

# Pieter Wils' *Wis-konstige Wercken*

Jan Beuving

Scriptie ter afronding van de Master History and Philosophy of Science

Scriptiebegeleider: Prof. dr. J.P. Hogendijk

Tweede lezer: Drs. L.C. Palm

Universiteit Utrecht, Augustus 2009



# Inhoudsopgave

<b>1</b>	<b>Inleiding</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Pieter Wils</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Snijdingen van regelmatige veelvlakken</b>	<b>12</b>
<b>4</b>	<b>Wils' veelvlakkenhoofdstuk in historische context</b>	<b>63</b>
4.1	Geschiedenis van het vijftiende boek van <i>de Elementen</i> . . . . .	63
4.2	Wils' tekst in vergelijking met boek XV van <i>de Elementen</i> . . . . .	68
4.3	De bronnen van Pieter Wils . . . . .	71
<b>5</b>	<b>Probleem van de grootste inschrijving</b>	<b>73</b>
<b>6</b>	<b>De rest van het boek</b>	<b>76</b>
6.1	Pagina I-IV . . . . .	77
6.2	Pagina 1-5 . . . . .	77
6.3	Pagina 6-63 . . . . .	79
6.4	Pagina 64-71 . . . . .	89
6.4.1	Vraagstuk van Ludolf van Ceulen . . . . .	89
6.4.2	Vraagstuk van Sems en Dou . . . . .	91
6.5	Pagina 81-82 . . . . .	93
6.6	Pagina 83-92 . . . . .	94
6.7	Pagina 93-152 . . . . .	95
6.8	Pagina 153-155 . . . . .	98
<b>7</b>	<b>Conclusie</b>	<b>100</b>
	<b>Referenties</b>	<b>102</b>
	<b>Bijlage</b>	<b>105</b>

Noot: deze scriptie is geprint in zwart-wit. Voor geïnteresseerden is ook een pdf van een kleurenversie beschikbaar. De kleurenversie heeft dezelfde inhoud, maar de afbeeldingen zijn vaak iets makkelijker te doorgronden. Deze pdf is (gratis) aan te vragen via [janbeuving@hotmail.com](mailto:janbeuving@hotmail.com).

# 1 Inleiding

Parallel met het floreren van Nederland als handelsnatie in de zestiende en zeventiende eeuw nam ook de wetenschap een vlucht, waarbij de wiskunde niet achterbleef. Het was ook in die tijd dat steeds meer wiskundigen ervoor kozen om hun boeken in het Nederlands te schrijven, waar Latijn tot dat moment de onbetwiste taal voor wetenschappelijke publicaties was.

Naast de landmeters, schansenbouwers en rekenmeesters, waarnaar natuurlijk steeds meer vraag kwam door de economische vooruitgang, waren er ook mensen die boven de praktische toepassingen uitstegen, en de wiskunde bedreven om de wiskunde – *l'art pour l'art* eigenlijk. Mensen als Simon Stevin, Ludolf van Ceulen, Frans van Schooten; stuk voor stuk grote wiskonstenaers. Zij schreven boeken in het Nederlands, ontwikkelden wiskundig idioom voor het Nederlands en gaven les in het Nederlands. De benaming ‘gouden eeuw’ is zeker ook van toepassing op de wiskunde uit die tijd.

Diverse wetenschapshistorici hebben in de loop der jaren de grootste krenten natuurlijk uit de pap gevist. Maar in de schaduw van de grote namen waren er talloze mensen ook bezig met wiskunde. Hun namen zijn niet of nauwelijks bekend, maar de voornaamste reden daarvoor is vaak dat er simpelweg geen onderzoek naar hen is gedaan. Het aantal mensen dat zich vandaag voor wiskunde interesseert is niet groot, en van de mensen die wel voor dat vak kiezen is maar een klein deel geïnteresseerd in de geschiedenis daarvan. Tel daarbij de taalbarrière – het Nederduyts waar de wiskonstenaers in schreven is alleen goed leesbaar voor mensen die Nederlands of misschien Duits als moedertaal hebben – en dan is eenvoudig verklaard waarom veel boeken nog op onderzoek liggen te wachten.

Een van die mensen in de schaduw is Pieter Wils. In de catalogi van verschillende Nederlandse universiteitsbibliotheken staat een boek van zijn hand met als titel *Wis-konstige Wercken*. Dat boek was sinds het gedrukt werd in 1648 – met drie herdrukken tot in 1654 – niet onderzocht en bleek na een korte inspectie een goed onderwerp voor deze scriptie. De onderzoeksvraag was in een ommezien geformuleerd, namelijk: Wie was Pieter Wils en wat staat er in zijn boek?

In de beantwoording van die vraag heeft het accent vooral gelegen op de wiskundig-inhoudelijke kant van het boek. Toch begint hoofdstuk 2 met een korte opsomming van wat wij weten van leven en (ander) werk van Pieter Wils.

Hoofdstuk 3 is het belangrijkste hoofdstuk van deze scriptie, en gaat in op het interessantste deel uit het boek van Wils. In dat deel behandelt Wils de inschrijvingen van regelmatige veelvlakken in elkaar en hun volumeverhoudingen – geïnspireerd door de inhoud van het (apocriefe) vijftiende en zestiende boek van Euclides’ *Elementen*. Het hoofdstuk begint met een kleine inleiding op het probleem, om vervolgens de tekst van Wils nauwgezet te volgen en uit te leggen. Dit omdat de manier waarop Wils deze inschrijvingen behandelt sterk afwijkt van wat in die tijd gebruikelijk was.

Hoofdstuk 4 bespreekt de historische context van het deel uit Wils’ boek dat in hoofdstuk 3 wordt behandeld. Het vertelt in welke boeken deze inschrijvingen al eerder dan

in Wils' werk werden behandeld, maakt een vergelijking tussen deze boeken en het boek van Wils en stelt de vraag wat de bronnen van Wils zouden kunnen zijn geweest.

Hoofdstuk 5 formuleert een nieuw probleem dat in hoofdstuk 3 de kop opsteekt. Bij de inschrijving van het ene regelmatige veelvlak in het andere kun je de vraag stellen wanneer er sprake is van een maximale inschrijving, dat wil zeggen in welke positie het ingeschreven veelvlak een maximaal volume heeft. Wils geeft voor een paar inschrijvingen antwoord op die vraag, en onderscheidt zich daarmee van al zijn tijdgenoten die over dat onderwerp schreven.

Hoofdstuk 6 behandelt al het andere wat er in het boek van Wils staat. Het deel over de regelmatige veelvlakken beslaat maar 9 van de 155 pagina's uit Wils' boek. In dit hoofdstuk zullen de andere 146 pagina's de revue passeren.

Hoofdstuk 7 ten slotte geeft de conclusies van deze scriptie.

## 2 Pieter Wils

Pieter Wils (Leiden, ±1600 - Haarlem, 19 september 1647) was bevoegd landmeter in de hele provincie Holland. Hij kreeg toestemming daarvoor in 1626 na een examen bij Frans van Schooten en Willibrord Snellius. Dat hij het vak van landmeter uitoefende, blijkt ook uit kaarten die van hem zijn overgebleven – zonder uitzondering zijn dit kaarten van gebieden in de regio Haarlem, waar Wils al woonde toen hij in 1626 examen deed. Naast landmeten hield hij zich ook bezig met wiskunde, wat blijkt uit zijn enige verschenen wiskundeboek, *Wiskonstige Wercken* (Haarlem, 1648). Dit boek werd na zijn dood samengesteld door een leerling van hem, Gerard Kinckhuysen. Waar en door wie Wils geschoold is in de wiskunde en het landmeten is onbekend. Dit hoofdstuk geeft iets meer achtergrond bij wat we van Wils' leven weten.

In het voorwoord van Wils' boek is het volgende te lezen:

‘Nu, also den Autheur van dit Werck den seer vernuften en heerlijcken *Wis-konstenaer* MR. PIETER WILS (mijnen Meester goeder gedachte) over-leden was: zijnde uyt dit sterffelijck leven geruckt ende wech-genomen, eer hy de Wercken en Blijcken van sijn hoogh begaefde Wetenschap in de *Mathematica* heeft konnen vervaerdigen om in druck uyt te geven, zoo hebben sommige Liefhebbers dier Konste by de Weduwe verzocht datse yets van hem in 't licht zoude willen laten komen, om datse hen verzekert hielden datter onder zoo veele *Wis-konstige* verhandelingsen, als by hem waren onder handen ghenomen, immers eenighe zoo verre zoude zijn gebracht, ofte immers zeer nae, om ghedruckt te moghen werden [...].’<sup>1</sup>

Dit voorwoord stamt uit 1654, maar in de eerste druk van Wils' boek, uit 1648, staat hetzelfde in iets andere bewoordingen.<sup>2</sup> Gerard Kinckhuysen heeft dat voorwoord bij de eerste druk ondertekend op 12 september 1648. Wils is dus voor die tijd overleden. In het *Nieuw Nederlandsch Biografisch Woordenboek* van Molhuysen en Blok uit 1911 lezen we: ‘Uit zijn eerste vrouw Mayke de Haas, is 19 Mrt. 1630 aldaar [Haarlem, JB] gedoopt Francijntje W.; 12 Aug. 1646 hertrouwde hij er met Catharina Buyck.’<sup>3</sup> Hij is dus in ieder geval na die dag in augustus 1646 overleden. Het genoemde Biografisch Woordenboek is de meest uitgebreide bron die we over Wils' leven hebben. Onderstaande passage komt uit het lemma over Pieter Wils, en dient als verdere basis voor dit hoofdstuk.

**WILS (Pieter)**, geb. te Leiden, gest. te Haarlem ± 1647, vervaardigde een *Loflieddicht op de natuerkund van C. Drebbel*, voorkomende o.a. in de uitgave van diens *Natuur der elementen* (Rott 1621). In 1626 kreeg hij te Haarlem vergunning de geometrie uit te oefenen; Ampzing (1628) spreekt niet alleen van zijn sterrekundige waarnemingen, doch ook van zijn kunst in het aanleggen van schansen. Van zijne werkzaamheid als gezworen landmeter getuigen verschillende kaarten op het rijksarchief (9 juli 1630 en Mrt. 1644) en

---

<sup>1</sup>Wils [1654] Uit het (ongenummerde) voorwoord.

<sup>2</sup>Het opmerkelijkste verschil tussen de twee voorwoorden is overigens dat Kinckhuysen in de versie van 1648 niet een keer het woord ‘wiskonst’ of ‘wiskonstenaer’ gebruikt, maar het steevast bij ‘mathematica’ houdt.

<sup>3</sup>Molhuysen en Blok [1911] p. 1579.

het gemeente-archief te Haarlem; in 1633 werd hij belast met het maken eener kaart van de omstreken der stad, gaf Oct. 1635 zijn kaart van den Schermer met de verkaveling, gedrukt in het *Octroy van der Schermer* (Alkm. 1635) en vervaardigde omstreeks 1643 met de landmeters Sal. de Bray en Pieter Post eene grondteekening voor de vergrooing van Haarlem.<sup>4</sup>

We lezen dat Wils zich, behalve met wiskunde en landmeten, ook bezighield met gedichten. Wie het genoemde 'loflieddicht op de natuerkund van C. Drebbel' (opgenomen als bijlage achter deze scriptie) leest, concludeert dat Wils in ieder geval over een goed gevoel voor rijm en metrum beschikte. En omdat dit gedicht in 1621 verscheen, zegt het ons iets over zijn geboortejaar, namelijk dat dat in ieder geval voor 1605 moet worden gezocht, want veel jonger dan 16 kan hij niet geweest zijn toen hij dat schreef.

