$ , voor  $i = 1, 2, 3$  en hieruit volgt,

$$P'_i Q_i + P_i^2 + 1 = P_i(P_i + Q'_i) = 3P_i Q_i. \quad (6.34)$$

Uit onderdeel 3 van Lemma 6.4.3 en vergelijking (6.34) volgt,

$$\begin{aligned} 3Q_1 Q_2 Q_3 &= 3Q_1 Q_2 (Q_1 P_2 + Q'_1 Q_2) = Q_1^2 (P'_2 Q_2 + P_2^2 + 1) + Q_2^2 Q'_1 (P_1 + Q'_1) \\ &= Q_1^2 + (Q_1 P_2 + Q_2 Q'_1)^2 + Q_2 (P'_2 Q_1^2 + Q_2 Q'_1 P_1 - 2Q_1 P_2 Q'_1) \\ &= Q_1^2 + Q_3^2 + Q_2^2 + (P'_2 Q_1 + Q_2 P'_1 - 2P_2 Q'_1) Q_1 Q_2. \end{aligned}$$

Uit onderdeel 3 van Lemma 6.4.3, vergelijking (6.34) en tot slot weer onderdeel 3 volgt,

$$\begin{aligned} P'_2 Q_1 + Q_2 P'_1 - 2P_2 Q'_1 &= (P'_2 Q_1 + Q'_1 Q'_2) + (P_1 P_2 + P'_1 Q_2) \\ &\quad - Q'_1 (P_2 + Q'_2) - P_2 (P_1 + Q'_1) \\ &= Q'_3 + P_3 - 3Q'_1 Q_2 - 3P_2 Q_1 \\ &= Q'_3 + P_3 - 3Q_3 = 0. \end{aligned}$$

Er geldt dus dat  $3Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 = Q_1 Q_2 Q_3$  en per definitie is  $(Q_1, Q_2, Q_3)$  een Markoff drietal.  $\square$

Om Stelling 6.1.1 te bewijzen rest ons alleen nog om te bewijzen dat als

$\alpha = \left\langle 2(\overline{11})_{\omega_1-1} 2 \dots 2(\overline{11})_{\omega_m} 11 \right\rangle$  dat dan ook  $H(\alpha) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{9 - 4/m^2}$ , voor een Markoff getal  $m$  (we zullen gaan zien dat  $m = Q$ ).

We weten van Paragraaf 6.3.5 dat

$$H(\alpha) = \left\langle 0; (\overline{11})_{\omega_1} 2 \dots 2(\overline{11})_{\omega_m} 22 \right\rangle + \langle 2; 2(\overline{11})_{\omega_m} 2 \dots 2(\overline{11})_{\omega_1} \rangle.$$

Schrijf  $x$  als hierboven, dan volgt uit Gevolg 2.3.7 dat

$$\begin{aligned} \left\langle 0; \overline{(11)_{\omega_1} 2 \dots 2 (11)_{\omega_m} 22} \right\rangle &= -\bar{x} \\ &= \frac{-3Q + 2Q' + \sqrt{9Q^2 - 4}}{2Q} \end{aligned}$$

Verder weten we dat  $Q' + P = 3Q$  (Lemma 6.4.1).

We vinden,

$$\begin{aligned} H(\alpha) &= \left\langle 2; \overline{2(11)_{\omega_1} 2 \dots 2 (11)_{\omega_m}} \right\rangle + \langle 0; 2(11)_{\omega_m} 2 \dots 2(11)_{\omega_1} 2 \rangle \\ &= \frac{P}{Q} + \frac{-3 + 2Q' + \sqrt{9Q^2 - 4}}{2Q} \\ &= \frac{-3Q + 2(Q' + P) + \sqrt{9Q^2 - 4}}{2Q} \\ &= \frac{3Q + \sqrt{9Q^2 - 4}}{2Q} \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{9 - 4/Q^2}. \end{aligned}$$

Hiermee is het bewijs van Stelling 6.1.1 rond. □

### 6.4.2 Bewijs van Stelling 6.1.2

Omdat elke  $C$ -set een slecht benaderbaar getal oplevert is het om Stelling 6.1.2 te bewijzen voldoende om de volgende stelling te bewijzen:

**Stelling 6.4.4** *Behalve voor  $(1, 1, 1)$  en  $(1, 1, 2)$  is elk Markoff drietal van type (6.32).*

Voor het bewijs van deze stelling hebben we het volgende lemma nodig:

**Lemma 6.4.5** *Als  $n, c_0 + 1, c_1, \dots, c_n$  positieve gehele getallen zijn, dan*

$$Q(1, c_0 + 1, c_1, \dots, c_n) + Q(c_1 - 1, c_2, \dots, c_n) = 3Q(c_0, \dots, c_n)Q(c_0 + 1, c_1, \dots, c_n); \quad (6.35)$$

$$Q(c_0 + 2, c_1, \dots, c_n) + Q(c_0, \dots, c_n) = 3Q(c_1 - 1, c_2, \dots, c_n)Q(c_0 + 1, c_1, \dots, c_n). \quad (6.36)$$

*Bewijs* In (6.33) voor de waarden (6.32) neem  $c_0 = 0$  en substitueer,  $n := n + 1$ ,  $c_1 := c_0 + 1$  en  $c_i := c_{i-1}$  voor  $i = 2, \dots, n + 1$ . We krijgen,

$$\begin{aligned} Q^2(c_0 + 1, c_1, \dots, c_n) + Q^2(c_0, c_1, \dots, c_n) + Q^2(1, c_0 + 1, c_1, \dots, c_n) \\ = 3Q(c_0 + 1, c_1, \dots, c_n)Q(c_0, c_1, \dots, c_n)Q(1, c_0 + 1, c_1, \dots, c_n). \end{aligned}$$

