

JAN HENDRIK
VAN SWINDEN
(1746-1823)

en

JACOB DE
GELDER
(1765-1848)

*een meetkunstige
vergelijking*

WIGGERT
LUONSTRA



Jan Hendrik van Swinden (1746-1823)

en

Jacob de Gelder (1765-1848)

een meetkunstige vergelijking

Wiggert Loonstra

Jan Hendrik van Swinden (1746-1823)

en

Jacob de Gelder (1765-1848)

een meetkunstige vergelijking

geschreven door Wiggert Loonstra als afstudeerscriptie voor de master
Science Teacher Education voor Wiskunde aan de Universiteit Utrecht

Eerste begeleider: prof.dr. J.P. Hogendijk, Mathematisch Instituut,
Universiteit Utrecht

Tweede begeleider: drs. A.J. Goddijn, Freudenthal Instituut, Univer-
siteit Utrecht

augustus 2007 - augustus 2008

Woord vooraf

Met genoegen bied ik de lezer deze scriptie aan. In het kader van mijn master *Science Teacher Education* voor Wiskunde aan de Universiteit Utrecht heb ik mij het afgelopen jaar bezig gehouden met een onderzoek naar het wiskundeonderwijs in het begin van de negentiende eeuw in Nederland. Daarbij heb ik mij geconcentreerd op de meetkundeboeken van Jan Hendrik van Swinden en Jacob de Gelder. Ik heb de boeken met elkaar vergeleken en geprobeerd die te plaatsen in de onderwijssituatie van die tijd. Daarbij heb ik ook gekeken naar de onderlinge relatie tussen de twee auteurs.

Graag wil ik Jan Hogendijk bedanken voor zijn motiverende begeleiding. Na ieder gesprek kon ik weer vol enthousiasme verder. Het was erg leuk om samen met dit project bezig te zijn en over een gedeelte ervan te presenteren op de Nationale Wiskunde Dagen. Ook bedank ik Aad Goddijn voor het kritisch doornemen van de conceptversie van deze scriptie. Ik heb veel aan zijn opmerkingen gehad.

De presentatie op de NWD en deze scriptie hebben geleid tot de website www.jacobdegelder.nl met publicaties en achtergronden over deze wiskundige.

In deze scriptie vindt u de resultaten van mijn onderzoek. Ik hoop dat u hem met plezier zult lezen.

Wiggert Loonstra
Augustus 2008

Inhoudsopgave

1	Inleiding	8
2	Wiskundeonderwijs in Nederland	9
2.1	Schooltypes	9
2.1.1	Inhoud	9
2.2	Nut van de wiskunde	10
2.3	Examen	12
2.4	Samengevat	13
3	Jan Hendrik van Swinden	14
3.1	Levensloop	14
3.2	Onderwijs	18
3.3	Boeken	19
3.4	Karakterschets	19
4	Jacob de Gelder	20
4.1	Levensloop	20
4.2	Onderwijs	24
4.3	Boeken	24
4.4	Karakterschets	25
5	Een geschreven relatie	27
5.1	De Gelder begint	27
5.2	Brieven van De Gelder	28
5.3	Van Swindens reacties	29
5.4	Einde	29
5.5	Samengevat	32
6	De meetkundeboeken	36
6.1	De boeken en hun overeenkomsten	36
6.2	Van Swinden	38
6.3	De Gelder	39
6.4	Samengevat	41
7	Wiskunde onderwerpen vergeleken	48
7.1	De stelling van Pythagoras	49
7.1.1	Wat er vooraf ging	49
7.1.2	Het bewijs	50
7.1.3	Vergelijking	53
7.2	Evenredigheid	53
7.2.1	Evenredigheid - een verkenning	54
7.2.2	Evenredigheid - een stelling	58
7.2.3	Vergelijking	61

7.3	Evenredigheid (2)	62
7.3.1	1 en $\sqrt{2}$	62
7.3.2	Kettingbreuken, rekenschema's en $\sqrt{2}$	64
7.3.3	Vergelijking	66
7.4	De (afgeknotte) Pyramide	66
7.4.1	Euclides en de gewone pyramide	67
7.4.2	De afgeknotte pyramide	71
7.4.3	Vergelijking	74
7.5	Samengevat	75
8	Eindconclusie	79
A	Briefwisseling	82
A.1	De Gelders laatste brief	82
A.2	Van Swindens laatste brief	84
B	Wortelbenadering nader bekeken	85
B.1	Benadering van $\sqrt{2}$	85
B.2	Kwadratische vergelijking	86
B.3	Iteratief	87
B.4	Drie formules	88
B.5	Nogmaals $\sqrt{2}$	88
C	Bewijzen bij pyramides	90

Hoofdstuk 1

Inleiding

Het onderwijs in Nederland veranderde aan het einde van de achttiende en het begin van de negentiende eeuw. En het wiskundeonderwijs veranderde mee. Van het niveau van auteurs als Steenstra¹ werd het opgetrokken naar een niveau van meer exactheid. Binnen deze overgang is het interessant te kijken wie een belangrijke rol daarin gespeeld hebben en hoe deze ontwikkeling gegaan is.

Meetkunde was verreweg het belangrijkste wiskundeonderdeel in die tijd. Het had een voorbeeldfunctie voor de andere onderdelen, die, zoals bijvoorbeeld algebra, ten dienste stonden van de meetkunde. Als lesboek werd gebruik gemaakt van een vertaalde uitgave van Euclides' *Elementen* of vertaalde boeken van andere buitenlandse auteurs. Maar in deze periode verschenen ook nieuwe wiskundeboeken. Ik beperk mij tot exemplaren van eigen bodem.

Er kunnen twee werken als belangrijkste geïdentificeerd worden: de *Grondbeginsels der Meetkunde* van Jan Hendrik van Swinden en de *Beginselen der Meetkunst* van Jacob de Gelder. Twee auteurs die lange tijd bevriend met elkaar waren, maar tussen wie van de ene op de andere dag, in het jaar dat de tweede ook een meetkundeboek publiceerde, een heftige ruzie losbarstte.

De twee boeken zijn gebaseerd op de *Elementen*, maar hebben elk een eigen opbouw. Het waren concurrerende boeken in die dagen. Het is daarom ook interessant te kijken wat de ontwikkeling van het onderwijs, merkbaar in de meetkundeboeken, voor invloed op de auteurs zelf heeft gehad. En speelde hun eigen passie voor wiskunde een rol in die ontwikkeling? Daarnaast maakt het nieuwsgierig of de ruzie tussen de auteurs ook met de meetkundeboeken te maken kan hebben.

Als uitgangspunt voor mijn onderzoek heb ik de volgende vraag gesteld.

Hoe is de ontwikkeling in het wiskundeonderwijs naar meer exactheid in het begin van de negentiende eeuw zichtbaar in de meetkundeboeken van Van Swinden en De Gelder en hoe waren zij persoonlijk bij deze ontwikkeling betrokken?

In de scriptie bespreek ik materiaal om tot een antwoord hierop te komen. Ik hoop een context te scheppen van de stand van het (wiskunde)onderwijs in het begin van de negentiende eeuw en tevens een beeld te vormen van de auteurs Van Swinden en De Gelder, hun onderlinge relatie en de inhoud van hun meetkundeboeken.

¹Steenstra (1803).

Hoofdstuk 2

Wiskundeonderwijs in Nederland

In de periode 1750-1850 heeft het onderwijs in Nederland een belangrijke ontwikkeling doorgemaakt. In een tijd waarin met weemoed werd teruggekeken naar de roemruchte Gouden Eeuw werd deze verandering in gang gezet. Langzaamaan kwam bij sommigen het besef dat het vak wiskunde je een hogere positie in de samenleving geeft; zonder kennis van wiskunde is een mens niet optimaal op zijn taken voorbereid.¹

In de tijd van de Verlichting paste het dan ook dat het onderwijs, samen met de opvoeding, (opnieuw) in de belangstelling kwamen. De huidige stand van het onderwijs werd als onvoldoende beschouwd. Belangrijk was in 1784 de oprichting van de ‘Maatschappij tot Nut van het Algemeen’, die door goedkope schoolboeken, scholing van onderwijzend personeel en stimulering van het schoolbezoek het onderwijs trachtte te verbeteren.²

Niet alleen het onderwijssysteem, ook de wiskunde zelf veranderde. Danny Beckers spreekt van ‘zuivering’ en ‘rigorisering’.³ Enerzijds werd er opnieuw bepaald wat allemaal als wiskunde beschouwd mocht worden. Tegelijk was er een accentverschuiving naar strikt redeneren en bewijzen merkbaar. Het is evident dat deze ontwikkelingen niet los van elkaar gezien kunnen worden.

In dit hoofdstuk bekijken we wat voor gezicht het onderwijssysteem en in het bijzonder het vak wiskunde hadden vanaf de tweede helft van de achttiende eeuw.

2.1 Schooltypes

Om te beginnen is het van belang te kijken welke schooltypes en -soorten beschikbaar waren en wat voor onderwijs daar gegeven werd. De schoolkeuze werd grotendeels bepaald door de sociale klasse waar men toe behoorde. Voor de elite was er privéonderwijs thuis, de Latijnse school en daarna de universiteit. Voor de middenklasse waren er de Franse en Duytsche scholen en praktijk- of beroepsopleidingen. Voor (een deel van) de laagste klasse was er de lagere school waarna (soms) nog beroepsonderwijs mogelijk was.

2.1.1 Inhoud

Vóór 1815 was wiskunde in geen van de opleidingen een wettelijk verplicht onderdeel. Afhankelijk van de opleiding en bezochte school werd er wel of geen aandacht aan besteed.

Op de universiteit werden uit de *Elementen* van Euclides de eerste zes boeken onderwezen en ook het oplossen van een (stelsel) eerstegraads vergelijking(en).⁴ Dat er soms ook meer wiskunde gegeven werd, blijkt uit het feit dat in februari 1764 J.F. Hennert aangesteld werd als buitengewoon professor in de filosofie, wiskunde en astronomie aan de Universiteit Utrecht en dat deze

¹Beckers (2003, p. 16).

²Smid (1997, p. 14-15).

³Beckers (2003, p. 13-14) en Beckers (2006).

⁴Smid (1997, p. 16) en Beckers (2003, p. 58).

les gaf uit zijn eigen boek. Tussen 1766 en 1768 kwamen de drie delen uit van *Cursus Mathematici: Elementorum matheseos purae* die gaan over meetkunde (vlakke meetkunde, bolmeetkunde en trigonometrie), algebra (vergelijkingen, kegelsneden en meer algemene functies), reeksen en differentiaal- en integraalrekening. Op een korte onderbreking na heeft hij in Utrecht onderwezen tot aan zijn dood in 1813.⁵ Dat dit wiskundeprogramma een uitzondering was, bevestigt het volgende citaat van P.P. Bockstaele.

It will be clear (...) that mathematics occupied a humble position in the eighteenth-century universities and colleges of the Dutch Republic. It was retained in their curricula simply because of tradition or because it was useful for astronomy, physics, military engineering and navigation. It was accorded no recognition as a separate science in its own right.⁶

Op de Latijnse school waren de oude talen, uiteraard, belangrijk. Een gedegen kennis daarvan was een vereiste om toegelaten te worden tot een universiteit. Wiskunde stond dan ook niet op het programma van de Latijnse school.⁷

Het belangrijkste verschil tussen de Franse en Duitse scholen was de taal die gesproken werd tijdens de lessen. Globaal kan gezegd worden dat de Duitse school meer primair was en de Franse meer beroepsgericht,⁸ maar dit verschil was (later) niet altijd even duidelijk.⁹ Met ‘Duitsch’ wordt hier overigens het (toenmalige) Nederlands bedoeld. Het wiskundeonderwijs verschilde per plaats. Het kon op heel elementair niveau zijn: praktische rekenoefeningen met de vier hoofdoperaties +, −, × en ÷; terwijl op andere scholen (ook) meetkunde gedaan werd. Afhankelijk van de aangeboden leerrichtingen werd soms ook relevante wiskunde voor een beroepsopleiding onderwezen. Te denken valt dan aan koopmansrekenen, landmeetkunde of zeevaartkunde.

Op de lagere school was het primaire doel de leerlingen te leren lezen. Als aanvulling hierop werd eenvoudig rekenen gegeven. Bijvoorbeeld turven, of rekenen met maten en gewichten. Bij het beroepsonderwijs kon dit aangevuld worden met beginselen van de algebra en meetkunde.¹⁰

Wat de docenten van de Franse, Duitse en lagere scholen betreft, was er vanaf 1806 een wet van kracht die regelde hoe mensen de bevoegdheid van onderwijzer konden krijgen. Er waren vier rangen, teruggeteld van 4 naar 1, met de 1e rang als hoogste. Middels examens konden onderwijzers promotie maken. Van onderwijzers van rang 4 werd verlangd dat zij de “rekenkunde” beheersten, dit was inclusief de Regel van Drieën.¹¹ Voor rang 3 was er aan toegevoegd vlot met breuken te kunnen rekenen. Rang 2 onderscheidde zich door de toevoeging ook theoretisch de rekenkunde te ‘verstaan’. Ten slotte werd van onderwijzers van de eerste rang verwacht dat zij ‘met de Natuur- en Wiskunde wel bekend zijn’. Wat die wiskunde dan precies inhield, wordt uit de wet niet duidelijk.¹²

2.2 Nut van de wiskunde

De Verlichting bracht een nieuwe kijk op de wereld en de maatschappij met zich mee. Daarmee gepaard ging een verandering van het beeld dat men had van kinderen, de opvoeding en de rol van de school daarin. Vanuit het Verlichtingsideaal waren in de tweede helft van de achttiende eeuw diverse (wiskundige) genootschappen van burgers die zich voor wetenschap interesseerden, ontstaan. De genootschappen bepleitten dat meer hoger opgeleide mensen zouden kunnen bijdragen

⁵Bockstaele (1978, p. 79-80).

⁶Bockstaele (1978, p. 80).

⁷Beckers (2003, p. 57, 58).

⁸Beckers and Smid (2003, p. 22).

⁹Getuige het feit dat de Franse en Duitse school in Beckers (2003) in één adem samen genoemd worden.

¹⁰Zie voor een uitgebreid overzicht van schooltypes, wiskunde-inhoud en gebruikte boeken Smid (1997).

¹¹De Regel van Drieën bestond uit het uitrekenen van een vierde grootte als er drie gegeven waren. Twee stonden in een bepaalde verhouding, de vierde moest in diezelfde verhouding bij de derde uitgerekend worden. Als 5 emmers samen 45 liter water kunnen bevatten, hoeveel water zit er dan in 8 emmers? Nota bene: de onderwijzers moesten deze vaardigheid bezitten. In welke onderwijslagen deze regel onderwezen moest worden, is hier niet aan de orde.

¹²Smid (1997, p. 29).

aan een ‘beter inzicht in economische en technische processen’.¹³ De economische achteruitgang was dus een belangrijke factor in dit proces. Dit alles resulteerde in een pleidooi voor onderwijs-hervormingen. Een van deze hervormingen zou zijn de achterstand van de wiskundekennis ten opzichte van het buitenland in te halen.¹⁴ Beckers en Smid verwoordden de reactie van de (gevestigde) wiskundigen op deze hervormingen als volgt. ‘De nieuwe wiskunde zou de burger moreel sterker maken. Juist de zuivere wiskunde bezat een vormende waarde. Degene die de zuivere wiskunde bestudeerde kreeg met die studie een beter besef van waarheid en zuivere redenering bijgebracht.’¹⁵

Wiskunde kon het verstand ontwikkelen, redeneervermogen bijbrengen. Over de vormende waarde van de wiskunde schrijft Smid: ‘Het belang dat onderwijs in de wiskunde voor de opvoeding zou hebben werd meestal tot uiting gebracht met een beroep op een veronderstelde ‘vormende waarde’ van de wiskunde. Heel precies werd dat begrip in de negentiende eeuw niet gedefinieerd, maar meestal speelden beide elementen, zowel de intellectuele als de morele waarde [daarvoor besproken, WL], een rol.’¹⁶

Deze ontwikkeling speelde zich binnen alle lagen van het onderwijs af. E.W.A. de Moor schrijft over het begin van de negentiende eeuw: ‘De rationele en humane opvattingen stelden het kind, niet de stof, als uitgangspunt van het onderwijs. Het kind diende veelzijdig ontwikkeld te worden en opgevoed tot een zelfstandig denkende persoonlijkheid. (...) Daar allerwegen de opvatting bestond dat de mens maakbaar was, ook ten aanzien van de ontwikkeling van de verstandelijke vermogens, lag het voor de hand naar een discipline te zoeken, waarbij zulks methodisch ter hand genomen zou kunnen worden. Hiertoe leek de vormleer van Pestalozzi één van de geëigende middelen.’¹⁷

Daarnaast bepleitten wiskundigen dat (nu weer de meer ‘volwassen’ wiskunde bekijkend) het ook voordelen gaf om nauwkeurig op het bewijs van een stelling in te gaan. Niet alleen met het resultaat kunnen rekenen, maar ook snappen waaróm de stelling juist is, zou het begrip verhogen. Dit blijkt uit een uitspraak gedaan door drie gezaghebbende heren. D.J. van Ewijck, hoofd van de afdeling onderwijs van het Ministerie van Binnenlandse Zaken en zelf wiskunde had gestudeerd (!),¹⁸ was samen met H. Wijnbeek, onderwijsinspecteur, en J. de Gelder, later adviseur van de regering,¹⁹ van mening dat het snappen van een stelling met bewijs en het interpreteren van een formule ‘onmisbare kundigheden voor ieder eerzaam burger zijn’.²⁰

Hiervoor waren nieuwe lesboeken nodig.²¹

Er werd een wiskunde gepresenteerd die zich niet op het aanleren van algoritmen concentreerde, maar die “gronden” had, onfeilbare gronden zelfs, en daarop met onfeilbare redeneringen voortbouwde. Een wiskunde ook, waarvan het nut veel verder reikte dan “slechts” een correcte beroepsuitoefening. De nieuwe wiskunde hielp het denkvermogen scherpere, vooroordelen uitbannen, en ze zou samen met de fysica bijgehoof bestrijden.²²

Een eerste aanzet om een grotere groep mensen (leerlingen en studenten) bekend te maken met wiskunde, werd in 1815 gegeven. Bij ‘Organiek Besluit’²³ werd vastgelegd dat de ‘beginselen

¹³Beckers and Smid (2003, p. 23).

¹⁴Beckers and Smid (2003, p. 23-25).

¹⁵Beckers and Smid (2003, p. 34-35).

¹⁶Smid (1997, p. 54).

¹⁷Moor (1999, p. 14). Vormleer (een nieuw vakgebied dat inderdaad begint met het herkennen en benoemen van wiskundige vormen en eindigt met het begin van de *Elementen*) is een soort elementaire voorganger van meetkunde, in die tijd geschikt geacht om aan jonge leerlingen te onderwijzen, soms al aan kleuters. Ondanks het leeftijdsverschil geeft dit citaat de vormende waarde die aan vormleer (meetkunde of kort gezegd wiskunde) toegekend werd weer. Overigens, wat betreft de vormleer: ‘Al met al een mislukt experiment, waaruit echter zowel voor de didactiek van het meetkundeonderwijs als voor methoden van implementatie historische lering getrokken kan worden.’ (p. 15).

¹⁸‘Het zal wel geholpen hebben dat de minister van onderwijs, D.J. van Ewijck (1786-1858) zelf ook wiskunde had gestudeerd.’ (Beckers and Smid, 2003, p. 35).

¹⁹Beckers (2003, p. 80) en Smid (1997, p. 56).

²⁰Beckers (2003, p. 80).

²¹Uiteraard is met dit alles niet gezegd dat het wiskunde- of rekenonderwijs zoals dat tot die tijd gegeven werd ineens nutteloos zou worden. Het praktisch rekenen was nog steeds van groot belang voor onder meer landmeten en renteberekeningen.

²²Beckers (2003, p. 70).

²³Dat is: Koninklijk Besluit.

der wiskunde' onderwezen moesten worden op de Latijnse scholen. Deze wet was vaag en zeer breed interpreteerbaar. Er was verzet: de docenten oude talen moesten ineens tijd vrij maken voor hun leerlingen, zodat er ook plaats was voor wiskunde in hun rooster. Menig leraar was (nog) niet onder de indruk van het nut daarvan. Dit leverde dan ook op verschillende plaatsen conflicten op. Het kwam geregeld voor dat de docent die gewend was zelf Grieks en / of Latijn te geven, nu ineens ook wiskunde moest gaan onderwijzen. Deze docent vond juist dat de klassieke talen geschikt waren om het verstand te ontwikkelen en dat wiskunde die rol niet kon vervullen, of sterker nog, daar wellicht afbreuk aan zou kunnen doen. Al naar gelang de wiskundige kennis en interesse van de docent, werd dan aan het begrip 'beginselen' een eigen invulling gegeven.²⁴

In 1826 volgde een nieuwe wet waarin de wiskundeonderwerpen die behandeld moesten worden op de Latijnse scholen expliciet vastgelegd werden.

Artikel 1. Het onderwijs der wiskunde op de athenea, collegiën en Latijnsche scholen, zal tenminste moeten bevatten de gronden der rekenkunde, de beginselen der stelkunst, tot en met de vergelijkingen der tweede magt, en die der meetkunst tot aan de platte driehoeksmeting.²⁵

2.3 Examen

In 1845 werd een staatsexamen ingevoerd om toegelaten te worden tot de universiteit.²⁶ Onderwijsinspecteur Wijnbeek werd ontslagen in 1848, er was nu immers een centraal geregeld examen.²⁷ Een van de examenvakken was wiskunde. In het ideale geval had de student dan ook de vereiste wiskundekennis. Als die kennis (toch) niet aanwezig was, kon de student een toelatingsexamen (voor wiskunde) afleggen. Omdat dit als makkelijk bekend stond, werd hier veel gebruik van gemaakt. Men kon zich dan laten bijspijkeren door een privaatsdocent, waarna het examen volgde. Klikspaan, pseudoniem voor Johannes Kneppelhout, beschrijft op sarcastische wijze zo'n beoordelingsmoment:

Als twee lijnen elkander snijden, wat dan?

Dan krijgt men den paralellogram [sic]. De professor diene [sic] vragen of de aspirant-student gek was, maar hij vergenoegde zich met te zeggen: u meent, dan zijn de tegenovergestelde hoeken gelijk, en de aspirant-student antwoordt zeer inschikkelijk: „dat's waar ook professor! ik verzon mij.”

Na de stelling van PYTHAGORAS die meer dan honderd duizend malen bewezen is geworden, nog eens bewezen te hebben, dank zij de inpomperij van den privaatsdocent, krijgt hij een bewijs van ervarenheid in de mathesis; ook de professor in de wis- en natuurkunde denkt: hoe meer studenten hoe meer geld!²⁸

Vanaf 1850 was deelname aan het staatsexamen wel, maar er voor slagen niet langer verplicht om toegelaten te worden tot een universitaire studie. Twee jaar later werd het staatsexamen afgeschaft, maar een nieuwe onderwijsinspecteur werd niet aangesteld...²⁹

²⁴Beckers verhaalt: 'Tot overmaat van ramp claimden de wiskunde-onderwijzers dat hun vak een vormende waarde bezat. De nieuwe wiskunde maakte dat de leerling helderder, nauwkeuriger, en foutlozer zou leren denken. Maar die vormende waarde werd ook door de klassieke talen opgeëist.' (Beckers, 2003, p. 78-79).

²⁵Als geciteerd in Smid (1997, p. 113).

²⁶Smid (1997, p. 43). Voorheen mochten de Latijnse scholen leerlingen bevorderen naar de universiteit. Dit 'ius promovendi' was voor hen het belangrijkste privilege (Smid, 1997, p. 146).

²⁷Smid (1997, p. 149) 'Als motief werd aangevoerd dat door de instelling van het staatsexamen een aparte inspectie voor de Latijnse scholen overbodig was geworden en dat men dus wel op die post kon bezuinigen. Na de afschaffing van het examen werd echter geen nieuwe inspecteur benoemd.'

²⁸Klikspaan, *Na het studentenleven*, Amsterdam (1847), p. 35-36. Als geciteerd in Beckers (2003, p. 86).

²⁹Smid (1997, p. 44 en 149).

2.4 Samengevat

We zien dat binnen de ontwikkelingen aan het einde van de achttiende eeuw, ook een herbezinning op het onderwijs paste. Het besef groeide dat wiskunde een toegevoegde waarde heeft voor (het onderwijs aan) leerlingen en studenten, ook als dit niet direct een relatie heeft met de dagelijkse bezigheden. De invoering van wiskunde ging niet zonder slag of stoot, het verzet kwam met name van de kant van de Latijnse scholen.

Naast de verandering van het onderwijsprogramma, stond ook de wiskunde zelf ter discussie. In plaats van onnauwkeurige bewijzen en rekenmethodes gebaseerd op ‘maniertjes’ en ‘trucjes’, waren er voorstanders voor het invoeren van een strikte redeneer- en bewijstrand voor het onderwijs. Dit om het verstand optimaal te ontwikkelen en uiteindelijk de student zo goed mogelijk voor te bereiden op zijn taak en werk in de samenleving.

Hoofdstuk 3

Jan Hendrik van Swinden (1746-1823)

Zoo even werden wij, door den Voorzitter dezer Klasse, opmerkzaam gemaakt op de smartelijke verliezen, welke zij sedert hare laatste openbare Vergadering heeft geleden. Doch ook zonder deze herinnering, is welligt heden niemand onzer dit Gebouw binnengetreten, zonder te bedenken, dat wij het achtbaar gelaat van Hem, aan wien de Wetenschappen, het Vaderland en dit Instituut zoo vele verpligting hebben, niet meer in ons midden zullen aanschouwen. Met regt verwacht Gijlieden dan ook van hem, die heden geroepen is, om tot U het woord te voeren, dat hij spreken zal van dat eerwaardig Medelid, wiens verscheiden, schoon in eenen gevorderden ouderdom, nog een zwaar verlies mag geacht worden; van Hem, wiens leven, geheel der Wetenschap en het Vaderland gewijd, den nationalen roem bij vreemden en inlanders krachtdadig heeft gehandhaafd.¹

Deze woorden klonken tijdens de vergadering van het *Koninklijk Nederlandsche Instituut van Wetenschappen, Letterkunde en Schoone Kunsten* na het overlijden van Jan Hendrik van Swinden. Wie was deze Van Swinden? Waarom was hij zo belangrijk dat zijn leerling Gerard Moll verklaarde dat hij ‘den nationalen roem bij vreemden en inlanders krachtdadig heeft gehandhaafd’? Daarover gaat dit hoofdstuk.

3.1 Levensloop

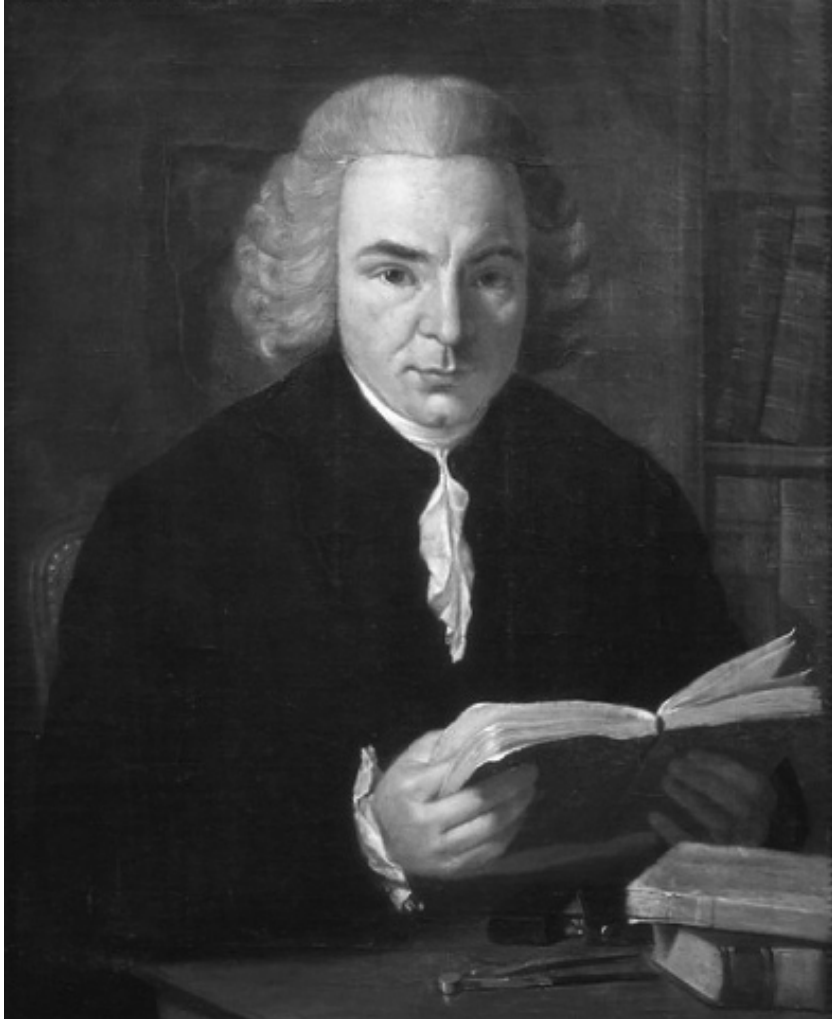
Jan Hendrik van Swinden werd geboren op 8 juni 1746. Na een paar jaar lagere school kreeg hij verder privéonderwijs aan huis. Voor Latijn en Frans waren zijn docenten zijn eigen vader en de heer Glassius. Wiskunde kreeg hij van Blassière. Moll merkte op:

JEAN JACQUES BLASSIERE², met lof door wiskundige werken bekend, gaf hem [Van Swinden, WL] drie jaren lang onderwijs in de beginselen der Wis- en Sterrekunde.

¹Moll (1824, p. 1-2).

²Bij de aantekeningen van de redevoering van Moll vinden we:

Van Swinden pleeg dikwijls te verhalen, hoe de ouders van Blassière, eenvoudige lieden zijnde, zich geen begrip konden maken, waarin hun zoon toch eigenlijk studeerde. Zij waren zelfs niet vrij van de vrees dat hij omgang hield met den bozen. Maar zij werden hierin geheel bevestigd, toen zij eens eenige Wiskundige berekeningen op zijne schrijftafel vonden, waarboven zij Demons. (de eerste letters van demonstratie) lazen. Een Fransch predikant in 's Hage, aan wien zij zich in hunne verlegenheid wendden, had veel moeite, om hun aan het verstand te brengen, dat zij hun zoon gerustelijk konden laten voortwerken. (p. 47-48)



Figuur 3.1: Jan Hendrik van Swinden (1746-1823).

Maar spoedig streefde de vlugge jongeling zijnen meester op zijde, en noodzaakte dezen, hoewel te vergeefs, alle krachten in te spannen, om zijnen Leerling bij te houden.³

In 1763 begon Van Swinden zijn studie rechten in Leiden, maar twee jaar later was hij kandidaat voor wijsbegeerte. De colleges van rechten liet hij vanaf dat moment schieten. Wiskunde en eventuele andere vakken deed hij in zelfstudie. Drie jaar later verdedigde hij zijn dissertatie over de aantrekkingskracht en dit leverde hem de titel van doctor in de filosofie.⁴

Al in 1766 werd hij benoemd tot gewoon hoogleraar in Franeker voor de vakken filosofie, logica en metafysica.

In 1768 trouwde hij met Sara Riboullé. In het gezin zouden vijf kinderen geboren worden, waarvan de jongste zoon op tweejarige leeftijd stierf.

Het huis van Van Swinden was voor een deel speciaal ingericht voor het doen van proeven, waarvoor hij diverse instrumenten bezat. In de tuin was een magneetnaald aanwezig waarbij gedurende tien jaar lang *elk uur* de afwijking ten op zichte van de noord-zuid richting genoteerd werd. Daarnaast werden zes jaar lang ook de temperatuur en barometerstand op dezelfde manier bijgehouden, later werd deze frequentie verlaagd tot vijf keer per dag. Ondanks het feit dat vrienden, huisgenoten en leerlingen hem hierbij hielpen, moet Van Swinden een haast obsessieve werklust gehad hebben.

In 1779 werd het genootschap *Felix Meritis* ('Gelukkig door verdiensten') opgericht, waar Van Swinden een centrale rol in speelde. De aanleiding voor het oprichten van deze vereniging was het feit dat steeds meer leken belangstelling kregen voor wetenschappelijk onderzoek. Van Swinden sprak diverse malen voor de leden van deze vereniging. Spreken ging hem in het algemeen erg goed af. Met weinig aantekeningen wist hij een uitgebreid en voortdurend interessant verhaal te houden.

In 1785 vertrok Van Swinden naar Amsterdam. Het was 'de Bezorgeren der Amsterdamsche Doorluchtige School' gelukt 'hem duurzaam aan dezelve te verbinden'.⁵ Aan deze school ging Van Swinden ook de wiskundecolleges geven, iets wat hij in Franeker niet gedaan had.⁶ Hij wilde graag dat zijn studenten konden leren uit een boek dat zowel voor eigen studie als tijdens de colleges gebruikt kon worden. Hij schreef daarom zelf een boek over meetkunde. Eerst verscheen een beknopte uitgave in het Latijn. Vier jaar later, dat was in 1790, werd een uitgebreide versie in het Nederlands gedrukt: *Grondbeginsels der Meetkunde*. Moll beschreef de situatie in zijn redevoering.

Om over de hooge waarde van dit boek te oordeelen, moet men zich den toestand van het onderwijs in de Wiskunde, in dien tijd, vooral in ons Vaderland, herinneren. De hervorming in dat onderwijs, door EULER voorbereid, en door de Fransche Wiskundigen daargesteld, had nog geene plaats gehad. Men had bijna geen ander leerboek, dan EUCLIDES, hetwelk, hoe voortreffelijk anders, voor den tegenwoordigen tijd niet meer geschikt was, en eenige andere kleinere werken, in welken veelal de strengheid van den bewijstrant der Ouden aan korthed en gemakkelijkerheid was opgeofferd. Het boek van VAN SWINDEN vereenigt gronddigheid en volledigheid. Eene menigte zaken, elders niet te vinden, treft men er in aan. De hulpbronnen, waaruit verdere kennis kan geput worden, worden aangewezen. Het bestaat niet alleen uit wiskundige voorstellen; men vindt er tevens de Geschiedenis der Wetenschap en hare vorderingen ingeweven. Vooral bij de laatste uitgave van 1816, staat men verstomd, hoe de meer dan zeven-

³Moll (1824, p. 5).

⁴Hoorn (1994, p. xii). Van Hoorn voegt als voetnoot toe: 'De term filosofie had in deze periode een meervoudige betekenis, te onderscheiden in natuurfilosofie (waaronder natuurkunde) en bespiegelende wijsbegeerte (waaronder metafysica). Het gebruik van de term kan licht aanleiding geven tot verwarring, wat zijn oorzaak vindt in de zeer heterogene samenstelling van de 'filosofische faculteit' aan de achttiende-eeuwse academie. (...)'. In Bot and Muijlwijk (1980, p. 93) wordt overigens gesproken van 'doctor in de wijsbegeerte'.

⁵Moll (1824, p. 22). Dit 'Athenaeum Illustre', toen een soort hogere beroepsopleiding, was de voorloper van de tegenwoordige Universiteit van Amsterdam.

⁶De wiskundecolleges in Franeker werden in Van Swindens periode gegeven door Nicolaas Ypey. (Moll, 1824, p. 23).

tigjarige grijsaard de nieuwste werken, in alle landen van Europa uitgekomen, had geraadpleegd.⁷

We zien door dit citaat dat Van Swinden met dit boek deel uitmaakte van de toenmalige ontwikkelingen binnen het onderwijs, beschreven in het vorige hoofdstuk.

In maart 1795 ging het gerucht dat Van Swinden zou vertrekken naar Leiden. Het studenten-corps schreef in een brief, gericht aan hun leraar:

(...) Ja Geachte Vriend: Nu daar wij maar enkel de mogelijkheid beseffen, dat gij ons zoudt kunnen verlaten; nu gevoelen wij reeds de grootheid, de uitgestrektheid, ja zelfs de onherstelbaarheid van ons verlies. (...)

Ach waarde Burger! mogte alle die en meer andere overwegingen, bij u dat uitwerksel doen, dat onzer aller harten mensch is! mogten zij u overreeden, om u wederom naar ons te spoeden, zo dra de gewigtige commissies waar mede gij belast zijt, zulks zal toelaten! opdat wij ras het onuitsprekelijk genoeg mogten genieten uwe beminnelijke en nuttige lessen bijtewonen, en dus in staat gesteld worden u mondelings van onze liefde en genegenheid te versekeren, hetgeen wij nu genoodzaakt zijn bij geschrikt te doen.⁸

Het bleef overigens bij een gerucht, Van Swinden vertrok niet.

In 1798 nodigden de Fransen hun buurlanden uit voor een internationale conferentie over het nieuwe eenhedenstelsel voor maten en gewichten. Uit Nederland werden Hendrik Aeneae⁹ en Van Swinden afgevaardigd. Doel van de conferentie was ten eerste de metingen en berekeningen die de Fransen hadden verricht te controleren en ten tweede de mogelijkheden tot internationale invoering van dit nieuwe systeem te bespreken. Tijdens deze bijeenkomsten werden uiteindelijk afspraken gemaakt over de standaarden voor lengte en gewicht: de nog steeds alom bekende meter en kilogram. In zijn vrije tijd bezocht Van Swinden colleges van zijn Parijse collegae. Aan het einde van het congres was het de buitenlander Van Swinden die in vloeiend Frans de resultaten mocht presenteren aan het *Institut National des Sciences*. Ook hier was men verbaasd over zijn capaciteit om ingewikkelde zaken op een heldere manier uit te leggen. Aeneae en Van Swinden kregen uit Parijs elk een ‘echte’ ijzeren meter en messing kilogram mee naar huis, ‘voor eigen gebruik’.

Van Swinden was grote voorstander van het nieuwe metrieke stelsel. Terug in Nederland hield hij er voordrachten over en begon hij er een boek over te schrijven dat uiteindelijk in 1802 verscheen: *Verhandeling over volmaakte Maaten en Gewigten*, ruim 700 pagina’s lang.¹⁰

Ook naast lesgeven en buiten de wetenschappelijke wereld werd Van Swinden opgemerkt en ingeschakeld. In 1795 kreeg hij de leiding over de eerste volkstelling in Amsterdam. Een jaar later stelde hij een systematische huisnummering voor, die vervolgens ook ingevoerd werd.¹¹ In 1806 deed Lodewijk Napoleon een poging Van Swinden een hoge bestuursfunctie te geven. Van Swinden weigerde. Napoleon probeerde het nogmaals door hem een ridderorde aan te bieden. Van Swinden was van mening dat ondanks het feit dat mensen verschillende capaciteiten bezitten, er ten diepste gelijkheid van burgers is. Met dit als uitgangspunt paste het aldus Van Swinden niet een onderscheiding te krijgen en hij weigerde deze dan ook.

⁷Moll (1824, p. 24-25).

⁸Bot and Muijlwijk (1980, p. 97-98).

⁹Directeur van de marine, later inspecteur van de Maten en Gewichten.

¹⁰Bot and Muijlwijk (1980, p. 99-100).