Molhuysen en Blok vertellen verder van de 'vergunning de geometrie uit te oefenen'. Daarmee wordt bedoeld op de admmissie tot landmeter die Wils in 1626 kreeg bij de Staten van Holland. In het archief van deze Staten van Holland, beschikbaar in het Nationaal Archief in Den Haag, is de admmissie nog na te lezen: 'Op 17 september 1626 [...] is Pieter Wils, woonende tot haerlem opte attestatie ende verclaringe Willibordus Snellius ende Fransch van Schooten geaccordeert acte als Lantmeter. In 106 [?] forma.'<sup>5</sup> Snellius en Van Schooten waren in die tijd de examinatoren bij de landmeteradmissies in Holland. Voor hen was die taak in Holland vervuld door onder andere Ludolf van Ceulen en Simon Stevin.<sup>6</sup> Om jezelf 'landmeter' te mogen noemen, moest er een examen worden afgelegd. Deze examens waren per provincie geregeld, en een succesvol afgelegd examen gaf toestemming om binnen de hele provincie als landmeter op te treden. Deze examens werden ingevoerd om toezicht te houden op de kwaliteit van de landmeters, in een tijd waarin er steeds meer vraag kwam naar deze beroepsgroep. Een landmeter legde na zijn admmissie ook een eed af, waarna hij een 'gezworen landmeter' was.<sup>7</sup>

De kaarten die in de passage uit het Biografisch Woordenboek genoemd worden (die inderdaad nog steeds in het rijksarchief liggen) zijn opmetingen van een gebied tussen Wijk aan Zee en Beverwijk (1630) en een stuk grond in de buurt van Assendelft. In het Nationaal Archief ligt ook nog een kaart uit mei 1642 van 'de wildernissen, Landen, weggen, ende wateringgen, omtrent Overveen'. Allemaal kaarten van gebieden in de omgeving van Haarlem dus. Wils noemt zich op deze kaarten afwisselend 'geswoorn landmeter, By den Hove van Holland geadmiteert', simpelweg 'Landmeter' en 'G.S. Landmeter', waarbij G.S. naar ik vermoed voor 'geswooren' staat.

Over de kaart van de Schermer die ook genoemd wordt door Molhuysen en Blok schrijft Pouls: 'De kavelkaart werd hier echter gemaakt door de Haarlemse landmeter Pieter Wils. Deze zou ook het kavelplan ontworpen hebben. Dat Wils als ontwerper deskundig was, blijkt onder meer uit zijn latere ontwerpen voor de stadsuitbreiding van Haarlem. Dit zou de reden kunnen zijn waarom Wils door het polderbestuur was aangetrokken,

---

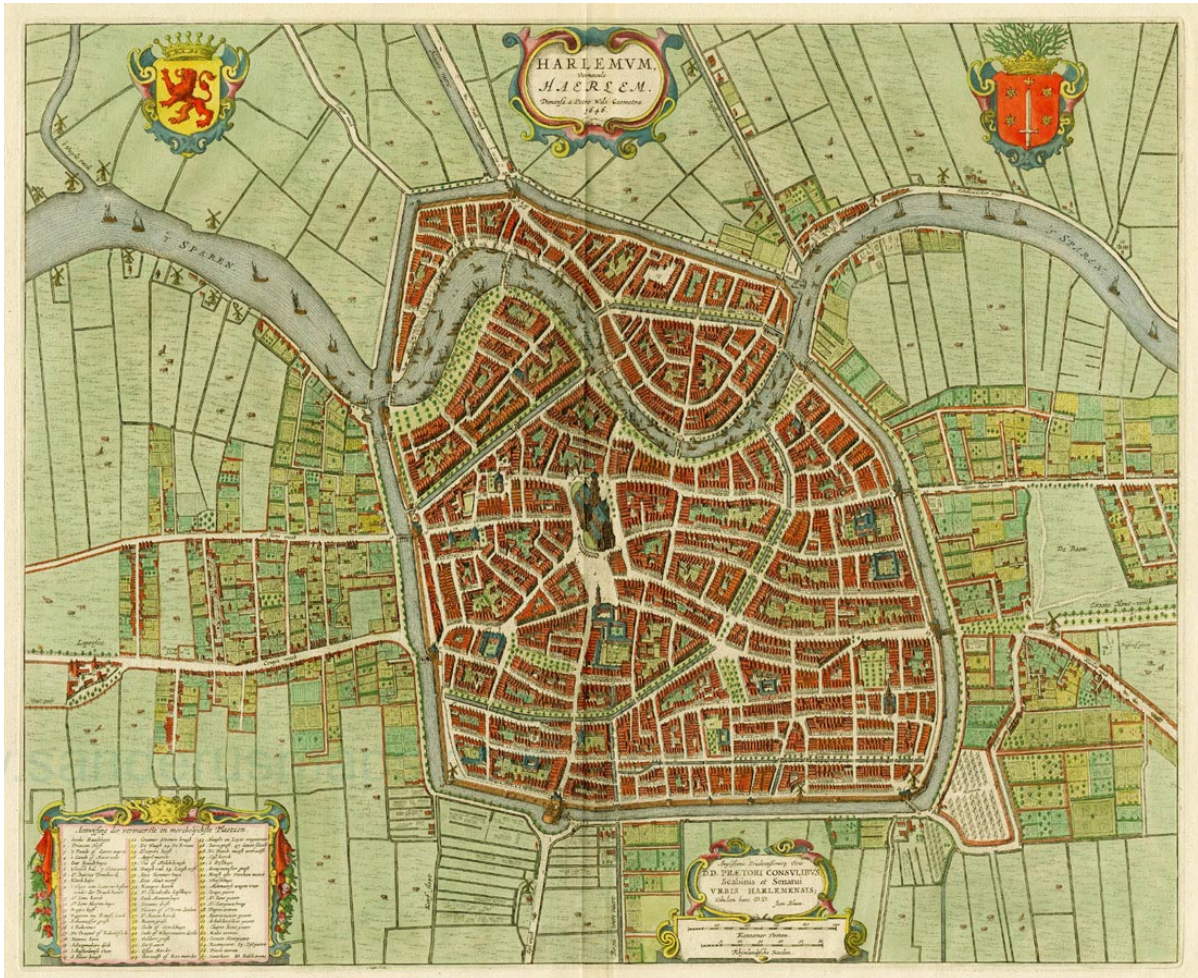
<sup>4</sup>Molhuysen en Blok [1911] p. 1578-1579.

<sup>5</sup>Archief van de Gecommitteerde Raden der Staten van Holland en West-Friesland, Folio 146. Het [?] slaat terug op het getal 106, omdat ik niet helemaal zeker ben of dat precies is wat in het handschrift staat.

<sup>6</sup>Muller & Zandvliet [1987] p. 157.

<sup>7</sup>Pouls [1997] p. 144.

want een speciale ervaring op het gebied van droogmakerijen had Wils niet [...].<sup>8</sup> Die ontwerpen voor de stadsuitbreiding waar Pouls het over heeft, worden ook genoemd in het biografisch woordenboek. Samen met de kavelkaart van de Schermer zijn dit de twee kaarten van Wils waaraan het meest gerefereerd wordt. Het zijn ook deze twee kaarten waarvan diverse facsimiles in Nederlandse universiteiten voorhanden zijn. De kaart van de uitbreiding van Haarlem werd uitgegeven door Joan Blaeu, de beroemde drukker van kaarten. Blaeu gaf deze kaart overigens uit in 1646, niet in 1643, maar het is natuurlijk mogelijk dat Wils de kaart al in 1643 gemaakt had.



Wils, P. [1646] *Harlemum, Vernacule Haerlem*, (Harlemum, in de volkstaal Haerlem), uitgegeven bij Joan Blaeu, Amsterdam.

<sup>8</sup>Pouls [1997] p. 215.



Het boek van Ampzing waar Molhuysen en Blok aan refereren, *Beschrijving ende lof der stad Haerlem in Holland*<sup>9</sup>, is bijna geheel op rijm, en meldt over Wils het volgende:

‘En sal ik VVils hier ook niet billijk eer bewijsen /  
En sijne konst / en vlijt / en dienst volmondig prijzen /  
Aen mij / en aen mijn werk / en aen de Stad gedaen?  
Kom / laet dan ook dijn naem alhier ter eren staen.  
Gy hebt ons magtig Vat seer konstig afgemeten /  
Om trechte perspectijf van ’t gansche werk te weten /  
En onse groote Markt / gelijk ik ’t altemael /  
So gy dat hebt gesteld / in dit mijn boek verhael.  
Ik wilde dat ik so door dijne sek’re maten  
De gansche Stad in ’t rond / en binnen met de straten /  
Eens afgeteykend sag: dit waer de pijn waerd.  
VVils, doet de Stad dien dienst / en maekt dij so vermaerd.  
Gy hebt der sterren loop ook wacker doorgekeken /  
En weet een sterkt en schanz mee[t?]konstig af te steken /  
Een kloeke wetenschap / die tot der landen schut  
Des vijands groote magt voor onse palen stut.’<sup>10</sup>

We zien hier behalve de in het biografisch woordenboek genoemde vaardigheden in het meten van sterren en het vervaardigen van schansen, dat Ampzing Wils verzoekt om nog eens, met zijn kwaliteiten, een plattegrond van de stad te maken. Met zijn kaart uit 1646 voldoet hij ook aan dit verzoek, al weten we natuurlijk niet of het deze regels zijn die hem ertoe hebben aangezet.

Het ‘magtig Vat’ dat Wils ‘seer konstig afgemeten’ heeft, is de grote kerk van Haarlem (de tegenwoordige Sint Bavo). In het ‘aenzangsel’ van Ampzings werk vinden we na pagina 502 nog een ingevouwen ‘Ichnographie, Ofte grond-teykeninge vande Groote Kerk der Stad Haerlem’, waarbij als tekenaar P. Wils vermeld staat. Onder deze plattegrond dicht Ampzing:

‘Bedankt de hand van Wils, die door syn konst en maet  
Den grond ons hier verstoont, en dat den grond beslaet  
Ik wilde dat ik u syn naem ook konde seggen,  
Die zelfs den grond van’t werk so konstig wist te leggen:  
Dit kan ik nu niet doen, syn naem is onbekend,  
Maer syn gebou vermaerd tot aen des Werelds end.’<sup>11</sup>

Achter dit blad zit een perspectieftekening van het interieur van de kerk gevouwen, waarin we meteen de hand van Pieter Saenredam herkennen – ook als diens naam niet rechtsonder op de tekening had gestaan. Op pagina 503 en 504 staan de ‘Grond- ende Stand-maten vande Groote Kerke der Stad Haerlem, dienstig voor die genen die de selvige

---

<sup>9</sup>Ampzing [1628].

<sup>10</sup>Ampzing [1628] p. 344.

<sup>11</sup>Ampzing [1628] ingevouwen blad na p. 502.

in eniger manieren perspectiefelijk willen afteykenen. Door Pieter Wils, Landmeter.’ Het is dan ook hoogstwaarschijnlijk op basis van deze metingen van Wils dat Saenredam zijn interieur heeft geschilderd. Over die connectie van Wils met Pieter Saenredam heeft Robert Ruurs in zijn proefschrift bericht. Het deel over Wils daarin komt uitvoerig aan de orde in Ruurs’ artikel ‘Pieter Saenredam: zijn boekenbezit en zijn relatie met de landmeter Pieter Wils’ (Ruurs [1983]).

Wat in het biografisch woordenboek niet staat is dat Wils, net als bij de *Natuerkund* van Drebbel, een lofdicht schreef op het werk van Ampzing. (Ook dat lofdicht is te vinden in de bijlage bij deze scriptie.) Dit ‘eerdicht’ getuigt van net zo veel inzicht in rijm en metrum als het lofdicht voor Drebbel. Het doet ook vermoeden dat Wils dit vaker deed, maar meer bewijzen daarvan zijn niet bekend.

Het tweede deel van het artikel in het biografisch woordenboek, dat niet letterlijk geciteerd is, vertelt vooral over het bestaan van het boek dat de hoofdmoot vormt van deze scriptie. In de voorloper van dit biografisch woordenboek, het biografisch woordenboek van Van der Aa, staan drie Wilsen genoemd:

**WILS (Pieter)**, landmeter. Na zijne teekening verscheen de eerste zeldzame uitgaaf van het *Octroy van de Schermer mitsgaders Cavel-Conditiën ende Caerte. Alcmaer by Th. Psz. Baart*. 1635. 4e.

Zie Kramm.

**WILS (Jan)**, verdienstelijk landschapsschilder te Haarlem, wiens werken veelal door zijn leerling Van Berchem gestoffeerd zijn, en meestal op die van Both trekken., gelijk twee kabinetstukjes, weleer in het kabinet van G. van der Pals die in 1824 op de verkoop van diens schilderij-verzameling te Rotterdam f. 800 gouden.