Haal hier (6.33) vanaf. We krijgen,

$$\begin{aligned} Q^2(1, c_0 + 1, c_1, \dots, c_n) - Q^2(c_1 - 1, \dots, c_n) \\ = 3Q(c_0 + 1, c_1, \dots, c_n)Q(c_1 - 1, c_2, \dots, c_n) (Q(1, c_0 + 1, c_1, \dots, c_n) - Q(c_1 - 1, \dots, c_n)). \end{aligned}$$

Het uitdelen van de factor  $Q(c_0 + 2, c_1, \dots, c_n) - Q(c_0, \dots, c_n)$  geeft vergelijking (6.35) (het is gemakkelijk in te zien dat deze factor niet gelijk is aan 0).

Voor het bewijs van de tweede vergelijking substitueer  $c_0 := c_0 + 1$  in (6.32), trek hier (6.33) vanaf en deel vervolgens de factor  $Q(c_0 + 2, c_1, \dots, c_n) - Q(c_0, c_1, \dots, c_n)$  uit (het is gemakkelijk in te zien dat deze factor niet gelijk is aan 0). Vergelijking (6.36) volgt nu.  $\square$

*Bewijs van Stelling 6.4.4* We gaan burenen genereren voor

$$(1, Q(c), Q(c+1)).$$

Merk op dat als  $c = 0$ , dan  $(1, Q(c), Q(c+1)) = (1, 2, 5)$  en merk op dat  $(1, Q(c), Q(c+1))$  van de vorm (6.32) is.

Uit (6.35) en (6.36) volgt dat  $(1, Q(c), Q(c+1))$  de volgende twee burenen genereert,

$$(1, Q(c+1), 3Q(c+1) - Q(c) = Q(c+2)), \quad (6.37)$$

$$(Q(c), Q(c+1), 3Q(c)Q(c+1) - 1 = Q(1, c+1)). \quad (6.38)$$

Van de derde buur is het grootste element kleiner dan het grootste element van het Markoff drietal waarvan de burenen worden berekend. Het is gemakkelijk in te zien dat het drietal (6.37) van de vorm is waarmee we gestart waren. Het drietal (6.38) is (6.32) voor  $n = 2$ ,  $c_0 = 0$ ,  $c_1 = c + 1$ .

Als we nu nog laten zien dat als we beginnen met (6.32) met  $n \geq 2$ , en daar de twee burenen van uitrekenen, dat dan die burenen ook van de vorm (6.32) zijn, dan zijn we klaar. Gebruik makend van (6.35) en (6.36) zien we dat de twee burenen eruit zien als

$$(Q_1, Q_3, Q(1, c_0 + 1, c_1, \dots, c_n)), \quad (6.39)$$

$$(Q_2, Q_3, Q(c_0 + 2, c_1, \dots, c_n)). \quad (6.40)$$

Drietal (6.40) is afgeleid van (6.32) door de substitutie  $c_0 := c_0 + 1$ . Drietal (6.39) is afgeleid van (6.32) met dezelfde substituties als we hebben gebruikt om (6.36) te bewijzen.  $\square$

### 6.4.3 Bewijs van Stelling 6.1.4

Met datgene wat we in de vorige twee paragrafen hebben bewezen hebben we nu ook dat als we Vermoeden 3.1.4 aannemen dat er voor gegeven Markoff getal  $Q > 2$  er vier verschillende  $\alpha \in (0, 1)$  zijn zodanig dat  $H(\alpha) = 3/2 + 1/2\sqrt{9 - 4/Q^2}$ . We krijgen namelijk als slecht benaderbare getallen voor  $Q = Q(c_1, \dots, c_n)$

- $\alpha_1 = \left\langle 0; \overline{2(11)_{\omega_m} 2 \dots 2(11)_{\omega_1} 2} \right\rangle;$
- $\alpha_2 = \left\langle 0; \overline{(11)_{\omega_1} 2 \dots 2(11)_{\omega_m} 22} \right\rangle;$
- $\alpha_3 = \left\langle 0; \overline{2(11)_{\omega_1-1} 2 \dots 2(11)_{\omega_m} 11} \right\rangle;$

$$\bullet \alpha_4 = \left\langle 0; 11(11)_{\omega_m} 2 \dots 2(11)_{\omega_1} 22 \right\rangle.$$

Merk op dat  $\alpha_3$  verkregen is door de 2 van  $\alpha_1$  te veranderen in 11 en  $\alpha_4$  verkregen is door 11 van  $\alpha_2$  te veranderen in 2.  $\square$

## 6.5 Bepalen van alle slecht benaderbare getallen

### 6.5.1 Via de Markoff boom

We weten nu dat er bij elk Markoff getal  $Q$  er een  $C$ -set  $(c_0, \dots, c_n)$  zó dat  $Q(c_0, \dots, c_n) = Q$  (en omgekeerd dat bij elke  $C$ -set een Markoff getal hoort). Beschouw de Markoff drietallen (6.39) en (6.40). Bij elk Markoff getal  $Q$  hoort een periode van de vorm  $2(11)_{\omega_m} 2 \dots 2(11)_{\omega_1} 2$ , maar om een typografische reden zeggen we dat de periode die hoort bij  $Q$  gelijk is aan  $(11)_{\omega_m} 2 \dots 2(11)_{\omega_1} 22$ .