¹¹Bot and Muijlwijk (1980, p. 97) Daar lezen we onder andere: ‘Het voorstel van Van Swinden was om de huizen per gracht of straat te nummeren door aan één zijde te beginnen van begin tot het einde en door te nummeren aan de andere zijde van het einde naar het begin. Het voorstel was bepaald niet revolutionair, in andere Europese steden waren soortgelijke nummeringen al eerder ingevoerd.’ De tegenwoordige huisnummering stamt uit 1875. In Amsterdam is een straat naar Van Swinden vernoemd.

Na een kort ziekbed stierf Van Swinden in 1823. De belangstelling bij de begrafenis was zeer groot, een duidelijke indicatie van zijn status en de waardering die mensen voor hem hadden. Moll sloot zijn redevoering af met de volgende woorden.

In het midden zijner werkzaamheden, nog bezig met plans voor de toekomst te smeden, is hij aan zijne diepbedroefde Weduwe, aan zijne Kinderen, Naastbestaanden en Vrienden, aan den Koning en het Vaderland onverwacht ontruikt. Even zoo als hij geleefd had, was ook zijn einde. Zijne laatste pogingen waren tot bevordering van het heil van anderen. (...)

Het is zoo ! zoo lang de wetenschappen in Europa bloeijen, zoo lang er voor dezelve in dit Land nog eenige smaak overblijft, zoo lang zal de nagedachtenis van VAN SWINDEN in eere blijven, en zijn naam met die van 'S GRAVESANDE, van MUSSCHENBROEK en LULOFS steeds met eerbied genoemd worden.¹²

3.2 Onderwijs

Van Swinden heeft een belangrijke rol gespeeld in de veranderingen van het (wiskunde)onderwijs. Als persoon met aanzien vonden zijn ideeën weerklank.

Op 15 augustus 1808 werd Van Swinden door de koning benoemd tot voorzitter van een commissie die 'tot taak kreeg het gehele onderwijsgebouw van het koninkrijk door te lichten'.¹³ Smid merkt op

Deze commissie kreeg in feite als opdracht voorstellen voor zowel het middelbaar als voor het hoger onderwijs te ontwikkelen. (...) De commissie oefende ernstige kritiek uit op de eenzijdigheid van het onderwijs op de Latijnse scholen. Moderne talen, aardrijkskunde en geschiedenis, wis- en natuurkunde ontbraken. Dat gaf ook op de universiteiten problemen. (...) In de voorstellen die de commissie voor een vernieuwd middelbaar onderwijs ontwierp was behalve voor onderwijs in de klassieken dan ook voor onderwijs in de moderne talen, aardrijkskunde, geschiedenis en de "eerste gronden der natuurkunde" en de "beginselen der wiskunde" een plaats ingeruimd.¹⁴

W.W. Mijnhardt concludeert

Van Swinden kan met recht als de architect van het Nederlandse middelbaar en hoger onderwijs worden aangemerkt. Ook al kwam er door de snelle regeringswisselingen in dit tijdvak van de uitvoering van zijn plannen weinig of niets terecht, zijn onderwijs rapport zou tot ver in de negentiende eeuw de blauwdruk blijven voor het Nederlandse onderwijsbeleid.¹⁵

Gedurende de jaren van inlijving bij Frankrijk (1810-1813) kwam het bestaansrecht van het Athenaeum onder druk te staan. Het Athenaeum, en daarmee ook de Amsterdamse school waar Van Swinden werkzaam was, dreigde gedegradeerd te worden tot 'école secondaire', waardoor de 'rechtsgeldigheid van de studie voor het afleggen van examens aan een academie verloren zou gaan'.¹⁶ Van Swinden was de leider van het verzet tegen deze degradatie.

Als professor was Van Swinden zelf direct betrokken bij het onderwijs. Als docent gaf hij lessen aan het Athenaeum, maar ook zette hij zich in voor de al genoemde Maatschappij Felix Meritis, waarvoor hij meer dan honderd lezingen verzorgde.¹⁷ Ook stelde hij zijn huis altijd open voor zijn

¹²Moll (1824, p. 44-45). Ook al zijn de genoemde namen wellicht niet (allemaal) meer bekend, de strekking van het citaat is helder: er moet met respect over Van Swinden gesproken worden.

¹³Mijnhardt (1997, p. 26).

¹⁴Smid (1997, p. 33-34). De twee citaten binnen het grote citaat zijn afkomstig van het *Vertoog over de universiteiten* (Amsterdam, 1809, p. 16).

¹⁵Mijnhardt (1997, p. 26).

¹⁶Hoorn (1994, p. xxiv).

¹⁷Hoorn (1994, p. x).

leerlingen. Zelfs in vakanties was hij bereid hen te helpen bij het oplossen van vraagstukken. Een leraar met hart voor zijn leerlingen.

Ook door boeken te schrijven ten behoeve van het wiskunde- en natuurkundeonderwijs, droeg hij bij aan (de ontwikkeling van) het onderwijs. Het boek *Grondbeginsels der Meetkunde* werd tot diep in de negentiende eeuw gebruikt.¹⁸ Zowel het onderwijsrapport als dit laatste boek hebben hun plaats binnen de onderwijsontwikkeling die geschetst werd in hoofdstuk 2.

3.3 Boeken

Om een beeld te krijgen van wie Jan Hendrik van Swinden was en wat in het bijzonder zijn wiskundige activiteiten waren, volgt hieronder een lijstje met publicaties.¹⁹ Van Swinden schreef over veel meer dan alleen wiskunde; er is een selectie gemaakt van publicaties die enigszins van toepassing zijn op wiskunde, in de breedste zin van het woord. In de meeste gevallen is alleen de eerste druk vermeld. Waar relevant zijn opmerkingen toegevoegd.²⁰

- *Verhandeling, behelzende eene nieuwe betoging van de verheffing der grootheid $a \pm b$ tot de onbepaalde magt*, (Ergens tussen 1767 en 1773). Artikel.
- *Beschrijving van een kunststuk, verbeeldende een volledig bewegelijk Hemelsgestel, uitgeducht en vervaardigd door Eise Eisinga*, (1780).
- *Theoremata Geometrica, quae annuo labore explicat, demonstrat. et observationibus illustrat. H. v. S., accedunt problematum Geometricorum libri V.*, (1786).
- *Verhandeling over het bepalen der lengte op Zee, door afstanden van de Zon tot de Maan of vaste sterren, bij van Keulen*, (1787).
- ***Grondbeginsels der Meetkunde*, (1790). Tweede druk in 1816 met identieke herdruk in 1833.**
- *Verhandeling over volmaakte maten en gewigten*, (1802). Twee delen.
- *Onderrigt over de Fransche en Hollandsche munten en der zelve vergelijking met de noodige tafels*, (1810).
- *Vergelijkings-tafels tusschen de Hollandsche lengtematen en de mètre, met het noodige onderrigt over dezelve maten*, (1812).

3.4 Karakterschets

In dit hoofdstuk zien we het beeld van een vlijtig en bedreven man. Iemand met een duidelijke passie: de natuurwetenschap zelf en het onderwijs geven daarin. Alles stelt hij in het werk om deze twee componenten naar een hoger plan te tillen. Een docent met hart voor zijn vak, maar ook zeker voor zijn studenten. Een workaholic, die mogelijk weinig tijd voor het gezinsleven overhield. Het is niet ondenkbaar dat er toch ook van enige eerzucht sprake was bij Van Swinden. Al zijn activiteiten resulteerden in een internationale reputatie. Het was deze man die de *Grondbeginsels der Meetkunde* schreef. Het boek dat tientallen jaren verplichte kost was voor universitaire studenten die zich wilden bekwamen in de meetkunde.

¹⁸Bot and Muijlwijk (1980, p. 96) en Hoorn (1994, p. x).

¹⁹Niet alle bronnen zijn ook daadwerkelijk voor deze scriptie bestudeerd dan wel gebruikt.

²⁰Voor dit overzicht heb ik gebruik gemaakt van de uitgebreide bibliografie van Van Swinden in Aa (1969, Dl. 6, p. 351-353).

Hoofdstuk 4

Jacob de Gelder (1765-1848)

Ik was steeds overtuigd, dat, zoo men geene waarheidsliefde wilde verloochenen, men, ook zonder de geschiedenis des levens van den geachten Hoogleeraar te kennen, zou moeten toegeven, dat het onderwijs en de beoefening der wetenschappen, voornamelijk die der wiskunde, in Nederland op verre na niet die betere rigting, die betere uitkomsten zouden hebben erlangd, op verre na niet zoo zeer bevorderd zouden zijn geworden, indien hij [Jacob de Gelder, WL] niet onvermoeid gewerkt, niet rusteloos gepoogd had om te vervormen, te verbeteren, om de wetenschap meer toegankelijk te maken en te verbreiden. Daardoor dan heeft hij zich hoogst verdienstelijk gemaakt en de wetenschap aan zich verplicht.¹

Deze woorden vinden we in de eerste biografie over Jacob de Gelder, geschreven door zijn leerling G.J. Verdam.² In dit hoofdstuk kijken we wie De Gelder was en wat er de reden van is dat over hem gezegd werd dat hij de wiskunde ‘zo zeer bevorderd had’.

4.1 Levensloop

Jacob de Gelder werd geboren op 22 november 1765. Al vroeg bleek dat hij een snelle leerling was. Van zijn moeder leerde hij als klein kind al lezen en schrijven. Op latere leeftijd gaf De Gelder aan zich niet te kunnen herinneren dat er een tijd was waarin hij nog niet in de Bijbel kon lezen. Daarbij hoefde hij een hoofdstuk maar twee of drie keer te lezen om het foutloos te kunnen opzeggen. Bovendien kende hij op vijfjarige leeftijd de Heidelbergse Catechismus uit zijn hoofd.³

Toen hij ruim negen jaar oud was ging hij naar een Franse school. Hij wilde er graag leren cijferen. Zijn docenten gaven echter te kennen dat hij daar nog te jong voor was. Na lang aandringen mocht hij dan toch uiteindelijk in een cijferboek beginnen.

Verdam schreef in zijn biografie over De Gelder

Inmiddels werd het cijferen, met zulk een voorbeeldeloozen uitslag begonnen, niet opgegeven. Dat hierop, in den regel, de beoefening der Algebra en der Meetkunde volgde, kon hem niet verborgen blijven. Tot deze wetenschappen behield hij de voorliefde; zijne neiging helde er van zelve meer en meer toe over, en hij werd onweêrstaanbaar aangedreven, om er zich bij uitnemendheid op toe te leggen. Maar deze overhelling scheen zijnen ouders te mishagen. Misschien waren zij bevreesd, dat dit ten koste van het *bijbellezen* zou moeten geschieden, omdat het vroeger, tijdens het leeren in de eerste

¹Verdam (1848, p. 3).

²Zie voor andere biografieën o.a. Beckers (1993) en Beckers (1996).

³De gegevens zoals hier gepresenteerd vinden we in de biografie van Verdam. Een kanttekening is hier echter wel op zijn plaats. Heeft Verdam getracht zich altijd puur en alleen aan de waarheid te houden, of heeft hij na de dood van zijn leermeester De Gelder willen verheerlijken? Het laatste is niet uitgesloten.



Figuur 4.1: Jacob de Gelder (1765-1848).

school, een paar malen gebeurd was, dat zijne aandacht, door opgegevene rekenkundige voorstellen (die hij, tot welke moeite ook, *zou* en *wilde* ontbinden), jammerlijk was afgetrokken geworden, hetgeen de arme scholier met roode ooren moest boeten; doch de *gulden*, dien de meester beloofd had als prijs voor de oplossing, troostte hem bij het herdenken aan het pijnlijk gevoel. Doch, om welke beweegredenen dan ook, waarschijnlijk werd hem dat afgetrokken oefenen, dat zoeken en vorschen, ontzegd. Maar hoe nadrukkelijker dat verbod, hoe grootser de hinderpalen, tegen welke men zijn wensch en wil deed stuiten, des te meer groeide zijne zucht voor de beoefening der wiskundige wetenschappen aan.⁴

Toen hij elf jaar oud was, had hij twee cijferboeken doorgewerkt. Op dat moment ging hij verder als autodidact.

Na het verlaten van de Franse school richtte De Gelder in 1786 of 1788 een eigen schooltje inclusief kostschool op in Rotterdam.⁵ Bij zijn eerste boek, *Allereerste gronden der Cijfferkunst*, dat in 1793 verscheen, noemde hij zich dan ook *Fransch en Duitsch Kostschoolhouder en Leermeester in de Wis-, Sterre-, Aardrijks- en Zeevaartkunde*. Naarmate de jaren verstreken kwam bij de keuze van de vakken de nadruk steeds meer op wiskunde te liggen. In 1795 ging het schooltje failliet.

In 1792 trouwde De Gelder met Catharina van Rooijen. Ze kregen acht kinderen, waarvan alleen Jan Jacob de Gelder niet op jonge leeftijd stierf.⁶

Ergens begin jaren '90 raakte De Gelder bevriend met Jan Hendrik van Swinden, hoogleraar wiskunde in Amsterdam. Verdam schrijft over de vriendschap:

Onder het aangename en genoeglijke en onderscheidende, dat de Gelder, in de laatste gelukkige jaren vóór 1795, wedervoer, moet vooral genoemd worden de kennismaking en het in wetenschappelijke betrekking komen met den beroemden van Swinden.⁷

De eerste keer dat De Gelder van Van Swinden hoorde en ontdekte wie hij was, was mogelijk in 1790 bij het uitkomen van Van Swindens *Grondbeginsels der Meetkunde*. Persoonlijk contact was er vanaf 1792. Er is een goede vriendschap tussen de twee geweest met een intensieve briefwisseling. In 1810 werd het contact tussen Van Swinden en De Gelder plotseling beëindigd door eerstgenoemde. Dit tot grote teleurstelling van De Gelder. Meer hierover in hoofdstuk 5.

De Gelder heeft aan Van Swinden veel te danken gehad, omdat die hem hielp in het opbouwen van zijn carrière. Toen bijvoorbeeld rond 1800 een groep landmeters op problemen stuitte bij het tekenen van een kaart, werd op 'ernstigen raad' van Van Swinden De Gelder benaderd om te assisteren.

Op 1 maart 1807 werd De Gelder *Professeur de mathématique, de fortification et d'artillerie à l'Hôtel de M.M. les Pages du Roi*. Van te voren kreeg hij van Van Swinden een 'certificat de capacité'.⁸ Tot 1810 werkte hij voor de koning.

Financieel ging het in deze periode niet zo goed met De Gelder. Door achterstallige betaling voor de berekeningen die hij uitvoerde voor de landmeting, voelde hij zich genoodzaakt een brief te schrijven naar de Minister. Toen de directeur van het project - 'den Heer Kraijenhoff, destijds *Lt. Kolonel. Directeur der Genie*' - deze brief onder ogen kwam, eiste hij dat De Gelder de inhoud terug zou nemen. Standvastig als De Gelder was, stuurde hij de brief toch. Op advies van de directeur heeft de Minister hem vervolgens ontslagen. Voor de laatste drie maanden werk is hij niet betaald... In de periode dat De Gelder aan het hof werkte, moest hij verhuizen en maakte hij andere onkosten. Van te voren was de belofte gedaan dat dat allemaal vergoed zou worden. Er gebeurde echter niets. Uiteindelijk kostte hem dat de helft van wat hij in die periode wel had

⁴Verdam (1848, p. 6-7)

⁵Verdam (1848, p. 8).

⁶Beckers (1996, p. 276).

⁷Verdam (1848, p. 16).

⁸In hoofdstuk 5 wordt de briefwisseling tussen De Gelder en Van Swinden besproken. Tussen deze brieven, bewaard in het archief van de Universiteitsbibliotheek Leiden, bevindt zich een door Van Swinden in het Frans geschreven briefje waarin hij De Gelder aanbeveelt bij de koning.

moeten verdienen.

Door de Franse inlijving in 1810 verviel zijn post als docent wiskunde aan het hof. Opvallend genoeg ging hij in 1811 weer verder met het project onder leiding van Kraijenhoff. Misschien ook wel om zijn nog openstaande rekening te kunnen ontvangen. Maar daarnaar vragend, ontving hij de reactie dat aan zijn verzoek niets te doen was.

Vanaf 1808 was De Gelder betrokken bij het *Genootschap der Mathematische Wetenschappen, onder de zinspreuk: Een onvermoeide arbeid komt alles te boven*.⁹ Dit, kort gezegd, Wiskundig Genootschap was opgericht in Amsterdam in 1778 door Arnold Strabbe (1741-1805), maar het was De Gelder die er een nationale instelling van maakte.¹⁰ Het Genootschap publiceerde boeken, opgaven en tijdschriften.

De Gelders sleutelrol binnen het Genootschap speelde zich vooral af in de jaren 1810-1814. Zo zou hij in die periode mensen als ereleden aangedragen hebben (waaronder J.H. van Swinden), was hij betrokken bij het opzetten van een bibliotheek en het beschikbaar stellen daarvan voor de leden en ten slotte het oprichten van een wetenschappelijke commissie die zich bezig hield met publicaties. De Gelder zat in 1813 in een commissie die door de algemene ledenvergadering in het leven was geroepen, om te kijken naar de toekomst van het genootschap. De hierboven genoemde drie activiteiten van De Gelder (ereleden, bibliotheek en publicaties) kwamen voort uit het rapport dat die commissie schreef.¹¹ De rol van De Gelder in het Wiskundig Genootschap zal nog van belang blijken in hoofdstuk 6 over de meetkundeboeken die Van Swinden en De Gelder schreven.

In 1814 werd De Gelder docent op de Militaire Akademie van Delft. Daardoor was er vanaf die tijd meer (financiële) zekerheid voor De Gelder. Generaal Voet stond aan het hoofd van de Akademie. Diverse keren gaf De Gelder bij zijn superieur aan meer vrijheid te willen om de wiskunde op zijn manier te onderwijzen. Voet vond dat hij te wetenschappelijke dingen van zijn studenten vroeg en zo een te hoog wiskundig niveau eiste. In december 1818 stuurde De Gelder een brief naar de koning, waarin hij zijn ongenoegen uitte over de Akademie. Voet was woedend. Hij had deze brief eerst moeten lezen. De Gelders nuchtere reactie luidde dat er niets nieuws in de brief stond, hij had dit al zo vaak gezegd.¹² Gezien het programma, was wiskunde een belangrijk onderdeel van de opleiding. Zo werd er lesgegeven in de beginselen van algebra, beschrijvende meetkunde, beginselen van de analyse en mechanica.¹³

Op 19 december stuurde de koning een reactie, waarna De Gelder op 21 december geschorst werd. In januari 1819 beklagde De Gelder zich bij de koning. Uiteindelijk stelde Zijne Majesteit hem op 28 juni 1819 aan als buitengewoon hoogleeraar in de Faculteit der Wis- en Natuurkundige Wetenschappen aan de Universiteit Leiden. Daar bemoeide De Gelder zich met de gang van zaken op de Latijnse school in Leiden, waar hij met zijn wiskundelessen de school een dienst meende te bewijzen. Hij stelde (te) hoge eisen. Bovendien wilde hij dat de klassen bij het vak wiskunde apart ingedeeld zouden worden naar wiskundig niveau, in plaats van de reguliere samenstelling

⁹Beckers (1996, p. 280).

¹⁰Beckers (2008, p. 147).

¹¹Beckers (1996, p. 280). De gepresenteerde gegevens die De Gelder zo belangrijk maakten, zijn afkomstig van de *Feestrede ter gelegenheid van het honderdjarig bestaan van het wiskundig genootschap onder de zinspreuk: een onvermoeide arbeid komt alles te boven* van C. Matthes (Amsterdam, 1879, p. 12). Beckers zet in het aangehaalde artikel wat kanttekeningen bij deze toebedeelde sleutelrol van De Gelder. Zo zou De Gelder alleen in de periode 1813-1814 actief geweest zijn binnen de bibliotheek van het genootschap. Maar wat voor nu belangrijk is, en ook Beckers concludeert zodanig, dat De Gelder in ieder geval van belang is geweest voor het Wiskundig Genootschap. ‘De Gelder was remembered as a very important person, and since he had been active within the Society, and the other mathematicians involved in the society in De Gelder’s days had not gained the same level of fame, it seemed only logical to award him the praise in 1879. De Gelder’s true value for the society lies in his being an important member of the board which had been installed to look at the Society’s future.’ (p. 281-282). Omdat Beckers schrijft dat De Gelders activiteiten voortkwamen uit het rapport uit 1813 en De Gelder een rol speelde in het benoemen van ereleden waaronder Van Swinden, concluderen we dat Van Swinden ná 1813 tot erelid benoemd is. Dit zal nog van belang blijken in hoofdstuk 5.

¹²Beckers (1996, p. 282-283).

¹³Beckers (2003, p. 82, 95 en 96).

van de klas te handhaven. Het liep uit in een conflict met de rector, waarna De Gelder uiteindelijk in 1820 ontslagen werd van de Latijnse school. De post voor wiskundedocent bleef een paar jaar vacant, waarna weer een aantal jaar later De Gelder toch zijn zin heeft gekregen.¹⁴

Op 2 oktober 1824 werd De Gelder gewoon hoogleraar in Leiden en op 28 november 1840 Ridder in de orde van de Nederlandse leeuw. Hij was 75 toen hij zijn werk neerlegde en stierf in 1848.

4.2 Onderwijs

Jacob de Gelder was docent en schreef leerboeken. Vanuit zijn eigen (zelf)studie en een heldere visie op hoe onderwijs gegeven moest worden, schreef hij boeken voor diverse onderwijsniveaus. In de boekenlijst (zie ook paragraaf 4.3) treffen we onder meer boeken aan over cijferkunst, stelkunst en meetkunst (verschillende versies). Wat bij *Beginselen der Meetkunst* opvalt is dat hij zoveel nadruk legde op het écht snappen van de stof. Hij nam er geen genoegen mee dat leerlingen een ‘maniertje’ gebruikten om tot een antwoord te komen; ze moesten weten waar ze mee bezig waren. Dit principe past binnen de in hoofdstuk 2 geschetste ontwikkeling.¹⁵ In de tweede druk (1817) van De Gelders *Beginselen der Meetkunst* is de tekst aangevuld met een ‘Uittreksel uit eenen *Brief van den Schrijver aan eenen zijner Vrienden, over het gebruik van dit Werk*’. Hij schrijft daar:

(...) en vooral zult Gij, zoo doende, de gevaarlijke klip vermijden, op welke zoo vele schipbreuk geleden hebben, dat namelijk uw Leerling aan den klank der woorden blijft hangen, en al zijn werk geheugenwerk wordt, en hij ten laatsten, met den schijn van kundigheden te bezitten, eigenlijk gezegd niets grondig verstaan zal.¹⁶

De Gelder heeft bij verschillende van zijn publicaties uitgeschreven lessen toegevoegd, waar hij met behulp van een dialoog beschrijft hoe de ideale les er volgens hem uit ziet.

Toen in 1826 de onderwijswet van kracht werd waarin expliciete wiskundeonderwerpen genoemd werden waarin onderwezen moest worden, werd in een extra toelichting van het ministerie van Binnenlandse Zaken aan de curatoren gemeld dat de boeken van De Gelder het best geschikt waren om deze gevraagde vakken uit te onderwijzen.¹⁷ Hieruit blijkt de grote invloed die De Gelder had op het Nederlandse wiskundeonderwijs en de ontwikkeling die dat doormaakte in de eerste helft van de negentiende eeuw.

4.3 Boeken

Hieronder volgt een lijstje met publicaties van De Gelder die betrekking hebben op het onderwerp van deze scriptie. De bedoeling van de lijst is een breder beeld te schetsen van het oeuvre van Jacob de Gelder.¹⁸ In de meeste gevallen is alleen de eerste druk vermeld. Waar relevant zijn opmerkingen toegevoegd.¹⁹

- *Grondbeginselen der cijferkunst*, (1793).
- *Wiskundige verhandelingen*, (1799).
- *Handleiding tot de beschouwende en werkdadige Meetkunst der platte en lichaamlijke hoeken en der rechtlijnige en platvlakkige lichaamen*, (1806).
- *Redevoering over den waren aart en de voortreffelykheid der wiskunst*, (1806).

¹⁴Beckers (2003, p. 79).

¹⁵Deze tendens is gaande vanaf het begin van de negentiende eeuw en was ook van toepassing op verschillende vormen van beroepsonderwijs. Zo werd op de militaire academie niet meer een rekenrecept gegeven om het aantal kogels op een stapel gemakkelijk te kunnen berekenen, maar was dit vraagstuk een toepassing van Algebra, waarbij de leerlingen zelf de formules moesten kunnen lezen en afleiden. Zie hiervoor o.a. Beckers (2006, p. 152-154).

¹⁶Gelder (1817, p. xxix).

¹⁷Beckers (2003, p. 80).

¹⁸Niet alle bronnen zijn ook daadwerkelijk voor deze scriptie bestudeerd dan wel gebruikt.

¹⁹Voor dit overzicht heb ik gebruik gemaakt van Aa (1969, Dl. 3, p. 25-26) en Beckers (2003, p. 207-209).

- *Wiskundige Lessen*, (1808-1809). Twee delen.
- ***Beginselen der Meetkunst*, (1810). Twee delen. Herdrukken in 1817 en 1829.**
- *Nieuw koopmans en winkeliers handboekje, of het Fransche stelsel van maten en gewigten gemakkelijk gemaakt (...)*, (1810).
- *Meetkundige Analysis*, (1811-1813).
- *Allereerste gronden der Cijferkunst*, (1812-1814). Twee delen.
- *Allereerste gronden der beschouwende en werkdadige Meetkunst* (1816).
- *Allereerste gronden der Meetkunst*, (1817). Twee delen.
- *Beginselen der Stelkunst*, (1819).
- *Beginselen der differentiaal- integraal- en variatie-rekening op eene geheel nieuwe en zeer eenvoudige manier, zonder behulp der denkbeelden van oneindig klein, fluxien of limieten, uit het eenvoudige begrip van differentien of verschillen, afgeleid*, (1823).
- *Hoogere Meetkunst, bevattende de algemeene theorie der kromme lijnen en gebogene vlakken*, (1824).
- *Verhandeling over het verband en den samenhang der natuurlijke en zedelijke wetenschappen en over de wijze om zich dezelve eigen te maken en aan anderen mede te deelen*, (1826).
- *Allereerste gronden der Stelkunst, ten gebruike der Latijnsche Scholen en andere Kollegiën*, (1827).
- *Eerste Gronden der Meetkunst, ten gebruike der Latijnsche Scholen en andere Kollegiën*, (1827).
- *Allereerste gronden der cijferkunst, bevattende de verklaring van het tientallig stelsel van tellen, het betoog der vier grondregels, de behandeling der gewone en tiendeelige breuken, en bijzonderlijk de opgave en de verklaring van het nieuw ingevoerde stelsel van maten en gewigten*, (1827). Twee delen.
- *Allereerste gronden der beschouwende en werkdadige Meetkunst, ingerigt ten dienste der studiën van de officieren en onderofficieren bij de Nederlandsche armee*, (1827).
- *Uitvoerige Lessen over Verhoudingen en Evenredigheden, doorvlochten met toepasselijke aanmerkingen en ophelderingen van veel gewigtige zaken*, (1839).

In hoofdstuk 2 hebben we gezien dat vanaf 1826 wiskunde verplicht werd voor de Latijnse school. Opvallend is de grote hoeveelheid nieuwe boeken die van de hand van Jacob de Gelder in 1827 verschijnen, speciaal voor die onderwijscategorie.

4.4 Karakterschets

We leren Jacob de Gelder kennen als een bedreven mathematicus. Het getuigt van veel kunde en doorzettingsvermogen als het iemand lukt puur door zelfstudie door te dringen tot de wetenschappelijke wereld. Hierbij zal De Gelder zijn talent graag gebruikt hebben om de verworven wiskundekennis door te geven aan anderen.

De Gelder heeft zowel pech als geluk gehad. Financieel heeft hij tegenslagen te verduren gehad, onder andere door werk dat niet uitbetaald werd. Een wat opvliegende reactie is dan niet zo verwonderlijk. Bovendien laat het levensverhaal van De Gelder zien dat het hem de nodige moeite heeft gekost om zich op te werken tot de persoon die hij uiteindelijk geworden is.²⁰ Zou hij ouders hebben gehad die tot een hogere stand behoorden, dan zouden wellicht meer opleidingsmogelijkheden tot zijn beschikking hebben gestaan.

De Gelder heeft absoluut geluk gehad met het leren kennen van Van Swinden en daarmee diens interesse voor hem. Hij heeft het aan Van Swinden te danken dat hij bepaalde opdrachten en banen kreeg. Van Swinden is verantwoordelijk voor (een deel van) De Gelders carrière.

²⁰Vergelijk met Van Swinden die na zijn afstuderen al professor op een universiteit werd!

De Gelder had een duidelijke eigen wil en was misschien af en toe wat arrogant. We zullen dit straks ook nog zien bij de bespreking van de inhoud van de meetkundeboeken. Toch staat dit alles zijn serieuze en drukke werkzaamheden niet in de weg. Vele publicaties komen van zijn hand in relatief korte tijd.

Het is deze man die de *Beginselen der Meetkunst* schreef. Een boek dat twee keer herdrukt zou worden.

Hoofdstuk 5

Een geschreven relatie

In dit hoofdstuk probeer ik een overzicht van de relatie tussen Jan Hendrik van Swinden en Jacob de Gelder te schetsen aan de hand van hun briefwisseling.¹ De eerste brief is van 1793, de laatste van 1810.

Werkwijze

Ik zal eerst kort aangeven hoe ik het materiaal bestudeerd heb voor mijn onderzoek.

Alle beschikbare brieven, ruim dertig in totaal, heb ik globaal bekeken. Dat betekent dat ik bij elke brief in eerste instantie op zoek ging naar de onderwerpen waarover geschreven werd. De brieven waar ik relevante informatie in aantrof, ongeveer de helft, heb ik volledig gelezen. Dit waren brieven met informatie over de onderlinge relatie tussen Van Swinden en De Gelder, met informatie over publicaties of andere interessante feiten. Twee van de brieven zijn opgenomen in bijlage A. Deze heb ik geprobeerd zo letterlijk mogelijk over te nemen, wat gezien het ‘schoone’ handschrift helaas niet altijd lukte. Waar twijfel bestaat over het geschrevene en zodoende het best mogelijk passende is ingevuld, is het woord tussen blokhaken gezet.

Hieronder volgt een weergave van wat mij opviel bij de bestudering van de brieven.

5.1 De Gelder begint

Het is steeds De Gelder die een conversatie begint door iets te schrijven of mee te sturen, waarna hij hoopt dat Van Swinden zijn ‘dienstwillige dienaar’ zal antwoorden. We krijgen hieruit meteen een indruk van hoe de verhoudingen lagen.

Het beeld zoals dat van De Gelder gegeven werd bij de karakterschets in hoofdstuk 4 moet wellicht enigszins aangepast danwel uitgebreid worden. Vanuit de brieven wordt duidelijk dat hij juist nederig kan zijn en in Van Swinden volledig zijn meerdere erkent. Deze indruk kan met de schrijfstijl van die tijd te maken hebben, maar dat zelfde argument kan ook toegepast worden op de soms wat arrogante toon in de voorrede van *Beginselen der Meetkunst*. Laten we een middenweg kiezen. Op papier overdrijft hij soms naar beide kanten toe.

Van Swinden is meer dan bereid met De Gelder te converseren en spreekt hem na verloop van tijd aan met ‘Veel geachte Vriend’ of ‘Zeer geachte Mederburger en Vriend’. Interessant is het dat in de eerste brief die Van Swinden aan De Gelder schrijft,² hij aangeeft dat De Gelder hem altijd mag schrijven.

¹De briefwisseling zoals die bewaard wordt in het archief van de Universiteitsbibliotheek Leiden (UBL). De brieven van Van Swinden aan De Gelder worden daar bewaard onder nummer BPL 2359; die van De Gelder aan Van Swinden onder nummer BPL 755.

²Merk op dat het de eerste brief is die in het archief in Leiden aanwezig is, maar gezien de toon van de brief concludeer ik dat het ook echt de eerste brief is.

(...) Ook zal ik altoos gaarne brieven van U E ontvangen zonder dat U E dezelve behoeve te frankeren. Men is in de wereld om elkander dienst te doen.³

De Gelder begint zijn brieven vaak met ‘Hooggeleerde Heer’, of ‘Waarde Meester’. Dit alles bevestigt onze eerste indruk van de verhouding tussen beide wiskundigen.

5.2 Brieven van De Gelder

Uit De Gelders brieven blijkt zijn enorme werklust. Elke keer is hij bezig met het grondig bestuderen van een of ander onderwerp. Al moet er opgemerkt worden dat er soms een langere tijd tussen verschillende brieven zit, bijvoorbeeld meer dan een jaar, wat een vertekend beeld kan geven van de situatie. Na een jaar is het te verwachten dat iemand weer een serie andere onderwerpen heeft genomen om te bestuderen. Desalniettemin zat De Gelder bepaald niet stil. In de brieven zijn zodoende drie hoofdonderwerpen te onderscheiden.

1. De Gelder schakelt Van Swinden in voor zijn eigen publicaties. Zo stuurt hij (druk)proeven mee met het verzoek die te corrigeren. Ook vraagt hij regelmatig of hij bepaalde boeken of artikelen mag lenen van Van Swinden, die hij dan uiterst zorgvuldig zal behandelen en er voor in zal staan dat ze op een door Van Swinden bepaald tijdstip weer ongeschonden in diens bezit zijn. Bij de post die hij zodoende als reactie van Van Swinden ontvangt zit dan wel eens een nieuw boek van Van Swinden dat De Gelder mag houden (‘waarvoor duizendmaal dank’). Als er dan een nieuw artikel van De Gelder verschenen is, laat hij dat zijn Meester weten. Hij schrijft bijvoorbeeld over een artikel over het binomium van Newton, waarin hij bewijst dat als een polynoom een wortel heeft in $x = a$, dit polynoom deelbaar is door $x - a$. Een kopie van dit bewijs voegt hij toe bij zijn brief van 21 maart 1800. Die bijlage is ook bewaard gebleven.
2. Als tweede brengt De Gelder verslag uit van zijn activiteiten en vertelt hij met welke studieonderwerpen hij zich op dat moment bezig houdt. Ook krijgt Van Swinden te horen hoe zijn (huidige) baan verloopt. Tijdens een reis die De Gelder maakt in het kader van het triangulatie-project, hoeken meten om Nederland in kaart te brengen, houdt hij gedurende een zekere periode maandelijks Van Swinden op de hoogte. Hierin aarzelt hij niet resultaten op te schrijven⁴ en vraagt hij ook naar resultaten van anderen. Van Swinden zou die met zijn (onder andere) Franse connecties wellicht kunnen achterhalen waardoor De Gelder en zijn mensen extra gegevens hebben om hun metingen te controleren. Het wetenschappelijk bedrijf had blijkbaar een heel open karakter. Naast dit soort gegevens vertelt De Gelder het als hij iets opmerkelijks in een wiskundig verslag heeft ontdekt wat hij nog eens verder uit wil gaan pluizen. Kortom, Van Swinden kan De Gelder in grote lijnen op afstand volgen met diens bezigheden.
3. Ten slotte vraagt De Gelder aan Van Swinden regelmatig om advies voor uiteenlopende zaken. Waar kan hij zijn boek het beste laten drukken of moet hij ingaan op het aanbod voor een nieuwe baan. Op dit soort momenten, het een wat belangrijker dan het ander, wordt de soms arrogante De Gelder klein en vraagt het eerlijke advies van zijn Meester. Het heeft soms iets weg van een vader-zoon relatie.⁵

De wiskundige onderwerpen waar De Gelder zich mee bezighoudt en over schrijft zijn Algebra, Trigonometrie, Sterrenkunde, Landmeetkunde en Getaltheorie. Voor dat laatste is het interessant te vermelden dat hij ook ‘aan Fermat’ heeft gewerkt. Ook al noemt De Gelder niet expliciet om welke stelling het gaat, het ligt voor de hand te denken aan ‘De Laatste Stelling’: voor elke x, y, z, n

³Brief van J.H. van Swinden aan J. de Gelder, 12 november 1794, BPL 2359 (UBL).

⁴Bijvoorbeeld dat de hoek tussen Gouda en Amsterdam in Utrecht gemeten, gelijk is aan $80^{\circ}14'10''$, 828.

⁵Zo geeft Van Swinden een keer na een teleurstellende ervaring voor De Gelder aan dat deze nog te weinig mensenkennis heeft en daardoor te goed van vertrouwen is. (Brief van J.H. van Swinden aan J. de Gelder, 5 mei 1800, BPL 2359 (UBL)).

geheel, zijn er geen oplossingen voor $x^n + y^n = z^n$ als $n > 2$; de beroemdste en beruchtste stelling uit de getaltheorie ooit. In de brief vertelt De Gelder dat hij zijn vorderingen op wilde sturen naar Legendre, maar toch wachtte om het de tijd te geven en te kunnen verbeteren. Deze opmerking bevestigt het vermoeden dat hij juist aan de Laatste Stelling werkte, omdat het bekend is dat Legendre aan dit probleem heeft gewerkt (zie ook voetnoot). Met speciaal gedrukt lijntjespapier - in deze tijd geen bijzonderheid, toen kennelijk wel - kon De Gelder tabellen gaan maken 'tot twee millioenen', waar Legendre vast mee vooruit zou kunnen.⁶

5.3 Van Swindens reacties

Van Swinden reageert op vriendelijke en beleefde toon op De Gelder. Niet zelden begint een brief met de verontschuldiging niet eerder geschreven te hebben. En soms houdt deze verontschuldiging regels lang aan, waarna dan toch *to the point* gekomen wordt...

Een brief van Van Swinden is zeer vaak een reactie op een eerdere brief van De Gelder, niet een eigen initiatief. De brieven van Van Swinden zijn ondanks de vriendelijke toon, toch ook zakelijk van aard. Van Swinden is niet de man over persoonlijke zaken te schrijven, althans niet naar De Gelder. In een van de brieven geeft hij dit ook aan. In een eerdere brief is De Gelder over godsdienst begonnen en Van Swinden reageert daar op.⁷

Ik merk insgelyks met leed [weezen] uit uwen brief dat wy in de zaaken van Godsdienst hemelsbreed van elkander verschillen. Myn gewoonte is, insgelyks, om my over deze zaaken weinig te uiten, dan wanneer myn pligt als Christen het my gebiedt: geen passade van gevoelens te maaken; doch mynen weg te gaan.⁸ (...)

5.4 Einde

De briefwisseling gaat door tot 1810. Dan is het plotseling over. De Gelder had het *Koopmans-Handboek* geschreven voor berekeningen in de handel en er bleek vraag naar te zijn. In dit boek had hij tekst over maten en gewichten overgenomen uit *Over volmaakte maten en gewigten*, geschreven door Van Swinden. Op slechts één pagina in zijn boek gaf De Gelder aan dat hij materiaal

⁶De Gelder schrijft over Fermat in: Brief van J. de Gelder aan J.H. van Swinden, 21 maart 1800, BPL 755 (UBL). Fermat zelf heeft $n = 4$ bewezen. Legendre heeft een bewijs van Euler voor $n = 3$ gecorrigeerd en bovendien samen met Dirichlet rond 1825 het geval $n = 5$ bewezen. Ten tijde van De Gelder was er dus nog genoeg werk te doen voor deze stelling. De Gelder heeft over Fermat gepubliceerd in deel XII van de *Algemeene Kunst en Letterbode* nummer 295.