Zie Immerzeel.

**WILS (P.)**, beoefenaar der wiskunst te Amsterdam, wiens *wiskunstige werken* aldaar 1653 in 4e zijn verschenen.

Zie Verwoert.<sup>12</sup>

We weten inmiddels dat de eerste en de laatste Wils dezelfde zijn. De genoemde Jan Wils (1603-1665?) was een tijdgenoot van Pieter Wils. Het zou kunnen dat ze familie waren, maar bewijzen daarvoor heb ik niet kunnen vinden. Behalve wat de sobere vermeldingen in de biografische woordenboeken opleveren is Wils een onbekende. Een paar kaarten, wat lofdichten, een paar lovende woorden van tijdgenoten. Jammergenoeg wordt in de landmeteradmissie ook geen melding gemaakt van een geboortedatum, of opgedane scholing. We kennen wel zijn sterfdatum, omdat na zijn overlijden een akte opgemaakt is bij de notaris waarin de complete inboedel van zijn huis wordt geïnventariseerd. Uit deze akte blijkt dat Wils – hoewel wij weinig van hem weten – zeer succesvol moet zijn geweest in zijn werk. Hij woonde bij zijn overlijden in de Damstraat, de straat die in Haarlem de St. Bavo met het Spaarne verbindt. Bovendien blijkt uit de inventaris dat hij een huis met veel kamers bewoonde, die vol stonden met instrumenten, globes en kaarten. Daarbij bezat hij 259 boeken, wat voor die tijd een ongewoon groot aantal is.

---

<sup>12</sup>Van der Aa [1852] Deel VII, p. 92.

Helaas wordt er geen melding gemaakt van de titels van zijn boeken.<sup>13</sup>

Gelukkig is er een boek van Wils zelf overgeleverd, een boek dat tenminste een idee kan geven van zijn wiskundige capaciteiten – en wie weet iets over de inhoud van zijn boekenkast. In de volgende hoofdstukken zal de behandeling van dit boek aan de orde komen.

---

<sup>13</sup>Notarieel Archief Haarlem, NAH 194, nr. 33.

### 3 Snijdingen van regelmatige veelvlakken

## Van de Snijdingh, *Der plat-grondigh-geschickte lichamen, en haer reden, tot elck ander.*

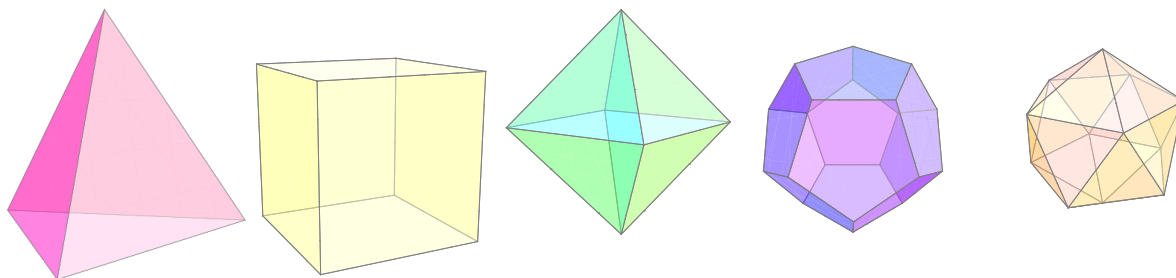
---

Pieter Wils geniet vooral bekendheid als landmeter en kaartenmaker, wat onderstreept wordt door het grootste deel van zijn nagelaten werk. Grofweg is zijn boek, *Wis-konstige Wercken*, als volgt in te delen: 65 pagina's meetkunde in het vlak, 15 pagina's 'Wis-konstige stucken' en 70 pagina's verhandelingen over meetkunde op een bol. Voor een landmeter in die tijd is het niet vreemd dat hij met vlakke meetkunde en bolmeetkunde bekend was. De inhoud van pagina 1-71 en 81-155 komt aan bod in hoofdstuk 6.

Dit hoofdstuk richt zich echter op een hoofdstuk uit het vrij curieuze middengedeelte van het boek, om precies te zijn op pagina 72 tot 80. Op pagina 64 begint het *Aenhangh, Bestaende in eenige Wis-konstige stucken*. Een van deze vraagstukken heeft als titel *Van de Snijdingh, Der plat-grondigh-geschickte lichamen, en haer reden, tot elck ander* en is opgedeeld in twee delen; twee pagina's inleidende definities ('Bepalingen') en postulaten ('Begheerten'), en zeven pagina's met constructievoorschriften en verhoudingen.

Voor de niet-wiskundige lezer geef ik hier eerst een korte indruk van dit hoofdstuk:

Wils behandelt in deze negen pagina's een probleem over regelmatige veelvlakken. Een regelmatig veelvlak is een ruimtelijke figuur waarvan alle zijvlakken van precies dezelfde vorm en grootte zijn, en waar in alle hoekpunten van het figuur evenveel zijvlakken samenkomen. Verder moeten al die hoekpunten even ver van het midden van de figuur af liggen. Een alledaags voorbeeld van een regelmatig veelvlak is de kubus, een normale dobbelsteen.



Van deze regelmatige veelvlakken zijn er precies vijf. Hierboven zijn ze afgebeeld; van links naar rechts de tetraëder (vier driehoekige zijvlakken), de kubus (zes vierkante zijvlakken), de octaëder (acht driehoekige zijvlakken), de dodecaëder (12 vijfhoekige zijvlakken) en de icsaëder (20 driehoekige zijvlakken). Wils beschrijft een methode om

deze veelvlakken uit elkaar te snijden. Concreet: stel dat je een model van harde roomboter hebt van een van de vijf regelmatige veelvlakken, dan geeft dit deel uit Wils' boek een instructie hoe je met een mes door de boter moet gaan om uit het veelvlak dat je hebt, een van de andere vier te snijden. Wils geeft zo'n instructie voor ieder verschillend regelmatig veelvlak. In totaal gaat het dus om  $5 \cdot 4 = 20$  inschrijvingen van het ene regelmatige veelvlak in het andere; Wils geeft daarvoor snijvoorschriften. Daarnaast geeft Wils ook de verhouding tussen het volume van het regelmatige veelvlak waar je mee begon, en het volume van het regelmatige veelvlak dat je overhoudt.

De wiskundige kennis die voor het begrip hiervan nodig is, bestond al toen Wils' tekst gepubliceerd werd. Wils was dus niet de eerste die dit opschreef; het gaat niet om wiskunde die door hem ontwikkeld is. De vijf eenvoudigste inschrijvingen zijn in het Grieks geschreven in de late oudheid en terug te vinden in het zogenoemde boek 15, een apocrief boek bij *de Elementen* van Euclides.<sup>14</sup> In de zestiende eeuw was Candalla de eerste die alle 20 inschrijvingen in één boek behandelde – hij was het ook die de moeilijkste inschrijvingen toevoegde aan de inschrijvingen die er al waren. Hij behandelt deze inschrijvingen in zijn eigen versie van 'boek 15'. Candalla is ook de eerste die de getalsverhoudingen van de volumes van de regelmatige veelvlakken geeft, en dat doet hij in een derde apocriefe boek, 'boek 16'. Dit zijn dezelfde inschrijvingen als de inschrijvingen van Wils, alleen benadert Wils ze op een andere manier. Hoofdstuk 4 van deze scriptie gaat in op de geschiedenis van het apocriefe boek 15, waar en bij wie welke inschrijvingen voor het eerst opduiken, en geeft een vergelijking tussen dit deel uit Wils' boek en de manier waarop deze wiskunde door anderen voor Wils werd behandeld. Dat hoofdstuk is niet technisch en voor iedereen goed te begrijpen. In hoofdstuk 5 van deze scriptie komt een probleem aan de orde dat, zover wij weten, wel voor het eerst door Wils onder de aandacht werd gebracht: het vinden van de grootste inschrijving van het ene regelmatige veelvlak in het andere.

Omdat er aan de apocriefe boeken bij *de Elementen* weinig aandacht is besteed in de geschiedenis, omdat Wils' snijvoorschriften op een alternatieve en interessante manier de inhoud van deze boeken behandelen en omdat er zover bekend vóór Wils geen publicatie in het Nederlands was die alle twintig inschrijvingen behandelde, loonde het de moeite om dit deel uit Wils' boek uitgebreid wiskundig te bekijken.

Wanneer je een boek bekijkt dat 360 jaar geleden is verschenen, brengt dat voordelen en nadelen met zich mee. Het belangrijkste nadeel is dat je de taal van die tijd niet zonder slag of stoot begrijpt. Dan doel ik zowel op het taalkundige als het wiskundige aspect; de woorden en de (wiskundige) termen zijn vaak onbekend en vereisen puzzelwerk. Het grootste voordeel is dat de wiskunde zich in de tussentijd heeft ontwikkeld, en je gebruik kunt maken van technieken en inzichten die in de tussentijd zijn verworven. Die ontwikkeling is onontkoombaar, dat wil zeggen, je kunt niet doen alsof die niet heeft plaatsgevonden.

In deze scriptie wil ik dus een moderne blik op een oud boek werpen. Dat betekent vooral dat de notatie die ik gebruik om de problemen van Wils te bespreken 'modern' is, van na Wils. Daarnaast kun je gebruik maken van moderne begrippen om meer inzicht

---

<sup>14</sup>Euclides schreef zijn *Elementen* (bestaande uit 13 boeken) rond 300 voor Christus en zijn werk is vanaf dat moment talloze malen overgeschreven en herdrukt.

in een probleem te geven. Dat is niet een vorm van valsspelen, maar het voordeel van het voortschrijdende inzicht benutten.

Wils heeft dit hoofdstuk ingedeeld in *vertogen*, een woord dat wij in het Nederlands nog wel kennen, maar een wat verouderde aanblik geeft. Toch wil ik dat woord handhaven, met als voornaamste reden dat een alternatief zich lastig kiezen laat. Wat Wils behandelt zijn niet echt stellingen, eerder voorschriften. Het zijn kleine uiteenzettingen die vertellen hoe je een regelmatig veelvlak inschrijft. Maar de woorden ‘uiteenzetting’ en ‘voorschrift’ zijn wat mij betreft niet beter dan ‘vertoog’, dat letterlijk gewoon ‘verhandeling’ betekent. Bovendien is bij het woord ‘vertoog’ direct duidelijk dat het rechtstreeks naar een tekst van Wils verwijst; in een andere context wordt dat woord namelijk niet gebruikt.

Wils is nogal beknopt in zijn uitleg, en wat hij schrijft is niet triviaal. Daarom zal ik nauwgezet zijn tekst volgen en uitleggen wat Wils bedoelt. Ik heb daarbij wat lay-out betreft een vaste structuur aangehouden. De passages in **dit lettertype** komen letterlijk uit Wils’ boek. Die passages zijn goed te herkennen omdat ze iets smaller zijn uitgelijnd en gecentreerd op de pagina. Bovendien is het zeventiende-eeuwse Nederlands ook onmiskenbaar anders dan het hedendaagse. Omdat de passages zo duidelijk te herkennen zijn, staan ze niet tussen aanhalingstekens. Citaten in deze uitleg staan gewoon in dit lettertype, en staan wel tussen aanhalingstekens.

Ik zal alle vertogen van Wils behandelen. Ik laat de volgorde die Wils heeft aangebracht niet los, hoewel dat wiskundig gezien wel eenvoudiger zou zijn. (Zie ook paragraaf 4.2.) Wel laat ik soms een bewijs achterwege, en wijs ik vooruit naar een nog te behandelen constructie, waar dit bewijs aan de orde komt.

Onder ieder vertoog is een hertaling van dat vertoog opgenomen in hedendaags Nederlands. In die hertalingen heb ik geprobeerd om de inschrijvingen op precies dezelfde manier als Wils te behandelen. Het gevolg is dat je, hopelijk ook als lezer, grote bewondering krijgt voor de precisie en vooral de compactheid van de taal waarmee Wils heeft geschreven. Bij het hertalen bleek ook hoe moeilijk het is om de problemen die Wils beschrijft alleen in woorden te vangen, zoals Wils heeft gedaan. Hopelijk geeft het lezen van de hertaling een idee van hoe het voor tijdgenoten van Wils moet zijn geweest om zijn vertogen te lezen.