Schrijf de periode die hoort bij  $Q_1$  als  $A$ , de periode die hoort bij  $Q_2$  als  $B$  en de periode die hoort bij  $Q_3$  als  $C$ . Als we de periodes van  $Q_1, Q_2, Q_3, Q(1, c_0 + 1, c_1, \dots, c_n)$  en  $Q(c_0 + 2, a_1, \dots, c_n)$  uitschrijven dan zien we:

- De periode die hoort bij  $Q(1, c_0 + 1, c_1, \dots, c_n)$  is gelijk aan  $CA$  als  $n$  even is en gelijk aan  $AC$  als  $n$  oneven is;
- De periode die hoort bij  $Q(c_0 + 2, c_1, \dots, c_n)$  is gelijk aan  $CB$  als  $n \neq 0$  even is en gelijk aan  $BC$  als  $n$  oneven is.

Het verschil in periode voor  $n$  even en  $n$  oneven komt omdat de afgeleide rijen alterneren tussen  $R$ - en  $S$ -rijen.

Bovenstaand inzicht geeft aanleiding tot de boom in Figuur 6.1. De periodes die bij de Markoff drietallen gegeven zijn, horen bij het grootste Markoff getal van dat drietal.<sup>2</sup>

### 6.5.2 Via Markoff drietallen

We gaan in deze paragraaf zien hoe we alle slecht benaderbare getallen op een rekenkundige manier kunnen bepalen.

We beperken ons weer tot slecht benaderbare getallen zodanig dat  $0 \leq \alpha \leq 1/2$ , waarbij  $\alpha$  zuiver periodiek is. We weten dat  $\alpha$  eruit ziet als:

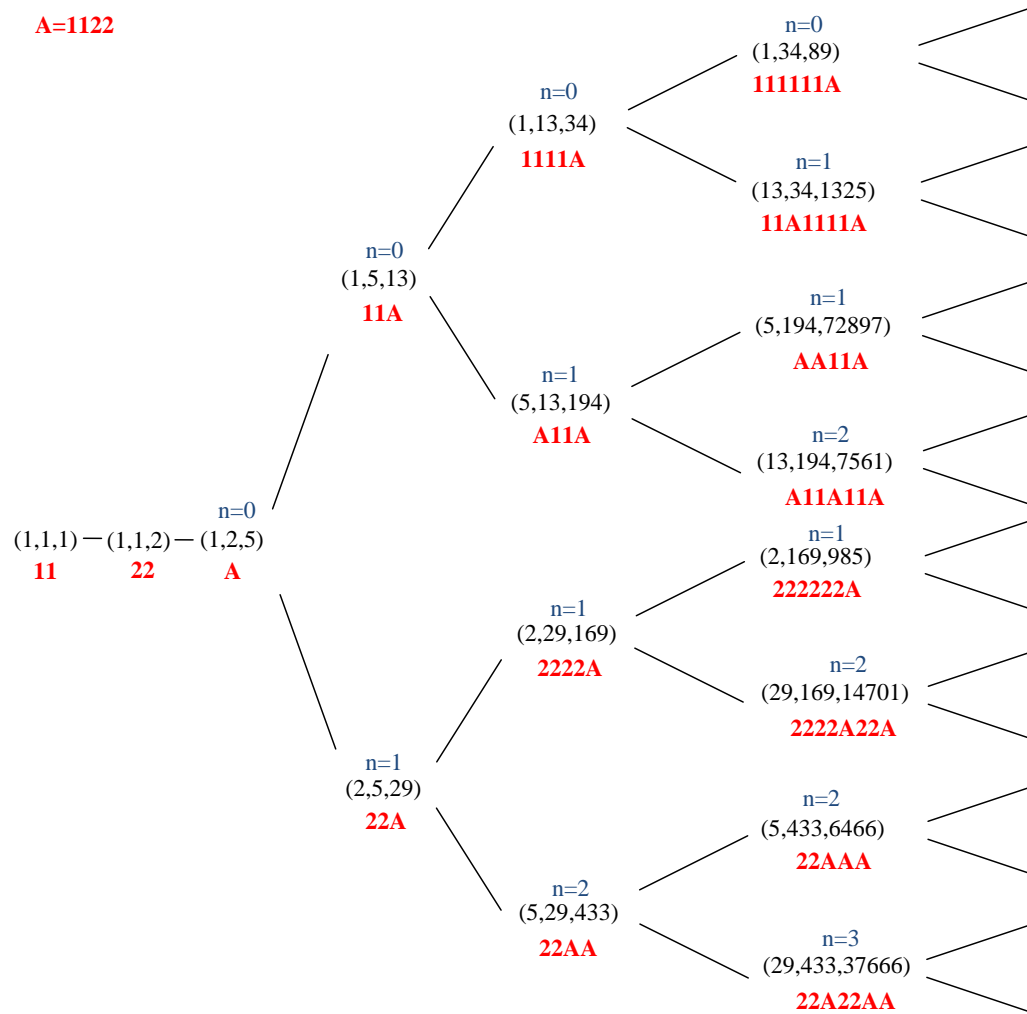
$$\alpha = \frac{-1}{2} - \frac{Q'}{Q} + \frac{1}{2} \sqrt{9 - \frac{4}{Q^2}}$$

met  $Q$  een Markoff getal.