⁷Van Swinden begint die brief met zich te verontschuldigen dat hij niet eerder heeft gereageerd op De Gelders brief van 21 maart. Inderdaad is in de UBL een brief van die datum van De Gelder aan Van Swinden aanwezig, maar helaas is deze niet volledig bewaard gebleven. In het stuk dat wel beschikbaar is vinden we niets dat duidt op een vraag naar Van Swindens religieuze achtergrond.

⁸Brief van J.H. van Swinden aan J. de Gelder, 5 mei 1800, BPL 2359 (UBL). De suggestie wordt gewekt dat Van Swinden christen is, maar daar niet over praat, en De Gelder een compleet andere levensovertuiging heeft. Een andere mogelijkheid is echter dat Van Swinden met het hemelsbrede verschil niet per se doelt op de religieuze overtuiging, maar meer op het spreken daarover in brieven of in het algemeen. Deze optie is verdedigbaar, te meer vanwege het feit dat De Gelder zich in de *Verhandeling over het Verband en de Zamenhang van de Natuurlijke en Zedelijke wetenschappen* (...) als volgt uitsprekt:

De natuur vertoont aan den onbedrevensten mensch zoo veel schoons, zoo veel voor hem onbegrijpelyks, dat, wanneer hij slechts eenige oogenblikken denkt, hij erkennen moet: *er bestaat een God*. (Gelder, 1826, p. 26)

En zou men dan de natuur niet bestuderen, daar zelfs de Stichter van onze godsdienst hetzelfde aan zijne leerlingen aanbeval? Of zoudt gij vreezen: dat de geopenbaarde godsdienst er bij lijden zou? Verban deze vrees! Of zoudt gij kunnen denken: dat God in zijne openbaring den mensch, buiten de verborgenheden, die uit de natuur niet kunnen gehaald worden, dingen zou hebben geleerd, die met de natuur strijden? Waarlijk dan zou uw geloof al zeer zwak zijn! Neen! het is de studie der natuur, het is de verlichter kennis van die brave en edeldenkende kristenen, die zich hebben toegelegd, om den zin en de meening der openbaring te verklaren, en door elken voetstap, dien zij op dien weg zijn voorwaarts gegaan, een nieuw bewijs voor derzelve voortreffelijkheid hebben opgeleverd. (p. 100)

had overgenomen, om het niet ‘saai’ op iedere pagina te moeten herhalen. De uitgever van Van Swinden leek bang te zijn voor verlies aan inkomsten en benaderde De Gelders uitgever. Die ging bij de schrijver zelf te rade. De Gelder kon echter meteen aanwijzen dat hij geen plagiaat had gepleegd, omdat hij op één pagina Van Swinden had genoemd. De klacht van de eerste uitgever werd ingetrokken.⁹

Het opmerkelijke was, dat het in die tijd vaker voorkwam dat auteurs stukken tekst overnamen. De Gelder had ook vaker tekst overgenomen van Van Swinden en dan was er nooit iets aan de hand. Waarom zou de Gelder nu dan opeens ‘letterdieverij’ hebben gepleegd?

Verdam schrijft:

En niets was natuurlijker, dan dat de Gelder verklaring van het een en ander wenschte te erlangen. Den heere van Swinden op de straat ontmoetende, wilde hij hem toespreken, maar werd, blijkbaar geraakt, ontweken met de uitdrukking, „dat alle betrekking had opgehouden.” Nog meer hierover verwonderd, schreef hij op denzelfden dag (2 November 1810), in gematigden, beleefden, maar waardigen toon, een uitvoerigen brief aan van Swinden.¹⁰

In deze brief zegt De Gelder onder andere

Hooggeleerde Heer!

(...)

UwEd gelieft mij te beschuldigen dat ik uit Uw boek gestolen heb en UwEd had die onheuschheid van mij niet gewagt. Ik wil hier met Uw Ed in geen woordenstrijd treden over het geene letterdieverij eigenlijk is, elks opienien zyn vrij en het blykt reeds dat de onze over dit punt hemelsbreed verschillen. (...)

Ik kan intusschen myne verwondering niet verbergen: dat Uw Ed my het overnemen van De bewuste plaats uit uw boek thans zoo kwalyk neemt, daar ik in den jaren 1803 in myne Sterrekundige Aardrijkskunde vry wat meer uit Uw Ed boek dan thans heb overgenomen, en dezelfde plaatsen, waarover Uw Ed zich thans beklaagd ook in 1808 in het I Deel myner Wiskunige Lessen zyn overgenomen, ik de brieven welke Uw Ed my over die twee boeken geschreven heeft inziende, daarin geen de minste sporen ontdek dat toen by Uw Ed daarover eenig ongenoegen gerezen is en dus heb ik reden te vragen: waarom dan nú? (...)

De geheele zamenhang den omstandigheden, de naauwkeurige vergelyking van het tegewoordige met het voorledene doen eenige waarschylyke gronden in mij opkomen om te vermoeden, dat het schryven van het koopmans handboek ja de ware grond uwer ontevredenheid niet uitmaakt. Het kan zyn, dat ik my daarin bedriege: doch zoo dit vermoeden gegrond is moet ik erklaren dat de ware grond uwen ontevredenheid my volstrekt onbekend is. (...)

Zoo zeer, Myn Heer, als ik altyd prys op uwe vriendschap gesteld heb zoo zeer ik altyd getracht heb die vriendschap aante [kweken], - zoo zeer ik, ingevalle de omstandigheden my daartoe in gelegenheid gesteld hadden om proevens van der myne te uwaarts te geven, niet zou nagelaten hebben dezelve met de daad hartelyk en ondubbelzinnig te betoonen, zoo zeer ook Myn Heer zal ik my met kragt en vermogen, by elk daar het behoort en waar het om de waarheid hulde te doen, van nut kan zyn tegen eenen beschuldiging blyven verdedigen, welke ik nog blyf hoopen, ontstaan te zyn uit door Uw Ed plaats gehad hebbende verkeerde opvatting, boven welke Uw Ed zoo min als eenig sterveling verheven is.

Ik heb de eer my te noemen

⁹Verdam (1848, p. 36-37).

¹⁰Verdam (1848, p. 37-38).

Hoogeleerde Heer!

<handtekening Jacob de Gelder> gehoorzaame Dienaar¹¹

De volledige brief is opgenomen in bijlage A.

Het antwoord op deze brief luidde:

Mynheer

(...)

Mijn argument is niet in een twistgeding met U E te treden, en U E Missive te gaan wederleggen, maar U E enkel over eenige zaken die daar in voorkomen te onderrichten: als

1e Dat niemand U Ed immer by mij heeft zwart gemaakt: en dat myn ongenoegen enkel en alleen uit Uwe handelwyze ontstaat.

2e Dat ik ten vollen overtuigd ben dat alle menschen ende ook U E het volste regt hebben om over Maten en Gewigten te schryven: dat ik niet verwonderd sta dat verscheiden reeds zulks gedaan hebben, en verwacht dat veelen zulks nog doen zullen.

3e. Dat ik geen de minste, laat staan zeer gewigtige redenen heb, of hebben kan, om dit kwalyk te neemen: en dat, indien iemand, over die Stoffe willende schrijvende: mij immer kwam te vragen of ik hen kwalyk neemen zoude: ik zoude antwoorden volmondig neen (...)

4e. Dat welk aftrek de werken of boekjes van anderen over de Stoffe reeds gehad hebben, nog hebben, of in 't vervolg hebben mogten, ja al hadden zy er zoodanigen dat het debit mynen werken daardoor verminderd of geheel vernietigd werd, ik daar in geen het minst financieel belang zouden hebben: vermits hen debit van de boeken nog in geene deelen aangaat, of eenigen winst aanbrengt, en ik de copij derzelve, zonder eenig leveranciers aan den boekhandelaar den Hengst, myn zeer geëerden Boezemvriend, geheel en al geschonken heb. Als vriend echter zoude het my leed doen zoo aan dezen [uitgave] Uwend schade werd toegebracht: doch het publiek moet oordeelen welke werken hem de nuttigste zyn, de myne of die van anderen, en naar dat oordeel te werk gaan.

Hoe wel nu, gelyk ik gezegd heb, alle relatien van U E met my komen op te houden, zal ik echter nimmer afzyn U E als eenen der besten en uitmuntendsten mathematici die men thans heeft, eenen man met eene byzonderen mathematische genie begaafd te beschouwen, en zulks overal, en meer byzonderen daar, waar het tot uwe bevordering te past mogt komen, te behartigen.

Ik blyve Mynheers Uwe dienstwillige dienaar
J.H. Van Swinden¹²

Ook deze brief is volledig opgenomen in bijlage A.

5.5 Samengevat

Lange tijd is er een hechte vriendschap tussen Van Swinden en De Gelder. Ze kunnen met elkaar lezen en schrijven, zagezegd. Er is goede communicatie over wiskunde en alles wat daaromheen

¹¹Brief van J. de Gelder aan J.H. van Swinden, 2 november 1810, BPL 2359 (UBL) - kopie afschrift van de originele brief. Voor een foto van de eerste pagina van deze brief, zie afbeelding 5.1. Merk op dat het contrast en de helderheid van de foto zo aangepast zijn dat optimale leesbaarheid verkregen wordt. In werkelijkheid is het papier niet zo donker.

¹²Brief van J.H. van Swinden aan J. de Gelder, 5 november 1810, BPL 2359 (UBL). Voor een foto van de eerste pagina van deze brief, zie afbeelding 5.2. Zie verder opmerking voetnoot 11.

Den here Jacob de Silden te Amsterdam
 21. 2.

Myn heer:

Ik heb uw Ed. by gelezenheid dat it u E ontvete, vreegd hoe geen it meende
 u E te moeten zeggen, en waer by it Byg. hiert gant-ende al her geen u E my in
 derzelf mis/wie gelyft te melden, en het welk my in geener deele van verelen
 door veranderen.

Myn argument is niet in een rijf geding, maer u E te vrede, en niet Myffwe
 te jaen wederleggen, maer u E enkel over eenige raffen die daer in voortman
 te ondersoeken: al

1. Dat ~~niet~~ niet u E d'immer by my heeft waer genant: sinder myn
 oogenwegen enkel en alleen uer lare handelewre outmaat.
2. Dat it ten vollen oertuigd ten dar alle menschen, anders est u E,
 her vrlate regt hebben om over shaten en geuigen te selygen: want niet
 veruoudend ja dar verscheiden red/velts gedaen hebben, en senvagt dar
 velen vullen wy dver vullen.
3. Dat it geen de minste, laet haer rengerigste redanen het of hebben
 ken om der kwalijt te neemen: en dar, in diem iemand, over die Wijf ver-
 lande selygende; myn vinnen kwamt vragen of it her kwalijt neemen
 vrede: it vrede antwoorde vdomendij neen: verner/it vion de chursten
 van Brumeland/che Zaken my voreende maer de Commisste om by her
 invonen van her meuew helpe houer te londe, de nodige werken of werfjes
 te selygen door de nodige vergelyking/ Tafels te maken, ten einde de Ingeratenen
 der Land/ over die raat in te vichten, it lullt wel heb oangenomen: maer
 er voren het bygevredt dar niet niet niet moet zijn teer/steunend, om
 dat cedar een regt vover behouden om daer over te selygen

60

Figuur 5.2: De eerste pagina van de laatste reactie van Van Swinden.

belangrijk is. Duidelijk zijn de verhoudingen: Van Swinden is de meester, die De Gelder kan helpen bij zijn zelfstudie en ook bij allerlei meer praktische zaken. Tegelijkertijd zet De Gelder zich ten volle in voor zijn zelfstudie en heeft hij er veel voor over om de relatie met Van Swinden goed te houden.

Helaas blijkt dat niet te lukken. Als we naar de tekst van Van Swinden zelf kijken, komen we niet verder dan dat de oorzaak van de contactbreuk De Gelders ‘handelwyze’ is. En die handelwijze zou dan het overschrijven van een deel van *Maten en Gewigten*¹³ zijn. Dat dit alleen de oorzaak zou zijn, is uiterst opmerkelijk aangezien De Gelder eerder ook al stukken daaruit (!) heeft overgeschreven van Van Swinden. Bovendien geeft Van Swinden duidelijk aan dat hij er geen enkele moeite mee heeft als anderen over het onderwerp schrijven. Hij vindt zelf dus zeer zeker niet dat hij een monopolie heeft om hier over te schrijven. (Laten we ons nog even realiseren dat het Van Swinden was die naar Parijs mocht om mee te helpen met het vaststellen van de standaardmaten. Het zou dus helemaal niet verwonderlijk zijn als Van Swinden vond dat men het schrijven van lesboekjes over deze stof maar aan hem over moest laten!)

Nu zou het kunnen zijn dat De Gelder van te voren niet bij Van Swinden gemeld had dat hij iets had overgeschreven. En dat dat bij Van Swinden verkeerd was gevallen. Maar gezien het feit dat hij het wel goed vond dat De Gelder eerder materiaal had overgenomen, lijkt dát nu niet een reden te zijn voor een dusdanig vergaande beslissing. Neem ook in ogenschouw het feit dat, als we zijn eerdere brieven bekijken, Van Swinden sterk de indruk wekt dat hij zelf de vriendschap ook erg op prijs stelde. De Gelder was niet een lastige leerling die eens in de zoveel tijd weer iets van zijn meester moest hebben; er werd geconverseerd ten dienste van de wetenschap.

Ook is het mogelijk dat de uitgever van Van Swinden, Den Hengst, zijn auteur inlichtte over mogelijke letterdieverij en zodoende De Gelder zwart heeft gemaakt bij Van Swinden. Dit zou via De Gelders uitgever, De Gelder zelf ter ore kunnen zijn gekomen. Van Swinden schrijft echter dat hij er geen moeite mee heeft als boeken van andere auteurs zijn financieel belang verminderen (kennelijk zag zijn uitgever dit anders). Hieruit een contactbreuk te laten volgen, lijkt een onlogische stap. Te meer vanwege het eerste punt uit Van Swindens brief, waar hij schrijft dat niemand ooit De Gelder zwart heeft gemaakt bij hem.

Het lijkt dus onwaarschijnlijk dat enkel en alleen het overschrijven de reden is van het stopzetten van de vriendschap. Het zou echter wel kunnen zijn dat er al langer een irritatie bij Van Swinden was richting De Gelder, maar niet voldoende om daarom een einde te maken aan de vriendschap. Wellicht dat het meester-leerling aspect hierin een rol speelde. Voelde Van Swinden zich uitgebuit of misschien ‘gebruikt’ door De Gelder? Het overschrijven van *Maten en Gewigten* kan de druppel geweest zijn die de emmer deed overlopen.

Blijft over de vraag of we (een deel van) de oorzaak van de ruzie dan toch in een andere hoek moeten zoeken. Van Swinden zelf geeft hier niet een duidelijke hint toe, al kan dat ook bewust zijn. De echte oorzaak van een geschil maak je soms liever niet openbaar en dan zoek je naar een uitweg om een enigszins kloppende redenering te krijgen, al dan niet geheel gebaseerd op de waarheid.

Een interessante aanvulling is het feit dat juist in 1810 De Gelders boek *Beginselen der Meetkunst* verscheen. Het boek dat bijna dezelfde titel droeg als dat van Van Swinden uit 1790. Zoals we zagen was Van Swindens werk het eerste meetkundeboek van niveau in het Nederlands. Nu was daar dus het exemplaar van De Gelder bij gekomen. We zullen in hoofdstuk 6 en 7 de beide boeken ‘van binnen’ gaan bekijken. Misschien geeft ons dat, naast informatie over de boeken op zich, ook een helderder kijk op deze kwestie.

Voor nu is in elk geval wel duidelijk dat het geen wiskundig conflict is. Het slot van Van Swindens brief geeft aan dat hij De Gelder beschouwt als ‘eenen der besten en uitmuntendsten mathematici die men thans heeft’. Bovendien blijkt uit hoofdstuk 4 dat ná 1813 De Gelder een rol

¹³Bijzondere aanvulling: De Gelder had het boek zelf van Van Swinden gekregen, blijkens de Brief van J. de Gelder aan J.H. van Swinden, 19 juli 1802, BPL 755 (UBL).

gespeeld heeft in het tot erelid van het Wiskundig Genootschap benoemen van Van Swinden.¹⁴

Beide heren ten spijt houdt de vriendschap geen stand. Een duidelijke oorzaak hier voor vinden we niet in de brief van Van Swinden. Na een jaar of zeventien van briefwisselingen eindigt voor De Gelder een zeer vruchtbare en voor Van Swinden een zeer onderhoudende relatie.

¹⁴Zie voetnoot 11 op pagina 23.

Hoofdstuk 6

De meetkundeboeken

In dit hoofdstuk zullen we kennismaken met de beide meetkundeboeken en deze globaal bekijken. Overeenkomsten en verschillen komen aan bod. Een vergelijking van een aantal specifieke onderwerpen en stellingen volgt in hoofdstuk 7.

Werkwijze

Hieronder licht ik kort toe hoe ik bij mijn onderzoek te werk ben gegaan. Deze werkwijze heeft ook betrekking op het volgende hoofdstuk.

De auteurs gebruiken in hun boeken allebei twee lettergroottes; een hoofdtekst met subtekst daar tussen door. Qua stof zijn er bij De Gelder drie extra hoofdstukken die niet bij Van Swinden voorkomen. Van beide boeken heb ik alle hoofdtekst bestudeerd, behalve die laatste drie hoofdstukken van De Gelder. Op een aantal plaatsen waar dat nodig was voor begrip van de stof of waar de auteur mij nieuwsgierig maakte naar extra achtergronden of uitleg, heb ik de subteksten ook gelezen. Na op deze manier beide boeken doorgewerkt te hebben, was er een aantal stellingen, zo'n vijftientig in totaal, waarvan ik nog niet overtuigd was dat deze zelf juist dan wel correct bewezen waren. Deze gevallen heb ik verder uit- of nagerekend tot er een bevredigende uitkomst was. Ze hebben als uitgangspunt gediend voor de keuze van problemen die ik in het volgende hoofdstuk nader beschouw.

Nu volgt eerst de globale vergelijking van de boeken.

6.1 De boeken en hun overeenkomsten

De meetkundeboeken van Van Swinden en De Gelder werden tientallen jaren lang gezien als de standaardwerken over dit onderwerp. Hoewel er op sommige punten interessante verschillen waar te nemen zijn, vinden we ook een aantal overeenkomsten. Zo gebruiken Van Swinden en De Gelder allebei de term 'boeken' voor hun hoofdstukken.

De Gelder kiest ervoor zijn werk op te splitsen in twee delen 'Over de Meetkunst der Vlakken' en 'Over de Meetkunst der Lichamen'. Van Swinden maakt dit onderscheid niet op deze manier, maar behandelt wel onderwerpen uit beide categorieën.

Qua onderwerpen liggen de boeken heel dicht bij elkaar. Beide auteurs starten met een boek over rechte lijnen. Begrippen als hoek en evenwijdigheid, driehoek en loodlijn komen aan de orde. Van Swinden vervolgt met een boek over de inhoud van rechtlijnige figuren.¹ Daarna volgt een hoofdstuk over evenredigheden. Bij De Gelder is de volgorde van deze twee boeken juist andersom.

Beide behandelen in het vierde boek gelijkvormigheid waarna in het vijfde de cirkel geïntroduceerd wordt. Het volgende boek gaat over veelhoeken in en om de cirkel, waar natuurlijk stilgestaan

¹De figuren die je met rechte lijnen in het platte vlak kunt maken, zoals rechthoeken en vierkanten, driehoeken en parallellogrammen en veelhoeken.

wordt bij de kwadratuur van de cirkel.²

Van Swinden gaat verder met een apart boek over de omtrek en inhoud van de cirkel, terwijl De Gelder een hoofdstuk inlast voor *meetkundige werkstukken* en hun oplossing. De laatstgenoemde had in zijn boek over de cirkel al aandacht besteed aan omtrek en inhoud. Van Swinden voegt overigens een apart katern met werkstukken toe, deze staan niet tussen de gewone boeken in. Het is echter niet zeker of de werkstukken standaard meegedrukt werden of dat er ook versies zonder in omloop waren. De werkstukken bestonden uit het maken van meetkundige constructies.

Van Swinden en De Gelder gaan vervolgens in boek acht verder met goniometrie, waarna trigonometrie of platte driehoeksmeting volgt. Na deze negen boeken zijn we bij De Gelder aangekomen bij het einde van het eerste deel.

Van Swindens tiende boek gaat over de ligging en snijding der vlakken, net als dat van De Gelder. Het elfde boek bij Van Swinden gaat ‘Over de ligchamelijke figuren die door vlakke oppervlakten bepaald zijn’ met als equivalent van De Gelder ‘Over de veelvlakkige Ligchamen; bijzonderlijk, over de Prisma’s, Parallelopipeda’s, Piramiden, enz. Over derzelver inhoud, en over de gelijkvormige ligchamelijke Figuren.’ Het laatste boek van Van Swinden behandelt lichamelijke figuren die door kromme oppervlakken bepaald zijn, net zoals we bij De Gelder nu een hoofdstuk aantreffen over cilinder, kegel en bol.

De Gelders werk telt vijftien boeken. De onderwerpen die nog volgen zijn: drievlakshoeken of boldriehoeksmeting, de theorie van transversalen van Carnot en een begin van de veelhoeksmeting met eigenschappen van veelvlakken.

Zoals gezegd baseren beide auteurs hun boeken op de *Elementen*. In tabel 6.1 op pagina 43 staat een overzicht van de inhoud van de boeken geschreven door Euclides, Van Swinden en De Gelder. Euclides is als richtlijn genomen en de andere boeken zijn daar qua onderwerpen rondom gerangschikt. Voor het overzicht van Euclides heb ik gebruik gemaakt van Bos (1983, p. 109). Voor dat van Van Swinden en De Gelder heb ik geprobeerd zoveel mogelijk aan te sluiten bij de benamingen die zij zelf geven voor hun hoofdstukken.

Uit de tabel blijkt dat de verschillen tussen Euclides enerzijds en de twee nieuwste boeken anderzijds een stuk groter zijn dan die tussen Van Swindens en De Gelders boek onderling. Euclides behandelt op meetkundige manier ook in aparte boeken stellingen uit de getaltheorie. Volgens de twee Nederlandse auteurs horen die stellingen niet bij de meetkunde, wat het ontbreken ervan in hun boeken kan verklaren. Belangrijk is het om te vermelden dat, ook bij gelijke onderwerpen, er bij Van Swinden en De Gelder meer in hun boeken staat dan bij Euclides. Euclides zelf kende bijvoorbeeld nog geen algebra. En ook vinden we bij Euclides nog niets over gonio- en trigonometrie. Van Swinden merkt in zijn voorrede op dat hij het mooiste van de verschillende auteurs verzameld heeft.

(...) [men kan zien] dat ik de schoone ontdekkingen van HUYGENS, SNELLIUS, LUDOLF VAN CEULEN, DU FAY, SAURIN, die bijna in vergetelheid geraakt zijn, en zich in boeken bevinden die men naauwlijks meer leest, om derzelver nuttigheid en fraaiheid heb opgegeven (...)³

Bij De Gelder ten slotte vinden we aan het einde van de tabel een paar onderwerpen die niet in de andere boeken voorkomen. Hij gaat met die boeken dieper de meetkunde in dan zijn collega’s.

²Bij het kwadreren van een cirkel gaat het erom een vierkant te construeren dat dezelfde oppervlakte heeft als een gegeven cirkel. Archimedes benaderde de cirkeloppervlakte door de oppervlakte van in- en omgeschreven veelhoeken van de cirkel te berekenen. Lange tijd werden pogingen gedaan op deze manier een exacte verhouding van omtrek en oppervlakte van cirkel te vinden. In 1761 werd door Johann Heinrich Lambert bewezen dat π irrationaal is (dat wil zeggen dat de decimale ontwikkeling niet periodiek is). Uiteindelijk werd in 1882 door Carl Louis Ferdinand von Lindemann bewezen dat het niet mogelijk is met passer en lineaal een vierkant te construeren dat dezelfde oppervlakte als een gegeven cirkel heeft - namelijk door aan te tonen dat π een transcendent getal is (een transcendent getal is een getal dat geen oplossing voor een polynoom ongelijk 0 met rationale coëfficiënten kan zijn.)

³Swinden (1816, p. xv) Fragment is afkomstig uit de voorrede van de eerste druk, ook opgenomen in de tweede uitgave.

Ook al beginnen de boeken op een zeer eenvoudig niveau, enige rekenkennis is wel vereist. Te denken valt aan *Grondbeginselen der Cijferkunst* van De Gelder, eerste druk 1793, of een vergelijkbaar boek van een andere auteur (Van Campen, Steenstra, Lacroix).

Zoals eerder opgemerkt werden de boeken gebruikt tot ver in de negentiende eeuw. Hieruit blijkt als eerste de waarde van de boeken, maar tegelijk ook de invloed die de auteurs hadden, ook posthuum.

In figuur 6.1 en 6.2 zijn de titelpagina's van de beide meetkundeboeken te zien. Figuur 6.3 en 6.4 tonen pagina's. Deze afbeeldingen geven de 'sfeer' van de boeken weer.

Hieronder volgt een bespreking van de boeken afzonderlijk.

6.2 Van Swinden

Van Swindens *Grondbeginsels der Meetkunde* wordt beschouwd als het eerste meetkundeboek van niveau in de Nederlandse taal. Van Swinden kiest voor een structurele en gedegen opbouw. Hij noemt in zijn Voorrede

Ik heb vooreerst getracht niets weg te laten van den striksten bewijstrant der Ouden, waarvan EUCLIDES en ARCHIMEDES ons zulke voortreffelijke voorbeelden hebben nagelaten, en geene moeite ontzien, om zeer naauwkeurige denkbeelden der zaken voor te dragen; iets, dat op eene zeer aanmerkelijke wijze in de meeste hedendaagsche boeken, die den naam van Grondbeginsels der Meetkunde dragen, verwaarloosd wordt.⁴

Ieder hoofdstuk begint dan ook met een reeks bepalingen, waarna het mogelijk is diverse stellingen te bewijzen. Een stelling wordt door Van Swinden *Voorstel* genoemd. (Iets wat door Euclides als *Propositie* aangeduid werd). De meeste bewijzen worden door Van Swinden zeer kort behandeld; vaak wordt alleen een verwijzing gegeven naar een paar eerdere stellingen waarmee het huidige Voorstel bewezen kan worden. Van Swinden gebruikt deze handelwijze heel bewust, blijkens zijn voorrede.

Wanneer men in een boek altijd het bewijs bij het Voorstel aantreft, werkt de geest niet om het bewijs te vinden, maar blijft ten dien opzichte geheel werkeloos. Wanneer een dergelijk boek tot onderwijs dient, kan de onderwijzer bijna niets doen, dan mondeling het zelfde bewijs herhalen.⁵

Van het lezen van een bewijs leer je niks, juist het zelf erover nadenken en construeren werpt zijn vruchten af. Omdat hij de boeken in zijn eigen lessen gebruikte, kon hij, in geval van onduidelijkheid, alsnog zelf het bewijs behandelen.

Achterin het boek is een serie afbeeldingenbladen opgenomen waarnaar vanuit de tekst verwezen wordt. (Een manier van drukken die veel voorkwam in die tijd).

Het boek is geschreven voor zelfstudie, of voor gebruik tijdens de lessen van Van Swinden,⁶ op de universiteit dus. De leerlingen die van de Latijnse school af kwamen, begonnen in hun eerste jaar met een uitgebreid vakkenpakket, waaronder het begin van de meetkunde. Een paar jaar vóór de uitgave van het boek was een beknopt meetkundewerk van Van Swinden in het Latijn verschenen. De eerste druk van de *Grondbeginsels der Meetkunde* zelf was in 1790 en er volgde een tweede herziene uitgave in 1816. Een derde uitgave verscheen in 1833, maar dit is een heruitgave van de tweede druk. Merk op dat Van Swinden zelf toen al overleden was. Er zijn ook Duitse

⁴Swinden (1816, p. v) Fragment is afkomstig uit de voorrede van de eerste druk, ook opgenomen in de tweede uitgave.

⁵Swinden (1816, p. vii-viii) Fragment is afkomstig uit de voorrede van de eerste druk, ook opgenomen in de tweede uitgave.

⁶Swinden (1816, p. viii) en Moll (1824, p. 23-24).

edities van het boek verschenen, twee in Jena in 1797 en 1834 en een in Halle, 1868.⁷ Dit bevestigt de internationale reputatie van Van Swinden.

6.3 De Gelder

Net als Van Swinden behandelt De Gelder een enorme verzameling stellingen met bewijzen om zo de meetkunde van de grond af aan strikt op te bouwen. Het is De Gelders streven dat iedereen die zijn boek bestudeert elke stelling exact kan beargumenteren. Vaag weten waar het ongeveer over gaat is uit den boze voor De Gelder. Anders dan Van Swinden geeft hij daarom bij iedere stelling een nauwkeurig bewijs. Bijzonder is het op pagina 24 aangehaalde ‘Uittreksel van eenen Brief van den Schrijver’, dat hij bij de tweede druk voegt en waarin hij uitlegt hoe een docent, volgens deze principes, de beste resultaten met zijn leerlingen kan bereiken.

Net als bij Van Swinden vinden we bij De Gelder in zijn boek afbeeldingenbladen. In tegenstelling tot het boek van Van Swinden zijn deze bladen nu verspreid over het boek meegebonden. Grappig is dat bij de tweede en derde druk van De Gelder het ‘BERIGT *aan den* BOEKBINDER’ meegedrukt is. Het bericht luidt: ‘De platen moeten op hunne plaats in de bladen worden ingevoegd. Men moet zoo veel wit aan dezelve laten, dat de figuren naar buiten kunnen uitslaan.’ Deze manier van binden kwam overigens ook al bij de eerste druk voor. Het is De Gelder die afwijkt van de normale gang van zaken. Hij moet de boekbinder daar zelf expliciet op wijzen.

Ik ben er niet geheel zeker van voor welk publiek De Gelder zijn boek precies geschreven heeft. In hoofdstuk 4 zagen we in het titeloverzicht dat de Gelder bij sommige uitgaven expliciet een school of academie noemt voor wie hij zijn boek bedoeld heeft. Dat doet hij bij *Beginselen der Meetkunst* niet. Aangezien de Latijnse scholen in 1810, het jaar van de eerste druk, nog geen wiskunde behandelden, kunnen leerlingen van de Latijnse school geen (directe) doelgroep geweest zijn. Zelf gaf De Gelder geen les op de universiteit, wat een universitair publiek niet onmogelijk maakt, maar de kans daarop wel verkleint.

In de zoektocht naar het beoogde publiek van *Beginselen der Meetkunst* zijn er drie dingen die mij een bepaalde kant op stuurden. Ten eerste hebben we gezien dat De Gelder vanaf 1808 actief is geweest binnen het Wiskundig Genootschap. Eén van de activiteiten van het Genootschap was boeken uit te geven of stimuleren die uit te geven. Als tweede bleek in hoofdstuk 2 dat onderwijzers verschillende rangen hadden in die tijd. Middels een examen kon men tot een hogere rang komen. En aan zo’n examen zal de nodige (zelf)studie vooraf moeten gegaan. Bovendien, en dat is het derde, zagen we dat in de tweede druk van *Beginselen der Meetkunst* De Gelder een brief toevoegt die vertelt hoe het beste meetkunde onderwezen kan worden.⁸ Nu heb ik niet een volledig beeld van de inhoud van het toenmalige aanbod van lesboeken, maar een didactisch betoog in een boek voor leerlingen lijkt - tegenwoordig tenminste - niet geheel op de juiste plaats afgedrukt te zijn. (De brief neemt maar liefst vijftien pagina’s in beslag). Ik zie het daarom als mogelijkheid en logisch gevolg van bovenstaande opmerkingen dat De Gelder zijn boek (mede) bedoeld heeft voor leden van het Wiskundig Genootschap (zeg maar ‘algemeen geïnteresseerden en rekenmeesters’) en voor (aankomende) docenten die zich willen of moeten bekwamen in de meetkunde.

Van het boek zijn drie drukken verschenen, de eerste in 1810 en herziene en uitgebreide herdrukken in 1817 en 1829. Merk op dat de derde druk van het eerste deel als afzonderlijk boek ook in 1828 al uitgegeven werd. Daarnaast heeft De Gelder van zijn boek verschillende uittreksels gemaakt. Zo verschenen in 1827 *Eerste gronden der Meetkunst, ten gebuike der Latijnsche Scholen en andere Kollegien* en *Allereerste gronden der beschouwende en werkdadige Meetkunst, opgesteld*

⁷Bockstaele (1978, p. 76).

⁸Ook al is deze brief pas toegevoegd in de tweede druk, dat weerhoudt ons er niet van de intentie die in deze brief ligt (het wiskundeonderwijs zo goed mogelijk te - laten - verzorgen) ook al te veronderstellen bij de eerste druk. Het lijkt me waarschijnlijk dat hij met zijn tweede druk eenzelfde doelgroep voor ogen had als bij de eerste druk en dat hij met de brief in de tweede druk die doelgroep extra wilde bekwamen in het lesgeven.

ten gebruike van de heeren officieren bij de korpsen Infanterij, Kavallerij en Mariniers.⁹

Over de titel van De Gelders boek (zie figuur 6.2) is het een en ander op te merken. Als eerste valt het verschil op met de titel die Van Swinden aan zijn boek geeft: Van Swinden spreekt van *Meetkunde*, De Gelder van *Meetkunst*. In *Verhandeling over het Verband en de Zamenhang van de Natuurlijke en Zedelijke wetenschappen (...)* uit 1826 geeft De Gelder een duidelijke uitleg over het verschil tussen beide begrippen. Omdat de passage zo fraai is, wordt die hier geheel weergegeven.

*In vele gevallen wordt, tot groot nadeel van de duidelijkheid der begrippen, wetenschap met kunst verward. Zulks heeft plaats, bij voorbeeld, in de reken- en meetkunst. Het is in deze verhandeling vooral van belang, dat wij die misvatting duidelijk aantoonen. Men zegt rekenkunde en rekenkunst, meetkunde en meetkunst. Men zegt wel aardrijkskunde en geschiedkunde, maar niet aardrijkskunst en geschiedkunst; men zegt wel danskunst, maar niet danskunde. Indien ik zeg aardrijkskunde, dan bedoel ik eenvoudig eene wetenschap, de wetenschap, namelijk van de ligging en de gesteldheid van de landen op onzen aardbol. De analogie of gelijkvormigheid, die ook vooral in de zamenstelling en het gebruik der woorden moet plaats hebben, gebiedt dus, dat rekenkunde, bij voorbeeld, zal moeten betekenen de wetenschap van de regels, hoe men rekenen moet, de wetenschap van de eigenschappen der getallen; en meetkunde de kennis van de eigenschappen der meetkunstige figuren: iemand nu kan al die dingen weten, en nogtans onbekwaam zijn in het rekenen en meten, waarvan vele voorbeelden voorhanden zijn. Maar gebruikt men de woorden rekenkunst en meetkunst, dan bedoelt men zoo wel de kennis van de regels, als de hebbelijkheid, om dezelve met gemak en naauwkeurigheid uit te voeren, of, om nog meer algemeen en naar den aard en het doel van het onderwerp te spreken, de kunst om de regels uit te vinden. Iemand die slechts de regels dezer twee kunsten weet, kan men wel kundig noemen; maar indien hij dezelfde niet heeft leeren uitvoeren, indien hij de gronden niet kent, om dezelve uit te vinden, en met nieuwe regels te verrijken, dan mag hij geen reken- noch meetkunstenaar genoemd worden.**

* Deze overwegingen zijn dan de reden, waarom ik, in mijne geschriften en uitgegevene leerboeken, niet heb geschreven *rekenkunde* en *meetkunde*, maar *rekenkunst* en *meetkunst*, zoo als men zegt, *spraakkunst*; wijl reken en meetkunst, zoo men van dezelve eenig nut wil trekken, even zoo als de spraakkunst, als kunsten moeten geleerd en beoefend worden.¹⁰

Dan is er voor de titel ook nog een andere opmerking te maken. De Gelder claimt namelijk dat zijn boek ontworpen is ‘naar haren [dat wil zeggen ‘de Meetkundes’, WL] tegenwoordigen staat van vordering’ (zie het titelblad in figuur 6.2). Toen Euclides zijn meetkunde opschreef, gaf hij het resultaat de naam *Elementen*. Dat suggereert (terecht, in de tijd van Euclides) dat dit de allesomvattende wiskunde was. Er waren verder geen onderdelen belangrijk genoeg om tot de bouwstenen van de wiskunde gerekend te worden (let op: in de tijd van Euclides). Gekeken naar De Gelders ondertitel zijn we geneigd te denken dat hij dan ook het nieuwste van het nieuwste verwerkt heeft. De meetkunde die hij beschrijft is echter niet alle bekende wiskunde van die tijd. Een interessante vergelijking is te maken als we kijken naar het gezaghebbende boek *Elementa Matheseos Universae* van Christian von Wolff (afgerond in 1742). Ook hij claimt de elementen van de wiskunde weer te geven. Behalve meetkunde behandelt hij ook differentiaal- en integraalrekening, mechanica, optica, geografie, militaire en burgerlijke bouwkunde.¹¹ Een werk dat alle beschikbare wiskunde omvat is ‘Beginselen der Meetkunst’ zeer zeker niet. Blijft over de optie of dan de meetkunde die er in gepresenteerd wordt moderner is dan van vergelijkbare boeken, of in

⁹Met zijn ruime onderwijservaring kon hij de programma’s voor die boeken samenstellen, wat nu een interessante blik kan werpen op wat voor wie door De Gelder belangrijk werd gevonden. Ik heb mij beperkt tot *Beginselen der Meetkunst*. (Zie ook titeloverzicht in paragraaf 4.3).

¹⁰Gelder (1826, p. 119-120).

¹¹Zie voor een interessante vergelijking tussen Euclides, Von Wolff en het boek *Éléments de Mathématique* van de schrijversgroep die zich N. Bourbaki noemt (eerste deel gepubliceerd in 1939), Bos (1983).

elk geval ‘up-to-date’. De Gelder zelf heeft daar een uitgesproken mening over. Er moet voor hem reden geweest zijn een meetkundeboek te schrijven, in de wetenschap dat er een alom gewaardeerd alternatief van Van Swinden bestaat. In de Voorrede geeft hij duidelijk aan waarom hij dan toch dit boek geschreven heeft.

De gewigtigste theorieën, welke in de beginselen der Meetkunst moeten voorkomen, zijn door ons, op eene geheel nieuwe wijze, behandeld en in een duidelijker en klaarder licht gesteld.¹² (...)

Wij moeten dan nogmaals eenige ogenblikken bij dit stuk blijven stilstaan, en de gronden ontvouwen waarom onze wijze van behandeling der Evenredigheden beter dan de gewone en beter dan die van Euclides is?¹³ (...)

Zoodra men derhalve, op eene algemeene wijze, over de evenredigheden van lijnen, hoeken, cirkelbogen, vlakken en lichamen, enz. in eenige gestelde figuur, moet redekavelen, kunnen de grootheden, welker betrekking overwogen wordt, of onderling meetbaar of onderling onmeetbaar zijn: bevonden zich nu de termen der beschouwde betrekking altijd in het eerste geval, dan zou de gewone oppervlakkige wijze van de behandeling der evenredigheden zoo als dezelve, bij STEENSTRA en anderen, voorkomen, voldoende zijn: maar daar dit nu het geval niet is, zal, na den afloop van een betoog, nog altijd de vraag overblijven: zal de betoogde stelling nu ook in het geval der onmeetbaarheid waar zijn?¹⁴

Steenstra’s meetkundeboek¹⁵ was in het Nederlands en van middelbaar niveau, in ieder geval lager dan de universiteit. Het boek was concurrent voor De Gelders boek. Het is opvallend dat De Gelder de naam van Van Swinden in zijn voorrede niet noemt als hij spreekt van eerder uitgebrachte meetkundeboeken.¹⁶ Of De Gelders boek inhoudelijk inderdaad superieur is zoals het citaat suggereert, gaan we onderzoeken in hoofdstuk 7.