Ik heb ervoor gekozen om in de hertalingen de verhoudingen tussen de regelmatige veelvlakken achterwege te laten. Dit omdat in tegenstelling tot de woorden uit de 17e eeuw, de getallen nog steeds voor zich spreken. Ook heb ik de opmerkingen die Wils tussen de vertogen door maakt (de passages waar ‘merckt’ boven staat) niet vertaald. Reden daarvoor is dat in de uitleg van die opmerkingen de hertaling vanzelf ter sprake komt. Een laatste opmerking vooraf: in de bespreking van Wils’ tekst verwijs ik soms ter vergelijking naar de eerste volledige Nederlandse editie van Euclides’ *Elementen*. Deze editie verscheen onder de titel *Beginselen der Meetkunst* en werd gedrukt in 1695. Het lijkt misschien vreemd om te citeren uit een boek dat 50 jaar na Wils’ boek gedrukt werd, maar Vooghts editie geeft een goede afspiegeling van hoe in die tijd inschrijvingen van regelmatige veelvlakken werden behandeld. De tekst van Vooght is bovendien een bijna letterlijke vertaling van een Euclideseditie die al ver voor Wils gedrukt werd.

*Eerste deel:*

# Van de Voorbereydsels.

*Eerste Lidt:*

## Van de Bepalingen.

Het eerste deel van dit hoofdstuk heeft als titel *Van de Voorbereydsels* en bestaat uit vijf definities en twee postulaten. De vijf definities (door Wils 'Bepalingen' genoemd) luiden als volgt:

### Eerste Bepalingh.

De plat-grondigh-geschikte lichamen, werden begrepen van even en ghelijcke, geschikte, (met haer zijden) t'samen-gevoegde platte gronden.

### Tweede Bepalingh.

De kanten der lichamen, werden begrepen, van tweer gronden t'samen-gevoeghde zijden.

### Derde Bepalingh.

De hoecken der lichamen, werden begrepen, van der gronden t'samen-gevoeghde hoecken.

### Vierde Bepalingh.

De plat-grondigh-geschikte lichamen, zijn vijf; als vier-grondt, ses-grondt, acht-grondt, twaelf-grondt, en twintig-grondt.

### Vijfde Bepalingh.

De gronden der vier-grondt, acht-grondt, en twintigh-grondt, zijn drie-zijdigh; der ses-grondt, vier-zijdigh; en der twaelf-grondt, vijf-zijdigh.

Naar hedendaags Nederlands vertaald staat daar het volgende:

**Eerste definitie:** De regelmatige veelvlakken zijn opgebouwd uit gelijkvormige, regelmatige, vlakke veelhoeken van gelijke oppervlakte, zodanig, dat de veelhoeken aan elkaar grenzen in hun ribben. (Dat wil zeggen: er zitten geen 'gaten' tussen de zijvlakken, en ze overlappen ook niet.)

**Tweede definitie:** Het lijnstuk waar twee zijvlakken samenkomen noemen we een ribbe.

**Derde definitie:** Het punt waar de hoeken van de zijvlakken samenkomen, noemen we een hoekpunt.

**Vierde definitie:** Er zijn vijf regelmatige veelvlakken: de tetraëder, de kubus, de octaëder, de dodecaëder en de icoesaëder.

**Vijfde definitie:** De zijvlakken van de tetraëder, de octaëder en de icoesaëder zijn driehoekig. De zijvlakken van de kubus zijn vierkant, en de zijvlakken van de dodecaëder zijn vijfhoekig.

Omdat ik in de bespreking van Wils' werk hedendaagse begrippen gebruik, maak ik nu even een koppeling tussen de belangrijkste termen die Wils gebruikt in deze definities, en de woorden die ik straks gebruik in de behandeling van Wils' tekst.

**plat-grondig-geschikte lichamen:** regelmatige veelvlakken

**even en ghelijcke:** gelijk wat vorm en oppervlakte betreft

**geschikte:** regelmatige

**platte:** vlakke

**grond(en):** zijvlak(ken)

**kant:** ribbe

**zijde:** zijde van een zijvlak [ook een ribbe dus]

**hoeck:** hoekpunt (waar de zijvlakken samenkomen)

**vier-grondt:** tetraëder

**ses-grondt:** kubus

**acht-grondt:** octaëder

**twalf-grondt:** dodecaëder

**twintig-grondt:** icoesaëder

‘Het idee om bepaalde veelvlakken met meer dan normale symmetrie-eigenschappen apart te bekijken onstond voor het eerst tijdens de hoogtijdagen van de Griekse meetkunde.’<sup>15</sup> Dit is de eerste zin van het artikel van Branko Grünbaum in de *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences* over regelmatige veelvlakken. Grünbaum vertelt dat de veelvlakken onderwerp van gesprek waren op de academie van Plato. Omdat Plato aan de vijf regelmatige veelvlakken ook filosofische waarde hechtte – hij verbond de elementen aarde, vuur, lucht en water met vier van de vijf veelvlakken – hebben ze de naam ‘platonische veelvlakken’ gekregen.

De vijf regelmatige veelvlakken zijn volgens Grünbaum ‘de kroon op het werk van Euclides’ Elementen’<sup>16</sup>. De veelvlakken staan beschreven in het dertiende en laatste boek van *De Elementen*. In een voorwoord bij dit dertiende boek staat vermeld dat de veelvlakken weliswaar de naam van Plato dragen, maar niet aan hem worden toegeschreven; drie van de vijf werden ‘ontdekt’ door de pythagoreeërs (de kubus, de tetraëder en de dodecaëder) en de overgebleven twee, de octaëder en de icoesaëder, worden toegeschreven aan Theaetetus. In zijn fraaie artikel *The Discovery of the Regular Solids*<sup>17</sup> staat William Waterhouse stil bij de op het oog merkwaardige volgorde van ontdekken van deze veelvlakken. De ontdekking van de dodecaëder zou volgens dit voorwoord eerder hebben plaatsgevonden dan de toch veel ‘simpelere’ octaëder. Waterhouse geeft als ver-

<sup>15</sup>Grünbaum [1994] p. 866. Vertaald uit het Engels.

<sup>16</sup>Grünbaum [1994] p. 866. Vertaald uit het Engels.

<sup>17</sup>Waterhouse [1972]

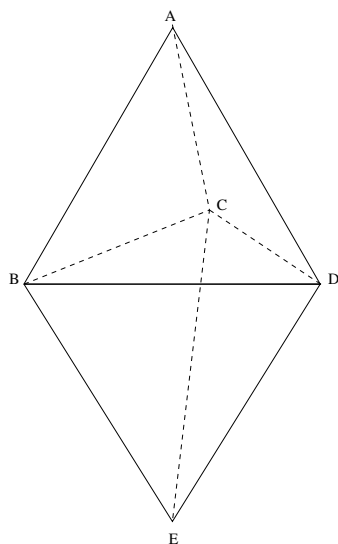


klaring dat (een licht afwijkende vorm van) de dodecaëder in de natuur voorkomt als een natuurlijk kristal, en de vorm daardoor eerder bekend was. Daarnaast, en dat is een opmerkelijke gedachtegang, zegt hij dat de octaëder misschien wel eerder bekend was maar dat pas toen Theaetetus een definitie van een regelmatig veelvlak introduceerde, hij opmerkte dat de octaëder ook aan alle eigenschappen daarvan voldeed.

De kroon op Euclides' *Elementen*, zegt Grünbaum dus, maar diezelfde Grünbaum wijst ook op de tekortkomingen van Euclides: 'Vanuit het oogpunt van de logica laat Euclides' verhandeling over de regelmatige veelvlakken ons een scherp contrast zien tussen goede bedoelingen en de uitvoering daarvan.'<sup>18</sup>

In het dertiende boek introduceert en construeert Euclides een voor een alle vijf de regelmatige veelvlakken, en vervolgens zegt hij 'dat behalve de genoemde vijf figuren geen andere figuur kan worden geconstrueerd, omvat door gelijkzijdige en gelijkhoekige onderling gelijke veelhoeken.'<sup>19</sup>

Het bewijs dat Euclides hiervoor geeft berust op het feit dat in een hoekpunt van een regelmatig veelvlak minimaal drie zijvlakken moeten samenkomen, en dat de som van de hoekpunten van de samenkomende zijvlakken niet groter dan of gelijk aan 360 graden mag zijn; bij 360 graden liggen de samenkomende zijvlakken immers in één vlak, en is er geen sprake meer van een hoekpunt. In een hoekpunt van een regelmatig veelvlak kunnen dus drie, vier of vijf driehoeken samenkomen (respectievelijk de gevallen van de tetraëder, de octaëder en de icosaeëder), drie vierkanten (de kubus) of drie vijfhoeken (de dodecaëder).<sup>20</sup> Nota bene: dit bewijs is alleen compleet als je, zoals Euclides eerst doet, alle vijf de veelvlakken ook daadwerkelijk construeert.



De definitie van Euclides van een regelmatig veelvlak – een figuur dat bestaat uit gelijkzijdige en gelijkhoekige figuren die aan elkaar gelijk zijn – is te summier. Er zijn, buiten de vijf bekende, figuren te construeren die aan alle door Euclides genoemde eisen voldoen en toch niet regelmatig zijn. Grünbaum legt uit dat deze omissie van Euclides vaak geprobeerd is goed te praten door te stellen dat Euclides *convexe* veelvlakken bedoeld moet hebben.<sup>21</sup> Dat dit echter ook niet toereikend is, bewijst de figuur hiernaast, die uit twee op elkaar geplakte tetraëders bestaat. Allezes de zijvlakken zijn gelijkzijdige driehoeken van gelijke grootte, en toch noemen we dit niet een regelmatig zesvlak. In *A* en *E* komen namelijk drie driehoeken samen, maar in *B*, *C* en *D* vier. Restricties op de definitie van Euclides zijn in de loop der eeuwen door verschillende mensen geformuleerd, maar pas in 1810 publiceerde Cauchy een idee dat in 1916 door Steinitz werd uitgewerkt tot een definitie op basis van de symmetriegroep van een veelvlak,

<sup>18</sup>Grünbaum [1994] p. 866. Vertaald uit het Engels.

<sup>19</sup>Euclides [1930] p. 267.

<sup>20</sup>Heath [1956] p. 507-508.

<sup>21</sup>Een figuur is convex als voor iedere twee punten  $x$  en  $y$  in de figuur geldt dat ook het complete lijnstuk tussen  $x$  en  $y$  in de figuur ligt. Een bol is dus convex, een donut niet.

die er in essentie op neerkomt dat alle hoekpunten congruent moeten zijn.<sup>22</sup>

Maar Wils had natuurlijk van Cauchy noch Steinitz ooit gehoord – laat staan van groepentheorie – en het is daarom interessant om zijn eerste bepaling, zijn definitie van een regelmatig veelvlak, naast de definitie van Euclides te leggen. We zien dan dat de twee nauwelijks verschillen. Wils schrijft op wat Euclides al opschreef, met de toevoeging dat bij het construeren van de veelvlakken de veelhoeken met de zijden aan elkaar moeten grenzen. Euclides schrijft dat niet expliciet op, maar de notie daarvan blijkt wel uit zijn bewijs van de stelling dat er maar vijf regelmatige veelvlakken zijn.

Hoewel het dertiende boek van Euclides' *Elementen* uitmondt in een bewijs van het bestaan van vijf regelmatige veelvlakken, wordt de problematiek die Wils hier te berde brengt, het inschrijven van de regelmatige veelvlakken in elkaar, door Euclides niet behandeld. Maar, in de loop der eeuwen is er aan Euclides' magnum opus tekst toegevoegd – zoals bijvoorbeeld de Bijbel ook apocriefe boeken kent. In veel belangrijke Euclidesedities uit Wils' tijd waren ook een veertiende en een vijftiende boek opgenomen. Boek veertien bewijst een aantal proposities over de verhouding van de oppervlakte en de inhoud van een icosaeëder en een dodecaeëder die in dezelfde bol zijn geschreven.<sup>23</sup> Boek vijftien beslaat (onder andere) het inschrijven van enkele regelmatige veelvlakken in elkaar, en daarmee komen we bij het onderwerp van Wils dat de hoofdmoot vormt van dit hoofdstuk. In hoofdstuk 4 ga ik in op de geschiedenis van dit vijftiende boek, en zal ik enkele *Elementen*-edities uit de vijftiende tot zeventiende eeuw op een rijtje zetten en vergelijken. Nu ga ik verder met de behandeling van Wils' tekst.