Stel dat we voor een Markoff getal  $Q$  het slecht benaderbare getal  $\alpha$  willen bepalen zodanig dat  $H(\alpha) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{9 - \frac{4}{Q^2}}$  (deze is uniek als Vermoeden 3.1.4 waar is). Om dit getal te vinden moeten we op een of andere manier  $Q'$  zien te bepalen:

<sup>2</sup>De Markoff getallen in de figuur zijn geordend op grootte. Bij het Markoff drietal  $(Q_1, Q_2, Q_3)$  is  $Q_1 > Q_2$ .





Figuur 6.1: Markoff boom met bijbehorende periodes

Neem een Markoff getal  $Q$  en bepaal het Markoff drietal  $(Q_1, Q_2, Q)$ , met  $Q_1 \leq Q_2 \leq Q_3$  (dit drietal is uniek als Vermoeden 3.1.4 waar is). We weten van voorgaande paragraaf dat er een  $C$ -set  $(c_0, \dots, c_n)$  is zodanig dat

$$Q(c_0, \dots, c_n) = Q_1, \quad Q(c_1 - 1, c_2, \dots, c_n) = Q_2, \quad Q(c_0 + 1, c_1, \dots, c_n) = Q.$$

**Lemma 6.5.1** *Voor een Markoff drietal  $(Q_1, Q_2, Q)$ ,  $Q_1 < Q_2 < Q$  geldt de volgende identiteit:*

$$Q' \equiv \frac{Q_2}{Q_1} \pmod{Q}.$$

*Bewijs* Uit Lemma 6.4.3 volgt dat

$$\begin{aligned} Q_2 + Q_1 P &= Q_2 + Q_1(P_1 P_2 + P_1' Q_2) &= Q_2(1 + Q_1 P_1') + Q_1 P_1 P_2 \\ &= Q_2 P_1 Q_1' + Q_1 P_1 P_2 \\ &= P_1 Q. \end{aligned}$$

We weten nu dus dat  $Q_2 + Q_1 P = P_1 Q$ , verder weten we dat  $Q$  relatief priem is met  $Q_1$  en  $Q_2$  (zie Stelling 3.1.3). De volgende berekening is daarom toegestaan,

$$P \equiv -\frac{Q_2}{Q_1} \equiv \frac{Q_1}{Q_2} \pmod{Q}.$$

Verder is het zo dat  $P = 3Q - Q'$  (Lemma 6.4.1) en dus  $P \equiv -Q' \pmod{Q}$ . We vinden,

$$Q' \equiv \frac{Q_2}{Q_1} \pmod{Q}.$$

□

Dus zodra we weten welk Markoff drietal er bij  $Q$  hoort, waarbij  $Q$  het grootste element is van dat drietal, weten we ook (na wat modulo rekenen) wat  $\alpha$  is met  $H(\alpha) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{9 - \frac{4}{Q^2}}$ .

### 6.5.3 Via Sturm rijen

We gaan in deze paragraaf zien dat we aan de hand van rechte lijnen met rationale helling in het rooster  $\mathbb{Z}^2$  alle slecht benaderbare getallen kunnen construeren.

Zij  $A$  een oneindige rij

$$r_1, r_2, r_3, \dots, \quad r_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ voor alle } i. \tag{6.41}$$

**Definitie 6.5.2** *Een oneindige rij  $A$  noemen we Hurwitz gebalanceerd als het voldoet aan de volgende eigenschappen:*

- $|r_i - r_j| \leq 1$  voor alle  $i, j \in \mathbb{N}$ ;
- Als  $r_{i+1} - r_i = -1$ , dan is het eerste niet nul verschil  $r_{i+j+1} - r_{i-j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, i-1$ , gelijk aan  $+1$ ;

- Als  $r_{i+1} - r_i = 1$ , dan is het eerste niet nul verschil  $r_{i+j+1} - r_{i-j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, i - 1$ , gelijk aan  $-1$ ;

Merk op dat dit eigenschappen zijn die nodig (niet voldoende) zijn om een  $R$ -rij te zijn.

**Definitie 6.5.3** Een oneindige rij (6.41) is gebalanceerd als de rij voldoet aan de volgende eigenschap:

$$\left| \sum_{j=k}^{k+n} r_j - \sum_{j=k}^{k+n} r_{j+m} \right| \leq 1$$

voor alle  $k, m \in \mathbb{N}$  en alle  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ .

**Lemma 6.5.4** Een gebalanceerde rij is Hurwitz gebalanceerd. Als de oneindige rij (6.41) een  $R$ -rij is, dan is de rij gebalanceerd.

*Bewijs* De eerste bewering volgt uit de definities van een gebalanceerde rij en een Hurwitz gebalanceerde rij.

Om de tweede bewering te bewijzen maken we gebruik van het feit dat er maar eindig veel afgeleide rijen van  $R$  zijn en dat  $R_0 = \{(c_N)_\infty\}$  of  $R_0 = \{c_N, (c_N - 1)_\infty\}$ . Het is duidelijk dat  $R_0$  in beide gevallen gebalanceerd is.

Zij gegeven  $R_{i-1}$ ,  $i > 0$  een gebalanceerde rij. Als we nu kunnen bewijzen dat  $R_i$  ook een gebalanceerde rij is, dan zijn we klaar aangezien  $R_0$  een gebalanceerde rij is.

We gaan er vanuit dat  $R_{i-1} = \{r_1, r_2, \dots\}$  een  $R$ -rij is en we gaan bewijzen dat  $R_i = \{s_1, s_2, \dots\}$  een gebalanceerde rij is. Het bewijs voor  $R_{i-1}$  een  $S$ -rij gaat op analoge wijze.