6.4 Samengevat

Beide auteurs zijn er in geslaagd een overzicht te geven van het grootste gedeelte van de meetkunde zoals we die bij Euclides aantreffen met daarbij de nodige verdiepende stof die in Euclides’ tijd nog niet bekend was. Uit tabel 6.1 bleek dat sommige onderdelen van de *Elementen* niet door Van Swinden en De Gelder in hun meetkundeboeken behandeld worden. Over de andere onderwerpen vinden we bij hen juist veel meer informatie.

Startend bij het allereerste begin werken ze stap voor stap naar steeds moeilijker stellingen, waarbij het inzicht en doorzettingsvermogen van de lezer steeds meer geprikkeld wordt. Het boek van De Gelder bevat iets meer stof dan Van Swinden, maar dat neemt niet weg dat er ook in het boek van Van Swinden ruim voldoende informatie staat om een helder beeld te krijgen van de beginselen der meetkunde.

Van Swindens boek leest overzichtelijker doordat de meeste bewijzen beknopt gegeven worden. De rode draad van opeenvolgende stellingen in een boek is dan beter zichtbaar. Daarentegen helpt De Gelder je gericht op weg, als je even niet ziet hoe een bepaalde stelling bewezen kan worden. Regelmatig heb ik mij zelf aan De Gelders hand laten meevoeren om te zien hoe hij omging met een bepaald vraagstuk. Een zeer onderhoudende ervaring, moet ik u zeggen. Al staan er ook fouten in de boeken.

¹²Gelder (1810, p. xiv) en Gelder (1817, p. xvi).

¹³Gelder (1810, p. xv) en vrijwel gelijk in Gelder (1817, p. xvi-xvii). In hoofdstuk 7 zal dit citaat nog aan bod komen als daar de evenredigheden behandeld worden.

¹⁴Gelder (1810, p. xv) en vrijwel gelijk in Gelder (1817, p. xvii).

¹⁵Steenstra (1803).

¹⁶Van Swinden wordt überhaupt doodgezwegen in het meetkundeboek van De Gelder. Merk op dat Van Swinden De Gelder wel aanhaalt.

Het hierboven laatstgenoemde citaat van De Gelder toont duidelijk aan dat zijn boek past in de ontwikkeling naar meer exactheid of strengheid in de wiskunde, zoals beschreven in hoofdstuk 2. Hij is zichzelf daar ook van bewust en noemt een onnauwkeurige benadering bij Steenstra, die in zijn eigen boek - uiteraard - niet voor zal komen. Ook bij Van Swinden zagen we dat hij met zijn boek de bewijstrant 'der Ouden' weer nieuw leven in wil blazen.

Zes jaar na de verschijning van De Gelders eerste druk komt de tweede druk van Van Swinden uit. Er wordt op de titelpagina gemeld dat het de TWEEDE, VERBETERDE, EN VEEL VERMEERDERDE DRUK is. Een jaar later volgt De Gelders tweede druk. En wat schetste mijn verbazing daar aan te treffen: 'Tweede veel vermeerderde en verbeterde druk'. Zoiets kan geen toeval zijn. Het lijkt erop dat, zeven jaar na de contactbreuk, De Gelder het er niet bij laat zitten en uit frustratie een dusdanige analoge opmerking maakt.

Tot nu toe is duidelijk dat de boeken overeenkomsten bevatten en door de verschillen elkaar ook kunnen aanvullen. De boeken zelf kunnen uitstekend naast elkaar bestaan. Jammer dat de auteurs dat op een bepaald moment niet meer konden.

Euclides, <i>De Elementen</i>	J.H. van Swinden, <i>Grondbeginsels der Meetkunde</i>	J. de Gelder, <i>Beginnelsen der Meetkunst</i>
<u>Vlakke meetkunde</u> I grondbegrippen, driehoeken, oppervlakte, stelling van Pythagoras	I grondbegrippen, driehoeken II Inhoud van regtlijnige figuren, stelling van Pythagoras	I grondbegrippen, driehoeken III Inhoud van regtlijnige figuren, stelling van Pythagoras
II “geometrische algebra”	IVb reden van derzelve[r] [van figuren, WL] zijden en inhouden	IVa evenredige lijnen
III cirkel	V cirkel	V cirkel
IV in- en omgeschreven regelmatige veelhoeken	VI veelhoeken in en om de cirkel beschreven VII omtrek, inhoud cirkel	VI veelhoeken, quadratuur van cirkel
V grootheden en verhoudingen (inclusief irrationale)	III evenredigheid (inclusief irrationaal)	II evenredigheid, zowel onmeetbaar en meetbaar
VI verhouding van figuren, gelijkvormigheid	IVb gelijkvormigheid van figuren	IVb gelijkvormigheid
	VIII meten van hoek door cirkelbogen; koorde, sinussen, tangenten, secanten (goniometrie)	VIII goniometrie, sinus tafelen
	IX trigonometrie	IX trigonometrie
		VII werkstukken (opgaven)
<u>Getaltheorie</u> VII deelbaarheid, priemgetallen		
VIII meetkundige rijen		
IX meetkundige rijen, even en oneven, volmaakte getallen		
X <u>Speciale irrationale verhoudingen</u>		
<u>Stereometrie</u> XI elementaire stereometrie	X ligging en snijding der vlakken	X ligging en snijding van rechte lijnen en platte vlakken, veelvlakkige en lichamelijke hoeken
XII pyramide, kegel, bol	XI lichamelijke figuren die door vlakke oppervlakten bepaald zijn XII lichamelijke figuren die door kromme oppervlakten bepaald zijn	XI veelvlakkige lichamen XII cilinder, kegel, bol
XIII regelmatige veelvlakken		XV veelhoeksmetingen en veelvlakkige lichamen
		XIII drievlakshoeken (bol-driehoeksmeting)
		XIV transversalen

Tabel 6.1: Overzicht van de meetkundeboeken van Euclides, Van Swinden en De Gelder.

GRONDBEGINSELS
DER
MEETKUNDE,

DOOR

J. H. VAN SWINEN,

*Hoogleraar in de Wijsbegeerte, Wis-, Natuur- en Sterrekunde
te Amsterdam; Lid van het Koninklijk Nederlandsch Instituut
van Wetenschappen, Letterkunde en Kunsten, van de
Koninklijke Academie te Brusfel, en van verscheide
geleerde Genootschappen: Correspondent van de
Koninklijke Academie van Wetenschappen,
te Parijs.*

TWEDE, VERBETERDE, EN VEEL VERMEERDERDE DRUK.

TE AMSTERDAM, BIJ
PIETER DEN HENGSTEN ZOON,
MDCCCXVI.

Figuur 6.1: Titelblad van *Grondbeginsels der Meetkunde*, tweede druk 1816.

B E G I N S E L E N
 D E R
 M E E T K U N S T,

O N T W O R P E N,

NAAR HAREN TEGENWOORDIGEN
 STAAT VAN VORDERING;

O N D E R A N D E R E N,

I N H O U D E N D E:

*Eene volledige behandeling van de PLATTE- en BOLVORMIGE-
 (anders genaamd KLOOTSCHÉ) DRIEHOEKSMETINGEN,
 de VEELHOEKS- en VEELVLAKKIGE LICHAAMSME-
 TING (POLYGONOMETRIE en POLYEDROMETRIE,) benevens de THEORIE der TRANSVERSALEN,*

**MET EENE BEKNOPTAANWIJZING VAN DERZEL-
 VER GEBRUIK**

*In het LANDMETEN, de GEODESIE en de AARDRIJKS-
 en STERREKUNDE,*

A L L E S,

NAAR EENEN BEKNOPTEN EN ZUIVEREN BETOOG-
 TRANT, VOORGEDRAGEN

D O O R

J A C O B D E G E L D E R,

*voor dezen, Profesfor aan het Hôtel van de Pages van Z. M.
 den voormaligen Koning van Holland.*

Te AMSTERDAM, en in DEN HAAG,

B I J D E G E B R O E D E R S V A N C L E E F

E N

B. S C H E U R L E E R, J U N I O R.

1810.

Figuur 6.2: Titelblad van *Beginselen der Meetkunst*, eerste druk 1810.

476 XI. Boek: Over de lichamelijke figuren.

bewijs. Daar de gegeven *pyramiden* even hoog zijn, is het geval van *prismas* die uit de gemeide verdeling geboren worden, in beiden het zelfde.

Maar, de *prisma's*, in iedere verdeling, staan onderling als hunne grondvlakken (XVII. Voorstel, *Gov.* 3.), en die grondvlakken zijn als de grondvlakken der gegeven *pyramiden* (IV. 2.).

Dus staan de *prismas*, in iedere verdeling, als de grondvlakken der gegeven *pyramiden* (III. *Axioma* 5.).

Dus staan de sommen van alle de *prisma's* in iedere *pyramide* als de grondvlakken van die *pyramiden* (III. 12).

Maar, de *pyramiden* zijn de limiten van die sommen. (XXII. Voorstel).

Dus staan de *pyramiden* onderling in de zelfde redé als hare grondvlakken (VII. 6.).

XXIV. VOORSTEL.

Twee verschillende *pyramiden*, hoe ook genaamd, die de zelfde hoogte hebben, staan tot elkander als hare grondvlakken.

EUCL. XII. 6. — ST. X. 13. — L. G. VI. 18. *Cor.* 2.

BEREIDING. Men onderfelle dat die veelkantige *pyramiden* ieder in driehoekige verdeeld zijn, volgens het 2. *Gov.* van de XII. Bepaling.

BEWIS. Uit het XXII. Voorst.; en III. 8, 12. en *Axioms* 5.

GEVOLG.

Eene regthoekige *pyramide* is gelijkmatig met eene schiefhoekige, indien zij op een gelijkmatig grondvlak staat, en de perpendiculaire ribbe gelijk is aan de hoogte van de schiefhoekige *pyramide*.

XXV. VOORSTEL. Fig. 222.

Een driekantig *prisma* kan in drie driekantige gelijkmatige *pyramiden* vertoeld worden.

EUCL. XII. 7. — ST. X. 14. — L. G. VI. 22.

BEREIDING. Men trekke de diagonalen BF, BD en AD.

1°. Dan zullen de driehoeken FBE, FBD en EBD met Δ FED de *pyramide* DFBE maken.

2°. Laat een vlak gaan langs BD en AD: dit maakt met Δ ABC, Δ ACD en Δ BCD de *pyramide* ADBCA. 3°.

II. Afd.: Over de ligcham. met vlakke oppervlatten. 477

3°. De driehoeken ABD, AFD, BAF en FBD, maken de *pyramide* ABFDBA uit.

Bewijs. De 1. en 2. *pyramide* zijn onderling gelijk, uit het XXIII. Voorstel.

De 2 en 3. om dat zij beiden de helft van eene *pyramide* zijn, die de zelfde hoogte, doch het \square ACDFF tot grondvlak, en dus een dubbeld grondvlak, zoude hebben.

GEVOLG.

Eene driekantige *pyramide* is het derde gedeelte van een driekantig *prisma*, dat op het zelfde driehoekig grondvlak, en onder de zelfde hoogte staat.

XXVI. VOORSTEL.

Eene *pyramide*, welke ook haar grondvlak zijn moge, is het derde gedeelte van het *prisma* dat op het zelfde grondvlak en onder de zelfde hoogte staat.

Bewijs. Uit het 2. *Gov.* van de XII. Bepaling en het XXV. Voorstel.

I. GEVOLG.

Hieruit, en uit het XVI. Voorstel, blijkt, dat men den inhoud van *pyramiden* tot dien van *prisma's*, en daar door tot dien van een *parallelepipedum* herleidt. Eene *pyramide* namelijk is gelijkmatig aan het derde gedeelte van een regthoekig *parallelepipedum*, dat de zelfde hoogte heeft, en waarvan het grondvlak, dat een regthoekig parallelogram is, gelijkmatig is aan den veelhoek die het grondvlak is van de *pyramide*.

II. GEVOLG.

Hieruit, en uit het 4. *Gov.* van het XII. Voorstel, volgt verder, in welken zin men het gezegde van velen verstaan moet, dat de inhoud van eene *pyramide* gelijk is aan het grondvlak door het derde gedeelte van de hoogte vermenigvuldigd.

ST. X. 15. — L. G. VI. 23.

III. GEVOLG.

Verfchillende *pyramiden* staan dus tot elkander in fa-
men- H h 3

Figuur 6.3: Twee pagina's uit *Grondbeginsels der Meetkunde* (1816).

Gebuikliche zijde. Laat op AB het vierkant $ABDE$, op BC het vierkant $BCFG$ en op AC het vierkant $ACHI$ worden beschreven: dan moet men betoogen: dat de inhoud van het vierkant $ACHI$ gelijk is aan de som van de inhoudes der vierkanten $ABDE$ en $BCFG$; hetgeen men (zie IX. Bep.) aldus uitdrukt: $AC^2 = AB^2 + BC^2$.
 Betoog. Men late, uit het hoekpunt B van den rechten hoek, eene lijn BK , loodrecht op de hypothenusa, vallen, en verlengde dezelve tot in L , dan is hoek $CKL = R$, en hoek $CAI = R$ (onderst.); vervolgens is de lijn BKL (XXII. Stell. I. B.) evenwijdig aan AI , en (XXIX. St. I. B. en I. en V. Bep.) evenwijdig aan CH ; die lijn LK doet derhalve (III. Bep. en onderst.) het vierkant $ACHI$ in twee rechthoeken, $AKLI$ en $CKLI$. Nu zeg ik: dat

$$\begin{aligned} 1^\circ \text{ rechth. } AKLI &= \text{vierk. } ABDE \\ 2^\circ \text{ rechth. } CKLI &= \text{vierk. } BCFG \end{aligned}$$

zal zijn.
 1°. Om het eerste te betoogen, zoo trekke men de lijnen CE en BI ; dan oudtan er twee stomphoekige driehoeken BAI en EAC , op welke men hier in het bijzonder moet letten. Deze stomphoekige driehoeken zijn gelijk- en gelijkvormig; want
 hoek $CAI =$ hoek $BAE = R$, II. St. I. B. en onderst.
 tel bij hoek $BAC =$ hoek BAC
 dan wordt, hoek $BAI =$ hoek CAE , VIII. Ax.
 verder is $AB = AE$ } onderst. en V. Bep.
 en $AI = AC$ }
 derhalve drieh. $BAI =$ drieh. ACE , X. Stell. I. B.
 en 2. drieh. $BAI =$ 2. drieh. ACE , XIII. Ax

De driehoek ABI en het rechthoekige parallelogram $AILK$ hebben dezelfde basis AI , en het toppunt B van den driehoek ABI ligt in het verlengde van de bovenzijde LK van den rechthoek; daarom is 2. drieh. $BAI =$ rechth. $AILK$, VIII. Stell.
 maar 2. drieh. $BAI =$ 2. drieh. ACE , benezen.
 derhalve rechth. $AILK =$ 2. drieh. ACE , V. Ax.

Neg kan de driehoek ACE , en het rechthoekig gelijkszijdige parallelogram of vierkant $ABDE$ worden aangemerkt, als staande, op dezelfde basis AE ; terwijl het toppunt C van den driehoek ACE in het verlengde van de bovenzijde BD des vierkants valt; daarom is 2. drieh. $ACE =$ vierk. $ABDE$, VIII. Stell.
 derhalve is rechth. $AILK =$ vierk. $ABDE$, V. Ax.

2°. Wanneer men de lijnen AF en BH trekt; dan zal, op dezelfde wijze, worden bewezen: dat rechth. $CKLI =$ vierk. $BCFG$ is; welk betoog uit de figur op te maken, wij aan den Leerling, tot eigene oefening, overlaten.

3°. Nu is het geteelde klaarlijk; want men telde de vergelijkingen rechth. $AKLI =$ vierk. $ABDE$
 rechth. $CKLI =$ vierk. $BCFG$
 dan zal, en uit de figur, en uit het IV en VIII. Ax. volgen: dat vierk.

vierk. $ACHI =$ vierk. $ABDE +$ vierk. $BCFG$
 of $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (1)
 wil menen con.
 1°. Betoog. Fig. 93. Omdat rechth. $AKLI = AC \times AK$, en rechth. $CKLI = AC \times CK$ (IX. Bep.) is; zoo hebben wij nog deze twee vergelijkingen:

$$AC \times AK = AB^2 \dots (2) \text{ en } AC \times CK = BC^2 \dots (3)$$

dat wil zeggen: Het vierkant, op elke rechthoekszijde van een rechthoek driehoek, is gelijk aan den rechthoek, onder de hypothenusa en het stuk, dat van dezelve wordt afgesneden, door de loodlijn, die, uit het hoekpunt van den rechten hoek, op dezelve valt, en het welk in sijn die loodlijn en de hypothenusa gelegen is.

§. 253 I. Byvoegsel. Fig. 93. Men kan, uit dezelfde figur, bewijzen: dat het vierkant op de loodlijn (BK), die, uit het hoekpunt (B) van den rechten hoek eens rechthoekigen driehoeks, op de hypothenusa valt, gelijk is aan den rechthoek, onder de deelen (AK en CK), in welke zij dezelve verdeelt; dat is, $BK^2 = AK \times CK$.

Want die loodlijn verdeelt den rechthoekigen driehoek ABC in twee andere rechthoekige driehoeken, ABK en BCK ; derhalve is, volgens het betoogde:

$$\begin{aligned} AB^2 &= AK^2 + BK^2 \\ BC^2 &= CK^2 + BK^2 \end{aligned}$$

Men telde deze twee vergelijkingen bij elkander; dan zal men vinden:

$$AB^2 + BC^2 = AK^2 + CK^2 + 2BK^2, \text{ VIII. Ax.}$$

derhalve is $AC^2 = AK^2 + CK^2 + 2BK^2$, V. Ax.
 nu is $AC^2 = AK^2 + CK^2 + 2AK \times CK$, I. Inststf.
 dus volgt $AK^2 + CK^2 + 2BK^2 = AK^2 + CK^2 + 2AK \times CK$, V. Ax.
 welk af $AK^2 + CK^2 \dots = AK^2 + CK^2$
 dan houdt men over $2BK^2 = 2AK \times CK$, IX. Ax.
 of eindelijk, $BK^2 = AK \times CK$, XIII. Ax.

§. 254. II. Byvoegsel. Fig. 93. Nog is de rechthoek, onder de rechthoekszijden (AB en BC), gelijk aan den rechthoek, onder de hypothenusa (AC) en de loodlijn (BK), die, uit het hoekpunt (B) van den rechten hoek, op dezelve valt; dat is, $AB \times BC = AC \times BK$.

Want, volgens het Gevolg van de VIII. Stell. is:
 2. drieh. $ABC = AB \times BC$
 en 2. drieh. $ABC = AC \times BK$
 derhalve is $AB \times BC = AC \times BK$.

§. 255. I. Aanmerking. Fig. 94. De eilenvooppunten van den rechthoekigen driehoek ABC , in de scilling en de byvoegfels betoogd, zijn, in

Hoofdstuk 7

De inhoud van de meetkundeboeken nader bekeken en vergeleken

De beide meetkundeboeken van Jan Hendrik van Swinden en Jacob de Gelder geven een overzicht van de meetkunde zoals die behandeld werd door Euclides, Archimedes en latere auteurs. Dit is globaal omschreven in hoofdstuk 6. In dit hoofdstuk gaan we kijken naar overeenkomsten en verschillen in de behandeling van een aantal specifieke onderwerpen en stellingen. We zullen ons richten op de vraag: hoe wordt de stelling of theorie geformuleerd en welk bewijs wordt gegeven? Ook kijken we naar de onderwerpen die vooraf gaan aan de stelling.

Werkwijze

Hieronder geef ik eerst een korte aanvulling op de werkwijze beschreven in hoofdstuk 6.

Behalve een globale vergelijking te maken, is het ook relevant de boeken naast elkaar te zetten en zo de manier van bewijzen en benadering van de stof te zien. Het was binnen het tijdsbestek van dit onderzoek niet mogelijk de twee boeken stelling na stelling, hoofdstuk na hoofdstuk, met elkaar te vergelijken. Na het doorwerken van de meetkundeboeken bleef er een aantal stellingen over waar ik nog niet van de juistheid van de stelling zelf of van het gegeven bewijs overtuigd was en waarbij ik daarom daarna langer stil gestaan heb. Deze problemen hebben als uitgangspunt gediend om onderwerpen te selecteren om nader met elkaar te gaan vergelijken. Ik heb daarbij gekozen voor de stelling van Pythagoras, de theorie van evenredigheid en de inhoudsformule voor een al dan niet afgeknotte pyramide. In heb geprobeerd onderwerpen te kiezen waar ook daadwerkelijk verschillen zichtbaar zijn tussen de auteurs. Daarnaast was er het streven om een spreiding over het hele spectrum van de behandelde meetkunde aan te brengen, voor zover als mogelijk. De stelling van Pythagoras, nog steeds relevant in het middelbare wiskundeonderwijs, is een prachtig voorbeeld van vlakke meetkunde. Evenredigheid blonk uit door de verschillende benaderingen van de auteurs. De (afgeknotte) pyramide is een voorbeeld van een veelvlak. En ook hier is sprake van een verschillende benadering.

Voor dit onderzoek heb ik gebruik gemaakt van de eerste en tweede druk van Van Swinden, 1790 resp. 1816, af te korten als SI en SII. Daartegenover de eerste en tweede druk van De Gelder, 1810 resp. 1817, te schrijven als GI en GII. Een enkele keer is ook De Gelders derde druk (inderdaad, GIII) uit 1829 gebruikt.

Iedere paragraaf sluit af met een kopje ‘Vergelijking’, waarin een samenvatting wordt gegeven van de overeenkomsten en verschillen die aan het licht zijn gekomen bij de bespreking van het bewuste onderwerp. Aan het einde van dit hoofdstuk volgt een stuk dat de vergelijkingen met elkaar

combineert. Er bleek over evenredigheid zoveel te zeggen te zijn, dat voor de overzichtelijkheid dit onderwerp verdeeld is over twee paragrafen. De tweede kan gezien worden als rechtstreeks vervolg op de eerste.

7.1 De stelling van Pythagoras

In deze paragraaf bekijken we de behandeling van de stelling van Pythagoras bij Van Swinden en De Gelder. In SI luidt deze

In alle rechthoekige driehoeken is het vierkant van de schuinsche zyde of hypothenusa gelyk aan de som der vierkanten van de beide overige zyden.¹

Bij GI vinden we

Het vierkant, op de hypothenusa, of schuinsche zijde, van eenen regthoekigen driehoek beschreven, is gelijk aan de som van de vierkanten, welke op deszelfs regthoekszyden beschreven zijn.²

Merk op dat bij Van Swinden ook zijdeaanduidingen voorkomen, die verwijzen naar overeenkomstige zijden in de bijbehorende afbeelding. Deze heb ik hier weggelaten. Ondanks het verschil in meervoud / enkelvoud, is het duidelijk dat beide stellingen hetzelfde betogen.

7.1.1 Wat er vooraf ging

Van Swinden

Bij SI vinden we de stelling van Pythagoras als zevende Voorstel van het tweede Boek ‘Over den inhoud der regtlijnige figuren’. Dit boek begint met de ‘bepaling’ (definitie) van de hoogte van een figuur en de opmerking dat een rechthoek bepaald is zodra de lengtes van twee lijnstukken gegeven zijn. Eerst volgen dan stellingen die gelijke inhoud voor parallellogrammen en driehoeken behandelen³ en daarna stellingen waarbij een aantal lijnstukken gebruikt wordt om rechthoeken en vierkanten mee te vormen die gelijke inhoud (oppervlakte) hebben.⁴ De bewijzen zijn strikt meetkundig. Dan volgt de stelling van Pythagoras. Hoewel deze stelling ook over oppervlaktes van driehoeken en vierkanten gaat, komt de overgang vrij plotseling. Deze stelling is veelomvattender dan de relatief kleine stellingen er voor.

Bij SII is de inhoud van het tweede boek duidelijk aangepast. Was de stelling van Pythagoras eerst het zevende voorstel, nu is dat nummer zestien geworden. De bepalingen (definities) zijn uitgebreid, waardoor een nauwkeuriger opbouw ontstaat. Er wordt nu apart bij stil gestaan of twee figuren alleen gelijk zijn qua oppervlakte of ook ‘echt’ gelijk zijn, dat wil zeggen dat ze op elkaar geplaatst kunnen worden en dan niet van elkaar te onderscheiden zijn (in moderne termen dus ‘congruent’). In beide gevallen kun je immers spreken van ‘gelijke figuren’, het ligt er maar aan wat je er onder verstaat. Voor het eerste geval introduceert Van Swinden het teken⁵ \propto en noemt de figuren dan *gelijkhaltig*, voor het tweede gebruikt hij het reguliere $=$ -teken. Behalve de rechthoek, wordt in de tweede druk ook besproken wat een *regthoekig trapezium* is. De stellingen

¹Swinden (1790, p. 43, Boek II, Voorstel VII).

²Gelder (1810, p. 69, Boek III, Stelling XVI).

³Namelijk, als de hoogtes gelijk zijn en de figuren tussen twee evenwijdige lijnen, parallel aan de basis, bevat zijn.

⁴Bijvoorbeeld: Indien eene lijn (GE) naar welgevallen in twee deelen (GF , FE), het zy gelyke, het zy ongelyke, gedeeld wordt: is het vierkant (AE) op de geheele lyn, de som van de vierkanten (AI , IE) op ieder deel, en van den dubbelen rechthoek (IG en IC) op beide de deelen. (Swinden, 1790, p. 39-40, Boek II, Voorstel II). En: Indien eene lyn (AC) in twee deele (AB , BC) naar welgevallen gesneeden is, en ‘er een der deelen (BC) aangevoegd wordt, om met haar ééne lyn uit te maaken: zal het vierkant (KD) op die samengestelde lyn (AD) gelyk zyn aan viermaal den rechthoek begrepen door de gegeven lyn (AC) en het gezegde deel (BC), te samen met het vierkant van het ander deel (AB). (Swinden, 1790, p. 41, Boek II, Voortstel IV).

⁵Van Swinden gebruikt het teken met de opening aan de linkerkant. De drukletters in die tijd waren misschien eenvoudig om te keren, een computer commando niet. We zullen het met dit teken doen, dit verslag.

over lijnstukken die verdeeld worden en waar gelijke sommen van rechthoeken en vierkanten bij horen, zijn aangevuld. Bovendien, en dat is nog veel belangrijker, geeft hij bij de eerste van deze stellingen (namelijk Voorstel III in SII) de bijbehorende algebraïsche formule en merkt op dat de stelling zelf de *Geometrische uitdrukking* van die algebraïsche formule is.⁶ De stellingen die volgen (IV tot en met IX) worden steeds twee keer bewezen: traditioneel (meetkundig) en algebraïsch. Van de laatste van deze serie stellingen (voorstel X) wordt de algebraïsche formule alleen gegeven (er wordt niet mee bewezen). Na stellingen over gelijke inhouden bij parallellogrammen, driehoeken en trapezia, volgt de stelling van Pythagoras.

De Gelder

De Gelder behandelt de stelling van Pythagoras in het derde boek ‘Over de Parallelogrammen, Regthoeken en Vierkanten, de Inhouden der regtlijnige Figuren, en het Theorema PYTHAGORAS’. In zowel GI als GII is het de zestiende stelling. Eerst worden bepalingen gegeven voor (scheefhoekig) parallellogram, rechthoek en vierkant en wordt ingegaan op de vraag met welke informatie deze uniek bepaald zijn. Er wordt betoogd dat parallellogrammen zijn te verdelen in gelijke (kleinere) parallellogrammen. Inhoud en hoogte van parallellogram en driehoek worden gedefinieerd, waarna een aantal stellingen volgt over wanneer parallellogrammen, resp. driehoeken aan elkaar gelijk zijn. Het onderscheid tussen gelijk qua oppervlakte en (ook) gelijk qua vorm, maakt De Gelder door te spreken van ‘gelijk’ en ‘gelijkvormig’. Twee figuren zijn ‘gelijk’ als de inhouden gelijk zijn (vergelijk Van Swindens ‘gelijkhaltig’). Twee figuren zijn ‘gelijkvormig’, als op een schaalfactor na, de figuren dezelfde vorm hebben. Als ze precies gelijk zijn en dus op elkaar gelegd kunnen worden, spreekt De Gelder van ‘gelijk en gelijkvormig’ (en Van Swinden gebruikt het =-teken, oftewel hij vindt ze ‘gelijk’).⁷

In boek twee zijn evenredigheden al aan bod geweest. Voortbordurend op deze kennis worden stellingen behandeld over de verhoudingen tussen oppervlaktes en lijnstukken van verschillende figuren.⁸ Er worden slechts twee stellingen genoemd (als lemma) die gaan over een verdeeld lijnstuk en het vormen van vierkanten en rechthoeken daarbij. Het gaat om stellingen die als algebraïsche aanduiding hebben: $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, $a^2 + 2(a + b)b = (a + b)^2 + b^2$ en $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. Het bewijs dat De Gelder geeft is strikt meetkundig. Hij geeft ten slotte de algebraïsche uitdrukking, maar dit is, in zijn weergave, een schijnbaar gevolg van het meetkundig bewijs; de algebraïsche uitdrukking is zeker geen bewijs op zich. Hierna volgt de stelling van Pythagoras.

7.1.2 Het bewijs

We kijken nu naar het bewijs dat Van Swinden en De Gelder geven voor de stelling. De constructie en logische stappen van de auteurs worden strikt gevolgd, de notatie en verbindende tekst is van mij.

⁶De twee stellingen van voetnoot 4 hebben als algebraïsche formule: $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ en $(a + 2b)^2 = 4(a + b)b + a^2$.

⁷Van Swinden maakt uiteraard ook gebruik van het begrip ‘gelijkvormig’ op de normale manier, net als De Gelder dat doet. We kunnen het volgende overzicht opstellen.

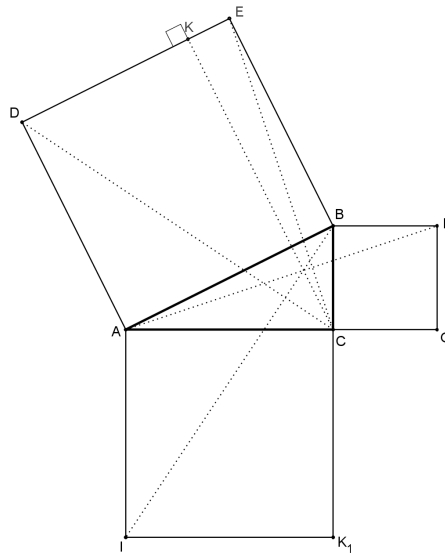
	Van Swinden	De Gelder
Figuren zijn gelijk qua inhoud	gelijkhaltig	gelijk
Figuren zijn gelijk qua vorm	gelijkvormig	gelijkvormig
Figuren zijn gelijk qua inhoud én vorm, ze passen exact op elkaar	gelijk	gelijk en gelijkvormig

⁸Voorbeelden. De inhouden der parallellogrammen, die gelijke hoogte hebben, staan tot elkander in dezelfde reden als hunne bases. (Gelder, 1810, p. 64. Boek III, Stelling XIII). De inhouden van twee driehoeken staan tot elkander, als hunne bases, indien de hoogten gelijk zijn; of als hunne hoogten, wanneer de bases gelijk zijn; of, beide ongelijk zijnde, in de zamengestelde reden van hunne bases en hoogten. (Gelder, 1810, p. 65. Boek III, Stelling XIV). [Zijdeaanuiding weggelaten]

Van Swinden

Van Swinden bewijst de stelling van Pythagoras aan de hand van de constructie in figuur 7.1. Deze afbeelding is afkomstig uit SI en wordt als volgt gemaakt. Neem een willekeurige driehoek ABC , met hoek C recht. Vorm buiten de driehoek de vierkanten AIK_1C , $BCGF$ en $ABED$. Trek het lijnstuk CK evenwijdig aan BE of DA , met K op DE . Trek de lijnstukken CD , CE , AF en BI .

Merk op dat Van Swinden twee keer een punt gebruikt dat hij K noemt: in het vierkant onder zijde AC en als punt op zijde DE . Ik heb zelf de eerste K_1 genoemd, om verdere verwarring te voorkomen.



Figuur 7.1: Van Swindens bewijs voor Pythagoras.

Het bewijs gaat in een paar stappen. Als eerste wordt bewezen dat $\triangle BAI$ en $\triangle DAC$ gelijk zijn.⁹ Hetzelfde geldt voor $\triangle ABF$ en $\triangle EBC$. Vervolgens moet bewezen worden dat rechthoek AK gelijk is aan vierkant IC en dat hetzelfde geldt voor rechthoek KB en vierkant BG . Dan volgt de conclusie.

$\angle BAI = \angle DAC$, want beide bestaan uit een rechte hoek plus $\angle BAC$. Ook is $AC = AI$ en $AB = AD$. We concluderen dat $\triangle BAI = \triangle DAC$. Op dezelfde manier volgt dat $\triangle ABF = \triangle EBC$.

$\triangle ABI$ is gelijk aan de halve oppervlakte van vierkant IC , want de driehoeken ABI en ACI zijn gelijk (zelfde basis en hoogte) en driehoek ACI is de helft van vierkant IC .

$\triangle DAC$ is gelijk aan de halve oppervlakte van rechthoek AK (redenering als boven).

$\triangle ABI = \triangle DAC$ (zie boven).

Conclusie: de oppervlakte van vierkant IC is gelijk aan de oppervlakte van rechthoek AK .

Op dezelfde manier vinden we dat de oppervlakte van vierkant BG gelijk is aan de oppervlakte van rechthoek KB .

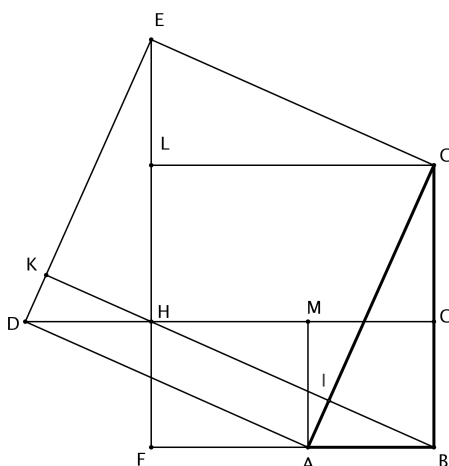
Het is duidelijk dat rechthoek KB en AK samen vierkant AE vormen. Dus zijn de vierkanten IC en BG samen ook gelijk aan vierkant AE . En dus is het vierkant op de schuine zijde gelijk aan de som van de vierkanten op de beide overige zijden. \square

⁹Dit bewijs komt uit de eerste druk en Van Swinden maakt dan nog geen onderscheid tussen 'gelijkhaltig' en 'gelijk'. Dat gebeurt dus nu in de weergave van zijn bewijs ook niet.

Het bewijs in SII gaat qua structuur precies hetzelfde. Wel is het plaatje en de labeling aangepast. Er komen nu in elk geval geen dubbele letters meer in voor. Ook is het begrip ‘gelijkhaltig’ in het bewijs verwerkt, door het toepassen van het teken \propto voor figuren met gelijke oppervlakte.

De Gelder

Voor het bewijs van De Gelder, zie figuur 7.2. Ga uit van driehoek ABC met $\angle B$ recht. Teken op de schuine zijde AC het vierkant $ACED$. Trek door E het lijnstuk EF evenwijdig aan BC [waarbij F op (het verlengde van) AB ligt, WL] en trek door D het lijnstuk DG evenwijdig aan AB [waarbij G op (het verlengde van) lijnstuk BC ligt]. Noem H het snijpunt van de lijnstukken EF en DG . Omdat DE evenwijdig is aan AC geldt dat $\angle DEH = \angle ACB$ en $\angle EDH = \angle CAB$. Omdat bovendien $DE = AC$ kunnen we concluderen dat $\triangle DEH$ gelijk en gelijkvormig is met $\triangle ACB$. Daar volgt uit dat $EH = BC$ en $DH = AB$.



Figuur 7.2: De Gelders bewijs voor Pythagoras.

Trek door BH een lijn. Noem I het snijpunt met AC en K het snijpunt met DE . Dit lijnstuk BK is evenwijdig met EC , want BC en EH zijn van gelijke lengte; $BCEH$ is dus een parallelogram. De vierhoeken $AIKD$ en $ICEK$ zijn derhalve rechthoeken. Dus staat BI loodrecht op AC .

Trek nu CL evenwijdig aan AB [met L op EH]. Dan is $BCLF$ een rechthoek. Sterker nog, $BCLF$ is een vierkant, want $\triangle CEL$ en $\triangle CAB$ hebben gelijke hypotenusa en $\angle ECL = \angle ACB$.¹⁰ Dus $\triangle ECL$ is gelijk en gelijkvormig met $\triangle ACB$, dus $LC = BC$, oftewel $FBCL$ is een vierkant.

Trek nu AM evenwijdig aan BC en dus ook aan EF . Dan geldt dat $\angle CEL = \angle DAM$ (hoeken tussen dezelfde evenwijdige lijnen), en $\angle ECL = \angle ADM$.¹¹

Omdat $AD = EC = AC$ zien we dat $\triangle ADM$ en $\triangle ELC$ gelijk en gelijkvormig zijn. Dus geldt ook dat $AM = EL = AB$. Dus is de rechthoek $ABGM$ gelijkzijdig, oftewel het vierkant op AB .

We kunnen nu conclusies trekken. We gebruiken dat twee parallelogrammen met gelijke bases tussen dezelfde evenwijdige lijnen gelijke oppervlakte hebben.

1. Omdat $DG \parallel AB$ (eis) is $ABGM = ABHD$. Omdat $BK \parallel AD$, is $ABHD = AIKD$. Dit samenvoegend geeft: $ABGM = AIKD$.
2. Omdat $EF \parallel BC$ (eis) is $BCLF = BCEH$. Bovendien $BCEH = CIKE$. Samenvoegen geeft: $BCLF = CIKE$.

¹⁰Dit kan eenvoudig gezien worden. $\angle ECA = \angle LCB = \text{recht}$. Trek van beide $\angle ACL$ af (die zit in beide hoeken), en wat dan overblijft is hetzelfde. Oftewel: $\angle ECL = \angle ACB$.

¹¹ DG is evenwijdig aan CL omdat deze elk afzonderlijk evenwijdig zijn aan AB en dus ook aan elkaar evenwijdig.

3. Som $ABGM$ en $BCLF$ is dus de som $AIKD$ en $CIKE$ en dat is het vierkant $ACED$. Dus geldt $ABGM + BCLF = ACED$, dat is $AC^2 = AB^2 + BC^2$. \square

In GII vinden we hetzelfde relatief lange bewijs. Opvallend is het dat in GIII het bewijs aangepast is. De Gelder volgt nu de aanpak van Van Swinden, gebruikt ook een overeenkomstige afbeelding. De volgorde en hoeveelheid stapjes die hij zet en de manier van opschrijven is uiteraard wel van De Gelder zelf.