### *Tweede Lidt.*

## Van de Begheerten

Het *Tweede Lidt* van het eerste deel heet *Van de Begheerten*. 'Begheerten' is het 17e-eeuwse woord voor 'postulaten'. In de Euclideseditie van Vooght uit 1695 wordt dit woord ook gebruikt. Dat is volledig volgens de Euclidische traditie (eerst de definities, dan de postulaten). De twee opmerkingen die Wils hier maakt hebben geen belangrijke wiskundige inhoud, maar zijn meer gebruiksvoorschriften. Wij zouden nu misschien 'opmerking vooraf' schrijven.

### Eerste Begheerte.

Hoewel somtijts door voorighe sne'en, eenighe palen der volghende gheweert, of verduystert werden; nochtans door d'over-ghebleven, of behulp der nieuw-ghemaecte; 't begheerde te moghen ghenoech gheschie'n.

---

<sup>22</sup>Grünbaum [1994] p. 867-868.

<sup>23</sup>Zie voor een korte maar grondige samenvatting daarvan het commentaar in Heath [1956] p. 512-519.

## Tweede Begheerte.

Hoewel dese handelingh (als Meet-konstig zijnde) schijnt te vereyssen, dat der lichamen reden door meet-konstighe grootheden vertoont werde; nochtans de selve, om kortheydt, door tel-konstighe te moghen gheschieden.

Vrij vertaald staat hier het volgende:

**Eerste postulaat:** Als het onmogelijk is om de voorgeschreven snede uit te voeren omdat een deel al is weggesneden in een vorige snede, dan moet deze snede toch worden uitgevoerd.

**Tweede postulaat** De verhoudingen van de regelmatige veelvlakken ten opzichte van elkaar worden in getallen weergegeven.

Over het eerste postulaat: In de constructies zal straks blijken dat Wils bij het bepalen van ingeschreven veelvlakken gebruik maakt van snedes; hij snijdt het ene veelvlak uit het andere. Wat hij met zijn eerste opmerking wil zeggen, is dat door zijn snijvoorschriften sommige stukken weggesneden moeten worden, terwijl dat al ten dele door een vorige snijbeweging is gebeurd. In dat geval moet alsnog de tweede snede worden uitgevoerd, eventueel met behulp van ‘nieuw-ghemaecte’ delen – daarmee bedoelt hij dat je soms even moet doen alsof het afgesneden deel er nog is, zodat je de instructie precies kunt opvolgen.

Het tweede postulaat heeft betrekking op het weergeven van de verhoudingen tussen een veelvlak en zijn ingeschrevene. Het was in die tijd gebruikelijk om verhoudingen niet in getallen uit te drukken, maar in grootheden, dat wil zeggen lijnstuk, oppervlak en inhoud. In de Euclideseditie van Vooght bijvoorbeeld wordt de verhouding tussen octaëder en ingeschreven icoesaëder als volgt gegeven: ‘D’achtgrond [...] heeft tot haar ingeschreven twintiggrond een reden, als de twee grondplatten des achtgronds tot de vijf grondplatten des twintiggronds.’<sup>24</sup> Vooght drukt dus de verhoudingen uit met behulp van de oppervlaktes van de zijvlakken van de twee veelvlakken. Dat is wat Wils bedoelt als hij schrijft dat ‘der lichamen reden door meet-konstighe grootheden vertoont’ zouden moeten worden. Wils geeft die verhouding dus in getallen; als hij de verhouding tussen de octaëder en zijn ingeschreven icoesaëder behandelt, zegt hij alleen dat deze zich verhouden als  $7 + \sqrt{45}$  en 10.

Na deze definities en postulaten gaat Wils over tot de daadwerkelijke inschrijvingen van de veelvlakken in elkaar.

---

<sup>24</sup>Euclides [1695] p. 661.

*Tweede deel:*  
**Van de Vertoghen.**

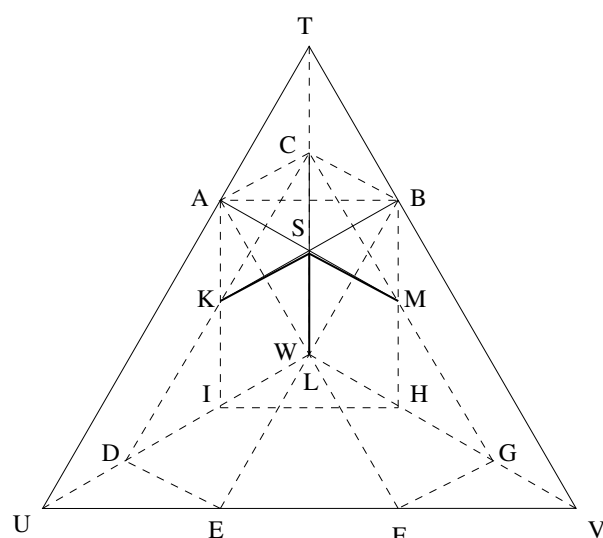
*Eerste Lidt:*  
**Snijding des vier-grondts:**

*Tot een ses-grondt.      Eerste Vertoogh.*

Des vier-grondts kanten af-gesneden, door der zijden derde-deelen, (of twe'er-gronden middel-punten, de snee evenwijdigh met de kant :) blijft den in-gesloten ses-grondt: In reden tot den vier-grondt, als 1, tot 9.

**Hertaling:** Als iedere ribbe van de tetraëder wordt afgesneden door een vlak dat wordt opgespannen door de vier punten die de ribbes die van de af te snijden ribbe af lopen verdelen in een verhouding 1 : 2 (of door het vlak dat evenwijdig is aan de af te snijden ribbe en door de twee middelpunten van de zijvlakken gaat die in de af te snijden ribbe samenkomen), blijft een kubus over.

Wils heeft voor een zeer systematische opsomming van de mogelijkheden gekozen. Eerst behandelt hij alle inschrijvingen in de tetraëder, dan in de kubus, dan in de octaëder, en tot slot in de dodecaëder en de icoesaëder. Nadeel daarbij is dat hij niet bepaald met de makkelijkste opgave begint. Daar staat tegenover dat bij het uitleggen van Wils' methode deze eerste constructie gelijk inzichtelijk maakt wat Wils met zijn eerste postulaat bedoelde.



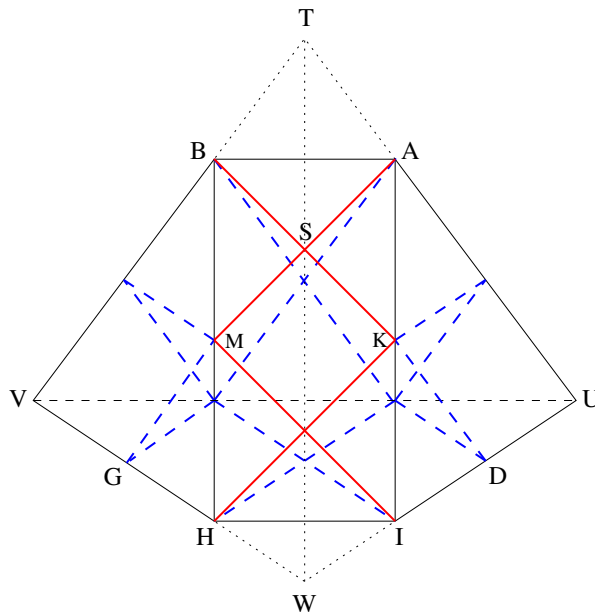
Uit. Dit is niet het geval in werkelijkheid. Punt *L* ligt in vlak *TUV* en *W* is een van

Wils gebruikt het werkwoord 'afsnijden' hier niet voor niets. Dat is namelijk precies wat zijn constructie doet. Hij snijdt stukken van de tetraëder af, net zo lang tot hij de kubus overhoudt.

Maar ook als we de hertaling lezen, is dat nog steeds niet een heel duidelijke instructie. Er is een plaatje nodig om dit te verhelderen. In de afgebeelde tetraëder *TUVW* heb ik drie van de zes snijvlakken aangegeven. In totaal zijn er zes snijvlakken, omdat alle ribbes van de tetraëder worden afgesneden volgens de instructie. (Merk op: Door het perspectief van het plaatje lijken punt *W* en *L* samen te vallen.

de vier hoekpunten van de tetraëder.) Het vlak  $ABHI$  snijdt de ribbe  $TW$  af,  $ACFG$  snijdt  $TV$  af en  $BCDE$  snijdt  $TU$  af. De onderlinge snijlijnen van de vlakken zijn  $AM$ ,  $BK$  en  $CL$ . Het snijpunt van deze drie lijnen is  $S$ , dat tevens een van de hoekpunten van de kubus is. De dik getekende lijnen  $SK$ ,  $SM$  en  $SL$  zijn drie ribbes van de kubus, en  $K$ ,  $L$  en  $M$  zijn hoekpunten. Wat bij het inzicht helpt: punt  $S$  is het zwaartepunt van driehoek  $ABC$  in de figuur op pagina 21.

Uit het plaatje dat we nu rechts zien is wellicht beter te begrijpen waarom er een kubus overblijft. De figuur die getekend is, is dezelfde piramide als in het vorige plaatje, maar dan 180 graden gedraaid over een as die loodrecht op het grondvlak  $UVW$  staat. (Je kunt ook zeggen: het aanzicht is vanaf de andere kant.) Bovendien is nu de ribbe  $TW$  afgesneden door het vlak  $ABHI$  volgens het voorschrift van Wils. Als we nu de snijvlakken voor de ribbes  $WU$ ,  $WV$ ,  $TV$  en  $TU$  ook intekenen (onderbroken lijnen in de tekening), en de snijlijnen van die snijvlakken met  $ABHI$  ( $BK$ ,  $AM$ ,  $MI$  en  $KH$ ), zien we dat van het snijvlak  $ABHI$  alleen een vierkant in het midden overblijft. (We zien eenvoudig dat dit een vierkant is; Als de ribben van de tetraëder 1 zijn, dan  $BA = \frac{1}{3}$  en  $BH = \frac{2}{3}$ ;  $M$  en  $K$  zijn de middens van  $BH$  en  $AI$ , en dus  $BK = AM = MI = KH$ ; alle vier zijn ze de diagonaal van een vierkant met zijde  $\frac{1}{3}$ .) Van alle zes de ribben blijft precies zo'n vierkant over; de figuur die overblijft is een kubus.



We kunnen nu eenvoudig de inhoud van de kubus ten opzichte van de tetraëder berekenen.  $AB = AK = \frac{1}{3}$ . Daaruit volgt dat  $BK = \frac{\sqrt{2}}{3}$  en dus  $SK = \frac{\sqrt{2}}{6}$ . De inhoud van de kubus is dan natuurlijk  $(\frac{\sqrt{2}}{6})^3 = \frac{\sqrt{2}}{108}$ . De inhoud van een tetraëder met ribbe 1 is  $\frac{\sqrt{2}}{12}$ . De verhouding van de kubus tot de tetraëder waar hij in is geschreven, is dus  $1 : 9$ . Dit is precies de verhouding die Wils geeft.

Tot slot is het nog interessant om te zien wat Wils bedoelt met ‘of twe’er-gronden middelpunten, de snee evenwijdigh met de kant’. We hebben gezien hoe we zijn instructie ‘door der zijden derde-deelen’ moeten begrijpen, en wat hij daarna schrijft, is een andere manier om hetzelfde te zeggen. Als we naar de tekening op deze pagina kijken, zien we eenvoudig dat  $M$  en  $K$  de middelpunten zijn van  $TVW$  en  $TUW$ . Wat Wils eigenlijk zegt is: als je een ribbe wilt afsnijden, neem je de twee middelpunten van de zijvlakken die in die ribbe samenkomen, en daarna het snijvlak door deze twee middelpunten dat evenwijdig is met de af te snijden ribbe.  $AI$  en  $BH$  gaan door  $K$  en  $M$  en zijn evenwijdig met  $TW$ ;  $ABHI$  is dus ook volgens deze instructie het snijvlak waarmee  $TW$  wordt afgesneden. De twee snijmethodes zijn dus hetzelfde.