We hebben dat

$$R_i = c_i, (c_i - 1)_{r_1}, c_i, (c_i - 1)_{r_2}, c_i, \dots \quad (6.42)$$

Verder hebben we dat

$$\sum_{j=k}^{k+n} s_j = ac_i + \sum_{j=b}^c s_j (c_i - 1) + d(c_i - 1) \quad (6.43)$$

en

$$\sum_{j=k}^{k+n} s_{j+m} = a'c_{i-1} + \sum_{j=b'}^{c'} s_j (c_{i-1} - 1) + d'(c_{i-1} - 1), \quad (6.44)$$

waarbij  $a, b, c, d, a', b', c', d' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  en

$$n + 1 = a + d + \sum_{j=b}^c s_j = a' + d' + \sum_{j=b'}^{c'} s_j. \quad (6.45)$$

De aanname dat  $R_{i-1}$  gebalanceerd is impliceert dat

$$|c - b - (c' - b')| \leq 1 \quad \text{en} \quad |a - a'| \leq 1.$$

Als we deze ongelijkheden combineren met (6.43), (6.44) en (6.45) zien we dat  $R_i$  gebalanceerd is.  $\square$

**Lemma 6.5.5** *Stel dat  $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $q \in \mathbb{N}$ ,  $\text{ggd}(p, q) = 1$  en schrijf  $p/q = \gamma$ . De rij  $R = \{r_i\}_1^\infty$  met  $r_i = \lfloor i\gamma \rfloor - \lfloor (i-1)\gamma \rfloor$  is gebalanceerd en dus ook Hurwitz gebalanceerd. Daarnaast heeft de rij de extra eigenschap dat als  $r_i - r_{i+1} = 1$ , dan is er een  $j$  zó dat  $r_{i+j+1} - r_{i-j} = -1$ .*

*Opmerking: de rij  $R$  bezit alle eigenschappen van een  $R$ -rij.*

*Bewijs* Voor alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gelden de volgende ongelijkheden:

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1.$$

Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=k}^{k+n} (\lfloor j\gamma \rfloor - \lfloor (j-1)\gamma \rfloor) - \sum_{j=k}^{k+n} (\lfloor (j+m)\gamma \rfloor - \lfloor (j+m-1)\gamma \rfloor) \right| \\ &= | \lfloor (k+n)\gamma \rfloor - \lfloor (k-1)\gamma \rfloor - (\lfloor (k+n+m)\gamma \rfloor - \lfloor (k+m-1)\gamma \rfloor) | \\ &= | \lfloor (k+n)\gamma \rfloor + \lfloor (k+m-1)\gamma \rfloor - (\lfloor (k-1)\gamma \rfloor + \lfloor (k+n+m)\gamma \rfloor) | \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

De rij  $\{r_i\}_1^\infty$  is dus gebalanceerd uit Lemma 6.5.4 volgt dat de rij Hurwitz gebalanceerd is.

*Bewijs van de extra eigenschap:*

Omdat  $\gamma = p/q$  een rationaal getal is, is de rij  $\{r_i\}_1^\infty$  zuiver periodiek en heeft de periode een lengte van  $q$ . Dus,

$$\{r_i\}_1^\infty = \{(r_1, \dots, r_q)_\infty\}.$$

Er geldt  $r_1 = \lfloor \gamma \rfloor$  en  $r_q = p - \lfloor (q-1)\gamma \rfloor = p - \lfloor p - \gamma \rfloor = \lceil \gamma \rceil$ . Verder is het gemakkelijk in te zien dat voor alle  $x, y \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}$  geldt dat  $\lceil x \rceil - \lceil y \rceil = \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor$ . Hieruit volgt dat

$$r_{q-i+1} = \lfloor p - i\gamma \rfloor - \lfloor p - (i-1)\gamma \rfloor = \lfloor (i)\gamma \rfloor - \lfloor (i-1)\gamma \rfloor = r_i, \text{ voor alle } i \not\equiv 0 \pmod{q}.$$

We hebben dus dat  $r_1 + 1 = r_q$  en  $r_i = r_{q-i+1}$  voor  $1 < i < q$ .

Stel dat  $r_i - r_{i+1} = 1$  en stel bij wijze van tegenspraak dat er een  $i > 1$  is zó dat  $r_{i-\tau} - r_{i+1+\tau} = 0$ , voor  $\tau = 1, \dots, i-1$ . Schrijf het grootste element van  $R$  als  $b$  en het kleinste element als  $a$ . Het begin van de periode van de rij ziet er uit als  $aSba\overleftarrow{S}a$ , waarbij  $S$  een string van  $a$ 's en  $b$ 's is en  $\overleftarrow{S}$  het omgekeerde is van  $S$ . Omdat  $r_1 + 1 = r_q$  en  $r_i = r_{q-i+1}$  voor  $1 < i < q$  moet het einde van de periode eruit zien als  $aSab\overleftarrow{S}b$ . Maar dit is in tegenspraak met dat  $R$  Hurwitz gebalanceerd is. □

**Lemma 6.5.6** *Stel dat  $\{(r_1, r_2, \dots, r_n)_\infty\}$ ,  $r_i \in \mathbb{N}$  een  $R$ -rij is, dan is er een  $\gamma \in \mathbb{Q}_{>0}$  zodanig dat  $r_i = \lfloor i\gamma \rfloor - \lfloor (i-1)\gamma \rfloor$  voor alle  $i \geq 1$ .*

*Bewijs* Vanwege Lemma 6.5.4 weten we dat  $R = \{(r_1, r_2, \dots, r_n)_\infty\}$  een gebalanceerde rij is.