7.1.3 Vergelijking

We zien dat de beide auteurs een bewijs geven voor de stelling van Pythagoras dat overeenkomstige elementen bevat. De redeneringen lijken veel op elkaar; er zijn alleen detailverschillen. Allebei verdelen ze het schuine vierkant in twee rechthoeken die respectievelijk gelijk zijn aan de overige twee vierkanten. De vierkanten op hun beurt komen weer voort uit driehoeken of parrallellogrammen die langs een parallelle zijde verschoven zijn. Van Swinden gebruikt voor zijn bewijs de voor ons tegenwoordig vrij bekende methode, die ook gebruikt wordt door Euclides. De Gelder gebruikt precies deze zelfde elementen. Wel moet hij meer moeite doen om tot het resultaat te komen. Dat maakt zijn bewijs op het eerste gezicht minder doorzichtig dan dat van zijn collega. Dit komt met name door de gebruikte figuur: de ‘compactheid’ van de afbeelding van De Gelder is tevens zijn zwakte. De vierkanten die bij De Gelder allemaal over elkaar heen liggen, zijn bij Van Swinden juist rondom de driehoek getekend. De figuur van Van Swinden is zo eenvoudiger te doorzien.

Van Swinden legt in het voorgaande van de stelling meer nadruk op de meetkundige constructies die met bijbehorende algebraïsche formules beschreven kunnen worden. De Gelder kiest er juist voor om vóór de behandeling van Pythagoras meer te focussen op de verschillende meetkundige figuren met hun inhoudsbepaling.

Het voordeel van Van Swindens bewijs is de overzichtelijkheid. De constructie is helder en iedere stap volgt makkelijk logisch uit de voorgaande. Op zich is dit na bestudering ook voor De Gelders bewijs te zeggen, maar het vergt een wat actievere concentratie van de student of lezer. Wellicht dat De Gelder dat bewust zo heeft gedaan.

Voor dit onderwerp heb ik ook gekeken naar GIII. Wat schetste mijn verbazing daar te zien dat De Gelder overgestapt is naar de bewijsmethode van Van Swinden. Misschien raakte hij overtuigd van de eenvoud daarvan. Desalniettemin blijft de stelling van Pythagoras overeind en zal dat blijven doen, ongeacht de gebruikte redenering.

7.2 Evenredigheid

Van Swinden en De Gelder besteden veel aandacht aan het begrip ‘evenredigheid’. In de *Elementen* van Euclides, het meetkundeboek waar beide auteurs zich op baseren, worden lengtes van zijden als verhoudingen tot elkaar uitgedrukt. Dat is wezenlijk anders dan dat wij met lineaal bepaalde lengtes afmeten. In plaats van te zeggen: zijde $AB = 3$ cm en $BC = 6$ cm, werd verteld dat zijde AB twee maal in BC genomen kan worden. Of in plaats van $AB = 32$ cm en $BC = 22$ cm, werd gezegd dat 11 maal AB genomen gelijk is aan 16 maal BC . In de boeken van De Gelder en Van Swinden vinden we een combinatie van benaderingen. De evenredigheden spelen een niet mis te verstane rol, terwijl we ook getallenvoorbeelden aantreffen.

Het werken met evenredigheden brengt een probleem met zich mee. Te spreken van de verhouding van twee lijnstukken is mogelijk. Maar hoe verhoudt een lijnstuk zich tot een oppervlak? En bestaan er wel altijd gehele getallen, om de evenredigheden mee aan te duiden? Deze en meer vragen komen aan bod in deze paragraaf.

Het zal blijken dat Van Swinden en De Gelder allebei een verschillende definitie van evenredigheid geven, die tevens beide verschillend van die van Euclides zijn. Daarom laten we eerst de definitie van Euclides zien, waarna Van Swinden en De Gelder volgen. Daarna concentreren we ons op een stelling uit de evenredigheidstheorie, waarbij we kijken naar het bewijs van de drie verschillende auteurs en de eventuele problemen die optreden.

7.2.1 Evenredigheid - een verkenning

Euclides' evenredigheid

Dijksterhuis schrijft ‘Men zegt inderdaad niet te veel, wanneer men deze theorie [die van de evenredigheid, WL], die een geestelijke schepping van den allereersten rang vormt, tot de meest indrukwekkende monumenten van de Grieksche cultuur rekent en er is alle aanleiding toe, om de uitvoerige en exacte uiteenzetting, die Euclides in het vijfde Boek van zijn *Elementen* aan haar wijdt, aandachtig te bestudeeren.’¹² Dit advies ter harte nemend, zullen we nu eerst kort stilstaan bij de behandeling van de evenredigheid door Euclides.

Euclides leert ons in Boek V dat als er twee grootheden zijn, (Bepaling I) de kleinste een deel van de grootste is, als die de grootste meet (modern gezegd: voor twee grootheden A en B is A een deel van B als $n \times A = B$, voor zekere n geheel); en (Bepaling II) de grootste een veelvoud van de kleinste heet, als deze wordt gemeten door de kleinste (de grootheid B uit bovenstaand voorbeeld). Euclides vervolgt met de definitie van *Reden* als (Bepaling III) een ‘zekere betrekking in grootte tusschen twee gelijksoortige grootheden’,¹³ waarna in Bepaling IV min of meer volgt dat gelijksoortige grootheden, die grootheden zijn die vermenigvuldigd elkaar kunnen overtreffen.¹⁴ De vijfde Definitie geeft aan wanneer grootheden in dezelfde reden zijn, waarbij Euclides er direct op laat volgen dat deze grootheden dan *evenredig* genoemd worden.

Men zegt, dat grootheden in dezelfde reden zijn, de eerste tot de tweede en de derde tot de vierde, wanneer willekeurige zelfde veelvouden van de eerste en de derde tegelijk grooter zijn dan, gelijk aan of kleiner dan willekeurige zelfde veelvouden van de tweede en de vierde, in overeenkomstige volgorde genomen.¹⁵

Deze definitie behoeft wellicht enige uitleg. In moderne notatie staat er het volgende. Als vier grootheden A, B, C, D de volgende eigenschap hebben:

$$\begin{aligned} \text{als } mA > nB & \quad \text{dan ook} \quad mC > nD \\ \text{als } mA = nB & \quad \text{dan ook} \quad mC = nD \\ \text{als } mA < nB & \quad \text{dan ook} \quad mC < nD \end{aligned}$$

voor alle willekeurig gekozen natuurlijke getallen m, n , dan heten A, B, C, D in *dezelfde reden*.

Tegenwoordig noteren we dan

$$A : B = C : D.$$

Omdat deze definitie puur gebaseerd is op het begrip ‘grootheden’, werkt deze voor getallen (een van de mogelijke grootheden), maar ook voor andere grootheden. Zo is het ook mogelijk met deze definitie irrationale verhoudingen te beschrijven. Dit speelt een rol in paragraaf 7.2.2.

We zullen nu zien hoe Van Swinden en De Gelder deze definitie interpreteren en combineren met hun eigen opvattingen.

Van Swindens evenredigheid

De auteurs doen hun best de theorie rondom de evenredigheden zo nauwkeurig mogelijk op te bouwen. De eerste vier bepalingen van Euclides worden door hen, al dan niet uitgebreid en soms in hun eigen terminologie, gegeven.

¹²Dijksterhuis (1930, p. 56).

¹³Dijksterhuis (1930, p. 57).

¹⁴De uitdrukking ‘min of meer’ slaat op het feit dat Euclides niet het woord ‘gelijksoortig’ noemt in zijn vierde Bepaling. Dijksterhuis merkt op: ‘Daar Definitie III alleen van reden spreekt bij gelijksoortige grootheden, is het blijkbaar de bedoeling van Definitie IV vast te leggen, wat gelijksoortige grootheden zijn en dus uit te spreken (hoewel het er niet staat), dat twee grootheden dan en alleen dan een reden tot elkaar hebben, wanneer bij elk van haar een getal is aan te wijzen, zoodat haar door dat getal aangewezen veelvoud grooter is dan de andere. (...) Een lengte en een tijd zijn dus b.v. geen gelijksoortige grootheden en men kan dus ook niet van een verhouding van een lengte tot een tijd spreken.’ (Dijksterhuis, 1930, p. 58) Zie voor een uitgebreidere bespreking van deze situatie, de geciteerde pagina in Dijksterhuis.

¹⁵Euclides, *Elementen*, Boek V, Propositie V. Vertaling van Dijksterhuis (1930, p. 59).

Als eerste komt bij Van Swinden aan bod of twee getallen wel een bepaalde verhouding tot elkaar hebben. Van Swinden begint zijn derde Boek ‘Over de evenreedigheid’ met

Algemeene bepalingen.

I. Wanneer eene grootheid, verscheiden maalen genomen, of herhaald, of, in andere woorden, wanneer eene grootheid, door eenig getal vermenigvuldigd zijnde, eene andere grootheid evenaart: is zij een *effen gedeelte*, een *opgaand deel*, (*pars aliquota*) van die tweede grootheid: Doch indien zy eens of meermalen genomen dezelve niet evenaart, maar kleiner blyft, en nog eenemaal meerder genomen grooter wordt, is zy ’er een *oneffen gedeelte* van (*pars aliquanta*).

II. Eene grootheid wordt een *veelvoud* of *vermeenigvuldigde* (*multiplex*) van eene andere genoemd, als deeze de eerstgemelde *meet*, of een *effen gedeelte* daar van is: en dat *effen gedeelte* wordt eene *ondervermeenigvuldigde*, een *opgaand deel* (*submultiplex*) van de andere grootheid genoemd.¹⁶

Een belangrijk begrip is de zogenaamde *gelijkssoortige grootheid*.

(Algemeene bepalingen.)

V. Men noemt *gelijkssoortige* grootheden die, welke zodanig gesteld zyn dat eene vermenigvuldigde van de kleinste de grootste kan evenaaren, of overtreffen: of wel, grootheden die uit de zelfde soort van eenheden bestaan.¹⁷

Vervolgens wordt uitgelegd wat bedoeld wordt met meetbare of rationale grootheden (zij hebben een gemene maat) versus onmeetbare of irrationale grootheden (geen gemene maat). In dit alles is Van Swinden uiterst nauwkeurig in het gebruik van de woorden ‘getal’ en ‘grootheid’. Voor iets dat *onmeetbaar* is, kan alleen het begrip ‘grootheid’ gebruikt worden. ‘Want’, zo schrijft hij, ‘wie getal zegt, zegt een aantal eenheden, en dus iets dat met die eenheid meetbaar is.’ Men gebruikt het wel voor getallen, maar dat is ‘in oneigenlyken zin, en kortheidshalven.’ Hij concludeert

Wanneer men dan van onmeetbare getalen spreekt, duidt men dezelve door een teeken aan, en spreekt niet van hetgeen zy zyn, want zy zyn er niet, maar van het geen zy zouden zyn, indien men ze door getalen uitdrukken kon, het geen onmooglyk is.¹⁸

Waarna de achtste bepaling volgt

(Algemeene bepalingen.)

VIII. Wanneer men twee gelykssoortige grootheden vergelykt, ten einde de grootte van de eene uit die van de andere *onmiddelyk* te bepaalen, noemt men dit derzelve *reden* na te gaan: en die bepaaing zelve is de *reden* die de grootheden onderling tot elkander hebben.¹⁹

We zien de overeenkomst met Euclides’ die schreef over ‘een zekere betrekking in grootte’. Van Swinden wijkt echter af van de theorie van Euclides door het volgende te stellen.

Men noemt *Aanwijzer* van eene reden het quotient dat uit de divisie van de *voorgaande* door de *volgende* voortkomt, of begrepen wordt voort te komen.²⁰

Dit wil zeggen dat $A : B = P : Q$ te schrijven is als $\frac{A}{B} = \frac{P}{Q}$. Hierna wordt geconcludeerd dat als grootheden dezelfde reden hebben, ze ‘evenredig’ of ‘proportioneel’ zijn.

We zien dat Van Swinden in het begin onderscheid maakt tussen verhoudingen die wel in rationale getallen uitgedrukt kunnen worden, en die waar dat niet voor geldt. Als je de reden van twee grootheden nagaat, stel je de verhouding tussen die twee grootheden op. Bij meetbare

¹⁶Swinden (1790, p. 60-61).

¹⁷Swinden (1790, p. 64). Deze definitie is dus wel ‘direct’, zie voetnoot 14.

¹⁸Swinden (1790, p. 66).

¹⁹Swinden (1790, p. 68).

²⁰Swinden (1816, p. 99, Boek III, Bepaling XI).

grootheden zal dit in rationale getallen kunnen gebeuren, bij onmeetbare niet. En dit is dan ook het punt waar het bij Van Swinden fout gaat. Eerst merkt hij zelf op dat de irrationale getallen er niet zijn, dat we enkel kunnen spreken van hetgeen zij zouden zijn als we ze door getallen konden uitdrukken. Maar vervolgens definieert hij de aanwijzer van een reden en lijkt zich nergens meer zorgen om te maken. Het is het quotient dat voortkomt, *of begrepen wordt voort te komen* uit de grootheden van de evenredigheid. Als het quotient niet echt te vormen is, dan doen we alsóf we het zo kunnen opschrijven. Dan is het probleem verholpen... Van Swinden merkt nog op, reagerend op de definitie van Euclides: '[De] bepaling van EUCLIDES is algemeen, en bevat zoowel de *meetbare* als de *onmeetbare* grootheden: doch zij is niet geheel duidelijk, en veelligt niet uit de ware en eenvoudige natuur van het geen men oorspronkelijk door *rede* verstaat, ontleend. (...) De leer der *aanwijzers*, die of *meetbaar* of *onmeetbaar* zijn, is gemakkelijker, en even algemeen als die van EUCLIDES: wij zullen echter in het I, II en III Voorstel toonen, dat de bepaling van EUCLIDES uit de onze, en de onze uit die van EUCLIDES volgt.'

Met drie stellingen wil Van Swinden laten zien dat Euclides' bepaling van evenredigheid uit de zijne volgt. We noemen hier alleen de eerste stelling, de andere twee lijken er op.

Indien vier grootheden A, B, C, D evenreedig zyn: en men neemt gelykvouden (m) van de eerste en derde (mA, mC) en andere gelykvouden (n) van de tweede en vierde (nB, nD): zal het gelykvoud van de derde altoos even groot, grooter of kleiner zyn dan dat van de vierde, naarmaate het gelykvoud van de eerste even groot, grooter of kleiner is, dan dat van de tweede, welke vermeenigvuldiging men ook neeme.²¹

In andere woorden: als $mA > nB$ dan moet ook $mC > nD$, als $mA = nB$ dan ook $mC = nD$ en ten slotte als $mA < nB$ dan ook $mC < nD$. Als dit altijd geldt, voor welke natuurlijke getallen m, n men maar kiest, dan heten de vier grootheden A, B, C, D evenredig.

Het bewijs dat hij geeft, gebruikt de door hem gedefinieerde aanwijzer (die in sommige gevallen dus simpelweg niet bestaat!). Hij merkt op dat als

$$A : B = C : D \quad \text{of} \quad \frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

dan

$$\frac{mA}{nB} = \frac{mC}{nD}$$

en daar volgen de gevraagde eigenschappen zonder moeite uit...

De Gelders evenredigheid

De Gelder geeft, net als Euclides en Van Swinden, aan wanneer een grootheid A een evenmatig deel²² van een andere grootheid B is ($n \times A = B$, voor zekere n geheel) of niet ($n \times A < B$, $(n + 1) \times A > B$, voor zekere n geheel). Hij noemt een grootheid een *gemeene maat* als die een evenmatig deel van beide is. Als bijvoorbeeld $A : B = 20 : 13$, dan is er een grootheid C die in A 20 maal begrepen is en in B 13 maal. Dan komt De Gelder met een nieuw begrip, de *betrekkingswijzer*.

Eene uitdrukking als deze

$$\left\{ \begin{array}{cccccccc} A, & B, & C, & D, & E, & F, & G \\ & 2, & 1, & 4, & 3, & 1, & 2 \end{array} \right\}$$

wordt, in het vervolg, aldus gelezen: *de grootheid B is in de grootheid A tweemaal met nog een grootheid C (kleiner dan B) begrepen; de grootheid C is in B éénmaal met nog D begrepen; D is in C viermaal met nog E begrepen; E is in D driemaal met*

²¹Swinden (1790, p. 85, Boek III, Voorstel I).

²²Wij zouden spreken van een veelvoud.

nog F begrepen; F is in E éénmaal met nog G ; en G is in F juist tweemaal begrepen. Zulk eene uitdrukking noemt men den *index* of *betrekkingswijzer* van de betrekking der grootheden A en B : hij bevat de volgende vergelijkingen, waardoor men de betrekking der grootheden, door denzelfden uitgedrukt, in getallen, vinden kan.

$$\begin{aligned} F &= 2G \\ E &= F + G = 2G + G = 3G \\ D &= 3E + F = 9G + 2G = 11G \\ C &= 4D + E = 44G + 3G = 47G \\ B &= C + D = 47G + 11G = 58G \\ A &= 2B + C = 116G + 47G = 163G \end{aligned}$$

Men zie, wegens het berekenen van zulk eenen wijzer, den *Eersten Cursus* der *Wiskundige Lessen*, de XXXII. *Les*, §. 582, *et seq.*²³

De getallen die de betrekkingswijzer vastleggen, noemt De Gelder *wijzergetallen*. Om te bepalen of vier grootheden A, B, C, D evenredig zijn $A : B = C : D$, leert De Gelder ons dat we voor zowel $A : B$ als $C : D$ de wijzergetallen moeten bepalen. Als deze precies dezelfde zijn, zijn de grootheden A, B, C, D evenredig. Dit is als volgt in te zien. Als de wijzergetallen opgesteld voor $A : B$ een eindige rij vormen, dan is daar een grootste gemeene maat te vinden voor beide getallen. Deze grootste gemeene maat zal, zeg, precies p keer in A en q keer in B bevat zijn. Als we ook de wijzergetallen bepalen van $C : D$ en deze blijken gelijk te zijn aan die van $A : B$, dan is de grootste gemeene maat die daar gevonden wordt ook precies p keer bevat in C en q keer in D . De grootheden A, B, C, D zijn dan dus evenredig. Voor een oneindige betrekkingswijzer is de situatie hetzelfde. Ook al zijn dan de getallen p en q niet expliciet te bepalen, de verhouding die opgesloten ligt in de oneindige betrekkingswijzer is voor twee redenen die die zelfde oneindige betrekkingswijzer hebben, gelijk.

Het bepalen van de wijzergetallen komt neer op het opstellen van een kettingbreuk voor de verhouding van de gegeven grootheden. We illustreren dit aan de hand van een voorbeeld, waarbij een iets verkleinde versie van de betrekkingswijzer hierboven als uitgangspunt genomen wordt.

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} A, & B, & C, & D, & E \\ & 2, & 1, & 4, & 3 \end{array} \right\}$$

Er volgt

$$\begin{aligned} A &= 2B + C = \left(2 + \frac{C}{B}\right) B \\ &\qquad\qquad\qquad \text{gebruik } B = C + D = \left(1 + \frac{D}{C}\right) C \\ &= \left(2 + \frac{C}{\left(1 + \frac{D}{C}\right) C}\right) \left(1 + \frac{D}{C}\right) C \\ &= \left(2 + \frac{1}{1 + \frac{D}{C}}\right) \left(1 + \frac{D}{C}\right) C \\ &\qquad\qquad\qquad \text{gebruik } C = 4D + E = \left(4 + \frac{E}{D}\right) D \\ &= \left(2 + \frac{1}{1 + \frac{D}{\left(4 + \frac{E}{D}\right) D}}\right) \left(1 + \frac{D}{\left(4 + \frac{E}{D}\right) D}\right) \left(4 + \frac{E}{D}\right) D \end{aligned}$$

²³Gelder (1810, p. 36, Boek II, Bepaling VI).

$$\begin{aligned}
&= \left(2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{E}{D}}}\right) \left(1 + \frac{1}{4 + \frac{E}{D}}\right) \left(4 + \frac{E}{D}\right) D \\
&\qquad\qquad\qquad\text{gebruik } D = 3E \\
&= \left(2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{E}{3E}}}\right) \left(1 + \frac{1}{4 + \frac{E}{3E}}\right) \left(4 + \frac{E}{3E}\right) 3E \\
&= \left(2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{3}}}\right) \left(1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{3}}\right) \left(4 + \frac{1}{3}\right) 3E \\
&= \left(2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{3}}}\right) \left(4 + \frac{1}{3} + 1\right) 3E \\
&= \left(2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{3}}}\right) 16E
\end{aligned}$$

We weten dat

$$D = 3E, \quad C = 4D + E = 13E, \quad B = C + D = 16E, \quad A = 2B + C = 45E$$

dus

$$\begin{aligned}
A : B &= 45E : 16E \\
&= \left(2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{3}}}\right) 16E : 16E \\
&= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{3}}} : 1
\end{aligned}$$

en we zien precies de wijzergetallen 2, 1, 4, 3 in de kettingbreuk staan. Op het verband tussen wijzergetallen en kettingbreuken komen we nog terug in paragraaf 7.3.2.

7.2.2 Evenredigheid - een stelling

We gaan nu kijken naar een stelling uit de evenredigheidstheorie met bewijzen van Euclides, Van Swinden en De Gelder. We zullen zien dat er verschillende bewijzen geleverd worden, die niet allemaal zonder bezwaren zijn. De stelling die we behandelen is

$$A : B = P : Q \quad \iff \quad A : P = B : Q.$$

Om met een getallenvoorbeeld deze stelling te illustreren: als $9 : 24 = 12 : 32$, dan ook $9 : 12 = 24 : 32$. Let er op dat dit slechts een *getallenvoorbeeld* is, bedoeld om enig inzicht in de stelling te krijgen. De stelling zelf moet bewezen worden voor de *grootheden* A, B, P, Q .

De auteurs gebruiken soms afwijkende letters voor hun bewijs. Ik heb die consequent aangepast, zodat de verschillende bewijzen makkelijk met elkaar te vergelijken zijn.

Euclides en de stelling

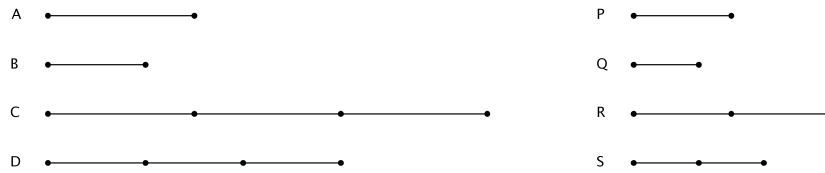
Bij Euclides wordt de stelling behandeld in Boek V, Propositie XVI.²⁴ Zie figuur 7.3.

Neem gelijke veelvouden van de grootheden A en B en noem die C en D . Neem ook gelijke veelvouden van P en Q en noem die R en S . Omdat C hetzelfde veelvoud van A is als D van B en delen dezelfde verhouding hebben als dezelfde veelvouden,²⁵ geldt dus ook

$$A : B = C : D.$$

²⁴Voor onderstaande heb ik mij gebaseerd op Heath (1956, vol. II, p. 164-165).

²⁵Daarvoor bewezen, Euclides Boek V, Propositie XV.

Figuur 7.3: De grootheden A, B, P, Q en hun veelvouden.

We wisten al dat $A : B = P : Q$, en dus

$$P : Q = C : D.$$

Omdat R, S gelijke veelvouden van P, Q geldt

$$\left. \begin{array}{l} P : Q = R : S \\ P : Q = C : D \end{array} \right\} C : D = R : S$$

Bij een evenredigheid geldt dat:²⁶

als eerste term $>$ derde term dan tweede term $>$ vierde term
als eerste term $=$ derde term dan tweede term $=$ vierde term
als eerste term $<$ derde term dan tweede term $<$ vierde term

Dit betekent dat

als $C > R$ dan $D > S$
als $C = R$ dan $D = S$
als $C < R$ dan $D < S$

Nu weten we met de definitie van evenredigheid dat als van vier grootheden willekeurige gelijke veelvouden van de eerste en de derde tegelijk kleiner dan, gelijk aan of groter zijn dan willekeurige gelijke veelvouden van de tweede en vierde, deze vier grootheden in volgorde een evenredigheid vormen (zie definitie op pagina 54). C, D zijn willekeurige gelijke veelvouden van A, B en R, S zijn willekeurige gelijke veelvouden van P, Q , dus geldt de evenredigheid

$$A : P = B : Q.$$

□

Dit bewijs is heel strikt en foutloos. Bovendien gaat het op voor zowel rationale als irrationale verhoudingen.

Van Swinden en de stelling

Het bewijs dat Van Swinden geeft is nogal verschillend dan dat van zijn vroegere collega.²⁷ In SII is de bewuste stelling Voorstel VI. Voor het bewijs merkt Van Swinden enkel op: ‘Uit voorstel V’. Voorstel V bevat de stelling

$$A : B = P : Q \iff AQ = BP$$

en deze stelling wordt weer bewezen uit de elfde en twaalfde Bepaling en het gevolg van Axioma 4. Net als de studenten van Van Swinden eertijds, gaan we op zoek naar alle onderdelen om zo de

VI. Voorstel $A : B = P : Q \Leftrightarrow A : P = B : Q$.	V. Voorstel $A : B = P : Q \Leftrightarrow AQ = BP$.	Bepaling 11 Aanwijzer (breuk) bij reden.
Bewijs: uit V. Voorstel.	Bewijs: uit 11e en 12e Bepaling en gevolg van Axioma 4.	Bepaling 12 Grootheden met zelfde reden zijn evenredig. Gevolg van Axioma 4 Twee grootheden die gelijk zijn mag je met / door zelfde getal vermenigvuldigen / delen.

Tabel 7.1: Redeneerstappen voor het bewijs van Van Swinden.

stelling te kunnen bewijzen. Zie de bewijsredenering in tabel 7.2.2.

Als we dit alles samenvatten, wordt het bewijs

$$A : B = P : Q \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{P}{Q} \Rightarrow AQ = BP \Rightarrow \frac{A}{P} = \frac{B}{Q} \Rightarrow A : P = B : Q.$$

□

Bij het V. Voorstel geeft Van Swinden twee aanmerkingen. Ten eerste merkt hij op dat hij met producten zowel die bedoelt ‘die door getallen uitgedrukt kunnen worden, als die welke men slechts kan aanwijzen.’²⁸ De stelling zou dus toepasbaar zijn op meetbare en onmeetbare grootheden. Vervolgens merkt hij op: ‘Men vindt dit Voorstel niet in het algemeen bij EUCLIDES: maar alleen voor de getallen in het zevende boek (...).’²⁹

Het is duidelijk dat Van Swinden de verhoudingen opvat als breuken en vervolgens aan de hand van die breuken laat zien dat de stelling waar is. Als de breuken niet bestaan, doen we alsof ze bestaan en rekenen we daar gewoon mee verder. Maar die breuken bestaan niet.

De Gelder en de stelling

De Gelder onderscheidt deze Stelling VII van Boek II in twee gevallen.³⁰

1. A en B en dus ook P en Q zijn onderling meetbaar.
Zij M de gemene maat van A, B en N die van P, Q . Stel $pM = A$, $qM = B$, $pN = P$ en $qN = Q$.

In het algemeen geldt dat³¹

$$pM : pN = qM : qN.$$

Nu vullen we in

$$pM : pN = qM : qN \iff A : P = B : Q.$$

²⁶Daarvoor bewezen, Euclides Boek V, Propositie XIV.

²⁷Voor het bewijs van Van Swinden maak ik gebruik van Swinden (1816, p. 115).

²⁸Swinden (1816, p. 114).

²⁹Swinden (1816, p. 114).

³⁰Voor het bewijs van De Gelder heb ik gebruik gemaakt van Gelder (1810, p. 43).

³¹Dit is eerder als het tweede Gevolg van Stelling VI aan bod gekomen.

2. A en B en dus ook P en Q zijn onderling onmeetbaar. Neem in beide oneindige betrekkingwijzers hetzelfde aantal termen. Dan krijg je twee getallen die ‘ten naaste bij’ de betrekking A tot B en P tot Q uitdrukken. Neem bijvoorbeeld honderd wijzergetallen en stel dat die getallen de verhouding $r : s$ vertegenwoordigen, dan geldt

$$A : B' = P : Q' = r : s$$

met A en P in die rede tot (de nieuw gevormde grootheden) B' en Q' als $r : s$. Nu kan de stelling bewezen worden zo als in het eerste geval en er volgt

$$A : P = B' : Q'.$$

Als er steeds meer termen van de betrekkingwijzer genomen worden zullen B' en Q' steeds minder verschillen van B en Q . ‘Als men de gehele oneindigheid der termen te zamen neemt [wordt] $B' = B$ en $Q' = Q$. En dan zal $A : P = B : Q$ zijn.’³² \square

We zien hier weer een andere poging de stelling te bewijzen. Voor het irrationale geval benadert De Gelder de verhouding en vervolgens laat hij de hoeveelheid wijzergetallen die genomen wordt naar oneindig gaan. Dit is illustratief voor de werkwijze van De Gelder. Toch is het bewijs strikt genomen niet correct, omdat het onvolledig is. Hij heeft, modern gezegd, *niet* bewezen dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B' = B \implies \lim_{n \rightarrow \infty} A : B' = A : B$$

met n het aantal wijzergetallen dat genomen wordt.

7.2.3 Vergelijking

In deze paragraaf is de behandeling van evenredigheid door Van Swinden en De Gelder aan bod gekomen en deze is vergeleken met die van Euclides. Daarna hebben we een stelling besproken om zo de gegeven definities te toetsen op bruikbaarheid.

De definitie die Euclides geeft is er een die geldt voor rationale en irrationale verhoudingen. Wiskundig is deze definitie correct. Het bewijs van de daarna behandelde stelling gaat ook uitstekend.

Van Swinden maakt van de verhoudingen breuken en ziet daar geen problemen in. Als een verhouding irrationaal is en dus eigenlijk niet door een breuk weergegeven kan worden, doet hij alsof dat wel kan. Ook al bestaat het niet, je kunt het opschrijven (wat het ook moge betekenen) en er mee verder rekenen. Het zal duidelijk zijn dat dit wiskundig niet zuiver is. Van Swinden gebruikt de breuken (aanwijzers) ook om zijn bewijs te leveren voor de stelling. Maar als de definitie, het uitgangspunt, al niet correct is, dan kan een bewijs daarop gebaseerd ook niet correct zijn. Dat is ook het geval. *Gegeven* het feit dat verhoudingen op Van Swindens manier als breuken geschreven kunnen worden is het bewijs correct, maar deze aanname is niet juist. Van Swinden ontduikt de moeilijkheden.

De Gelder schrijft, zoals eerder aangehaald, in de voorrede van GI

Wij moeten dan nogmaals eenige oogenblikken bij dit stuk blijven stilstaan, en de gronden ontvouwen, waarom onze wijze van behandeling der Evenredigheden beter dan de gewone en beter dan die van EUCLIDES is?³³

Gezien het feit dat Van Swindens meetkundeboek gold als het eerste Nederlandstalige meetkundeboek van voldoende niveau, en daarbij bedenkend dat dat zo'n twintig jaar gebruikt werd toen De Gelders boek verscheen, is het zeer aannemelijk dat De Gelder met de ‘gewone behandeling’ doelt op (onder andere) de methode zoals Van Swinden die geeft. Door de betrekkingwijzer met de wijzergetallen te introduceren geeft De Gelder ook daadwerkelijk een nieuwe methode in de

³²Gelder (1810, p. 44).

³³Gelder (1810, p. xv) en vrijwel gelijk in Gelder (1817, p. xvi-xvii).

Nederlandstalige meetkundeliteratuur. Met deze ingrediënten is hij in staat te bepalen of twee verhoudingen wel of niet evenredig zijn, ongeacht of ze meetbaar danwel onmeetbaar zijn. Zijn definitie is anders dan Euclides, maar wel juist. Bij het bewijs dat hij geeft voor de stelling raakt hij in de knoop met zijn eigen definitie. Experimenteel is de waarheid in te zien, maar deze volgt niet uit het door De Gelder gegeven bewijs. In het bewijs spreekt hij namelijk, modern gezegd, van een limiet proces, maar geeft niet alle details die een volledig bewijs zou vereisen. Daarom is het volgens de moderne maar ook de oude Griekse standaarden niet correct. Hij blijft onder de exactheid van Euclides steken. Vermoedelijk is dit te wijten aan een gebrek aan inzicht van De Gelder.

We kunnen concluderen dat zowel Van Swinden als De Gelder van Euclides' definitie van evenredigheid zijn afgeweken. Bij de eerste is de definitie niet correct, waardoor het lastig zo niet onmogelijk wordt stellingen die gebruik maken van die definitie correct te bewijzen. De Gelder geeft een correcte definitie, maar komt later alsnog in de problemen door het niet volledig geven van sluitende redeneringen.

7.3 Evenredigheid (2)

We gaan nog wat dieper in op de stof die Van Swinden en De Gelder presenteren in hun hoofdstuk over evenredigheid. We hebben in 7.2 gezien dat bij evenredigheid de irrationale verhouding een belangrijke rol speelt. Het bleek dat Van Swinden in zijn definitie van evenredigheid de irrationale verhoudingen opvat als rationale om zo de aanwijzer op te kunnen stellen. Bij het bewijzen van de stelling uit paragraaf 7.2.2 vindt hij het dan ook niet erg om gebruik te maken van breuken die strikt genomen niet bestaan. Negeert Van Swinden een correcte beschouwing van het irrationale dan volledig? In SII voegt hij als tweede aanmerking bij de achtste Bepaling van het derde Boek een meetkundig bewijs toe voor het bestaan van irrationale getallen. Dit bewijs kwam nog niet voor in SI. Hij laat zien dat geen gemene maat te vinden is voor de zijdelengte en diagonaal van een vierkant. Bij de bespreking hiervan zal blijken dat zijn methode analoog is aan de betrekkingwijzer die De Gelder opstelt. Van Swinden geeft een methode om uit de bewezen irrationale verhouding een kettingbreuk op te stellen. Zoals we in paragraaf 7.2.1 zagen heeft het bepalen van de wijzergetallen van de betrekkingwijzer alles te maken met het opstellen van een kettingbreuk. Nu komt alles dus samen: meetkundig bewijs voor de irrationale verhouding van zijde en vierkant, de link daarvan met De Gelders betrekkingwijzer (die te maken heeft met kettingbreuken) en tenslotte Van Swinden die een kettingbreuk opstelt aan de hand van zijn meetkundige bewijs.

Bij De Gelder vinden we een methode om van die kettingbreuken benaderingen op te stellen. Deze extra onderwerpen scheppen een diepere context rondom de behandeling van evenredigheid door Van Swinden en De Gelder en de rol die het irrationale daarin speelt.

7.3.1 1 en $\sqrt{2}$

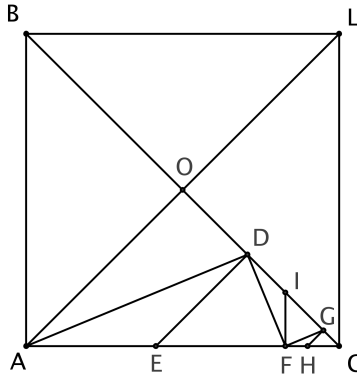
Van Swinden gebruikt een meetkundige constructie met het algoritme van Euclides³⁴ om de irrationaliteit van de verhouding van zijde en vierkant te bewijzen. Dit algoritme laat ik zien aan de hand van een getallenvoorbeeld. Nu we niet met lijnstukken, maar met getallen werken, spreken we van de grootste gemene *deler*. Stel dat we de grootste gemene deler willen bepalen van 42 en 15. Dan geldt

$$\begin{aligned} 42 - 2(15) &= 12, \\ 15 - 1(12) &= 3, \\ 12 - 4(3) &= 0, \end{aligned}$$

³⁴Van het grootste lijnstuk haal je zo vaak als mogelijk het kleinste lijnstuk af. Het kleinste lijnstuk verminder je in stap twee zo vaak mogelijk met het restant van stap één en zo verder. Als er op een bepaald moment geen rest meer overblijft, zijn de lijnstukken onderling meetbaar en heb je de grootste gemene maat gevonden. Zo niet, dan is de verhouding tussen de twee lijnstukken irrationaal en dus niet in gehele getallen uit te drukken.

dus de grootste gemene deler van 42 en 15 is 3.

De conclusie bij het vierkant zal zijn dat de zijde en diagonaal geen gemeenschappelijke maat hebben.



Figuur 7.4: De constructie voor Van Swindens bewijs voor de irrationale verhouding tussen zijde en diagonaal van een vierkant.

Het bewijs dat Van Swinden geeft, gaat als volgt. Kijken we naar het vierkant in figuur 7.4. We zien direct dat $BC < AB + AC$ (driehoeksongelijkheid). Omdat $AB = AC$ kunnen we dus ook stellen $BC < 2AC$. Voeg het punt D toe op BC zodat $AB = BD$. Dan gaat onze ongelijkheid uiteindelijk over in $CD < AC$. We hebben nu het kleinste lijnstuk (zijde AB) zo vaak mogelijk (namelijk één keer) van het grootste lijnstuk (diagonaal BC) afgehaald. Het restant CD is kleiner dan AC en de eerste stap is daarmee voltooid.

Nu willen we CD zo vaak mogelijk aftrekken van AC . Trek hiervoor de lijn door D loodrecht op BC en noem E het snijpunt met AC . We weten dat $\angle L$ recht is. Bovendien is $BL = CL$ en dus $\triangle BCL$ is gelijkbenig. En dus zijn de hoeken LBC en BCL beide gelijk aan een halve rechte hoek. We zien dat ook $\angle ECD$ gelijk is aan een halve rechte hoek. Binnen driehoek CDE kunnen we dan concluderen dat $\angle D$ recht is (eis) en $\angle C$ gelijk aan een halve rechte hoek, met als gevolg dat ook $\angle E$ een halve rechte hoek is. Dus is driehoek CDE ook gelijkbenig en $CD = DE$. Bovendien weten we dat $EC < ED + CD$.

We zien dat $\triangle ABD$ gelijkbenig is en dus $\angle BAD = \angle ADB$. Tevens is $\angle BAE = \angle BDE =$ een rechte hoek. Daarmee zien we in dat ook $\angle ADE = \angle DAE$. Dus $\triangle ADE$ is gelijkbenig en $DE = AE$. Teken nu F op CE zodat $AE = EF$. We vullen in:

$$AC = AE + EF + CF$$

en dus

$$AC - AE - EF = AC - 2CD = CF.$$

We hebben CD twee maal van AC afgetrokken, waarna als rest CF overblijft.

Bovendien:

$$EC < CD + DE = 2EF$$

dus

$$EC - EF < 2EF \quad \text{en dus} \quad CF < EF = CD.$$

Wat we overhouden (CF) is kleiner dan CD .

De volgende stap wordt om zo vaak mogelijk CF van CD af te halen. Trek hiervoor de lijn door F loodrecht op AC en noem I het snijpunt met BC . Op dezelfde manier als hiervoor zien we dat $\angle CIF$ gelijk is aan een halve rechte hoek en dat $\triangle CIF$ dus gelijkbenig is. Omdat ook $\triangle DIF$ gelijkbenig is, geldt: $FC = FI = DI$. Neem G op CI zodat $DI = GI$. Met een zelfde redenering als voorheen weten we dat $CD - 2CF = GC$ en $GC < CF$.