MERCKT

Dat den vier-grondt oock mach gesneden werden, tot een grootsten in-ghesloten ses-grondt, (als blijcken sal in 't volghende derde lidt:) In reden tot den vier-grondt, als 3, tot  $\sqrt{50} + 7$ .

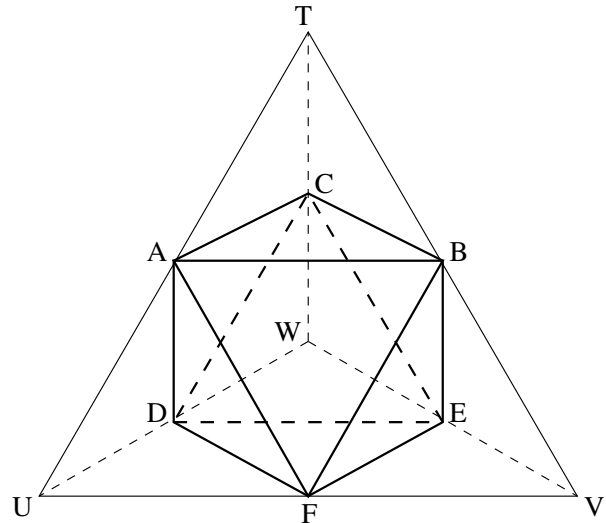
Wils beperkt zich in de vertogen tot het noemen van de instructies om het ene veelvlak uit het andere te snijden. Soms heeft hij nog iets extra's te zeggen, en dat doet hij dan zoals hier in een 'merckt'; een soort voetnoot eigenlijk. Zoals Wils hier zelf zegt, zal de inhoud van deze toevoeging blijken 'in 't volghende derde lidt'. Dat is het hoofdstuk waarin hij de snijding van de octaëder behandelt. Ik laat de behandeling van deze opmerking dan ook rusten tot ik het twaalfde vertoog heb behandeld.

Tot een acht-grondt. Tweede Vertoogh.

Des vier-grondts hoeken af-gesneden, door 't midden der zijden; blijft den in-gesloten acht-grondt: In reden tot den vier-grondt, als 1, tot 2.

**Hertaling:** Als ieder hoekpunt van de tetraëder wordt afgesneden door een vlak dat door de middens van de drie ribbes gaat die naar dat hoekpunt toelopen, blijft een octaëder over.

Het tweede vertoogh is een stuk inzichtelijker dan het eerste. In een plaatje is direct de constructie duidelijk. De tetraëder  $TUVW$  heeft zes ribbes. De middens van deze ribbes ( $ABCDEF$ ) spannen samen een octaëder op. Het is eenvoudig in te zien dat het hier om een lichaam met acht zijvlakken gaat. Bovendien zijn alle zijvlakken gelijkzijdige driehoeken van gelijke grootte.  $ABCDEF$  is dus een octaëder. In het plaatje kan ook eenvoudig de constructie van Wils worden herkend: alle hoekpunten van de tetraëder worden afgesneden door de middens van de ribbes die in dat hoekpunt samenkomen. Je houdt dan een octaëder over. De verhouding van de twee lichamen is ook gemakkelijk in te zien. Van de tetraëder worden vier kleine tetraëders afgesneden die even groot zijn. De inhoud van de octaëder  $ABCDEF$  is dus de inhoud van de tetraëder waar vier keer de inhoud van  $TABC$  is afgetrokken. De inhoud van  $TABC$  is een achtste van de inhoud van  $TUVW$  (alle ribbes zijn immers twee keer zo klein). Daarom



$$ABCDEF = TUVW - 4.TABC = TUVW - 4.\frac{1}{8}.TUVW = \frac{1}{2}.TUVW$$

De tetraëder en zijn ingeschreven octaëder verhouden zich dus als 2 : 1.

Deze inschrijving werpt nog weer een nieuw licht op de constructie van de kubus in de tetraëder. Het is vrij algemeen bekend dat de duale van de octaëder – de figuur die ontstaat door het verbinden van middelpunten van de zijvlakken – een kubus is. (Zie voor de behandeling van die constructie het elfde vertoog.) Als we die duale tekenen in de zojuist geconstrueerde octaëder, komt precies de kubus tevoorschijn die we in het eerste vertoog hebben gezien. De positie van die kubus is vanuit dit oogpunt veel duidelijker, vind ik zelf.

Waarom gaat het hier om dezelfde kubus? We hebben in het eerste vertoog gezien dat de vier zijvlaksmiddelpunten van de tetraëder hoekpunten van de kubus zijn. Het is vrij eenvoudig te zien dat deze vier middelpunten ook de middelpunten zijn van vier van de zijvlakken van de octaëder. Omdat deze vier punten niet in een vlak liggen, en alle vier hoekpunten van een kubus zijn, zijn de twee kubussen identiek. (Het bewijs daarvoor berust op het feit dat vier punten die niet in één vlak en niet op één lijn liggen, een unieke bol definiëren. Deze bol is de omgeschreven bol van de kubus, en omdat de omgeschreven bollen gelijk zijn (omdat de punten gelijk zijn), zijn de kubussen ook gelijk.)

*Tot een twaelf-grondt.      Derde Vertoogh.*

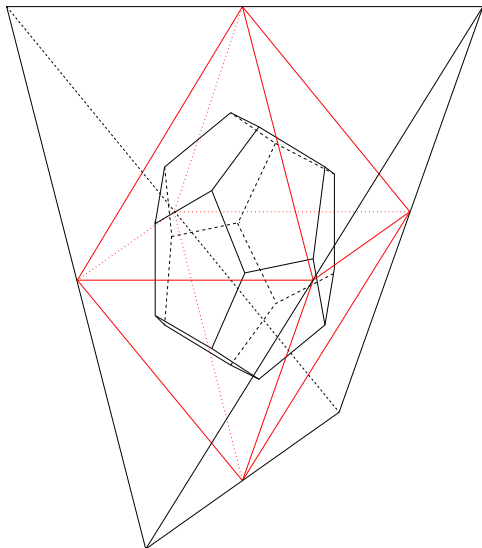
Des vier-grondts hoecken af-ghesneden, door 't midden der zijden; en dan de nieuwe kanten ordentlijk een tegen een, door twe'er-gronden (als een oude en nieuwe,) middel-punten, en twee dier gronden raeckende kantens tweede-derdedeels kleynste everedenigh-ghesneden deel; blijft den ingheslooten twaelf-grondt: In reden tot den vier-grondt, als  $5 + \sqrt{5}$  tot 36.

**Hertaling:** Snijd eerst van de tetraëder een octaëder [op de manier van het tweede vertoog]. Beschouw vervolgens een van de hoekpunten van de octaëder. Kies van de vier ribbes die daar samenkomen twee ribbes die loodrecht op elkaar staan. Snijd elk van die twee ribbes af door het vlak dat opgespannen wordt door de middelpunten van de twee zijvlakken die in de af te snijden ribbes samenkomen, en de twee punten die de andere twee ribben die van het gekozen hoekpunt aflopen verdelen in een verhouding  $\frac{5-\sqrt{5}}{6} : \frac{1+\sqrt{5}}{6}$ . Snijd op deze manier de 12 ribbes van de octaëder in zes groepjes van twee af. Wat overblijft is een dodecaëder.

Dit is op het eerste gezicht een nogal ingewikkelde formulering. De eerste zin lukt nog: 'des vier-grondts hoecken af-ghesneden, door 't midden der zijden'. Daarin herkennen we onmiddellijk het tweede vertoog. Blijkbaar snijdt Wils van de tetraëder eerst een octaëder, en gaat hij daarna met de octaëder aan de slag, getuige ook de zinsnede 'en dan de nieuwe kanten...'.

Als we nu doorbladeren in Wils' werk, zien we als instructie bij het inschrijven van een dodecaëder in een octaëder: 'Des acht-grondts kanten ordentlijk een teghen een af-gesneden, door twe'er gronden middel-punten, en twee die'r gronden rakende kantens

tweede derden-deels kleinste everedenigh gesneden deel; blijft den in-gesloten twaelf-grondt: in reden tot den acht-grondt, als  $5 + \sqrt{5}$  tot 18; precies dezelfde woorden als we in dit vertoog zien.



Met ‘nieuwe kanten’ bedoelt Wils de ribben van de figuur die overblijft nadat je de eerste snij-instructie hebt uitgevoerd. Wat Wils hier dus zegt in het derde vertoog is: snijd van de tetraëder eerst een octaëder, en snijd vervolgens uit die octaëder de dodecaëder. (De precieze uitleg van de woorden in het tweede deel van deze instructie staat in de behandeling van het dertiende vertoog. Hieronder ga ik ervan uit dat de kennis uit het dertiende vertoog, en alle vertogen die daarvoor nodig zijn, bekend is. Dat kan, omdat de inhoud van het dertiende vertoog niet berust op iets wat in dit vertoog behandeld wordt.)

Hiernaast is te zien hoe de constructie eruitziet. Om nu de verhouding van de dodecaëder ten opzichte van zijn omgeschreven tetraëder te bepalen, moeten we nog de verhouding tussen octaëder en de

dodecaëder weten. In het dertiende vertoog valt te zien dat acht van de hoekpunten van de dodecaëder in een zijvlak van de octaëder liggen, en dus liggen vier van deze hoekpunten in een zijvlak van de tetraëder. Wat ons nog rest is constateren dat de verhoudingen met elkaar kloppen. We hebben net in het tweede vertoog gezien dat de tetraëder twee keer zo groot is als zijn ingeschreven octaëder. Uit die verhouding tussen de tetraëder en de octaëder ( $2 : 1$ ) en de verhouding tussen de octaëder en zijn ingeschreven dodecaëder ( $18 : 5 + \sqrt{5}$ , zie het dertiende vertoog) weten we dat de dodecaëder die in de octaëder in de tetraëder zit, zich verhoudt tot de tetraëder als  $5 + \sqrt{5} : 36$ . Dat is precies wat Wils ook schrijft.



Des vier-grondts hoecken af-gesneden, door 't midden der zijden, en dan de nieuwe hoecken, twee-zijdigh ordentlijck, door des een kants grootste, tot d'ander twe'er kanten kleynste evereed'nigh-ghesneden deel; blijft den in-ghesloten twintigh-grondt: In reden tot den vier-grondt, als 5, tot  $7 + \sqrt{45}$ .

**Hertaling:** Snijd eerst van de tetraëder een octaëder [op de manier van het tweede vertoog]. Beschouw vervolgens een hoekpunt van de octaëder. Verdeel de vier ribbes die van dit hoekpunt aflopen in twee groepjes van twee ribbes die loodrecht op elkaar staan. Verdeel de ribbes in het ene groepje in een verhouding  $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} : \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ , en de twee andere ribbes in de omgekeerde verhouding. Zo ontstaan op de vier ribbes vier punten op twee verschillende afstanden van het af te snijden hoekpunt. Snijd nu het hoekpunt af door twee vlakken; ieder vlak opgespannen door de twee punten die het dichtst bij het hoekpunt liggen en een van de twee punten die het verst van het hoekpunt af ligt. Snijd zo alle hoekpunten van de octaëder af, en wat overblijft is een icoesaëder.

Net als in het derde vertoog, herkennen we hier eerst de constructie van een octaëder in een tetraëder. Vergelijken we dan vervolgens de rest van het vertoog met het veertiende vertoog – de constructie van een icoesaëder in een octaëder – dan zien we dat de instructies overeen komen. Voor het volledige begrip van dit vertoog is dus een studie van het veertiende vertoog noodzakelijk. Ik wijs ook hier vooruit naar de kennis in dat vertoog, die nodig is om het vervolg hier te kunnen begrijpen.

Wat Wils hier doet is uit een tetraëder een octaëder snijden, en dan uit deze octaëder een icoesaëder. Hoe die octaëder uit de tetraëder komt, hebben we gezien in het tweede vertoog. We zien ook dat de eerste regel van dit vierde vertoog overeenkomt met de eerste regel van het tweede vertoog. We hebben gezien dat het tweede vertoog inderdaad een octaëder oplevert, en in het veertiende vertoog zullen we bewijzen dat die constructie daar inderdaad een icoesaëder oplevert. Het enige wat ons hier nog rest, is constateren dat de verhoudingen met elkaar kloppen.