Beschouw  $\min_{0 \leq m < n} \sum_{j=1}^k r_{j+m}$  voor alle  $k = 1, 2, \dots, n$ . Omdat  $R$  zuiver periodiek en gebalanceerd is, is er een geheel getal  $t \geq 0$  waarvoor het minimum is bereikt voor alle  $k$ . Uit (6.15) volgt dat dit getal gelijk is aan 0, dus

$$\sum_{j=1}^k r_j = \min_{0 \leq m < n} \sum_{j=1}^k r_{j+m} \text{ voor } k = 1, 2, \dots \quad (6.46)$$

Omdat  $R$  een gebalanceerde rij is volgt uit (6.46) dat

$$\sum_{j=1}^k r_j \leq \sum_{j=1}^k r_{j+m} \leq 1 + \sum_{j=1}^k r_j, \text{ voor alle } k, m \in \mathbb{N}. \quad (6.47)$$

Definieer

$$\sigma(l) = \sum_{j=1}^l r_j, \quad \gamma = \sup_{l \rightarrow \infty} \frac{\sigma(l)}{l}.$$

Er geldt dat

$$\sigma(l) \leq l\gamma \text{ voor } l = 1, 2, \dots. \quad (6.48)$$

Uit (6.46) volgt dat

$$\frac{\sigma(v)}{v} \leq \frac{\sigma(n)}{n} \text{ voor } v = 1, 2, \dots, n.$$

Voor  $l = qn + v$ ,  $0 \leq v < n$ , hebben we dat  $\sigma(l) = q\sigma(n) + \sigma(v)$ . Hieruit volgt dat  $\gamma = \sigma(n)/n$ . Uit de ongelijkheden in (6.47) volgt dat voor alle  $k, l \in \mathbb{N}$

$$\sigma(k) + \sigma(l) \leq \sigma(k+l) \leq \sigma(k) + \sigma(l) + 1.$$

Voor  $k = l$  geeft dit

$$2\sigma(l) \leq \sigma(2l) \leq 2\sigma(l) + 1.$$

We gaan nu met volledige inductie bewijzen dat voor alle  $k, l \in \mathbb{N}$

$$k\sigma(l) \leq \sigma(kl) \leq l\sigma(k) + k - 1. \quad (6.49)$$

*Bewijs* Voor  $k = 1$  is de eerste bewering duidelijk waar. Stel dat de bewering waar is voor  $k$ , voor  $k + 1$  krijgen we,

$$(k+1)\sigma(l) = \sigma(l) + k\sigma(l) \leq \sigma(l) + \sigma(lk) \leq \sigma(l+lk) \leq \sigma(l) + \sigma(lk) + 1 \leq \sigma(l) + l\sigma(k) + k.$$

□

Gebruik makend van (6.49) en dezelfde ongelijkheden met  $k$  en  $l$  omgewisseld krijgen we,

$$|k\sigma(l) - l\sigma(k)| \leq \max(k, l) - 1.$$

Daarom geldt voor elke  $k$  en alle  $l \geq k$  dat

$$\sigma(l)/l < (\sigma(k) + 1)/k.$$

Omdat  $\sigma(tn) = t\sigma(n)$  geldt dat  $\gamma = \sigma(n)/n < (\sigma(k) + 1)/k$  voor alle  $k \geq n$  en dus

$$\sigma(l) > l\gamma - 1 \text{ voor } l \geq n. \quad (6.50)$$

Vanwege (6.48) en (6.50) hebben we  $\sigma(l) = \lfloor l\gamma \rfloor$  voor  $l \geq n$  en omdat  $r_l = \sigma(l) - \sigma(l-1)$  hebben we,

$$r_l = \lfloor l\gamma \rfloor - \lfloor (l-1)\gamma \rfloor \quad (6.51)$$

voor  $l \geq n$ . Vanwege de periodiciteit van  $R$  geldt (6.51) voor alle  $l \in \mathbb{Z}_{>0}$ .

□

Uit Lemma 6.5.5 en 6.5.6 volgt de volgende stelling.

**Stelling 6.5.7** *Neem  $p, q \in \mathbb{N}$  en construeer de rij  $R = \{(r_1, r_2, \dots, r_q)_\infty\}$  door  $r_i = \lfloor ip/q \rfloor - \lfloor (i-1)p/q \rfloor$ , dan is*

$$\alpha = \left\langle 0; \overline{2(11)_{r_1} 2 \dots 2(11)_{r_q} 2} \right\rangle$$

*een slecht benaderbaar getal.*

*Omgekeerd als*

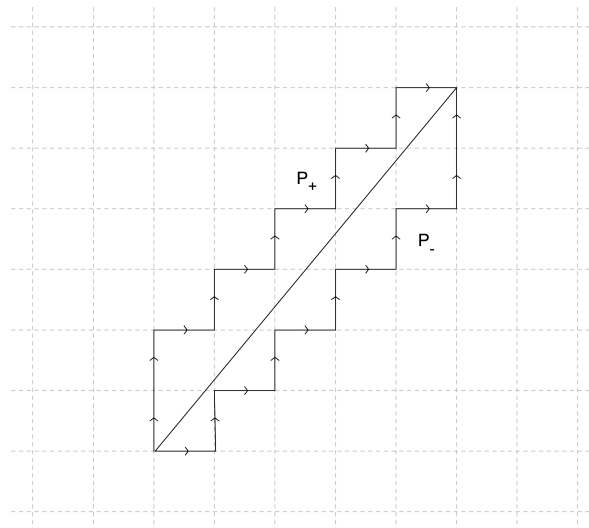
$$\alpha = \left\langle 0; \overline{2(11)_{r_1} 2 \dots 2(11)_{r_n} 2} \right\rangle$$