De vierde stap wordt dan: haal zo vaak mogelijk GC van CF af. Maar we zien dat $\triangle ABC \sim \triangle FIC$. De situatie herhaalt zich. Bij iedere volgende stap houden we weer een gelijkbenige driehoek over, waarvan het overgebleven deel uit de vorige stap een van de opstaande zijden van de driehoek is. Zo blijft er dus altijd een ‘rest’ over en zal dit proces nooit stoppen.

Dit geeft aan dat er geen grootste gemene maat bestaat voor de zijde en de diagonaal van een vierkant. \square

7.3.2 Kettingbreuken, rekenschema’s en $\sqrt{2}$

Het bewijs van Van Swinden geeft de mogelijkheid een wortel als kettingbreuk te schrijven. Hij legt uit hoe we deze kettingbreuk op moeten stellen. Feitelijk past hij de ‘wijzergetallen-methode’ van De Gelder meekundig toe.

Van vierkant naar kettingbreuk

Bij het vierkant uit paragraaf 7.3.1 vonden we:

$$\begin{aligned} BC - 1(AC) &= CD, \\ AC - 2(CD) &= CF, \\ CD - 2(CF) &= CG, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Als we verhoudingen als breuken interpreteren, iets waar Van Swinden geen moeite mee heeft, kunnen we de verhouding $BC : AC$ als volgt beschrijven.

$$\frac{BC}{AC} = \frac{BD + CD}{AC} = 1 + \frac{CD}{AC} = 1 + \frac{1}{\frac{AC}{CD}}.$$

We weten van AC/CD :

$$\frac{AC}{CD} = \frac{2CD + CF}{CD} = 2 + \frac{CF}{CD},$$

dus

$$\frac{BC}{AC} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{CF}{CD}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{CD}{CF}}}.$$

Voor CD/CF hebben we gevonden:

$$\frac{CD}{CF} = \frac{2CF + CG}{CF} = 2 + \frac{CG}{CF},$$

oftewel:

$$\frac{BC}{AC} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{CG}{CF}}}$$

en zo kunnen we verder gaan. Met de hiervoor behandelde stelling van Pythagoras weten we dat als we $AC = 1$ nemen daaruit volgt dat $BC = \sqrt{2}$. De kettingbreuk die ontstaat, is dus gelijk aan:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

De waarde van deze kettingbreuk kunnen we (modern) definiëren als de limiet van de benaderingen. Van Swinden merkt op dat ‘hoe meer leden, of *termen* van die breuk men neemt, hoe nader men aan de waarheid komt’.³⁵ Aan de hand van $\sqrt{2}$ laat hij een benadering in negen stappen zien, waarbij hij de benaderingen op zeven decimalen geeft en vertelt of deze te groot of te klein zijn. Een meer structurele bespreking van de nauwkeurigheid en grootte van de fout ontbreekt.

³⁵Swinden (1790, p. 94).

Benaderen met een schema

Jacob de Gelder behandelt in GI geen kettingbreuken.³⁶ In GIII noemt hij een manier om bovenstaande samen te vatten in een schema. Met behulp van zo'n schema kunnen benaderingen gevonden worden voor een kettingbreuk. Voor een uitleg verwijst hij naar *Stelkunst*.³⁷ We zullen hier eerst de schema's behandelen.

Als de kettingbreuk de vorm heeft

$$p_1 + \frac{1}{p_2 + \frac{1}{p_3 + \frac{1}{p_4 + \dots}}}$$

dan heeft het schema de volgende vorm

	p_1	p_2	p_3	p_4	\dots
$\frac{1}{0}$	$\frac{p_1}{1}$	$\frac{p_2 \times p_1 + 1}{p_2 \times 1 + 0}$	$\frac{p_3 \times (p_2 p_1 + 1) + p_1}{p_3 \times (p_2) + 1}$	$\frac{p_4 \times (p_3 (p_2 p_1 + 1) + p_1) + (p_2 p_1 + 1)}{p_4 \times (p_3 p_2 + 1) + (p_2)}$	\dots
+	-	+	-	+	\dots

Dit ziet er op het eerste oog ingewikkeld uit. Wat er feitelijk gebeurt is dit. Iedere volgende stap nemen we een extra wijzergetal op. Stel dat we de volgende drie wijzer getallen zouden hebben: $\{p_3, p_2, p_1\}$. Dan stellen we het volgende op:

$$\begin{aligned} C &= p_1 D \\ B &= p_2 C + D \\ A &= p_3 B + C \end{aligned}$$

Dus als we doorrekenen

$$\begin{aligned} B &= p_2 p_1 D + D = (p_2 p_1 + 1) D \\ A &= p_3 ((p_2 p_1 + 1) D) + p_1 D = p_3 (p_2 p_1 + 1) D + p_1 D. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Laten we nu een wijzergetal p_4 extra nemen. Dan kunnen we opnieuw een berekening maken.

$$\begin{aligned} D &= p_1 E \\ C &= p_2 D + E \\ B &= p_3 C + D \\ A &= p_4 B + C \end{aligned}$$

Dit doorrekenen geeft

$$\begin{aligned} C &= p_2 p_1 E + E = (p_2 p_1 + 1) E \\ B &= p_3 (p_2 p_1 + 1) E + D = p_3 (p_2 p_1 + 1) E + p_1 E \\ A &= p_4 (p_3 (p_2 p_1 + 1) E + p_1 E) + C = p_4 (p_3 (p_2 p_1 + 1) E + p_1 E) + (p_2 p_1 + 1) E \end{aligned} \quad (7.2)$$

Als we nu de D in (7.1) en E in (7.2) opvatten als eenheidselement, dan volgen hieruit precies de formules in de teller onder p_3 en p_4 in de bovenstaande tabel. Voor de noemer zijn soortgelijke berekeningen te maken, waar dan de berekeningen uit de tabel uit volgen.

In *Stelkunst* legt De Gelder de lezer uit hoe te rekenen met de tabellen. Dat gaat ongeveer als volgt. In de middelste rij staan de breuken die we willen berekenen, waarbij de berekeningen

³⁶Merk op dat hij in GI wel de wijzergetallen noemt, waar impliciet de kettingbreuken in verborgen zitten.

³⁷Bovendien meldt hij in *Wiskunde Lessen Tweede Cursus* gebruikt gemaakt te hebben van werk van Lagrange over kettingbreuken en wortelbenaderingen en ook van J.M.C. van Utenhove die formules opstelde om snel de wijzergetallen te bepalen bij een gegeven 'worteloos getal'. Zie Gelder (1828, p. 220-227).

voor teller en noemer strikt gescheiden zijn. Als je de teller (of noemer) in kolom i wilt berekenen, vermenigvuldig je p_i (gegeven, bovenste rij) met de teller (noemer) van kolom $i - 1$ (van de voorgaande al gevonden breuk dus) en tel je daar vervolgens nog de teller (noemer) van kolom $i - 2$ bij op. De $+$ en $-$ geven aan of de gestelde breuk groter dan wel kleiner is dan de waarde van de kettingbreuk. In de eerste kolom wordt altijd gestart met de oneigenlijke breuk $\frac{1}{0}$.

Opvallend dat De Gelder, die juist zo graag wil dat zijn leerlingen goed snappen waar ze mee bezig zijn, hen ook laat rekenen met dit soort ‘magische’ tabelletjes. In verschillende boeken behandelt hij ze. We komen ze tegen in de derde druk van *Beginnelsen der Meetkunst; Wiskundige lessen, tweede cursus; Allereerste gronden der Cijferkunst* en *Beginnelsen der Stelkunst*. De boeken verwijzen soms onderling naar elkaar, het vaakst naar *Stelkunst*, dat dus de basis voor de schema’s zou moeten leggen. In eerste instantie wordt ook hier niet verder gegaan dan een beschrijving van hoe de getalletjes in de juiste vakjes geplaatst moeten worden. Maar later wordt aan de hand van een ingevuld schema bewezen (met variabelen) dat de breuken beurtelings te groot en te klein zijn en bovendien steeds dichter naar de werkelijke waarde naderen.³⁸ Het bewijs zelf laten we hier buiten beschouwing, maar geeft wel aan dat De Gelders schema inderdaad tot een correct antwoord leidt.³⁹

Zie bijlage B voor een uitgebreidere beschouwing van de wortelbenadering.

7.3.3 Vergelijking

We zijn in deze paragraaf dieper ingegaan op de behandeling van het irrationale door Van Swinden en De Gelder. Van Swinden geeft een bewijs voor de irrationaliteit van de verhouding van 1 en $\sqrt{2}$, dat voorkomt in de tweede druk. De methode die hij gebruikt voor zijn bewijs is, vertaald naar De Gelders betrekkingwijzer, dezelfde: er ontstaat een oneindig proces. Bij Van Swinden is het delingsalgoritme oneindig, bij De Gelder de betrekkingwijzer. Wellicht dat Van Swinden geïnspireerd door de stof van De Gelder dit bewijs heeft toegevoegd.

Nadat Van Swinden zijn meetkundig bewijs voor de irrationaliteit van $\sqrt{2}$ heeft gegeven, stelt hij een algoritme op om een kettingbreuk te vormen die de waarde van $\sqrt{2}$ benadert. De Gelder komt in de derde druk met rekenschema’s om aan de hand van de wijzergetallen van een betrekkingwijzer benaderingen voor een verhouding (als breuk) op te stellen. Deze geven ook inderdaad een bevredigende benadering. Het bewijs hiervoor levert De Gelder in *Beginnelsen der Stelkunst* dat al in 1817 verschijnt.⁴⁰

De hier besproken stukken over irrationale verhouding, kettingbreuk en rekenschema die in opeenvolgende drukken verschijnen, wekken het vermoeden dat de auteurs elkaars werk lezen en erdoor geïnspireerd hun eigen meetkundeboek verrijkten. Maar dit is slechts een vermoeden.

7.4 De (afgeknotte) Pyramide

In deze paragraaf willen we kijken naar een formule om de inhoud te berekenen van een *afgeknotte pyramide*, dat is een pyramide waar de top, evenwijdig aan het grondvlak, van afgesneden is. We zullen zien dat Van Swinden en De Gelder daar allebei verschillende berekeningen voor gemaakt hebben.

Om tot de inhoudsformule te komen, zullen we moeten achterhalen hoe de twee de inhoud voor een gewone pyramide berekend hebben. Omdat voor hen beide de *Elementen* als bron fungeerde, gaan we eerst kijken hoe Euclides met deze materie omging. Er blijkt nogal wat wiskunde voor nodig om tot een sluitend bewijs te komen.

³⁸Gelder (1836, p. 384).

³⁹De misslag derhalve, welke ontstaat, door ééne dezer twee breuken [twee opeenvolgende benaderingen, WL] voor de ware betrekking te houden, is gevolgelijk minder dan het verschil dezer breuken; minder derhalve dan de éénheid, gedeeld door het product van derzelve noemers, en bijgevolg ook minder dan de éénheid, gedeeld door de tweede magt van den noemer der laatste breuk.’ (Gelder, 1836, p. 385).

⁴⁰Tevens het jaar van de tweede druk van *Beginnelsen der Meetkunst*. De rekenschema’s kwamen nog niet aan bod in de eerste en tweede druk.

Nadat we dit bewijs van Euclides besproken hebben, komen de methoden van Van Swinden en De Gelder aan bod.

Dan hebben we alle gereedschappen verzameld om te kijken hoe zij een inhoudsformule voor de afgeknotte pyramide presenteerden en bewezen.⁴¹

7.4.1 Euclides en de gewone pyramide

Een inhoudsformule voor de pyramide is af te leiden uit een bekende stelling opgeschreven door Euclides. In Boek XII lezen we bij de zevende Propositie

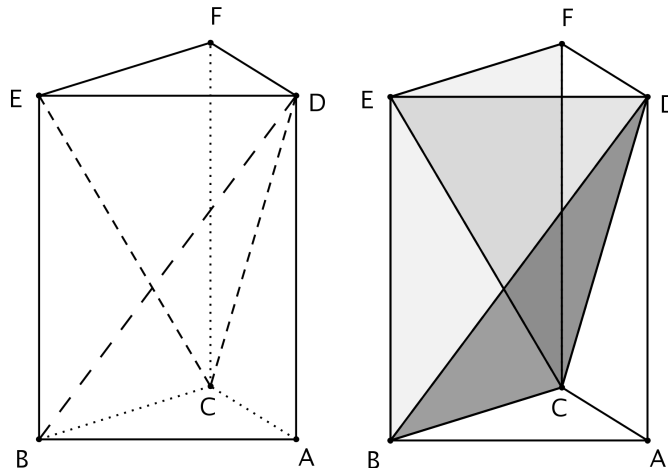
Elk prisma met driehoekige basis, wordt verdeeld in drie pyramiden, onderling gelijk, die ook driehoekige bases hebben.⁴²

Waarna het belangrijke resultaat volgt

Hierdoor is het duidelijk dat elke pyramide het derde deel is van het prisma, dat dezelfde basis met haar heeft en gelijke hoogte.⁴³

Het bewijs van Euclides

Voor het bewijs van Euclides, zie figuur 7.5.



Figuur 7.5: Constructie voor het bewijs van Euclides voor de inhoudsformule van een pyramide. Rechter arcering van WL.

Neem prisma $ABCDEF$. Trek BD , EC en CD . $ABED$ is een parallellogram en BD is daarvan de diagonaal, $\triangle ABD = \triangle EBD$.

Noteer met $xyz.t$ een pyramide met driehoekig grondvlak met hoekpunten x, y, z en top t .⁴⁴ Dan zien we dat voor de inhoud geldt: $ABD.C = DEB.C$ (zie verderop ‘Limietproces bij het bewijs van Euclides’). We weten dat ook geldt $DEB.C = EBC.D$, dus concluderen we $ABD.C = EBC.D$.

$FCBE$ is een parallellogram met CE als diagonaal. We weten dat $\triangle CEF = \triangle CBE$. We zien dus dat $BCE.D = ECF.D$, en dus $CEF.D = BCE.D = ABD.C$ en hiermee is het prisma in drie gelijke pyramiden verdeeld.

⁴¹Euclides behandelde niet het geval van de afgeknotte pyramide.

⁴²Euclides, *Elementen*, Boek XII, Propositie VII. Eigen vertaling van de weergave van Heath (1956, vol. III, p. 394).

⁴³Euclides, *Elementen*, Boek XII, Propositie VII, Gevolg. Vertaling van Dijksterhuis (1930, p. 240).

⁴⁴Dit om de uitgebreide formulering van Euclides beknopt weer te kunnen geven. Dijksterhuis voert soortgelijke notatie in.

Bovendien is $ABD.C = ABC.D$, waarbij $ABD.C$ $\frac{1}{3}$ deel van het prisma is. Dus ook $ABC.D$ is $\frac{1}{3}$ deel van het prisma, met zelfde basis als het prisma ($\triangle ABC$). Dus is de inhoud van pyramide $ABC.D$ gelijk aan $\frac{1}{3}$ deel van de inhoud van prisma $ABCDEF$. \square

Opmerking Van Swinden en De Gelder behandelen deze bewijzen op soortgelijke manier. Zij voegen er net als Euclides (zesde Propositie) aan toe dat ook voor pyramides met een grondvlak met meer dan drie hoeken de formule geldt. Ze laten namelijk zien dat iedere pyramide met grondvlak met meer dan drie hoeken, verdeeld kan worden in afzonderlijke pyramides met elk driehoekig grondvlak. Dit berust op het feit dat iedere n -hoek, $n > 3$, opgedeeld kan worden in $n - 2$ driehoeken. Bij elk van deze losse driehoeken hoort dan een pyramide, waarbij voor elke pyramide weer een prisma te vinden is dat drie keer de inhoud van de pyramide zal bevatten. Al die prisma's bij elkaar geven vervolgens het grote prisma dat drie keer de pyramide met n -hoekig grondvlak bevat. Het bewijs hiervoor laten we nu achterwege.

Limietproces bij het bewijs van Euclides

Met bovenstaande redenering lijkt het probleem voor de pyramide met driehoekig grondvlak (en met de bijgevoegde opmerking ook voor die met n -hoekig grondvlak) opgelost. Toch wordt er een belangrijke stap overgeslagen. In het begin heb ik gebruikt dat $ABD.C = DEB.C$. Hierbij ben ik er stilzwijgend van uit gegaan dat pyramiden met gelijk grondvlak en gelijke hoogte (maar dus *niet* per se gelijkvormig!) gelijke inhoud hebben.⁴⁵ Deze uitspraak is niet fout, maar mag niet zonder bewijs gebruikt worden. En dan blijkt er ineens een enorme extra hoeveelheid uiterst interessante wiskunde tevoorschijn te komen!

De algemenere stelling die we hiervoor willen bewijzen, luidt

Pyramiden, die dezelfde hoogte hebben en driehoekige bases, staan tot elkaar als de bases.⁴⁶

Om dit bewijs te kunnen geven zijn verschillende eerdere proposities nodig, waarvan uit het genoemde boek XII: een Lemma bij Propositie II en de Propositions III en IV. Het Lemma luidt als volgt.

Ik [Euclides] zeg dat de oppervlakte S groter dan cirkel $EFGH$ staat tot de cirkel $ABCD$ zo als de cirkel $EFGH$ staat tot een zekere oppervlakte, kleiner dan cirkel $ABCD$.⁴⁷

Dit komt neer op de volgende stelling:

$$\text{als } S : X = Y : T \quad \text{en } S > Y, \quad \text{dan } T < X.$$

De Propositions III en IV zijn

Elke pyramide met een driehoekige basis, wordt verdeeld in twee pyramiden met driehoekige basis, gelijk en gelijkvormig aan elkaar en gelijkvormig met de gehele pyramide; en in twee gelijke prisma's. De twee prisma's zijn groter dan de helft van de gehele pyramide.⁴⁸

Als er twee pyramides zijn met dezelfde hoogte en driehoekige basis, en elk van deze wordt verdeeld in twee pyramides gelijk en gelijkvormig aan elkaar en gelijkvormig met

⁴⁵Kijk in figuur 7.5 naar de pyramides $ABC.D$ en $BCE.D$. Van deze twee wordt beweerd dat ze gelijke inhoud hebben, maar het is overduidelijk dat ze in elk geval niet gelijkvormig zijn.

⁴⁶Euclides, *Elementen*, Boek XII, Propositie V. Vertaling van Dijksterhuis (1930, p. 238).

⁴⁷Euclides, *Elementen*, Boek XII, Lemma na Propositie II. Eigen vertaling van de weergave van Heath (1956, vol. III, p. 373).

⁴⁸Euclides, *Elementen*, Boek XII, Propositie III. Eigen vertaling van de weergave van Heath (1956, vol. III, p. 378).

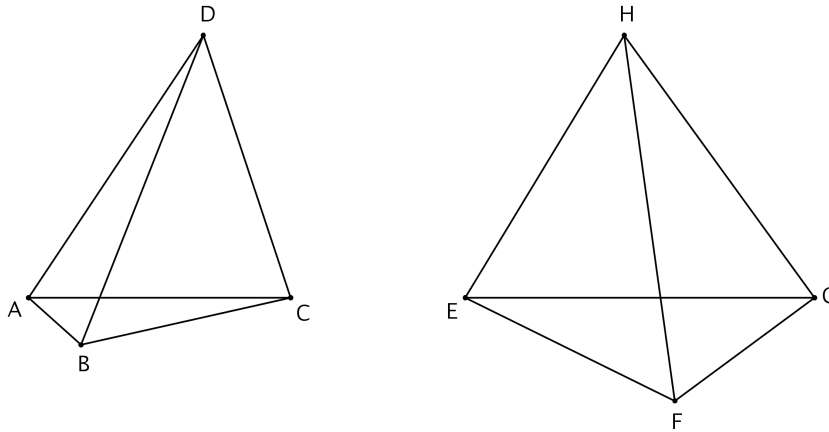
de gehele pyramide, en in twee gelijke prisma's, dan, zo de basis van de ene pyramide staat tot de basis van de andere, zo zullen ook alle prisma's van de ene staan tot alle prisma's (gelijk in aantal) van de andere pyramide.⁴⁹

Deze stellingen worden bewezen in bijlage C als stelling 1, 2 en 3. Om overtuigd te raken van de juistheid van de vijfde Propositie die we nu gaan behandelen, is het raadzaam in de bijlage eerst de bewijzen van bovenstaande Proposities te bestuderen.

Het bewijs voor de vijfde Propositie We willen bewijzen⁵⁰ dat

$$\begin{aligned}\triangle ABC : \triangle EFG &= ABC.D : EFG.H \\ &= \Pi_1 : \Pi_2\end{aligned}$$

waarbij Π_1 en Π_2 de pyramide $ABC.D$ resp. $EFG.H$ voorstellen, zie figuur 7.6. De hoogtes van beide pyramiden zijn gelijk.



Figuur 7.6: Twee pyramiden met gelijke hoogte staan tot elkaar als hun bases.

Stel dat deze evenredigheid *niet* zou gelden, dan geldt

$$ABC : EFG = \Pi_1 : X$$

met $X > \Pi_2$ of $X < \Pi_2$. Kies eerst $X < \Pi_2$. Verdeel Π_2 volgens de derde Propositie van het twaalfde Boek van Euclides in pyramiden en prisma's. De pyramide Π_2 kan verdeeld worden in twee gelijke en gelijkvormige pyramiden die ook gelijkvormig zijn aan de grote pyramide Π_2 , en twee gelijke prisma's, die samen groter zijn dan de helft van Π_2 . De twee gelijke en gelijkvormige pyramiden kunnen op hun beurt weer op een soortgelijke manier verdeeld worden. Dit proces is net zo lang voort te zetten totdat de som van de overblijvende pyramiden kleiner is dan $\Pi_2 - X$.⁵¹ De som van de parallellogrammen die we dan gevormd hebben, noem deze Σ_2 , zal dan groter moeten zijn dan X . Er geldt nu dus

$$X < \Sigma_2 < \Pi_2.$$

⁴⁹Euclides, *Elementen*, Boek XII, Propositie IV. Eigen vertaling van de weergave van Heath (1956, vol. III, p. 382)

⁵⁰Voor het bewijs van de vijfde Propositie maak ik gebruik van de uitwerking van Dijksterhuis, maar schrijf wel (deels) in mijn eigen notatie.

⁵¹Dijksterhuis verwijst hier naar de eerste Propositie van het tiende Boek. Deze vertelt, in de vertaling van Dijksterhuis (1930, p. 170): 'Indien, wanneer twee ongelijke grootheden uitgezet zijn, van de grootste een stuk, grooter dan de helft, wordt afgenomen en van de rest een stuk, grooter dan de helft, en indien dit steeds zoo doorgaat, dan zal er een grootheid overblijven, die kleiner zal zijn dan de uitgezette kleinste grootheid.' Het bewijs laten we verder buiten beschouwing.

Verdeel nu pyramide $ABC.D$ net zo vaak als pyramide $EFG.H$ in kleinere pyramides en prisma's verdeeld is, volgens het principe van de derde Propositie van Boek XII. Noem de som van al de prisma's Σ_1 . Dan volgt uit Propositie vier van Boek XII (zie bijlage C)

$$\triangle ABC : \triangle EFG = \Sigma_1 : \Sigma_2.$$

Oftewel

$$\Pi_1 : X = \Sigma_1 : \Sigma_2.$$

We weten dat $\Pi_1 > \Sigma_1$ en dus volgt daaruit dat ook $X > \Sigma_2$, terwijl we juist veronderstelden dat $X < \Sigma_2$. Tegenspraak.

Kies nu $X > \Pi_2$. Dan volgt dus

$$\triangle ABC : \triangle EFG = \Pi_1 : X$$

met $X > \Pi_2$. Schrijf dit als volgt

$$\triangle EFG : \triangle ABC = X : \Pi_1.$$

Uit het lemma volgend op de tweede Propositie van het twaalfde Boek volgt

$$X : \Pi_1 = \Pi_2 : Y$$

met $Y < \Pi_1$ (omdat $X > \Pi_2$). De situatie die nu ontstaat is

$$\triangle EFG : \triangle ABC = \Pi_2 : Y$$

met $Y < \Pi_1$. Dit geval is analoog aan de beginsituatie toen we veronderstelden $X < \Pi_2$ en kwam toen op een tegenspraak uit, wat dus nu weer gebeurt.

Zowel $X < \Pi_2$ als $X > \Pi_2$ levert een tegenspraak op. Enige mogelijkheid is dus dat $X = \Pi_2$. En dus

$$\triangle ABC : \triangle EFG = \Pi_1 : \Pi_2.$$

Met dit resultaat is het eerder gegeven bewijs voor de inhoudsformule van de pyramide geldig verklaard. \square

Limietproces bij de bewijzen van Van Swinden en De Gelder

Zoals bij de opmerking op pagina 68 verteld, is de hoofdlijn van het bewijs van Van Swinden en De Gelder voor de inhoud van een gewone pyramide overeenkomstig de manier van Euclides.

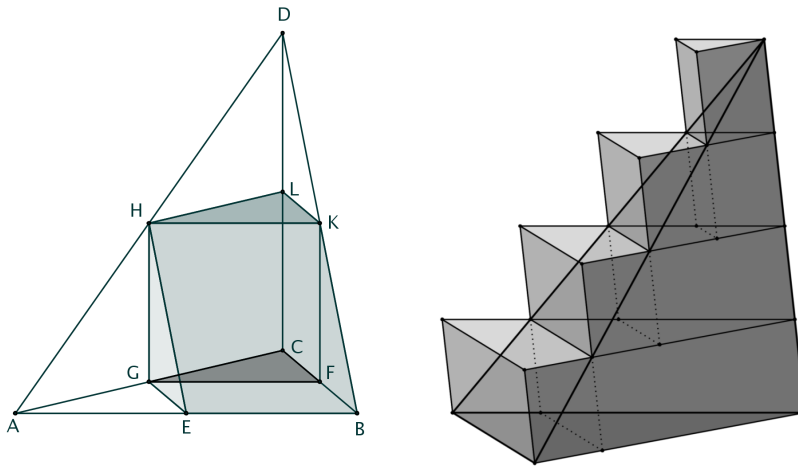
Hoe zit het met het bewijs voor de stelling dat twee pyramides met dezelfde hoogte zich verhouden als hun grondvlakken? Van Swinden houdt zich aan de opbouw van Euclides. In afzonderlijke stellingen behandelt hij de Proposities III, IV en V uit het twaalfde Boek. Zoals we in hoofdstuk 6 zagen, geeft hij met regelmaat alleen korte indicaties van bewijzen en niet een geheel uitgeschreven bewijs. We kunnen dus niet exact nagaan of zijn *bewijzen* ook juist zijn, maar de logische opbouw van de stellingen is in orde. (Als hij bewijzen heeft gegeven op de manier van Euclides - hier besproken in bijlage C - dan moeten de bewijzen van Van Swinden ook goed geweest zijn). Soms voegt hij zelf nog een extra stelling toe. Zoals de XXIste die betoogt dat een pyramide de limiet is van de som van de prisma's bij herhaalde verdeling (in twee pyramides en twee prisma's).

Ook De Gelder behandelt de stelling 'De inhouden der driehoekige piramides welke gelijke hoogten hebben, staan tot elkander in dezelfde reden, als de inhouden van derzelver grondvlakken.'⁵² Het bewijs dat hij geeft is echter anders dan wat we hiervoor zagen. Hij verdeelt de pyramide in lagen, elk evenwijdig aan het grondvlak en allen even ver van elkaar afstaand, zodat de complete pyramide opgedeeld wordt in compartimenten met gelijk hoogte. Zie figuur 7.7, de rechter pyramide. Vervolgens kun je voor elke laag een prisma binnen en een buiten de pyramide

⁵²Boek XI, Stelling XVIII uit Gelder (1810, p. 333).

vormen, dat kleiner resp. groter is dan het corresponderende compartiment. (Dit is hetzelfde idee wat bij boven- en ondersommen van integralen gebeurt.) Hij kijkt naar het verschil tussen die prisma's en concludeert dat als nu het aantal lagen vermeerderd wordt, dat verschil steeds kleiner wordt. Passen we het proces toe op twee piramides, dan staan de grondvlakken tot elkaar als de som van alle prisma's (eerder behandeld). De Gelder stelt tenslotte dat als nu de lagen zoveel zijn, zodat het verschil kleiner wordt dan een willekeurige hoeveelheid, dat dan de sommen van de prisma's de inhoud van de pyramide zullen benaderen, zodat ook de verhouding tussen de piramides gelijk is aan de verhouding tussen de grondvlakken.

Hier geeft De Gelder weer een net niet helemaal volledig bewijs. Zoals hij ook bij de evenredigheden de 'limietstap' aan het einde alleen vermeldde, maar niet bewees; zo laat hij ook hier het bewijs van het laatste stukje achterwege. Experimenteel is het duidelijk, strikt logisch opgebouwd net niet helemaal volledig.



Figuur 7.7: Twee pyramides. De linker is (eenmaal) opgedeeld in twee prisma's en twee kleine pyramiden (Euclides en Van Swinden). De rechter is gevuld met lagen prisma's binnen en buiten de pyramide (De Gelder).

Er is een essentieel verschil tussen de methode van Euclides en Van Swinden enerzijds en De Gelder anderzijds. Euclides voegt iedere volgende stap iets kleins toe aan zijn benadering. De Gelder geeft steeds een compleet nieuwe inklemming. Beiden werken naar een limiet toe: voor Euclides (en Van Swinden) is de limiet van de som van alle ingeschreven parallellogrammen (die steeds kleiner worden) gelijk aan de complete pyramide. Bij De Gelder wordt als we de hoogte van de prisma's naar 0 laten gaan het verschil tussen de ingeschreven en omgeschreven prisma's ook 0, waardoor de som van de ingeschreven (evenals de omgeschreven) prisma's dan de inhoud van de pyramide geven. Bij Euclides zouden we kunnen spreken van een oneindige reeks met als limietwaarde de inhoud van de pyramide; bij De Gelder is het een oneindige rij van inhouden van ingeschreven (of omgeschreven) prisma's die als limiet de inhoud van de pyramide heeft.

Tussen de eerste en tweede drukken voor beide auteurs afzonderlijk bestaan geen verschillen.

7.4.2 De afgeknotte pyramide

Nu we de formule voor de inhoud van een gewone pyramide gevonden hebben, wordt het tijd te kijken naar de afgeknotte versie. We zouden kunnen volstaan met op te merken dat als je een pyramide hebt waar een topstukje van mist, het eenvoudig is het overgebleven deel te berekenen. Immers, bereken de inhoud van de complete pyramide en die van het ontbrekende deel (dat ook een pyramide is), en het verschil is de gevraagde inhoud. We zullen straks zien dat deze methode ook aan bod komt. Ik noem dit de 'simpele methode'. Wiskundig zou het mooier zijn als het lukt

een formule te vinden voor de inhoud die rechtstreeks uitgaat van het afgeknotte stuk en niet ook de totale pyramide gebruikt.

Laten we de bewijzen voor de afgeknotte pyramide in chronologische volgorde behandelen. Dit betekent dat we achtereenvolgens kijken naar SI, GI, SII en tenslotte GII.

SI

Van Swinden behandelt in zijn eerste druk de stelling voor de inhoud van een gewone pyramide. Dat is Voorstel XXV van het elfde Boek. Allerlei ‘gevolgen’ worden na die stelling genoemd. Het achtste gevolg luidt:

Hier uit volgt dat men ook den inhoud van eene geknotte pyramide vindt, door het verschil tusschen de geheele pyramide en het afgeknotte stuk, dat ook eene pyramide is, te neemen.⁵³

Deze opmerking komt erop neer dat als je een bepaald deel van iets wilt nemen, je dan het totaal minus het ontbrekende stuk berekent. Er wordt geen directe formule gegeven voor het afgeknotte stuk.

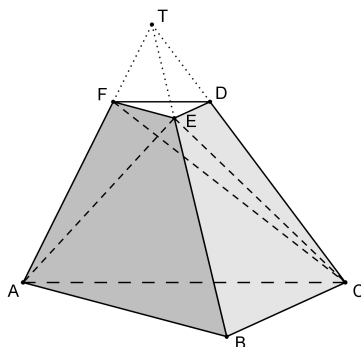
We zien dat Van Swinden in SI de simpele methode gebruikt. Deze aanpak werkt, maar zou er ook een formule zijn die direct het afgeknotte stuk geeft, zonder eerst de inhoud van de totale pyramide te moeten berekenen?

GI

We gaan nu kijken naar de eerste druk van De Gelder. We zijn aanbeland in het elfde Boek, bij de XXIVste Stelling. Ik gebruik voor de notatie van pyramide met grondvlak x, y, z en top t weer de notatie $xyz.t$.

De inhoud van eene afgeknotte driehoekige piramide is gelijk aan de som van de inhoudden van drie piramiden, welke alle dezelfde hoogte der afgeknotte piramide hebben, en welker bases respectievelijk zijn de bases, het bovenvlak en eene midden-evenredige tusschen de bases en het bovenvlak van deze afgeknotte piramide.⁵⁴

Het bewijs dat de Gelder geeft is niet eenvoudig. Deel de afgeknotte pyramide $ABCDEF$ (zie



Figuur 7.8: De afgeknotte pyramide bij De Gelder.

figuur 7.8) door het vlak door A, E en C . Dan blijven over pyramide $ABCE$ en veelvlak $ACDFE$. Deel het veelvlak nu door het vlak door EFC . Dan blijven over de pyramides $DFEC$ en $ACFE$. De afgeknotte pyramide $ABCDEF$ is nu verdeeld in de afzonderlijke pyramides $ABCE$, $ACFE$ en $DFEC$.

⁵³Swinden (1790, p. 417, Boek XI, Voorstel XXV, achtste Gevolg).

⁵⁴Gelder (1810, p. 342, Boek XI, Stelling XXIV).

In de XXIste Stelling is betoogd dat de inhouden van pyramiden tot elkaar staan als de grondvlakken (hoogten) bij gelijke hoogten (grondvlakken). Hieruit volgt: $\text{Pyr } ABCE : \text{Pyr } ACFE = \triangle ABE : \triangle AEF$. Immers: de grondvlakken liggen in hetzelfde vlak $ABEF$ en C is beide keren de top (dus hoogte=hoogte).

$AB \parallel EF$, dus⁵⁵ $\triangle ABE : \triangle AEF = AB : EF$, dus $\text{Pyr } ABCE : \text{Pyr } ACFE = AB : EF$.

Op deze manier vinden we ook dat $\text{Pyr } ACFE : \text{Pyr } CDEF = BC : ED$. We weten dat $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, dus $AB : EF = BC : ED$. Hieruit kunnen we dus concluderen dat $\text{Pyr } ABCE : \text{Pyr } ACFE = \text{Pyr } ACFE : \text{Pyr } CDEF$. En daarom is de inhoud van $ACFE$ middenevenredige tussen de inhouden van $ABC.E$ en $CDE.F$.⁵⁶

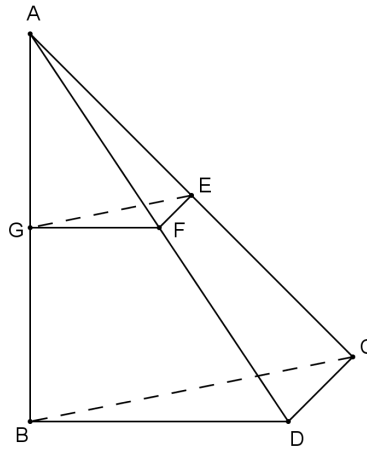
$ABC.E$ en $DEF.C$ hebben dezelfde hoogte. Dus $ABC.E : DEF.C = \triangle ABC : \triangle DEF$. Noem P de basis van de pyramide die dezelfde hoogte heeft en neem $\triangle ABC : P = P : \triangle DEF$. De pyramide die P als basis heeft is $ACFE$, want $\triangle ABC : P = P : \triangle DEF$ is gelijk aan $ABC.E : P = P : DEF.C$.

... de afgeknotte piramide is derhalve gelijk aan de som der pyramiden $ABCE$, $DEFC$, en de pyramide, welke P of de midden-evenredige, tusschen de driehoeken ABC en DEF tot basis heeft.

□

SII

Het is bijzonder dat Van Swinden in zijn tweede druk weer de simpele versie van de afgeknotte pyramide opschrijft, maar daar twee belangrijke ‘Aanmerkingen’ aan toevoegt. Hij gebruikt figuur 7.9. Als $BACD$ rechthoekig is geldt voor de inhoud van de afgeknotte pyramide $\frac{1}{3} (\triangle BCD \times AB -$



Figuur 7.9: De afgeknotte pyramide bij Van Swinden, tweede druk.

$\triangle GFE \times AG$). Met het XIX. Voorstel is dit als volgt om te schrijven⁵⁷

$$\frac{AG^2}{AB^2} = \frac{\triangle GFE}{\triangle BDC}. \quad (7.3)$$

⁵⁵Bedenk voor dit argument dat de oppervlakte van een driehoek gelijk is aan de halve basis maal de hoogte en dat in dit geval de hoogtes gelijk zijn.

⁵⁶Dit is per definitie het geval. Een middenevenredige h is dat getal dat gelijke verhoudingen met a en b oplevert als a staat tot h gelijk is aan h staat tot b . In moderne breuknotatie: bij gegeven a en b , zoek h zo dat geldt $\frac{a}{h} = \frac{h}{b}$. We zien dat $h = \pm\sqrt{ab}$.

⁵⁷Dat voorstel luidt als volgt. ‘Indien men een *pyramide*, of naald, door een vlak snijdt, dat evenwijdig is aan het grondvlak: zal de snede aan het grondvlak gelijkvormig zijn, en tot hetzelfde staan, als het vierkant van haren afstand van den top tot het vierkant van den afstand des grondvlak insgelijks van den top. [zijdeaanduiding weggelaten] (Swinden, 1816, p. 474, Boek XI, Voorstel XIX).

Dus voor de inhoud I van de afgeknotten pyramide:

$$I = \frac{1}{3} \triangle BCD \left(AB - \frac{AG^2}{AB^2} AG \right) = \frac{1}{3} \triangle BCD \left(\frac{AB^3 - AG^3}{AB^2} \right).$$

In de tweede aanmerking wordt dit verder uitgewerkt.

$$AB^3 - AG^3 = (AB^2 + AB \times AG + AG^2)(AB - AG),$$

dus

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3} \triangle BCD \times \frac{(AB^2 + AB \times AG + AG^2)(AB - AG)}{AB^2} \\ &= \frac{1}{3} \triangle BCD \times \frac{AB^2 + AB \times AG + AG^2}{AB^2} \times BG \\ &= \frac{1}{3} \triangle BCD \times BG + \frac{1}{3} \triangle BCD \frac{AG}{AB} \times BG + \frac{1}{3} \triangle BCD \frac{AG^2}{AB^2} \times BG \end{aligned}$$

Hierboven staan achtereenvolgens: de inhoud van een pyramide met hoogte BG en grondvlak BCD , de inhoud van een pyramide met hoogte BG en grondvlak $BCD \times \frac{AG}{AB}$ en tenslotte de inhoud van een pyramide met hoogte BG en grondvlak $BCD \times \frac{AG^2}{AB^2}$. De eerste is duidelijk. Het grondvlak van de tweede is middenevenredige h tussen de eerste en derde:

$$\frac{BCD}{h} = \frac{h}{BCD \frac{AG^2}{AB^2}} \quad \rightarrow \quad h = \sqrt{BCD^2 \times \frac{AG^2}{AB^2}} = BCD \times \frac{AG}{AB}.$$

De derde tenslotte is de inhoud van een pyramide met hoogte BG en grondvlak $\triangle GFE$ (zie vergelijking (7.3)). \square

We zien dat we precies op de stelling van De Gelder uit GI uitkomen, maar met een bewijs dat begint met het simpele geval uit SI.⁵⁸

GII

Stelling en bewijs is gelijk aan de situatie in GI.