De tetraëder is tweemaal zo groot als zijn ingeschreven octaëder. Uit het dertiende vertoog blijkt dat de octaëder en zijn ingeschreven icoesaëder zich verhouden als  $10 : 7 + \sqrt{45}$ . We concluderen dus dat de tetraëder zich verhoudt tot zijn ingeschreven icoesaëder als  $5 : 7 + \sqrt{45}$ . Precies zoals Wils aangeeft. Merk op: omdat de icoesaëder acht zijvlakken heeft die helemaal in een zijvlak van de octaëder liggen, en de octaëder vier zijvlakken heeft die helemaal in de zijvlakken van de tetraëder vervat zijn, liggen vier van de zijvlakken van de icoesaëder helemaal in een zijvlak van de tetraëder.

### Eerste Lidts vervolg

Des vier-grondts in-gesloten ses-grondt, en twaelf-grondt; zijn insluytelijcke, zijns in-ghesloten acht-grondts, twintigh-grondts, en kloots: En de minst-grondige, der ander: Maer de kloot, des acht-grondts, en twintigh-grondts.

Ieder ‘lidt’ wordt afgesloten met een ‘vervolgh’ als hierboven. Deze vervolgen gaan allemaal over de bollen die je om en in de veelvlakken kunt schrijven, en over hoe de ingeschreven veelvlakken en de ingeschreven bol ten opzichte van elkaar gepositioneerd zijn. Dit eerste ‘lidt’ gaat over de inschrijvingen in de tetraëder; als Wils het dus heeft over de veelvlakken, dan bedoelt hij de veelvlakken zoals die zijn ingeschreven in de tetraëder.

Wils’ eerste zin is: ‘Des vier-grondts in-gesloten ses-grondt, en twaelf-grondt; zijn in-sluytelijcke, zijns in-gesloten acht-grondts, twintigh-grondts, en kloots:’. Vertaald staat daar: De kubus en de dodecaëder die in de tetraëder zijn geschreven, zijn ingeschreven in de octaëder, de icosaeëder en de bol die in de tetraëder zijn geschreven.

Wils vervolgt met: ‘En de minst-grondige, der ander:’. Dat is een wat lastig te verklaren zinsdeel. We zien dat Wils het woord ‘in-sluytelijcke’ gebruikt als figuur A in figuur B zit. Figuur B staat dan consequent in de tweede naamval geschreven; figuur A is de insluitelijke van figuur B. In het zinnetje ‘En de minst-grondige, der ander’ is het woord ‘in-sluytelijcke’ weggelaten. Wils bedoelt dat de ‘minst-grondige’, de figuur met de minste ‘gronden’, vlakken, ingesloten is in alle figuren met meer zijvlakken. Met ‘ingesloten klood’ bedoelt Wils de ingeschreven bol.

De laatste zin is: ‘Maer de klood, des acht-grondts, en twintigh-grondts.’ Wils heeft net gezegd dat de figuren met minder zijvlakken vervat zijn in de figuren met meer zijvlakken (‘de minst-grondige, der ander’), maar hier voegt hij daaraan toe dat de ingeschreven bol vervat is in de octaëder en de icosaeëder. Merk op dat het woord ‘in-sluytelijcke’ hier ook weer niet geschreven, maar wel bedoeld wordt.

Tot zover wat Wils beweert. We gaan nu kijken of dat ook klopt. We weten dat de ingeschreven bol van ieder regelmatig veelvlak aan de middelpunten van alle zijvlakken raakt. Verder is bekend dat de omgeschreven bol van een regelmatig veelvlak alle hoekpunten van het veelvlak op zijn bolschil heeft.

In het geval van de tetraëder hebben we gezien, in het eerste vertoog, dat de vier middelpunten van de zijvlakken van de tetraëder hoekpunten zijn van de kubus in de tetraëder. We concluderen nu dat de ingeschreven bol van de tetraëder gelijk is aan de omgeschreven bol van de kubus in de tetraëder. (Immers: de afstand van het midden van de bol tot vier hoekpunten van de kubus is gelijk, en de andere vier hoekpunten liggen op eenzelfde afstand van het midden, en dus op de bolrand.) De kubus is dus vervat in de ingesloten bol.

De vier zijvlaksmiddelpunten van de tetraëder zijn ook vier zijvlaksmiddelpunten van de octaëder. Aangezien alle zijvlaksmiddelpunten even ver van het middelpunt van de octaëder liggen, is de ingesloten bol van de tetraëder, die aan vier van de zijvlaksmiddelpunten van de octaëder raakt, ook de ingesloten bol van de octaëder in de tetraëder. De kubus is dus ingesloten in de octaëder.

We hebben gezien dat acht van de twintig zijvlakken van de icosaeëder in de octaëder hun middelpunt gemeen hebben met een zijvlaksmiddelpunt van de octaëder. De ingeschreven bol van de octaëder raakt dus aan acht zijvlaksmiddelpunten van de icosaeëder. Maar alle twintig zijvlaksmiddelpunten van de icosaeëder liggen even ver van het midden van de icosaeëder, en dus is de ingeschreven bol van de icosaeëder gelijk aan de ingeschreven bol

van de octaëder en de tetraëder, en dus de omgeschreven bol van de kubus. De kubus ligt dus in de icoesaëder.

Uit het nog te behandelen zestiende verhoog zal blijken dat de dodecaëder en de kubus acht hoekpunten gemeenschappelijk hebben. Maar alle hoekpunten van de dodecaëder liggen even ver van het middelpunt van de dodecaëder, en dus is de omgeschreven bol van de kubus gelijk aan de omgeschreven bol van de dodecaëder. Maar de omgeschreven bol van de kubus is de ingeschreven bol van de icoesaëder, octaëder en tetraëder. We weten daarom dat de dodecaëder vervat is in de icoesaëder, de octaëder en de ingesloten bol van de tetraëder. Daarmee is de eerste zin van dit vervolg verklaard.

De tweede zin, 'en de minst-grondige, der ander' levert een klein probleem op. De kubus zit inderdaad in de dodecaëder, die weer in de icoesaëder zit. Maar de icoesaëder zit in de octaëder. Daar is de volgorde van de 'minst-grondige' dus niet gehandhaafd. Volgens mij heeft Wils' opmerking alleen betrekking op de twee veelvlakken die hij in het begin noemt: de kubus en de tetraëder. Dit klopt ook met de andere 'vervolgen' die nog gaan komen.

De laatste zin blijft dan nog over om te verklaren. Er staat, zoals ik net al vertaalde, dat de ingesloten bol van de tetraëder is vervat in de octaëder en de icoesaëder. Maar dat hebben we net al geconcludeerd: de ingesloten bol van de tetraëder is namelijk dezelfde als de ingesloten bol van de octaëder en de icoesaëder. Hiermee zijn alle opmerkingen die Wils hier maakt verklaard.

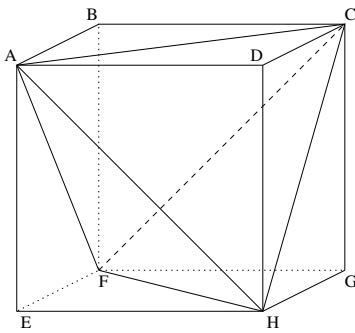
# Snijdingh des Ses-grondts:

Tot een vier-grondt.

Vijfde Vertoogh.

Des ses-grondts hoecken over ander af-ghesneden, door de drie naeste hoecken; blijft den in-gesloten vier-gront: In reden tot den ses-grondt, als 1 tot 3.

**Hertaling:** Kies vier van de acht hoekpunten van de kubus zodanig dat er niet twee van die vier op een ribbe liggen. Snijd ieder van deze vier hoekpunten eraf door het vlak dat opgespannen wordt door de drie hoekpunten die grenzen aan het af te snijden hoekpunt. Het overblijfsel is een tetraëder.



De verhouding van de kubus en zijn ingeschreven tetraëder doet vermoeden dat de uitwerking niet zo ingewikkeld zal zijn. Dat klopt. De figuur hiernaast laat precies zien wat er aan de hand is. Wils zegt ‘Des ses-grondts hoecken over ander af-ghesneden, door de drie naeste hoecken’. Nemen we bijvoorbeeld hoekpunt  $E$ , dan wordt dat in de tekening afgesneden door het vlak door de drie hoekpunten die naast  $E$  liggen, dat wil zeggen, die met een ribbe direct aan  $E$  zijn verbonden ( $AFH$ ). Deze instructie geldt niet voor alle hoekpunten; dan zou er geen tetraëder overblijven, zoals we straks zien. We zien in het plaatje duidelijk hoe we de instructie ‘over-ander’ moeten interpreteren. In het plaatje worden de hoekpunten  $E$ ,  $G$ ,  $B$  en  $D$  afgesneden; deze vier punten zijn de uiteinden van twee zijvlakdiagonalen. Ik interpreteer ‘over-ander’ nu zo, dat deze twee diagonalen ‘over elkaar’ liggen.

Als je hoekpunten  $E$ ,  $G$ ,  $B$  en  $D$  kiest om af te snijden door hun drie naeste hoeken, blijft de figuur  $ACHF$  over. Het is eenvoudig in te zien dat dit snijsel een tetraëder is. Alle ribben van  $ACHF$  zijn diagonalen van even grote vierkanten, en zijn dus even lang.  $ACHF$  bestaat dus uit vier gelijkzijdige driehoeken die even groot zijn, en is dus een tetraëder.

Als je hoekpunten  $E$ ,  $G$ ,  $B$  en  $D$  kiest om af te snijden door hun drie naeste hoeken, blijft de figuur  $ACHF$  over. Het is eenvoudig in te zien dat dit snijsel een tetraëder is. Alle ribben van  $ACHF$  zijn diagonalen van even grote vierkanten, en zijn dus even lang.  $ACHF$  bestaat dus uit vier gelijkzijdige driehoeken die even groot zijn, en is dus een tetraëder.

Dan blijft de verhouding nog over om uit te rekenen. De inhoud van  $ACHF$  is de inhoud van de kubus min viermaal de inhoud van de piramide  $AEFH$ . Dus, als de ribbe van de kubus lengte  $a$  heeft, dan  $ABCDEFGH = a^3$ .  $AEFH = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot a = \frac{1}{6} \cdot a^3$ . Dus  $ACHF = a^3 - 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot a^3 = \frac{1}{3} \cdot a^3$ . De inhoud van de tetraëder is dus een derde van de inhoud van de kubus, zoals Wils ook aangeeft.

## Vervolgh.

Den ses-grondt, en sijn in-ghesloten vier-grondt, zijn insluytelijcke een's selven kloots.

De kubus en de als in het vijfde vertoog ingeschreven tetraëder hebben dezelfde omgeschreven bol. Dat is wat Wils hier zegt in dit 'vervolgh', en dat is ook eenvoudig in te zien: vier van de hoekpunten van de kubus zijn hoekpunten van de tetraëder. Het middelpunt van de bol om de kubus is het middelpunt van de kubus; dat is namelijk het punt in de kubus met gelijke afstand tot alle hoekpunten. Dat middelpunt van de kubus heeft ook een gelijke afstand tot alle vier de hoekpunten van de tetraëder, en is dus het middelpunt van de bol om de tetraëder. Beide bollen hebben een gelijke straal en een gelijk middelpunt en zijn dus identiek.

*Tot een acht-grondt.*

*Seste Vertoogh.*

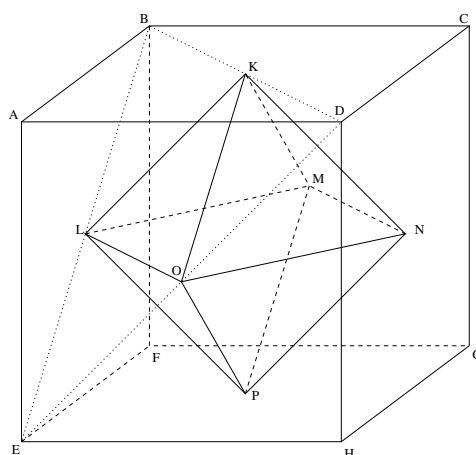
Des ses-grondts hoecken af-ghesneden, door de drie naeste hoecken, (of door der gronden middel-punten,) blijft den in-ghesloten acht-grondt: In reden tot den ses-grondt, als 1, tot 6.