*een slecht benaderbaar getal is, dan is er een  $\gamma \in \mathbb{Q}_{>0}$  zodanig dat  $r_i = \lfloor i\gamma \rfloor - \lfloor (i-1)\gamma \rfloor$  voor alle  $i \in \mathbb{Z}_{>0}$ .*

### Sturm rij

Zij gegeven een rechte lijn  $l$  in  $\mathbb{R}^2$  door het punt  $(0, 0)$  met positieve helling. Teken  $P_-, P_+$  zodanig dat  $P_-$  en  $P_+$  uit segmenten bestaat van de vorm  $[(i, j), (i+1, j)]$  of  $[(i, j), (i, j+1)]$ , waarbij  $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ . Tevens mogen er tussen  $P_-$  en  $P_+$  en de lijn  $l$  geen roosterpunten zitten en als lijn  $l$  door een roosterpunt gaat, dan moeten  $P_-$  en  $P_+$  ook door datzelfde roosterpunt gaan.  $P_+$  wordt links van lijn  $l$  getekend en  $P_-$  rechts van lijn  $l$ . Zie Figuur 6.5.3 voor een voorbeeld.

Merk op dat gegeven een rechte lijn  $l$  dat  $P_-$  en  $P_+$  uniek bepaald zijn.  $P_-$  en  $P_+$  worden ook wel Sturm rijen genoemd.



Figuur 6.2: Sturm-rij

We kunnen een Sturm-rij als een woord representeren over een alfabet met 2 elementen, zeg  $\{a, b\}$ .  $P_-$  in Figuur 6.5.3 wordt dan gerepresenteerd als  $abababababb$  en  $P_+$  als  $bbababababa$ .

### Bepalen van slecht benaderbare getallen aan de hand van Sturm rijen:

Stel dat we een slecht benaderbaar getal  $0 \leq \alpha \leq 1/2$  willen construeren waarvan de kettingbreuk zuiver periodiek is en de periode  $2r$  enen bevat en  $2s$  tweeën:

Definieer

$$r_i = \lfloor ir/s \rfloor - \lfloor (i-1)r/s \rfloor \quad (i = 1, 2, \dots, s-1).$$

En definieer

$$v_i = 2, \underbrace{1, \dots, 1}_{r_i \text{ keer}}.$$

$$V = [v_1, \dots, v_s].$$

Het is niet moeilijk in te zien dat  $V$  een Sturm rij is (2 is de letter  $a$  en 1 is de letter  $b$ ).

We hebben nu dat

$$\alpha = \left\langle 0; \overline{2(11)_{r_1} 2 \dots 2(11)_{r_s} 2} \right\rangle$$

een slecht benaderbaar getal waarvan de periode van de kettingbreukontwikkeling van  $\alpha$   $2r$  enen en  $2s$  tweeën bevat.

Meetkundig kunnen we  $\alpha$  dus als volgt bepalen: Teken de lijn  $l : y = r/sx$ , teken  $P_-$  en bepaal  $V$ , het slecht benaderbare getal  $\alpha$  volgt nu uit  $V$ .

Met de rij  $P_+$  hebben we een ander slecht benaderbaar getal voor handen met dezelfde Hurwitz waarde als  $\alpha$ . Stel namelijk dat  $\alpha = \alpha_1 = \left\langle 0; \overline{2(11)_{\omega_m} 2 \dots 2(11)_{\omega_1}} \right\rangle$ . De rij  $P_+$  is gelijk aan het omgekeerde van een rij  $P_-$ . We kunnen daarom zeggen dat  $P_+$  hoort bij het slechte benaderbare getal  $\alpha_2 = \left\langle 0; \overline{(11)_{\omega_1} 2 \dots 2(11)_{\omega_m} 22} \right\rangle$ .

# Hoofdstuk 7

## Conclusie

We weten hoe het Hurwitz spectrum  $< 3$  eruit ziet, dit zijn namelijk de getallen van de vorm  $3/2 + \sqrt{9 - 4/M^2}/2$  met  $M$  een Markoff getal. Ook hebben we drie methodes gezien om slecht benaderbare getallen van het Hurwitz spectrum te bepalen:

Methode 1: Het tekenen van de Markoff boom met bijbehorende periodes. De bijbehorende periode bij een Markoff drietal is de periode van de kettingbreukontwikkeling van een slecht benaderbaar getal  $0 \leq \alpha \leq 1/2$ , waarbij  $\alpha$  een zuiver periodieke kettingbreuk heeft. Zie Paragraaf 6.5.1.

Methode 2: Het uitrekenen van het slecht benaderbare getal horende bij een Markoff drietal. Zie Paragraaf 6.5.2.

Methode 3: Het tekenen van een Sturm-rij horende bij een rechte lijn met rationale helling. Zie Paragraaf 6.5.3.

Alle drie de methodes hebben zo hun voor- en nadelen, maar gezamenlijk zijn de drie methodes vrij sterk om slecht benaderbare getallen te bepalen. Zo kunnen we aan de hand van Methode 1 een lijst maken van alle slecht benaderbare getallen gerangschikt op de Markoff getallen die bij de slecht benaderbare getallen horen. Met een aftelbaarheidsbewijs voor  $\mathbb{Q}_{>0}$  kunnen we met behulp van van Methode 3 ook een andere rangschikking gebruiken en er zo zeker van zijn dat alle slecht benaderbare getallen een keer voorkomen. Nadeel van Methode 3 is dat het niet meteen duidelijk is welke Markoff getallen er bij die slecht benadere getallen horen.