7.4.3 Vergelijking

We hebben in deze paragraaf gekeken naar het vinden van de inhoud van een pyramide en die van een afgeknotten exemplaar. Voor de behandeling van de eerste bleek bij een meetkundig onderwerp een limietproces aan bod te komen. Zowel Van Swinden als De Gelder geven hier aandacht aan. De methode van Van Swinden sluit aan bij die van Euclides, een strikt opgebouwde, zorgvuldig geformuleerde redenering. Die van De Gelder is een alternatieve optie. Modern gezegd zou Van Swinden zijn bewijs geven met behulp van een oneindige reeks en De Gelder met een oneindige rij (zij het dat De Gelder het laatste stukje bewijs achterwege laat). Het is een kwestie van smaak welk bewijs uiteindelijk de voorkeur zou verdienen.

Bij de behandeling van de inhoud van de afgeknotten pyramide is het veelzeggend dat Van Swinden in de eerste druk alleen de ‘simpele methode’ beschrijft. De directe formule en het bewijs daarvoor geeft hij wel in de tweede druk. Hij heeft in SII niet het bewijs van De Gelder gekopieerd, want zijn bewijs volgt duidelijk een andere lijn. Tegelijk blijft De Gelder bij zijn eigen bewijs, ook in de tweede druk, terwijl Van Swindens versie minder stappen nodig heeft. De Gelder wilde aan zijn eigen methode vasthouden, kennelijk.

⁵⁸Merk op dat de stelling ook waar is voor niet rechthoekige (afgeknotten) pyramiden, maar dan moet er een lijnstuk als hoogte bepaald worden. Dat is dan niet meer AB in figuur 7.9.

Het is interessant te kijken of dit iets zegt over het belang dat beide auteurs hechtten aan het al dan niet gebruikmaken van algebra binnen de meetkunde. De Gelder maakte een meetkundige indeling van de afgeknotte pyramide en op basis daarvan bewees hij zijn inhoudsformule. Van Swinden bewandelde echter, uitgaande van de inhoudsformule voor de complete en de ontbrekende pyramide, een algebraïsche weg om tot zijn bewijs te komen. In paragraaf 7.1.1 zagen we ook al dat Van Swinden zijn stellingen verrijkt had met algebraïsche bewijzen. Toch blijkt het dat we met dit soort conclusies heel voorzichtig moeten zijn en die op dit moment niet in zijn algemeenheid kunnen trekken. In de Voorrede van *Hoogere Meetkunst* zegt De Gelder namelijk

Zoo ik, in het leeren, den ouden stijven Euclidiaanschen trant verwerp, verwerp ik daarom de hulpmiddelen der oude Meetkunst niet; ik verwerp slechts de gebrekkige manier van dien tijd; (*) gebruik makende van de hulpmiddelen, die de tegenwoordige staat der kunst aanbiedt; daarin NEWTON volgende, die zijne *Principia* wel in den Hoogen stijl der oude Meetkunst schreef; maar echter van de nieuwe hulpmiddelen een gepast en vernuftig gebruik maakte (...)

(*) Veroorzaakt door het gemis der hulpmiddelen, in welker bezit ons de tegenwoordige eeuw gesteld heeft.⁵⁹

Voor het geval van de pyramide is het verschil zichtbaar, maar uit het citaat blijkt dat op andere momenten ook De Gelder graag gebruik maakt van ‘nieuwe hulpmiddelen’ - algebra.⁶⁰

In ieder geval is duidelijk dat aan de hand van een pyramide, of die nu afgeknot is of niet, behoorlijk wat wiskunde en wiskundige concepten gepresenteerd kunnen worden. Beide auteurs hebben van de gelegenheid gebruik gemaakt om dat op hun eigen manier te doen.

7.5 Samengevat

In dit hoofdstuk hebben we de meetkundeboeken van Van Swinden en De Gelder op een aantal inhoudelijke onderwerpen met elkaar vergeleken. Achtereenvolgens kwamen de stelling van Pythagoras, evenredigheid en de inhoud van een al dan niet afgeknotte pyramide aan bod. Door alle vergelijkingen heen is er een aantal zaken dat opvalt.

Uit de onderzochte onderwerpen blijkt dat de auteurs soms redelijk met elkaar overeenkomen en alleen details het onderscheid maken (stelling van Pythagoras), soms ook zeer verschillend een onderwerp behandelen (evenredigheid) en ten slotte soms ook onderwerpen vanuit andere hoeken benaderen (limietproces bij pyramide, inhoudsformule afgeknotte versie). Deze verschillen maken het interessant de vergelijking tussen beide auteurs te maken.

Verschillen in de behandeling van de specifieke onderwerpen

Van Swinden gebruikt voor het bewijs van de stelling van Pythagoras en de bewijzen voor de inhoud van de gewone pyramide de methode die we ook bij Euclides vinden. Voor Pythagoras geeft De Gelder een ander bewijs dan Euclides, maar in de hoofdlijnen lijkt het er veel op. Wel heeft De Gelder meer stappen nodig om tot het resultaat te komen. Welk bewijs door de studenten van die dagen het snelste begrepen zou worden is nu moeilijk na te gaan, maar de afbeelding die De Gelder gebruikt bij zijn bewijs lijkt minder overzichtelijk. Wellicht dat hij dat later zelf ook zo beoordeelde, toen hij in de derde druk overstapte op Euclides' bewijsmethode.

Voor het bewijs van de inhoud van een pyramide gebruiken Van Swinden (Euclides) en De Gelder allebei een limietproces. Het verschil in benadering ligt in het feit dat, modern gezegd, Van Swinden met een oneindige reeks werkt en De Gelder met een oneindige rij. Ondanks het feit

⁵⁹Gelder (1824, p. xxix).

⁶⁰Euclides gebruikte geen algebra.

dat De Gelder zijn bewijs net niet volledig geeft, zijn beide manieren toegestaan om het bewijs te leveren (mits dit dan volledig gebeurt, uiteraard).

De grootste verschillen treden op bij de behandeling van evenredigheid en de afgeknotte pyramide. Van Swinden kiest er voor om een eigen (dat wil zeggen: anders dan Euclides) definitie van evenredigheid te geven, waarbij hij onder andere opmerkt dat de definitie van Euclides ‘niet geheel duidelijk’ is. Ik vraag me af voor wie volgens Van Swinden die definitie niet duidelijk was en ben van mening dat Van Swinden zichzelf dan ook aangesproken moet voelen. Van Swinden ziet niet de problemen die Euclides wel zag. Als een verhouding irrationaal is, kun je die verhouding niet zonder meer schrijven als breuk en daarmee bewijzen leveren. Van Swinden doet dat wel en denkt een (creatieve, dat moet gezegd worden) oplossing te hebben gevonden, door dan maar te doen alsof zo’n breuk bestaat. Hij ontduikt hiermee de moeilijkheden. De theorie die hij geeft is (strikt genomen) alleen correct toepasbaar op rationale verhoudingen. Alleen in dat geval volgt bovendien Euclides’ definitie uit de zijne. In het geval van irrationale verhoudingen is dat niet zo, omdat de ‘dingen’ die hij opschrijft niet bestaan. Het heeft dus geen zin te doen alsof. Ondanks dat hij meent ‘de leer der evenredigheden vollediger dan gewoonlijk geschiedt behandeld te hebben’,⁶¹ schiet hij in de theorie van evenredigheid juist te kort.

De Gelder heeft deze moeilijkheid uitstekend voorzien. Met de betrekkingwijzer introduceert hij een concept waarmee ook irrationale verhoudingen aangepakt kunnen worden. Het is dus wel degelijk mogelijk van Euclides af te wijken en toch een correcte definitie van evenredigheid te geven. Bij het bewijs dat De Gelder van de behandelde stelling geeft, lukt het hem helaas niet vanuit zijn eigen definitie een volledig logisch bewijs te geven. Het *klinkt* heel aannemelijk wat hij aan het einde van zijn bewijs opmerkt, maar een wiskundig bewijs is pas correct als dit ook daadwerkelijk *wiskundig* aannemelijk wordt gemaakt. En dit laat De Gelder na. Ik vermoed dat hij dit zeker niet met opzet zo gedaan heeft, of het te moeilijk zou vinden voor de lezer; de kans is groot dat hij de onvolledigheid zelf simpelweg niet gezien heeft. In zijn voorrede verzekert De Gelder ons dat zijn behandeling van de evenredigheid beter dan de gewone en beter dan die van Euclides is. Om te beginnen met Euclides: beoordelen of De Gelders definitie beter dan die van Euclides is, is een lastige en wellicht ook persoonlijke aangelegenheid. De Gelders gepresenteerde bewijs was helaas niet volledig en kan dus niet als beter dan Euclides bestempeld worden. Zou deze wiskundig wel correct gegeven zijn, dan geldt ook hier dat het kiezen van een ‘betere’ bewijsmethode uit twee correcte opties een subjectieve zaak is. En de ‘gewone benadering’: als De Gelder daar de benadering van Van Swinden mee bedoelt (en dat is zeker niet uitgesloten gezien de status van Van Swindens boek), geeft hij wat dat betreft wel degelijk een betere definitie, omdat we zagen dat Van Swinden slordig omgaat met irrationale verhoudingen.

Bij de afgeknotte pyramide zijn interessante verschillen waar te nemen. In Van Swindens eerste druk vinden we alleen maar de ‘simpele methode’: de inhoud van het afgeknotte stuk is gelijk aan het totale stuk minus het ontbrekende stuk.

De Gelder komt gelijk met een directe inhoudsformule. De meetkundige indeling die hij maakt en daarbij het ruimtelijk inzicht dat de lezer moet hebben, maken het bewijs niet makkelijk. Wel is het correct.

In de tweede druk komt Van Swinden met een algebraïsch bewijs. Het kost minder stappen om nu een sluitende redenering te maken. Ik vind het opvallend dat De Gelder in een latere druk geen melding van deze algebraïsche methode maakt. Toch is gebleken dat niet geconcludeerd mag worden dat De Gelder weinig waarde zou hechten aan algebra. In een andere bron gaf De Gelder wel degelijk aan daar graag gebruik van te maken.

Rol van Euclides in de boeken

Voor beide auteurs hebben (onder andere) de *Elementen* van Euclides als voorbeeld gediend bij het schrijven van de meetkundeboeken. Op basis van de hierboven gemaakte vergelijking kunnen

⁶¹Swinden (1816, p. xiv-xv) Fragment is afkomstig uit de voorrede van de eerste druk, ook opgenomen in de tweede uitgave.

we concluderen dat Van Swinden het vaakst bij Euclides' bewijzen blijft. We zagen dit bij de stelling van Pythagoras en de inhoud van de gewone pyramide.

De keren dat Van Swinden eigen initiatieven neemt, ontstaan resultaten die niet altijd bevredigend zijn. Zoals hierboven bleek, gaat het bij de evenredigheid fout. Voor de inhoudsformule van een afgeknotte pyramide, niet behandeld door Euclides, geeft Van Swinden in eerste instantie alleen de simpele methode. Zeker niet fout, maar het kan wiskundig mooier.

Voor de onderzochte onderwerpen blijkt De Gelder voor *alle* bewijzen (deels) eigen methodes te hebben! Voor Pythagoras geeft hij een ander bewijs, al moet gezegd worden dat het verschil met Euclides niet heel groot is. Bij de evenredigheid geeft De Gelder een geheel andere definitie. Het bewijs van de inhoud van de gewone pyramide is globaal wel gelijk aan dat van Euclides, maar voor het onderdeel van het limietproces gaat hij toch zijn eigen weg.

In tegenstelling tot Van Swinden wordt de afgeknotte pyramide door De Gelder wel meteen 'direct' behandeld.

De vergelijking op de drie onderwerpen is te gering om in het algemeen te kunnen zeggen dat Van Swinden zich nog erg houdt aan de bewijzen van Euclides en De Gelder altijd zijn eigen weg zou gaan. Bij het lezen van de hoofdtekst van de boeken heb ik de stof niet voortdurend naast Euclides' boeken gelegd. De vergelijking is dus beperkt gebleven tot deze drie onderwerpen. Wel kunnen we tot nu toe voorzichtig stellen dat De Gelder (op bepaalde momenten) origineler en gedurfder is.

Onderlinge beïnvloeding

Los van de wiskundige inhoud kunnen we ook kijken of het in de meetkundeboeken duidelijk wordt of de auteurs elkaars boeken wellicht hebben gebruikt en zo elkaar beïnvloed hebben. Misschien kan dit ons nog wat vertellen over de relatie tussen de auteurs, ook al was die er niet meer persoonlijk. Ik twijfel er niet aan dat ze elkaars boeken in handen hebben gehad. Als een auteur een aanpassing gedaan heeft, blijkt dat hij in de andere zijn meerdere wil erkennen. Maar tegelijk kunnen we ook uit het *niet* aanpassen van een bewijs conclusies trekken.

Het vermoeden van persoonlijk ontwikkelen en op elkaar reageren zien we het duidelijkst terug bij de evenredigheid. De Gelder komt met iets nieuws: de betrekkingwijzer. Vervolgens komt Van Swinden met een bewijs van de irrationaliteit van de verhouding van zijde en diagonaal van een vierkant. Het principe dat hij gebruikt, een oneindig maar wel bekend delingsalgoritme, kan vertaald worden naar De Gelders betrekkingwijzer: een oneindige maar wel bekende rij wijzertallen. In de derde druk bij De Gelder vinden we ten slotte schema's om van de kettingbreuk die uit Van Swindens bewijs van het irrationale volgde, een benadering te geven.

Behalve het aanpassen, blijven de auteurs soms ook juist vasthouden aan hun eigen methode. Van Swinden blijft bij zijn eigen behandeling van evenredigheid (zou iemand hem op de onnauwkeurige definitie gewezen hebben?). Hij stapt niet over op De Gelders wijzertallen of op de definitie van Euclides. De Gelder blijft bij zijn bewijs van de afgeknotte pyramide en geeft niet (eventueel als opmerking of alternatief) het algebraïsche bewijs dat we bij Van Swinden tegenkomen. Dit geeft aan dat de auteurs niet zomaar met de nieuwe winden mee wilden waaien: ze waren persoonlijk betrokken bij de wiskundemethode die ze presenteerden. Heel bewust kozen ze die.

Duidelijkheid, overzichtelijkheid en presentatie

Zoals eerder opgemerkt geeft Van Swinden regelmatig alleen korte aanwijzingen als hij een bewijs geeft. De Gelder werkt alle bewijzen uitgebreid uit. Dit verschil is ook in de behandeling van de onderwerpen aan het licht gekomen. Het is moeilijk de vraag te beantwoorden welke auteur de onderwerpen het meest eenvoudig presenteert. De korte bewijzen maken het lezen van Van Swindens boek overzichtelijk, de rode draad is makkelijker te volgen. Daarentegen is De Gelders boek geschikter om zelf uit te studeren; de antwoorden worden ook gegeven, zagezegd. Maar dan moet de lezer wel de discipline hebben de stellingen eerst zelf proberen te bewijzen. Zoals we zagen waarschuwt Van Swinden ons voor het alleen maar oplezen van een bewijs.

De verschillen die hier nu aan bod komen zijn mogelijk te verklaren aan de hand van het beoogde publiek. We hebben gezien dat Van Swinden zijn boek schreef voor studenten en gebruikte tijdens zijn eigen lessen. Hij kon dan ieder bewijs zelf leveren, als de studenten er niet uitkwamen. Voor De Gelder lijkt het aannemelijk dat hij zijn boek (onder andere) schreef voor algemeen geïnteresseerden en (aankomende) docenten. Het is waarschijnlijk dat deze mensen meer gebaat waren bij een boek met uitwerkingen.

Eigen manier

Samenvattend kunnen we concluderen dat ondanks de grote overeenkomst in de beide meetkundeboeken inclusief hun herdrukken, er ook significante verschillen bestaan. Daarnaast is het los van de wiskunde nog mogelijk te kijken naar de onderlinge beïnvloeding. Het blijkt dat soms de een zich na verloop van tijd aan de ander aanpast. Het vermoeden is dat de auteurs door elkaars werk op ideeën kwamen. Soms ook blijven de verschillen bestaan, waarbij we een blik kunnen werpen op de verschillende doelen die beide auteurs met hun boek voor ogen hadden.

De Gelder claimt in zijn voorrede dat hij geheel anders en beter dan zijn voorgangers de meetkunde beschrijft. Op diverse punten is het absoluut ‘anders’ te noemen. In sommige gevallen ook inderdaad ‘beter’. Van Swinden blijft meer dan De Gelder de lijn van Euclides volgen. Tegelijkertijd is hij niet voldoende in staat bij onderwerpen die bij Euclides nog niet van toepassing waren of waar hij beter dan Euclides wil zijn, uit zichzelf een bevredigende benadering te kiezen. De Gelder is op die momenten oorspronkelijker en vernieuwender. Zo zijn er twee boeken geschreven over dezelfde meetkunde, waarin de auteurs de stof allebei op hun eigen manier uitwerkten.

Hoofdstuk 8

Eindconclusie

In deze scriptie heb ik gekeken naar het wiskundeonderwijs in de negentiende eeuw in Nederland. Daarbij heb ik mij geconcentreerd op de meetkundeboeken geschreven door Jan Hendrik van Swinden en Jacob de Gelder. Aan het begin heb ik de volgende onderzoeksvraag gesteld.

Hoe is de ontwikkeling in het wiskundeonderwijs naar meer exactheid in het begin van de negentiende eeuw zichtbaar in de meetkundeboeken van Van Swinden en De Gelder en hoe waren zij persoonlijk bij deze ontwikkeling betrokken?

In de tweede helft van de achttiende en de eerste helft van de negentiende eeuw maakte het onderwijs in het algemeen en het wiskundeonderwijs in het bijzonder een ontwikkeling door. In de tweede helft van de achttiende eeuw ontstonden genootschappen van burgers die zich voor wetenschappen interesseerden, waaronder het Wiskundig Genootschap. Een ontwikkeling die voortvloeide uit het Verlichtingsideaal. Wiskundigen en mensen van de (wiskundige) genootschappen begonnen (opnieuw) in te zien dat wiskunde niet alleen van praktisch nut was, maar ook kon dienen om het verstand en denkvermogen te ontwikkelen en te trainen. In de wiskunde kwam de nadruk zo te liggen op meer exactheid. Op deze manier ontstond ook een belangstelling voor 'wiskunde om de wiskunde'.

Binnen deze veranderingen paste ook een behoefte aan nieuwe lesboeken, bij voorkeur in de eigen taal. Jan Hendrik van Swinden heeft in die behoefte willen voorzien door zijn *Grondbeginsels der Meetkunde* te schrijven. Voor dit boek diende als voorbeeld de *Elementen* van Euclides. We hebben gezien dat hij ook daadwerkelijk de oude strikte bewijstrant weer in wilde voeren, een bewijsmethode die in toenmalige boeken lang zo secuur niet meer werd toegepast. Hiermee sluit hij met zijn boek dus naadloos aan bij de ontwikkelingen van zijn tijd.

In tegenstelling tot tijdgenoten behandelt Van Swinden de stellingen uit de meetkunde dan ook op een nauwkeurige, logische manier: niet alleen de rekenregel, ook het bewijs ervan is belangrijk. We hebben gezien dat het hem zodoende gelukt is een overzichtelijk en toegankelijk boek te schrijven. In de onderzochte onderwerpen wijkt hij regelmatig weinig van de door Euclides gehanteerde opbouw af. Als hij beter dan Euclides wil zijn of zaken gaat behandelen die niet bij Euclides voorkomen, laat hij echter soms steken vallen met als belangrijkste onderdeel een slordige definitie van evenredigheid.

Twintig jaar na het verschijnen van het eerste Nederlandstalige meetkundeboek van niveau, wordt *Beginselen der Meetkunst* van Jacob de Gelder gepubliceerd. Ook dit boek past in de trend naar meer exactheid. De Gelder hunkert, nog meer dan Van Swinden, naar een volledig begrijpen van de stof door de studenten. Hij wil dit voor elkaar krijgen door bij elke stelling een volledig en nauwkeurig stapsgewijs bewijs te geven. Hij verwacht van zijn lezers dat zij net zo lang studeren totdat een stelling volledig begrepen is. Ten opzichte van Van Swindens boek zijn de onderzochte definities en bewijzen die De Gelder geeft vernieuwender.

Het is wel van belang op te merken dat voor het onderzoek uitgebreid stil gestaan is bij speci-

fiek drie onderwerpen: de stelling van Pythagoras, de theorie van evenredigheid en de inhoud van een al dan niet afgeknotte pyramide. Van de rest van de boeken is de hoofdttekst wel bestudeerd, maar inhoudelijk niet zo uitgebreid met elkaar vergeleken als bij de genoemde drie onderwerpen is gebeurd.

De ontwikkeling naar meer exactheid manifesteert zich dus in de besproken meetkundeboeken door de strikte opbouw en nauwkeurige bewijsvoering. Elementen die in boeken van tijdgenoten een veel minder belangrijke rol speelden. De presentatie van de bewijzen verschilt. Van Swinden geeft regelmatig alleen verwijzingen, De Gelder behandelt ze volledig. We hebben gezien dat dit verschil wellicht te verklaren is door de aannemelijke verschillende doelgroepen van de boeken. Voor Van Swinden is het belangrijk dat de studenten onder zijn begeleiding aan de stellingen werken. Ze moesten eerst zelf het bewijs zoeken en hadden anders hulp binnen handbereik. Had Van Swinden alle bewijzen in zijn boek afgedrukt, dan had hij het leerproces van zijn studenten veel minder goed kunnen volgen. De Gelders boek was waarschijnlijk onder andere bedoeld voor algemeen geïnteresseerden en (nieuwe) docenten. Deze hadden misschien of geen hulp bij de hand in de rol van een docent en / of waren bekwaam in het opbrengen van de discipline om zelf te blijven leren en niet slechts de bewijzen te lezen. Zodoende paste daar een andere manier van het omgaan met presenteren van bewijzen bij.

De ontwikkeling heeft ook een persoonlijke kant. De beide auteurs zijn lange tijd goed bevriend met elkaar geweest. Ondanks een blijvende meester-leerling-verhouding, zagen we dat ze op een ‘broederlijke’ manier met elkaar communiceerden. Voor hen beiden waren het verlangen de wetenschap te dienen en daarmee de mensheid naar een hoger plan te tillen, motivatie om hun werk te doen en zodoende ook de gelegenheid te nemen een meetkundeboek te schrijven. Ze gingen er helemaal voor. Bij Van Swinden blijkt dat uit zijn bewogenheid voor zijn studenten, een bewogenheid zo mogelijk nog groter dan voor de wiskunde zelf. Een bewogenheid die zich uitte in studenten die in Van Swinden de ideale leermeester zagen. Bij De Gelder blijkt zijn motivatie uit de verschillende artikelen en hoofdstukken die hij schreef over de ideale les. Bij de tweede druk van zijn meetkundeboek legt hij uit hoe (met name jonge) onderwijzers zijn adviezen ter harte moeten nemen om zo een optimaal resultaat van de studenten te kunnen verwachten. Beide auteurs hebben de vorderingen van de studenten op het oog.

De ruzie tussen Van Swinden en De Gelder komt heel onverwacht. De Gelder kan niet begrijpen waar de demonstratieve houding van Van Swinden zo plotseling vandaan komt, terwijl Van Swinden behoorlijk vaag blijft over wat de werkelijke oorzaak van de ruzie is. In de scriptie heb ik gekeken of de meetkundeboeken een rol in deze ruzie gespeeld kunnen hebben. Aanvankelijk lijkt dat niet het geval, als we kijken naar de redenen die Van Swinden aanvoert. Toch zet ik vraagtekens bij Van Swindens opmerking dat het enkel en alleen De Gelders handelwijze is. Reden hiervoor is dat ik, net als De Gelder, niet kan begrijpen dat het overschrijven van een stuk tekst tot een contactbreuk kan leiden in een relatie die voor beide personen vruchtbaar is, te meer gezien het feit dat De Gelder al eerder (uit hetzelfde boek!) materiaal had overgenomen en er toen geen vuiltje aan de lucht was. De handelwijze van Van Swinden doet denken aan een vluchtroute, een aanleiding zoekend om een verborgen frustratie te uiten.

Tegen deze benadering pleit het feit dat we Van Swinden hebben leren kennen als een heel integer man. Iemand die altijd klaar staat om anderen te helpen. Zou die dan niet eerlijk zijn over de ware aard van deze ruzie? De ontkrachting van deze zienswijze ligt in het feit dat Van Swinden dan wel duidelijker over de vermeende ‘letterdieverij’ was geweest en ook had verteld wat nu exact de ‘handelwijze’ van De Gelder was die Van Swinden tegen de borst stuitte en die hem vervolgens zó hoog zat dat hij alle contacten verbrak.

Zoals we zagen is het niet onmogelijk dat er bij Van Swinden een diepere frustratie al langer aanwezig was. Het is dan mogelijk dat het door De Gelder overschrijven van tekst van Van Swinden als druppel werkte die de emmer deed overlopen.

Het meetkundeboek van De Gelder kan (mede)oorzaak geweest zijn van een diepere irritatie bij Van Swinden. Als we ons realiseren dat De Gelder een nogal arrogante toon aanslaat in de

voorrede van zijn *Beginnelsen der Meetkunst*, waarin hij denigrerend over het werk van eerdere auteurs verklaart dat zijn methode de beste is, is het niet verwonderlijk met Van Swinden zowel teleurstelling als agressie mee te voelen. Van Swinden die altijd klaar stond om zijn collega te helpen, die deuren voor hem opende, hem voorzag van artikelen en boeken; hij wordt nu aan de kant gezet als ‘onbruikbaar’. Dat zou ons allen diep van binnen raken.

Zonder meer is door dit voorval duidelijk dat de auteurs persoonlijk betrokken waren bij het wiskundig bedrijf van hun tijd. Zelfs zo diep dat een vriendschap er door verbroken werd.

Nadat de persoonlijke relatie is verbroken, blijven Van Swinden en De Gelder elkaar op professioneel vlak wel erkennen en waarderen. We zagen dat Van Swinden dit bevestigt in zijn laatste brief en dat De Gelder later een rol speelde in de benoeming van Van Swinden tot erelid van het Wiskundig Genootschap. Bovendien noemt Van Swinden De Gelder in SII.

Samenvattend zien we dat de ontwikkeling naar meer exactheid binnen het wiskundeonderwijs in de meetkundeboeken waargenomen kan worden door de strikte en nauwkeurige bewijstrant, die beide auteurs op hun eigen manier uitwerken. Daarnaast zien we dat ze persoonlijk bij die ontwikkeling betrokken zijn door een ideaalbeeld te verspreiden zo veel mogelijk studenten in deze meetkunde zo goed mogelijk te willen onderwijzen en ook: door een nieuw meetkundeboek dat er (mede) de oorzaak van is dat een vriendschap stukloopt.

De meetkunde zoals Euclides die opschreef, heeft al vele eeuwen de mensen en gemoederen beziggehouden. Later zouden er nog mensen opstaan en meetkunde bedrijven waarbij bepaalde uitgangspunten van Euclides overboord werden gegooid. Een ontwikkeling in het zoeken naar ultieme exactheid en de ware fundamenten van de wiskunde. Jan Hendrik van Swinden en Jacob de Gelder hadden voldoende aan hun eigen meetkundeboeken. Naast elkaar gezien kunnen de werken elkaar enkel aanvullen. Beide boeken zijn zodoende het bestuderen nog steeds meer dan waard.

Bijlage A

Briefwisseling

In deze bijlage twee uitgewerkte brieven van achtereenvolgens De Gelder en Van Swinden.

A.1 De Gelders laatste brief

Brief van J. de Gelder aan J.H. van Swinden, 2 november 1810, BPL 2359 (UBL) - kopie afschrift van de originele brief.

Copij aan den J.H. van Swinden

Amsterdam, den 2 Nov. 1810

Hooggeleerde Heer!

Getroffen door Uw Ed onheusche bejegening toen ik Uw Ed gisteren op straat aansprak en gij mij geene gelegenheid liet om Uw Ed op uw gezegde te repliceren, zou mijn stilzwijgen hieromtrent eene ingewikkelde schulderkennis kunnen schynen en het gedrag van eenen man, die zich zelven schuldig gevoelende, zyne zaak niet durft bepleiten.

UwEd gelieft mij te beschuldigen dat ik uit Uw boek gestolen heb en UwEd had die onheuschheid van mij niet gewagt. Ik wil hier met Uw Ed in geen woordenstrijd treden over het geene letterdieverij eigenlijk is, elks opienien zyn vrij en het blykt reeds dat de onze over dit punt hemelsbreed verschillen. De daden in menschen worden misdaden door de wet, en de wet bepaalt en verbiedt de letterdieverij; wanneer ik nu tegen den geest of den letter dan niet gezondigd heb, waarom heeft dan de publieke aanklager toen Uw Ed drukker den Hengst de ondoordachte streek begaan heeft Allard aan te klagen, na myne mondelyke defensie gehoord te hebben, zynen eisch tegen hem niet verder doen gelden? dit bewyst immers, dat zyn WelEd met my, daarover geheel anders dan Uw Ed denkt. En waarlyk indien aanhalingen uit schryvers, wanneer men den naam noemt (zoo als ik overal gedaan heb) als letterdieverij zou moeten aangemerkt worden, zoo zou Uw Ed zoo min als ik ja geen schrijver de strengheid den wet kunnen ontwyken.

Ik kan intusschen myne verwondering niet verbergen: dat Uw Ed my het overnemen van De bewuste plaats uit uw boek thans zoo kwalyk neemt, daar ik in den jaren 1803 in myne Sterrekundige Aardrijkskunde vry wat meer uit Uw Ed boek dan thans heb overgenomen, en dezelfde plaatsen, waarover Uw Ed zich thans beklaagd ook in 1808 in het I Deel myner Wiskunige Lessen zyn overgenomen, ik de brieven welke Uw Ed my over die twee boeken geschreven heeft inziende, daarin geen de minste sporen ontdek dat toen by Uw Ed daarover eenig ongenoegen gerezen is en dus heb ik reden te vragen: waarom dan nú?

Uw Ed kan voor zich zelve redenen ja gewigtige redenen hebben om niet gaarne te zien dat anderen over deze stof schryven: maar daar ik de eenige niet ben, die daar over geschreven heeft en zeer denkelyk de eenige niet blyven zal, zoo behoorde Uw Ed my beter gekend te hebben, om te kunnen twyfelen, dat wanneer ik dienaangaande eenen ingewikkelden wenk van uwen wil vernomen had, ik wel ten uwen [zegvorde / manier van uiten] (en misschien voor niemand anders) aan denzelven dadelyk zoude gedefereerd hebben, wanneer het my tot een byzonder genoeg zou gebracht hebben iets natelaten dat Uw Ed aangenaam had kunnen zyn.

Ik ben geen vleyer, het geen ik zeg en schryf, eerlycs gezegd en geschreven heb is de ware meening van myn hart. En ik stel de grootste prys op vastheid van karakter, wanneer ik dus begreep Uw Ed beledigd te hebben, zoude ik my geene laagheid maar grootheid van ziel zelvenen Uw Ed de vereischte satisfactie te verschaffen: maar uit solitude of complaisance mij schuldig te erkennen, wanneer ik my niet schuldig gevoel is eene zaak welke keizer Napoleon met al zyn magt van mij niet zou verkrijgen. Het zou kunnen zyn, U.H. dat ik mij in mijn aandeel omtrent U bedrogen had en die vastheid van karakter uw ongenoegen jegens mij in vyandschap veranderde: maar dan moet ik Uw Ed verklaren, dat schoon het noodlot, de ongunst den tijden en de medewerking myner geheime vyanden, my in de laagte gehouden hebben ik my nogtans in myne eer en karakter door niemand zal laten krenken en ik niet ongevoelig eene beschuldiging verduwen zal waarvan niet slechts de wet maar ook myn hart en myn geweten my vryspreken.

Gelyk ik achtiging gevoel voor alle verdienstelyke menschen, zoo gevoel ik die ook voor Uw Ed (myn hart is Gode zy dank tot nog toe van jalouzij ontrent talenten vrygebleven) en de erkentelykheid by deze achtiging gevoegd bestuurde altyd mijn gedrag ten uwen opzigte. Ik kon dus daden gedaan hebben, die, buiten myn weeten Uw Ed ongenaam waren: maar ik kan, met die denkwyze beziel, den wil niet gehad hebben Uw Ed te beledigen en vooral niet om uw werk over de maten en gewigten eenige nadeel toetebrenge, en wanneer Uw Ed ook onpartydig zou wel myn laatste stukje als het geen ik by andere gelegenheden gezegd heb in zyn verband en samenhang leest, dan zal Uw Ed zelf moeten gevoelen dat ik waarheid spreek; dan zal Uw Ed zien dat niemand onder uwe schryvers zooveel gedaan heeft als ik om het stelsel van maten en gewigten en bygevolg ook uw boek aantepryzen, en wanneer het noodig waren daar by nog meer te voegen dan zoude ik Uw Ed door het getuigenis van fatsoenlyke lieden, die Uw Ed zoo wel als myne achtiging verdienen kunnen bewyzen, dat ik met alle vermogen het debiet van Uw werk heb voorgestaan. Dit laatste kan Uw Ed nu eens voor een oogenblik onverschillig zyn: maar het maakt by menschen welke hiermede van naby bekend zyn met uwen te onvredeheid over my een contrast, het welk in hun oordeel de schaal der geregtigheid ontwyfelbaar aan myne zyde moet doen overhellen.

Uw Ed zal aan my noch aan iemand kunnen betichten over het stelsel van maten en gewigten te schryven. Dit stelsel is zederd deszelfs invoering het eigendom van het algemeen van geheel Europa geworden. Van dit regt dat de wet aan elk toekend heb ik gebruik gemaakt. Nu geloof ik dat Uw Ed my van naby genoeg kent om te weten dat ik niet noodig heb woordelyk plaatsens uit uw boek over te nemen, daarom om dat ik niet zoude in staat zyn hetzelfde met andere woorden te zeggen (dit laatste zou my zelfs gemakkelijker dan het eerste geweest zyn) en waarom heb ik dan die plaats overgenomen? eenvoudig om geene andere reden, dan om langs die weg eene gelegenheid te vinden om in de premissen de lezing van uw werk aan te bevelen en daar het woordelyk overnemen van de plaats selve den lezer in het denkbeeld te brengen dat wij het geen door Uw Ed gezegd was, zoo wel en juist gezegd vonden dat wy daaraan niets wilden veranderen. Ik zal het U Myn Heer eene andere uitlegging aan myn mening ten dienste geven. Den Alwetende is myn getuige Myn Heer dat toen wy onlangs en in 1808 dit artykel stelden wij alzoo dachten en dat wy diensvolgens daarin geene andere bedoeling hadden dan om onzen lezeren de lust tot het leren van uw [inzicht] in te boezemen: en dit word ons door Uw Ed zoo kwalijk genomen! Uw Ed gevoelt immers zelf wel dat wanneer ik uw werk had willen declineren of verdonkeren, of de oogmerken bereiken, waarom men letterdieverij pleegt, ik myn plan op eenen geheel anderen voet zou ingerigt hebben: ik zou dan zoo als anderen gedaan hebben, van het uwe hebben gezwegen. Met het uitgeven van uw boek heeft Uw Ed zich aan elks oordeel over hetzelfde stilzwygend onderworpen: dus ook het myne: geene physique noch moreele magt kan mij beletten te zeggen het geen ik gezegd heb en bepaaldelyk ook: dat zegt Myn Heer van Swinden over dit of dat artykel: nu heb ik niets dan goed gezegd en wat ik heb overgenomen heeft ten doel gehad uwen arbeid en uw persoon te vereeren en dit gelieft Uw Ed met den naam van letterdieverij te bestempelen!

De geheele samenhang den omstandigheden, de naauwkeurige vergelyking van het tegenwoordige met het voorledene doen eenige waarschynlyke gronden in mij opkomen om te vermoeden, dat het schryven van het koopmans handboek ja de ware grond uwer ontevredenheid niet uitmaakt. Het kan zyn, dat ik my daarin bedriegde: doch zoo dit vermoeden gegrond is moet ik verklaren dat de ware grond uwen ontevredenheid my volstrekt onbekend is. Het ontbreekt in deze tyden, even als ooit, aan geene lasteraars die een eerlyk en werkzaam man, terwyl hy als afgescheiden van de wereld in zynen huiselyken kring zynen tyd nuttig besteed by den onkundigen met eene zwarte kool brandmerken en jaren lang buitens zyn wetens aan de gevolgen van den laster bloot stellen, gelyk my gebeurd is: doch hy aldien zulke wezens wier goude rok en verkregen aanzien zoo ligt den [doorzigtigheid] misleiden kunnen, ook myn persoon by Uw Ed hadden zwart gemaakt, dan dunkt my zou ik van uwe heuschheid en vriendschap met regt hebben mogen verwagten dat Uw Ed my daarvan kennis gegeven had, op dat ik myne onschuld zou hebben mogen verdedigen of dat ik ten minsten door Uw Ed niet onverhoord veroordeeld ware geworden. Ik van myne zyde zou in uwen plaats alzoo gehandeld hebben.

Zoo veel, M.H. heb ik noodig geoordeeld uw te moeten schryven zoo veel zoude ik Uw Ed gisteren gezegd hebben, indien Uw Ed mij niet met eenen toon van verachting had toegevoegd dat alle relaties ophielden: en dit doe ik, eensdeels, zoo als ik reeds gezegd heb, om te voldoen aan het geen ik aan myne eer verschuldigd ben, anderdeels om Uw Ed te overtuigen dat ik niets gedaan heb (ik zal niet zeggen het geen met de wet strydt, want dit is reeds uitgemaakt) dat eenigzins waarschynelyk maken kan, dat ik Uw Ed heb willen beledigen of benadeelen, of uit te verrigten dat u onaangenaam konde zyn. Dat laatste is by de uitkomst gebleken plaats gehad te hebben: doch daar men niet kan raden wat elk welgevallig is, kan men Uw Ed zoo wel als Uw Ed my doet elke onschuldige daad kwalijk duiden. Want het spreekwoord zegt wanneer men eenen hond slaan wil kan men ligt eenen stok vinden.

Zoo zeer, Myn Heer, als ik altyd prys op uwe vriendschap gesteld heb zoo zeer ik altyd getracht heb die vriendschap aante [kweken], - zoo zeer ik, ingevalle de omstandigheden my daartoe in gelegenheid gesteld hadden om proevens van der myne te uwaarts te geven, niet zou nagelaten hebben dezelve met de daad hartelyk en ondubbelzinnig te betoonen, zoo zeer ook Myn Heer zal ik my met kracht en vermogen, by elk daar het behoort en waar het om de waarheid hulde te doen, van nut kan zyn tegen eenen beschuldiging blyven verdedigen, welke ik nog blyf hoopen, ontstaan te zyn uit door Uw Ed plaats gehad hebbende verkeerde opvatting, boven welke Uw Ed zoo min als eenig sterveling verheven is.

Ik heb de eer my te noemen

Hoogeleerde Heer!
<handtekening Jacob de Gelder>

gehoorzaame Dienaar

Het origineel van dezen
brief heb ik op vrydag
avond ten 7 Uren den

2 Novemb. 1810 aan het
huis van Professor van
Swinden gebracht en is
door eene meid aange-
nomen.

A.2 Van Swindens laatste brief

Brief van J.H. van Swinden aan J. de Gelder, 5 november 1810, BPL 2359 (UBL).

Den Heere Jacob de Gelder te Amsterdam

Mynheer:

Ik heb Uw Ed, by gelegenheid dat ik U E ontmoetede, gezegd hetgeen ik meende U E te moeten zeggen, en waar by ik blyf, niettegenstaande al het geen U E nog in derselfs missive gelieft te melden, en het welk mij in geenen deele van gevoelen doet veranderen.

Mijn argument is niet in een twistgeding met U E te treden, en U E Missive te gaan wederleggen, maar U E enkel over eenige zaken die daar in voorkomen te onderrichten: als

1e Dat niemand U Ed immer by mij heeft zwart gemaakt: en dat myn ongenoegen enkel en alleen uit Uwe handelwyze ontstaat.

2e Dat ik ten vollen overtuigd ben dat alle menschen ende ook U E het volste regt hebben om over Maten en Gewigten te schryven: dat ik niet verwonderd sta dat verscheiden reeds zulks gedaan hebben, en verwacht dat veelen zulks nog doen zullen.

3e. Dat ik geen de minste, laat staan zeer gewigtige redenen heb, of hebben kan, om dit kwalyk te neemen: en dat, indien iemand, over die Stoffe willende schrijvende: mij immer kwam te vragen of ik hen kwalyk neemen zoude: ik zoude antwoorden volmondig neen: vermits ik van de Minister van Binnelandsche Zaken mij vereerde met de commissie om bij het invoeren van het nieuwe stelsel te lande, de nodige werken of werkjes te schryven de nodige vergelykings Tafels te maken, ten einde de Ingezetenen des Lands over die zaak in te lichten, ik zulks wel heb aangenomen: maar er tevens heb bygevoegd dat zulks niet moest zyn uitsluitend, en dat ieder een zyn regt moest behouden om daar over te schryven.

4e. Dat welk aftrek de werken of boekjes van anderen over de Stoffe reeds gehad hebben, nog hebben, of in 't vervolg hebben mogten, ja al hadden zy er zoodanigen dat het debit mynen werken daardoor verminderd of geheel vernietigd werd, ik daar in geen het minst financieel belang zouden hebben: vermits hen debit van de boeken nog in geene deelen aangaat, of eenigen winst aanbrengt, en ik de copij derzelve, zonder eenig leeveranciers aan den boekhandelaar den Hengst, myn zeer geëerden Boezemvriend, geheel en al geschonken heb. Als vriend echter zoude het my leed doen zoo aan dezen [uitgave] Uwend schade werd toegebracht: doch het publiek moet oordeelen welke werken hem de nuttigste zyn, de myne of die van anderen, en naar dat oordeel te werk gaan.

Hoe wel nu, gelyk ik gezegd heb, alle relatien van U E met my komen op te houden, zal ik echter nimmer afzyn U E als eenen der besten en uitmuntendsten mathematici die men thans heeft, eenen man met eene byzonderen mathematische genie begaafd te beschouwen, en zulks overal, en meer byzonderen daar, waar het tot uwe bevordering te past mogt komen, te behartigen.

Ik blyve Mynheers Uwe dienstwillige dienaar

Amsterdam 5 November 1810

J.H. Van Swinden

Bijlage B

Wortelbenadering nader bekeken

B.1 Benadering van $\sqrt{2}$

Het gebruik van De Gelders schema uit paragraaf 7.3.2 is uiterst praktisch, zoals we hieronder zullen zien voor de berekening van $\sqrt{2}$.

	1	2	2	2	2
$\frac{1}{0}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{17}{12}$	$\frac{41}{29}$
+	-	+	-	+	-

Met de moderne rekenmiddelen ter hand vergelijken we de gevonden waarde met die van $\sqrt{2}$.

$\frac{1}{1}$	\approx	1.00000000000000000000
$\frac{3}{2}$	\approx	1.50000000000000000000
$\frac{7}{5}$	\approx	1.40000000000000000000
$\frac{17}{12}$	\approx	1.41666666666666666667
$\frac{41}{29}$	\approx	1.4137931034482758621
$\sqrt{2}$	\approx	1.4142135623730950488

We zien dat na vier stappen onze benadering nog steeds niet erg nauwkeurig is. Nu hebben we met $\sqrt{2}$ te maken met een relatief klein getal en daarom moeten we aardig wat stappen nemen om een grotere nauwkeurigheid te bereiken.

Door een slimme ‘truc’ kunnen we bovenstaand resultaat sneller verbeteren.¹ In plaats van een groot aantal stappen voor $\sqrt{2}$ uit te rekenen, berekent De Gelder een zelfde aantal stappen als zojuist voor $\sqrt{9800}$. Immers: $\sqrt{9800} = \sqrt{4900}\sqrt{2} = 70\sqrt{2}$. Of anders gezegd:

$$\sqrt{2} = \frac{1}{70}\sqrt{9800}.$$

De p_i 's worden nu gegeven. De methode om ze te berekenen wordt later beschreven.

$$p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 \dots = 98, 1, 196, 1, 196, \dots$$

¹Deze truc is afkomstig uit Gelder (1828, p. 225-226).

Een tabel zoals De Gelder die gemaakt zou kunnen hebben, wordt dan:

	98	1	196	1	196
$\frac{1}{0}$	$\frac{98}{1}$	$\frac{99}{1}$	$\frac{19502}{197}$	$\frac{19601}{198}$	$\frac{3861298}{39005}$
+	-	+	-	+	-

We maken weer gebruik van de moderne rekenapparaten.

$$\begin{aligned} \frac{1}{70} \times \frac{98}{1} &\approx 1.40000000000000000000 \\ \frac{1}{70} \times \frac{99}{1} &\approx 1.4142857142857142857 \\ \frac{1}{70} \times \frac{19502}{197} &\approx 1.4142131979695431472 \\ \frac{1}{70} \times \frac{19601}{198} &\approx 1.4142135642135642136 \\ \frac{1}{70} \times \frac{3861298}{39005} &\approx 1.4142135623637995129 \\ \sqrt{2} &\approx 1.4142135623730950488 \end{aligned}$$

Nu hebben we een breuk gevonden die in 10 (!) decimalen nauwkeurig is, terwijl (nog steeds) maar vier stappen gedaan zijn.

We hebben nu gezien dat wortels van gehele getallen te benaderen zijn met kettingbreuken. In Gelder (1828) vinden we een meer algebraïsche manier om dat te doen. Hij baseert zich op het werk van Lagrange. We vinden onder meer de manier om de p_i 's te berekenen. Deze methode haalt hij aan in de derde druk van *Beginnselen der Meetkunst*.²

B.2 Kwadratische vergelijking

We beginnen met de vergelijking

$$a_1x^2 - 2bx - a = 0 \tag{B.1}$$

die op de ons bekendere vorm van een kwadratische vergelijking lijkt met $\bar{a} = a_1$, $\bar{b} = -2b$ en $\bar{c} = -a$. Als we hier de $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ -formule op toepassen, vinden we als positieve oplossing

$$x = \frac{b + \sqrt{b^2 + aa_1}}{a_1}.$$

Omdat we de oplossing willen benaderen met kettingbreuken, schrijven we $x = p_1 + \frac{1}{x_1}$. We geven het grootst mogelijk geheel getal kleiner dan x de naam p_1 en tellen vervolgens dat wat we nu te weinig hebben er bij op met $\frac{1}{x_1}$. Vervolgens gaan we op zoek naar x_1 , die van de vorm $x_1 = p_2 + \frac{1}{x_2}$ zal zijn. Als we dit proces voortzetten zal ons antwoord benaderd worden met de uitdrukking:

$$x = p_1 + \frac{1}{p_2 + \frac{1}{p_3 + \dots}}$$

We gaan op zoek naar de p_i 's.

²In *Stelkunst* doet De Gelder uitspraken over de nauwkeurigheid van de benaderingen. Zie voetnoot 39 op pagina 66. In Hardy and Wright (1938, p. 151) vinden we de overeenkomstige stelling: *Of any two consecutive convergents to x , one at least satisfies the inequality*

$$\left| \frac{p}{q} - x \right| < \frac{1}{2q^2}.$$

Het bewijs laten we hier buiten beschouwing.

B.3 Iteratief

Eerst gebruiken we onze benadering voor x in (B.1). Invullen van $x = p_1 + \frac{1}{x_1}$ levert

$$a_1 \left(p_1 + \frac{1}{x_1} \right)^2 - 2b \left(p_1 + \frac{1}{x_1} \right) - a = 0$$

dat na enig algebraïsch rekenwerk eruit ziet als

$$(a - a_1 p_1^2 + 2b p_1) x_1^2 - 2(a_1 p_1 - b) x_1 - a_1 = 0.$$

Stellen we nu $a_2 := a - a_1 p_1^2 + 2b p_1$ en $b_1 := a_1 p_1 - b$, dan levert dat de nieuwe formule

$$a_2 x_1^2 - 2b_1 x_1 - a = 0 \tag{B.2}$$

die qua vorm heel mooi overeenkomt met (B.1). Zo kunnen we steeds een stap verder gaan en er een iteratief proces van maken.

Er zal dan blijken

$$\begin{aligned} a_2 &= a + 2b p_1 - a_1 p_1^2 \\ a_3 &= a_1 + 2b_1 p_2 - a_2 p_2^2 \\ &\text{etc.} \end{aligned} \tag{B.3}$$

en bovendien

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 p_1 - b \\ b_2 &= a_2 p_2 - b_1 \\ &\text{etc.} \end{aligned} \tag{B.4}$$

Met behulp van (B.3) vinden we, na vermenigvuldigen met a_1

$$a_1 a_2 - a_1 a = 2b p_1 a_1 - a_1^2 p_1^2.$$

Met behulp van (B.4) vinden we (kwadrateren):

$$b_1^2 - b^2 = a_1^2 p_1^2 - 2b p_1 a_1$$

en dus geldt:

$$\begin{aligned} -(b_1^2 - b^2) &= a_1 a_2 - a_1 a, \text{ oftewel} \\ b^2 + a a_1 &= b_1^2 + a_1 a_2. \end{aligned}$$

Dit zijn juist de discriminanten voor (B.1) en (B.2)! Met inductie kan bewezen worden dat de overige discriminanten die we in het iteratieve proces tegenkomen ook gelijk zijn aan deze twee. Laten we daarom zeggen dat de discriminant steeds gelijk is aan N .

We kunnen bewijzen dat alle coëfficiënten $a, a_1, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$ hetzelfde teken hebben.³

We weten nu dat geldt: $a_i a_{i+1} > 0$, dus als $b_i^2 + a_i a_{i+1} = N$, dan $b_i^2 < N$ dus $b_i < \sqrt{N}$. Bovendien $a_i a_{i+1} < N$ en dus $-N < a_i < N$ en $-N < a_{i+1} < N$. Dit betekent dat er een eindig aantal mogelijkheden is voor de (gehele) coëfficiënten b_i, a_i en a_{i+1} , dus dat er in de oneindig lange berekening voor de p_i 's een terugkerend patroon op zal moeten treden. Alle p_i 's kunnen dus gegeven worden.

³Dit gebeurt niet met zo veel woorden in de brontekst, maar doen we hier wel. We hebben

$$f(x) = a_1 x^2 - 2b x - a.$$

Uit (B.3) volgt dan dat

$$a_2 = -f(p_1)$$

met als nulpunt $x = p_1 + \frac{1}{x_1}$, oftewel $p_1 < x$. De twee mogelijke wortels van f zijn $x_a = b + \sqrt{b^2 + a a_1}$ en $x_b = b - \sqrt{b^2 + a a_1}$. Als a_1 positief is, is de functie van f een dalparabool met nulpunten x_a en x_b . Als a_2 ook inderdaad positief is, zoals we moeten bewijzen, zal de functiewaarde van $f(p_1)$ negatief moeten zijn. Als we dus

B.4 Drie formules

Hoe vinden we p_i met behulp van a_i en b_i ? We weten $b_1 = a_1 p_1 - b$ en kunnen met inductie aantonen dat in het algemene geval geldt

$$b_n = a_n p_n - b_{n-1}$$

Omdat $b_1^2 + a_1 a_2 = N$ geldt tevens in het algemene geval:

$$a_{n+1} = \frac{N - b_n^2}{a_n}.$$

Deze formules volgen uit de berekening en kunnen met inductie bewezen worden.

Met behulp van de abc -formule weten we dat voor de positieve oplossing voor onze kwadratische vergelijking geldt

$$x_n = \frac{b_n + \sqrt{N}}{a_{n+1}}$$

en met deze drie formules is p_{n+1} te berekenen. Hetzelfde verhaal is op te stellen voor de negatieve wortel.

B.5 Nogmaals $\sqrt{2}$

We willen nu een kettingbreuk op gaan stellen die gelijk is aan $\sqrt{2}$. We gaan dan uit van de vergelijking

$$x^2 - 2 = 0. \tag{B.5}$$

Met bovenstaande theorie kunnen we dan het volgende opschrijven. Uit (B.5) blijkt:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ b &= 0, \\ a &= 2, \\ N &= b^2 + aa_1 = 0^2 + 2 \times 1 = 2. \end{aligned}$$

We rekenen uit:

$$x = \frac{b + \sqrt{N}}{a_1} = \frac{0 + \sqrt{2}}{1} \quad \text{en weten} \quad 1 < \sqrt{2} < 2,$$

dus $p_1 = 1$. Nu bepalen we de nieuwe constanten, om uiteindelijk de waarde van p_2 te vinden.

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 p_1 - b = 1 \times 1 - 0 = 1, \\ a_2 &= \frac{N - b_1^2}{a_1} = \frac{2 - 1^2}{1} = 1. \end{aligned}$$

kunnen bewijzen dat $f(p_1) < 0$ zijn we klaar. Dus ook als we kunnen bewijzen dat p_1 tussen x_a en x_b in moet zitten, want dat is het enige deel van de dalparabool waar de functie negatief is. We weten dat $p_1 < x_a$ en p_1 ligt minder dan 1 verwijderd van x_a . We willen dat $p_1 > x_b$. Als dus x_a en x_b meer dan of precies 1 uit elkaar liggen, zal $f(p_1) < 0$. Bekijk daarom het verschil tussen x_a en x_b .

$$x_a - x_b = b + \sqrt{b^2 + aa_1} - (b - \sqrt{b^2 + aa_1}) = 2\sqrt{b^2 + aa_1}.$$

Omdat $a, a_1, b \in \mathbb{Z}$ en, ervan uitgaande dát er een oplossing is (dus $b^2 + aa_1 > 0$), anders heeft deze hele berekening geen zin, zien we dat

$$x_a - x_b \geq 2$$

en dus volgt dat als $a_1 > 0$ dan ook $a_2 > 0$. Voor $a_1 < 0$ kan eenzelfde redenering gehouden worden. En met inductie kan het voor de andere a_i bewezen worden. \square

Als we deze waarden invullen, vinden we:

$$x_1 = \frac{b_1 + \sqrt{N}}{a_2} = \frac{1 + \sqrt{2}}{1} \quad \text{en we kunnen vaststellen dat} \quad 2 < 1 + \sqrt{2} < 3,$$

dus $p_2 = 2$. We berekenen de volgende constanten.

$$\begin{aligned} b_2 &= a_2 p_2 - b_1 = 2 \times 1 - 1 = 1, \\ a_3 &= \frac{N - b_2^2}{a_2} = \frac{2 - 1^2}{1} = 1. \end{aligned}$$

We zien nu dat $b_1 = b_2$ en $a_2 = a_3$. Zonder te rekenen stellen we daarom vast dat p_3 gelijk moet zijn aan $p_2 = 2$.

Als we de nog volgende constanten (b_n, a_{n+1}) uit willen rekenen om p_n te vinden, gebruiken we daar (b_{n-1}, a_n) voor. We zagen dat dit voor het geval $n = 2$ met $(b_1, a_2) = (1, 1)$ (opnieuw) levert $(b_2, a_3) = (1, 1)$. Zo verder gaande, zullen $p_2, p_3, \dots = 2$. Zo vinden we de gevraagde kettingbreuk

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

Bijlage C

Bewijzen bij pyramides

In deze bijlage een drietal Proposities die door Euclides gebruikt worden voor de Propositie voor het bepalen van de inhoud van een pyramide, paragraaf 7.4.1.

Stelling 1 *Ik [Euclides] zeg dat de oppervlakte S groter dan cirkel $EFGH$ staat tot de cirkel $ABCD$ zo als de cirkel $EFGH$ staat tot een zekere oppervlakte, kleiner dan cirkel $ABCD$.¹*

Gegeven

$$S : ABCD = EFGH : T$$

met $S > EFGH$. Te bewijzen: $T < ABCD$. De evenredigheid mag omgeschreven worden² tot

$$S : EFGH = ABCD : T.$$

Omdat we weten dat $S > EFGH$ geldt dus automatisch $ABCD > T$, ofwel $T < ABCD$. \square

Opmerking De stelling geldt natuurlijk ook als de grootheid niet de oppervlakte van een cirkel betreft, maar een andere grootheid. Het feit dat Euclides het hier over cirkels heeft, is te verklaren uit het feit dat de tweede Propositie over cirkels gaat.³

Stelling 2 *Elke pyramide met een driehoekige basis, wordt verdeeld in twee pyramiden met driehoekige basis, gelijk en gelijkvormig aan elkaar en gelijkvormig met de gehele pyramide; en in twee gelijke prisma's. De twee prisma's zijn groter dan de helft van de gehele pyramide.⁴*

Gegeven pyramide $ABC.D$ met driehoekig grondvlak ABC en top D . Te bewijzen dat deze pyramide zo verdeeld kan worden als in de stelling betoogd.

Verdeel de zijden AB , BC , CA , AD , DB en DC doormidden en noem de middelpunten resp. E , F , G , H , K en L . Teken de lijnstukken HE , EG , GH , HK , KL , LH , KF en FG . Zie figuur C.1.

Eerst laten we zien dat de pyramides $AEG.H$ en $HKL.D$ gelijk en gelijkvormig aan elkaar zijn.

$$\left. \begin{array}{l} AE = EB \\ AH = DH \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} EH \parallel DB \\ \text{Ook } HK \parallel AB \end{array} \right\} \quad HEBK \text{ is parallellogram}$$

Verder volgt

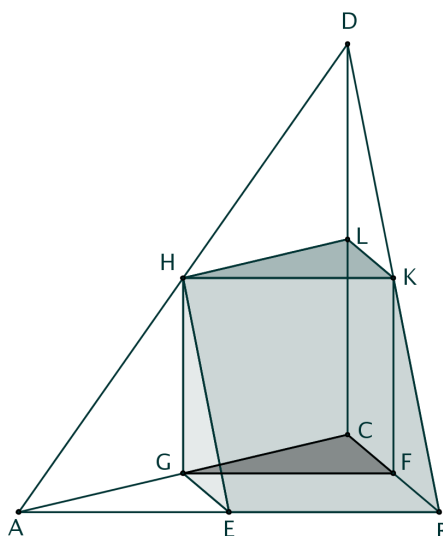
$$\left. \begin{array}{l} HK = EB \\ EB = EA \end{array} \right\} \quad AE = HK$$

¹Euclides, *Elementen*, Boek XII, Lemma na Propositie II. Eigen vertaling van de weergave van Heath (1956, vol. III, p. 373).

²Euclides, *Elementen*, Boek V, Propositie XVI.

³Namelijk: 'Cirkels staan tot elkaar als de vierkanten op hun diameters.'

⁴Euclides, *Elementen*, Boek XII, Propositie III. Eigen vertaling van de weergave van Heath (1956, vol. III, p. 378).



Figuur C.1: Verdeling van de pyramide in twee kleinere gelijke pyramides en twee gelijke prisma's.

dus

$$\left. \begin{array}{l} AE = HK \\ AH = HD \\ \angle EAH = \angle KHD \end{array} \right\} EH = KD \rightarrow \triangle AEH \simeq \triangle HKD.$$

Op dezelfde manier kan bewezen worden dat $\triangle AHG \simeq \triangle HDL$.

Verder geldt⁵

$$\left. \begin{array}{l} EH \text{ en } HG \text{ hebben snijpunt.} \\ EH \parallel KD, HG \parallel DL, \text{ niet in hetzelfde vlak} \end{array} \right\} \angle EHG = \angle KDL$$

en

$$\left. \begin{array}{l} \angle EHG = \angle KDL \\ EH = KD, HG = DL \end{array} \right\} EG = KL \rightarrow \triangle EHG \simeq \triangle KDL.$$

Zo wordt ook bewezen dat $\triangle AEG = \triangle HKL$. We concluderen dat

$$\text{pyramide } AEG.H = \text{pyramide } HKL.D.$$

Vervolgens willen we aantonen dat pyramide $AEG.H$ gelijkvormig is met de grote pyramide $ABC.D$. $HK \parallel AB$ (met AB een zijde van driehoek ADB). $\triangle ADB$ is dus gelijkhoekig met $\triangle DHK$, waarbij de zijden in dezelfde verhouding staan. Dus $\triangle ADB \sim \triangle HDK$. Zo ook $\triangle DBC \sim \triangle DKL$ en $\triangle ADC \sim \triangle HDL$. BA en AC snijden elkaar, parallel daaraan (niet in hetzelfde vlak) snijden KH en HL elkaar. We concluderen dat $\angle BAC = \angle KHL$. Bovendien: $BA : AC = KH : HL$, dus $\triangle ABC \sim \triangle HKL$. Dus ook pyramide $ABC.D \sim HKL.D$. We hadden al bewezen dat $HKL.D = AEG.H$, dus beide $AEG.H$ en $HKL.D$ zijn gelijkvormig met $ABC.D$.

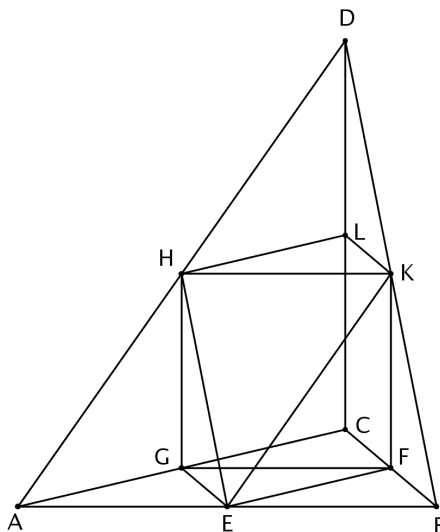
Nu willen we laten zien dat de twee resterende prisma's even groot zijn. Hiervoor wordt gebruik gemaakt van Propositie XXXIX van het elfde Boek. Dat is: 'Als er twee prisma's zijn met gelijke hoogte, en de een heeft een parallellogram als basis en de ander een driehoek, en als het parallellogram het dubbele is van de driehoek, dan zijn de prisma's gelijk [qua inhoud,

⁵Voor de regel 'niet in hetzelfde vlak', zie men Euclides, *Elementen*, Boek XI, Propositie X.

WL].⁶ Dit is precies het geval voor de twee prisma's $EBFGHK$ (parallellogram $EBFG$ als basis) en $GFCHKL$ (driehoek CGF als basis), waarbij de oppervlakte van parallellogram $EBGF$ het dubbele is van de driehoek CGF . We concluderen dat de beide prisma's gelijke inhoud hebben.

Ten slotte willen we laten zien dat de twee prisma's samen groter zijn dan de helft van pyramide $ABC.D$. Hiervoor laten we zien dat elk van de prisma's afzonderlijk, groter is dan een van de twee kleine pyramiden.

Trek EF en EK . Zie figuur C.2.



Figuur C.2: De twee prisma's zijn groter dan de helft van de gehele pyramide.

Prisma $EBFGHK$ is groter dan pyramide $EBF.K$. Pyramide $EBF.K$ is gelijk aan pyramide $AEG.H$, want deze worden gevormd door gelijke en gelijkvormige driehoeken. Dus prisma $EBFGHK$ is groter dan pyramide $AEG.H$.

We hadden al gezien dat prisma $EBFGHK = GFCHKL$ en pyramide $AEG.H = HKL.D$. Dus ook prisma $GFCHKL$ is groter dan pyramide $HKL.D$. De twee prisma's zijn dus groter dan de twee pyramiden $AEG.H$ en $HKL.D$ en dus groter dan de helft van pyramide $ABC.D$.

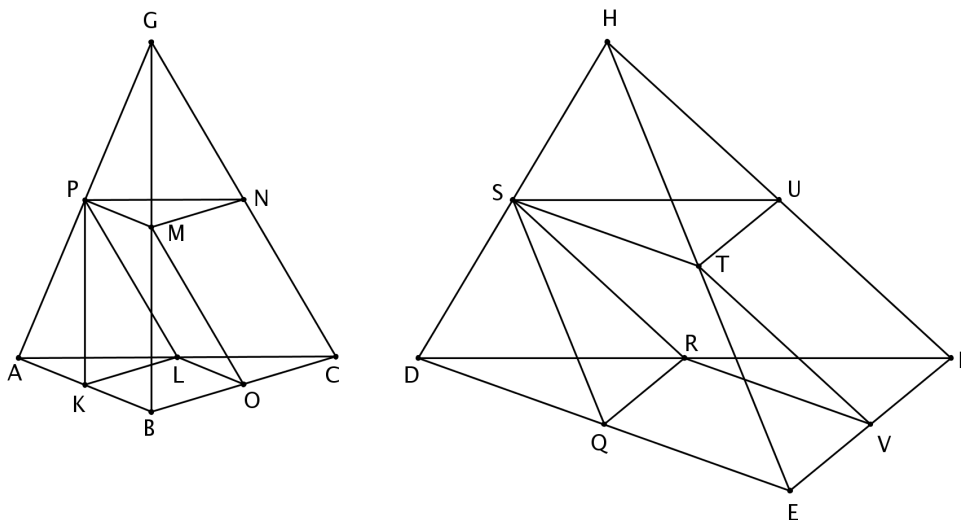
Hiermee is aangetoond dat een pyramide verdeeld kan worden in twee pyramiden met driehoekige basis, gelijk en gelijkvormig aan elkaar en gelijkvormig aan de gehele pyramide; en in twee gelijke prisma's die samen groter zijn dan de helft van de gehele pyramide. \square

Stelling 3 *Als er twee pyramides zijn met dezelfde hoogte en driehoekige basis, en elk van deze wordt verdeeld in twee pyramides gelijk en gelijkvormig aan elkaar en gelijkvormig met de gehele pyramide, en in twee gelijke prisma's, dan, zo de basis van de ene pyramide staat tot de basis van de andere, zo zullen ook alle prisma's van de ene staan tot alle prisma's (gelijk in aantal) van de andere pyramide.*⁷

Neem twee pyramides $ABC.G$ en $DEF.H$ met voor elk daarin aangebracht twee gelijke en gelijkvormige pyramides en twee gelijke prisma's. Zie figuur C.3. De hoogtes van beide pyramiden zijn gelijk.

⁶Euclides, *Elementen*, Boek XI, Propositie XXXIX. Eigen vertaling van Heath (1956, p. 363). De juistheid van deze propositie is eenvoudig in te zien, door van beide prisma's parallellopeda te maken, die vervolgens allebei een gelijk grondvlak en hoogte en dus gelijke inhoud hebben. Beide prisma's zijn de helft van zo'n parallellopedum, dus de prisma's zijn gelijk aan elkaar.

⁷Euclides, *Elementen*, Boek XII, Propositie IV. Eigen vertaling van de weergave van Heath (1956, vol. III, p. 382).



Figuur C.3: De bases van twee pyramides staan tot elkaar als de som van alle prisma's in de ene tot de som van het gelijk aantal prisma's in de andere.

Er geldt nu

$$\left. \begin{array}{l} BO = OC \\ AL = LC \end{array} \right\} OL \parallel AB \rightarrow \triangle ABC \sim \triangle LOC.$$

Op dezelfde manier wordt aangetoond dat $\triangle DEF \sim \triangle RVF$.

BC is het dubbele van CO en EF is het dubbele van FV . Op BC en CO zijn op gelijke wijze de figuren ABC en LOC beschreven. Op EF en FV zijn op gelijke wijze de figuren DEF en RVF beschreven. Daarom⁸ geldt

$$\triangle ABC : \triangle LOC = \triangle DEF : \triangle RVF.$$

En dit is om te schrijven als⁹

$$\triangle ABC : \triangle DEF = \triangle LOC : \triangle RVF.$$

Op dit moment nemen we aan dat geldt

$$\triangle LOC : \triangle RVF = \text{prisma } LOCPMN : \text{prisma } RVFSTU.$$

We zullen dit aan het einde bewijzen. Dan geldt dus ook dat

$$\triangle ABC : \triangle DEF = LOCPMN : RVFSTU.$$

Bovendien geldt¹⁰

$$LOCPMN : RVFSTU = KBOLPM : QEVRST.$$

Dan volgt uit de theorie van de evenredigheden

$$\begin{aligned} & KBOLPM + LOCPMN : QEVRST + RVFSTU \\ &= KBOLPM : QEVRST \\ &= LOCPMN : RVFSTU \end{aligned}$$

⁸Euclides grijpt hier terug op Boek VI, Propositie XXII.

⁹Met behulp van Boek V, Propositie XVI.

¹⁰Zie voetnoot 6 en stelling 2.

en dus

$$\triangle ABC : \triangle DEF = KBOLPM + LOCPMN : QEVRST + RVFSTU.$$

Als nu $PMN.G$ en $STU.H$ zelf weer verdeeld worden in twee prisma's en twee pyramides op de manier van Propositie III dan

$$\begin{aligned} \triangle PMN : \triangle STU &= \text{twee prisma's in } PNM.G : \text{twee prisma's in } STU.H \\ \triangle PMN : \triangle STU &= \triangle ABC : \triangle DEF, \quad \text{want } \triangle PMN \simeq \triangle LOC \text{ en } \triangle STU \simeq \triangle RVF. \end{aligned}$$

Dus dan

$$\triangle ABC : \triangle DEF = 4 \text{ prisma's} : 4 \text{ prisma's}.$$

Zo kunnen we doorgaan met ook het verdelen van pyramide $AKL.P$ en $DQR.S$ en daarna de gevormde kleine pyramides. Als we de overgebleven pyramides steeds weer in twee pyramides en twee prisma's verdelen zal blijven gelden

$$\triangle ABC : \triangle DEF = \text{alle prisma's in } ABC.G : \text{alle (evenveel) prisma's in } DEF.H.$$

Ten slotte moeten we nog bewijzen wat we eerder aangenomen hebben, namelijk dat

$$\triangle LOC : \triangle RVF = \text{prisma } LOCPMN : \text{prisma } RVFSTU.$$

Trek vanuit G en H loodrecht een lijn op basis ABC , resp. DEF . Noem de eerste loodlijn l_G en de tweede l_H . Deze twee loodlijnen zijn gelijk, want beide pyramides hebben gelijke hoogte.

GC en l_G worden allebei in dezelfde verhouding gesneden door de parallelle vlakken ABC en PMN . We weten dat GC door PMN middendoor gesneden wordt in N . Dus wordt l_G ook middendoor gesneden door het vlak PMN .

Op dezelfde manier kunnen we aantonen dat vlak STU de loodlijn l_H middendoor snijdt.

Omdat beide loodlijnen gelijk zijn, zijn ook de helften van de twee lijnen aan elkaar gelijk. Oftewel het stuk van l_G ingeklemd door PMN en ABC is gelijk aan het stuk van l_H ingeklemd door STU en DEF . Dit betekent dat de parallellogrammen $LOCPMN$ en $RVFSTU$ gelijke hoogte hebben. Nu weten we¹¹ dat parallellopipeda van dezelfde hoogte tot elkaar staan als hun bases. Vullen we de prisma's $LOCPMN$ en $RVFSTU$ aan tot parallellopipeda, dan staan hun inhoud tot elkaar als hun bases. Nemen we vervolgens van allebei de helft, dan houden we juist de gebruikte prisma's over, die dus ook tot elkaar staan als hun bases. Concludeer dat

$$\triangle LOC : \triangle RVF = \text{prisma } LOCPMN : \text{prisma } RVFSTU$$

en hiermee is het bewijs voltooid. □

¹¹Met Euclides, *Elementen*, Boek XI, Propositie XXXII.

Bibliografie

- A.J. van der Aa. *Biographisch Woordenboek der Nederlanden*. B.M. Israël, Amsterdam, 1969. Zeven delen. Originele uitgave door J.J. van Brederode, Haarlem, 1852.
- D.J. Beckers. *Het despotisme der mathesis. Opkomst van de propaedeutische functie van de wiskunde in Nederland 1750-1850*. Verloren, Hilversum, 2003. Beschikbaar via <http://books.google.com>.
- D.J. Beckers. *Eene onbepaalde Equatie. Een biografie van de mathematicus Jacob de Gelder (1765-1848)*. Uitgave in eigen beheer, Nijmegen, 1993.
- D.J. Beckers. *The Royal Dutch Mathematical Society since 1778*. Koninklijk Wiskundig Genootschap, Amsterdam, 2008. In: Nieuw Archief voor Wiskunde (5), Vol. 9, (2008), 147-149.
- D.J. Beckers. *Van wiskunstige wetenschappen tot zuivere wiskunde - de negentiende eeuw*. Nieuwezijds, Amsterdam, 2006. In: Keestra, M. (red.), Een cultuurgeschiedenis van de wiskunde, p. 151-179.
- D.J. Beckers. *Mathematics as a way of life - a biography of the Mathematician Jacob de Gelder*. Koninklijk Wiskundig Genootschap, Amsterdam, 1996. In: Nieuw Archief voor Wiskunde (4), Vol. 14, (1996), 275-297.
- D.J. Beckers and H.J. Smid. *Grondbeginsels der Rekenkunde. Een rekenboek uit 1828, uitgegeven door het Wiskundig Genootschap "Mathesis Scientiarium Genitrix" te Leiden. Ingeleid door Danny Beckers en Harm Jan Smid*. Verloren, Hilversum, 2003.
- P.P. Bockstaele. *Mathematis in the Netherlands from 1750 to 1830*. Stichting Tijdschrift Janus, 1978. In: Janus LXV, p. 67-95.
- H.J.M. Bos. *Elementen van de wiskunde - ze zijn niet meer wat ze vroeger waren*. Koninklijk Wiskundig Genootschap, Amsterdam, 1983. In: Nieuw Archief voor Wiskunde (4), Vol. 1, (1983), 101-132.
- J. Bot and R. Muijlwijk. *Jean H. van Swinden (1746-1823)... over volmaakte Maaten en Gewigten*. Intermediair, Amsterdam, 1980. In: Kox, A.J., Chamalaun (red.), M. Van Stevin tot Lorentz, p. 93-106.
- P. van Campen. *Grondbeginselen der Algebra of Stelkunst*. A. en J. Honkoop, Leyden, 1794.
- E.J. Dijksterhuis. *Archimedes*. P. Noordhoff, Groningen, 1938. Deel I.
- E.J. Dijksterhuis. *De Elementen van Euclides*. P. Noordhoff, Groningen, 1930. Deel II.
- J. de Gelder. *Hoogere Meetkunst*. Van Cleef, 's Gravenhage en Amsterdam, 1824.
- J. de Gelder. *Beginselen der Stelkunst*. Van Cleef, 's Gravenhage en Amsterdam, 1836. Derde, geheel op nieuw bearbeide uitgave. Eerste druk 1817.

- J. de Gelder. *Verhandeling over het Verband en den Zamenhang van de Natuurlijke en Zedelijke wetenschappen, en over de wijze, om zich dezelve eigen te maken en aan anderen mede te delen.* Van Cleef, 's Gravenhage en Amsterdam, 1826.
- J. de Gelder. *Wiskundige Lessen, tweede cursus.* Van Cleef, 's Gravenhage en Amsterdam, 1828. Tweede druk.
- J. de Gelder. *Beginselen der Meetkunst.* Van Cleef en B. Scheurleer jr., Amsterdam en Den Haag, 1810.
- J. de Gelder. *Beginselen der Meetkunst.* Van Cleef en Scheurleer jr., 's Gravenhage en Amsterdam, 1817. Tweede veel vermeerderde en verbeterde druk.
- J. de Gelder. *Beginselen der Meetkunst.* Van Cleef, 's Gravenhage en Amsterdam, 1829. Derde geheel omgewerkte en veel vermeerderde druk. Beschikbaar via <http://books.google.com>, platen niet goed zichtbaar.
- H. Haanstra. *De vernieuwe Cyfferinge van Mr. Willem Bartjens, geheel uitgewerkt.* Abraham Ferweda, Leeuwarden, 1745. Derde druk.
- G.H. Hardy and E.M. Wright. *An Introduction to the Theory of Numbers.* Clarendon Press, Oxford, 1938.
- Sir Thomas L. Heath. *Euclid. The thirteen books of the elements.* Dover Publications, New York, 1956. Uitgegeven in drie volumes. Gebruikte uitgave is de tweede herziene editie.
- M.A.M. van Hoorn. *Jan Hendrik van Swinden (1746-1823). 'Een gemeentebestgezind geleerde'.* Uitgeverij Wijnen, Franeker, 1994. Toegevoegd hoofdstuk bij fotografische herdruk van: Swinden, J.H. van, Beschrijving van het Eisinga-Planetarium te Franeker, 1780. En: Eekhoff, W., Het leven van Eisinga en eene geschiedenis van zijn Planetarium. 1851.
- W.W. Mijnhardt. *Het volk van Nederland eischt verlichting: Franse hervormingsijver en Nederlandse wetenschapsbeoefening (1795-1815).* KNAW, Amsterdam, 1997. In: Gerritsen, W.P. (ed.), Het Koninklijk Instituut (1808-1851) en de bevordering van wetenschappen kunst, p. 11-37.
- G. Moll. *Redevoering over Jan Hendrik van Swinden.* Pieper & Iepenbuur, Amsterdam, 1824.
- E.W.A. Moor. *Van Vormleer naar Realistische Meetkunde. Een historisch-didactisch onderzoek van het meetkundeonderwijs aan kinderen van vier tot veertien jaar in Neerland gedurende de negentiende en twintigste eeuw.* Centrum voor Didactiek van Wiskunde en Natuurwetenschappen, Utrecht, 1999.
- H.J. Smid. *Een onbekookte nieuwigheid? Invoering, omvang, inhoud en betekenis van het wiskundeonderwijs op de Franse en Latijnse scholen 1815-1863.* Delft University Press, Delft, 1997.
- P. Steenstra. *Grondbeginsels der Meetkunst, of Kort begrip der Zes Eerste Boeken met het Elfde en Twaalfde van Euclides.* Samuel en Johannes Luchtman, Leyden, 1803. Zesde druk. Eerste druk 1763.
- J.H. van Swinden. *Grondbeginsels der Meetkunde.* Pieter den Hengst, Amsterdam, 1790.
- J.H. van Swinden. *Grondbeginsels der Meetkunde.* Pieter den Hengst en zoon, Amsterdam, 1816. Tweede, verbeterde, en veel vermeerderde druk. Beschikbaar via <http://books.google.com>, platen niet goed zichtbaar.
- G.J. Verdam. *Het leven van den hoogleeraar Jacob de Gelder*, volume 46-54. Algemene Konst- en Letterbode, 1848. Gelezen in zelfstandige herdruk.

Brieven

Brieven van J.H. van Swinden aan J. de Gelder, Universiteitsbibliotheek Leiden, BPL 2359.

Brieven van J. de Gelder aan J.H. van Swinden, Universiteitsbibliotheek Leiden, BPL 755.