Met Methode 3 kunnen we gemakkelijk de slechte benaderbare getallen bepalen waarbij de periode van de kettingbreukontwikkeling van die slecht benaderbare getallen  $2r$  enen bevat en  $2s$  tweeën. Een ander voordeel van Methode 3 is dat we een methode voor handen hebben waarbij we makkelijk kunnen nagaan of een getal,  $\beta$  een slecht benaderbaar getal is of niet: Bepaal eerst de kettingbreukontwikkeling van  $\beta$ . Stel dat het niet meteen duidelijk is dat  $\beta$  een slecht benaderbaar getal is, dan neemt de kettingbreuk één van de volgende vormen aan:

$$\begin{aligned} & \left\langle 0; \overline{2(11)_{\tau_m} 2 \dots 2(11)_{\tau_1}} \right\rangle, \left\langle 0; \overline{(11)_{\tau_1} 2 \dots 2(11)_{\tau_m} 22} \right\rangle, \\ & \left\langle 0; \overline{2(11)_{\tau_1-1} 2 \dots 2(11)_{\tau_m} 11} \right\rangle, \left\langle 0; \overline{11(11)_{\tau_m} 2 \dots 2(11)_{\tau_1} 22} \right\rangle. \end{aligned}$$

Waarbij  $\tau \in (r - 1, r)$ ,  $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ . Tel het aantal enen en het aantal tweeën in de periode (dit zullen allebei even getallen zijn). Stel dat we  $2r$  enen en  $2s$  tweeën hebben. Teken de rechte lijn  $l$  in  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  die begint in de oorsprong en eindigt in het punt  $(r, s)$ . Bepaal  $P_-$  (of  $P_+$ ) en kijk of



$P_-$  overeenkomt met de rij  $\{\tau_m, \dots, \tau_1\}$  (of kijk of  $P_+$  overeenkomt met de rij  $\{\tau_1, \dots, \tau_m\}$ ). Als dit zo is dan is  $\beta$  een slecht benaderbaar getal, anders niet.

Met de technieken die we in Hoofdstuk 6 hebben gebruikt kunnen we met de nodige aanpassingen alle onbewezen stellingen en lemma's bewijzen in Hoofdstuk 4. We zullen dan zien dat voor  $\alpha \in \mathbb{R}$ , waarvoor

$$L(\alpha) = a_1 + \langle 0; \overline{a_2, \dots, a_n, a_1} \rangle + \langle 0; \overline{a_n, a_{n-1}, \dots, a_1} \rangle = \sqrt{9 - 4/m^2} < 3$$

met  $m$  een Markoff getal, dat  $\alpha_1 = \langle 0; \overline{a_2, \dots, a_n, a_1} \rangle$  en  $\alpha_2 = \langle 0; \overline{a_n, a_{n-1}, \dots, a_1} \rangle$  slecht benaderbare getallen zijn met Hurwitz waarde  $H(\alpha_1) = H(\alpha_2) = 3/2 + 1/2\sqrt{9 - 4/m^2}$ . Omgekeerd impliceert  $H(\alpha) < 3$  dat  $L(\alpha) < 3$ , dit laatste volgt uit de definities van lim sup en sup.

We kunnen dus met de bovenstaande methodes ook alle slecht benaderbare getallen van het Markoff spectrum bepalen.

Ondanks dat de aanpassingen niet moeilijk zijn is het vrij veel werk om al die aanpassingen door te voeren, we laten dit daarom achterwegen en verwijzen naar de literatuurlijst.

Al met al hebben we een goed beeld gekregen van wat de slecht benaderbare getallen van het Hurwitz spectrum zijn. Eigenlijk is het enige probleem nog het bewijzen van Vermoeden 3.1.4, maar dit is geen sinecure, want dit probleem is al bijna 100 jaar oud.

# Bibliografie

- [Beu] F. Beukers, *Getaltheorie voor beginners*, Epsilon Uitgaven, Utrecht 2000.
- [Bom] E. Bombieri, *Continued fractions and the Markoff tree*, Expo. Math, 2006.
- [Coh] H. Cohn, *Representation of Markoff's binary quadratic forms by geodesics on a perforated torus*, Acta Arithmetica XVIII, 1971.
- [Cus/Fla] T.W. Cusick, M.E. Flahive, *The Markoff and Lagrange spectra*, American Mathematical Society, 1989.
- [Dic] L.E. Dickson, *Studies in the theory of numbers*, The University of Chicago Press, 1930.
- [Gbu] M.E. Gbur, *On the minimum of zero indefinite binary quadratic forms*, Mathematika, New York, 1978.
- [Lan/Tan] M.L. Lang, S.P. Tan, *A simple proof of the Markoff conjecture for prime power*, Geometriae Dedicata VOL 129; number 1, p. 15-22, 2007.
- [Mar1] A. Markoff, *Sur les formes quadratiques binaires indéfinies*, Math Ann. 15 p. 381-406, 1879.
- [Mar2] A. Markoff, *Sur les formes quadratiques binaires indéfinies*, II Math Ann. 17 p. 379-399, 1880.
- [Reu] C. Reutenauer, *On Markoff's property and Sturmian words*, Math. Ann. 336, p. 1-12, 2006.
- [Roc] A.M. Rockett, P. Szüsz, *Continued Fractions*, Utopia Press, 1992.
- [Zha] Y. Zhang, *Congruence and Uniqueness of Certain Markoff Numbers*, Acta Arithmetica 128, no. 3, 295-301, 2007.