**Hertaling:** Als je ieder hoekpunt van een kubus afsnijdt door het vlak dat opgespannen wordt door de drie hoekpunten die grenzen aan het af te snijden hoekpunt, houd je een octaëder over.

Dit is ook niet bepaald het moeilijkste vertoog. We hebben al opgemerkt dat de kubus en de octaëder duale van elkaar zijn; de middelpunten van de zijvlakken van de kubus zijn de hoekpunten van een octaëder. Dat zien we in het bijgevoegde plaatje, en we zien dat ook terug in de woorden van Wils.

Het is vrij eenvoudig in te zien dat de zijvlaksmiddelpunten een octaëder opspannen: alle ontstane ribbes zijn gelijk van lengte en de figuur bestaat uit acht driehoeken. De driehoeken zijn allen gelijkzijdig en van gelijke grootte, en dus is de figuur een octaëder. Wils geeft als instructie de hoeken af te snijden 'door de drie naeste hoecken, (of door der gronden middel-punten)'. Hoe dat zit met de middelpunten hebben we net gezien; wie een hoekpunt (bijvoorbeeld  $A$ ) afsnijdt door het vlak door de middelpunten van de zijvlakken die in dat hoekpunt samenkomen, krijgt een octaëder.

We zien in een handomdraai dat het snijvlak door de drie naastliggende hoeken precies hetzelfde is als het snijvlak door de middelpunten. Nemen we bijvoorbeeld het hoekpunt  $A$ , dan is het snijvlak door de middelpunten van de aangrenzende vlakken  $KLO$ . Het snijvlak door



de naastliggende hoeken is het vlak  $BDE$ . Aangezien  $K$ ,  $L$  en  $O$  punten zijn die in het vlak  $BDE$  liggen, ligt ook de driehoek  $KLO$  in dit snijvlak. Beide vlakken vallen dus samen en zijn gelijk. Dit argument is om symmetrieredenen voor alle hoekpunten van de kubus toepasbaar.

Als de kubus ribbes met lengte 1 heeft, is de inhoud van de kubus 1. De ribbes van de octaëder zijn dan  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , en de inhoud van de octaëder is dan  $2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ . De kubus is dus inderdaad zes keer zo groot als zijn ingeschreven octaëder.

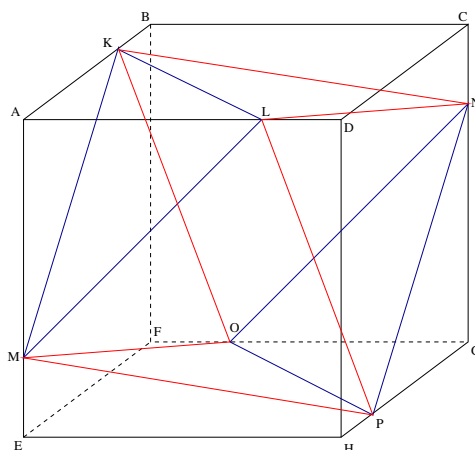
Wat opvalt is de grote gelijkenis met het vorige vertoog. Als we de instructie tussen haakjes even weglaten, zien we dat de instructies gelijk zijn, op het woordje ‘over-ander’ na. In dit zesde vertoog geldt de snij-instructie voor alle hoekpunten van de kubus, in tegenstelling tot wat we net zagen in het vijfde vertoog. Met één simpel woordje maakt Wils dus onderscheid tussen het snijden van een tetraëder en een octaëder.

*Tot een grootsten acht-grondt.                      Sevende Vertoogh.*

Twee van des ses-grondts teghen-een-staende hoecken af-ghesneden, door der zijden drie-vierde-deelen; en daer nae d’ander, elck door drie nieuwe hoecken; blijft den grootsten in-ghesloten acht-grondt, als 9, tot 16.

**Hertaling:** Kies twee hoekpunten van de kubus die aan weerszijden van een lichaamsdiagonaal liggen. Snijd elk van deze twee hoekpunten af door het vlak dat opgespannen wordt door de drie punten die de ribbes die van het af te snijden hoekpunt aflopen verdelen in een verhouding 3 : 1. Snijd de andere zes hoekpunten van de kubus vervolgens af door zes vlakken die worden opgespannen door telkens drie van deze zes nieuwe hoekpunten. Dan blijft de grootste octaëder die in de kubus past over.

De octaëder die opgespannen wordt door de zijvlaksmiddelpunten van de kubus is niet de grootste die je in de kubus kunt tekenen. Vandaar dat Wils dit vertoog toevoegt. Het is vrij eenvoudig te begrijpen aan de hand van de tekening hiernaast. Wils bedoelt: ‘Twee van des ses-grondts teghen-een-staende hoecken [dat is: aan de twee uiteinden van een lichaamsdiagonaal, zoals in het plaatje  $AG$ ] afghesneden, door der zijden drie-vierde-deelen [drie vierde van de ribbes die naar  $A$  en  $G$  toelopen]; en daer nae d’ander [de zes overgebleven kubushoekpunten], elck door drie nieuwe hoecken [de nieuwe hoeken zijn de hoeken die ontstaan zijn na de eerste tweede snedes van  $A$  en  $G$  – we zien dat bijvoorbeeld  $E$  door  $MOP$  wordt afgesneden, en  $B$  door  $KON$ ].’



Waarom is  $KLMNOP$  een octaëder? Het is eenvoudig te zien dat de figuur uit acht driehoeken bestaat. We moeten dus nog bewijzen dat alle ribben even lang zijn – dan zijn alle driehoeken gelijkzijdig. We zien dat ribben of in

het zijvlak van de kubus liggen, of niet. Als de ribbe van de kubus 1 is, dan is de lengte van de ribben die in een zijvlak liggen  $\frac{3}{4}\sqrt{2}$ . Om de lengte van de ribben te berekenen die niet in een zijvlak van de kubus liggen, kijken we bijvoorbeeld naar  $LN$ . We zien met Pythagoras dat  $LN = \sqrt{CL^2 + CN^2}$  en  $CL^2 = CD^2 + DL^2$ . Dus  $LN = \sqrt{CN^2 + DL^2 + CD^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + 1} = \sqrt{\frac{18}{16}} = \frac{3}{4}\sqrt{2}$ . Alle ribben zijn dus even lang, en  $KLMNOP$  is een octaëder.

Als de kubus ribbe 1 heeft, is de inhoud ook 1. De inhoud van de octaëder is tweemaal de inhoud van piramide  $KLMON$ , dus  $2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$ . De kubus verhoudt zich dus tot zijn grootst ingeschreven octaëder als 16 : 9.

De vraag is of dit ook werkelijk de grootste ingeschreven octaëder is. Het antwoord daarop is niet eenvoudig. Hoofdstuk vijf gaat op de algemene vraag in wanneer een ingeschreven regelmatig veelvlak maximaal (van volume) is.

*Tot een twaelf-grondt.*

Achtste Vertoogh.

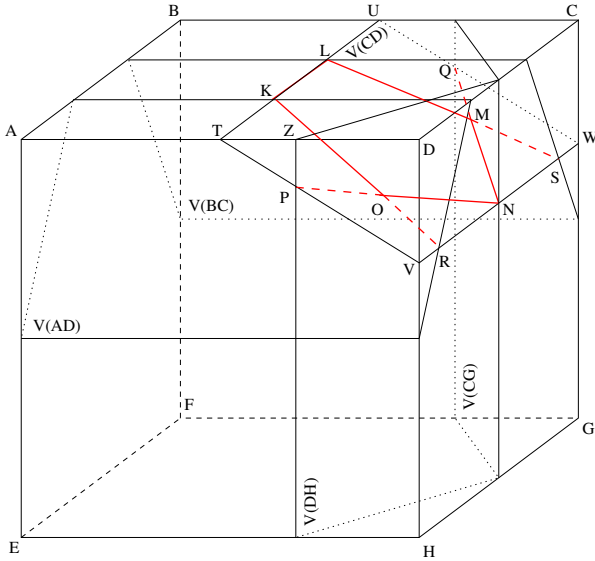
Des ses-grondts kanten af-gesneden, een tegen een, door't midden des tusschen-grondts, en 't grootste everedenigh ghesneden deel der helft des anderen; blijft den in-ghesloten twaelf-grondt. In reden tot den ses-grondt, als 5, tot  $\sqrt{45} + 5$ .

**Hertaling:** Kies twee ribben die in een zijvlak van de kubus liggen en evenwijdig aan elkaar zijn. Snijd elk van deze ribbes af door het vlak dat opgespannen wordt door de twee punten die halverwege de twee ribbes liggen die de twee af te snijden ribbes met elkaar verbinden, en de twee punten die de andere twee ribbes die van de af te snijden ribbe aflopen, verdelen in een verhouding  $\frac{-1+\sqrt{5}}{4} : \frac{5-\sqrt{5}}{4}$ . Snijd zo de 12 ribbes van de kubus in 6 groepjes van 2 af. Het overblijfsel is dan een dodecaëder.

Dit is een vernuftige constructie. In *Beginselen der Meetkonst*, de eerste Nederlandse Euclideseditie, komt deze stelling uiteraard ook voor, en daar beslaat de uitleg ervan negen pagina's.<sup>25</sup> Dat Wils het met vijf regels afhandelt, doet (terecht) vermoeden dat de aanwijzingen lastig zijn in te zien. Wat hij bedoelt is het volgende: Snijd alle ribbes van de kubus af, in groepjes van twee ribben die tegenover elkaar liggen in een zijvlak (zoals  $AB$  en  $CD$ ), door een slim gekozen vlak; dan blijft er een dodecaëder over. Hoe Wils dat vlak kiest, leg ik hieronder uit.

---

<sup>25</sup>Euclides [1695] p. 616-624.



We weten dat een kubus twaalf ribbes heeft, en het is dus niet verwonderlijk dat Wils de dodecaëder snijdt door een instructie te geven voor het afsnijden van alle ribbes. Hiernaast heb ik de constructie van een van de twaalf zijvlakken van de dodecaëder ( $KLMNO$ ) volgens de voorschriften van Wils uitgevoerd, door de ribbes  $AD$ ,  $DC$ ,  $CB$ ,  $DH$  en  $CG$  af te snijden. Zoals je kunt zien kom je voor één zijvlak al letters te kort om alle relevante punten in de figuur te benoemen. Vandaar dat ik de vijf snijvlakken die ik heb getekend, een naam gegeven heb, namelijk  $V(XY)$  waarbij  $XY$  dan de ribbe is die door dat vlak wordt afgesneden. Alleen  $V(CD)$  is ook nog geletterd als  $TUVW$ .

Wils snijdt de ribbes van de kubus af ‘een tegen een, door ’t midden des tusschengrondts’. Met ‘een tegen een’ bedoelt Wils twee ribbes die tegenover elkaar liggen als  $AB$  en  $CD$ . De ‘tusschen-grondt’ is de ‘grond’, het zijvlak, dat tussen deze twee ribbes ligt. Het midden van dit zijvlak is de lijn evenwijdig aan  $AB$  en  $CD$  die  $ABCD$  in twee gelijke delen deelt ( $TU$ ). Daarmee is één snijlijn bekend, maar nog niet het snijvlak. Wils gaat verder met ‘en ’t grootste everedenigh ghesneden deel der helft des anderen’. De term ‘grootste everedenigh gesneden deel’ is een zeventiende-eeuwse benaming die te maken heeft met wat sinds de negentiende eeuw de gulden snede wordt genoemd. Een lijnstuk  $a + b$  heet ‘everedenigh gesneden’ in twee delen  $a$  en  $b$  (met  $a > b$ ) als  $a + b : a = a : b$ . Het lijnstuk  $a$  heet dan het ‘grootste everedenigh gesneden deel’, en  $b$  het ‘kleynste everedenigh gesneden deel’ van  $a + b$ . Een lijnstuk van lengte 1 wordt dan dus verdeeld in twee stukken van  $b = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$  en  $a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ . Omdat de term ‘gulden snede’ niet duidelijk maakt of het om het grootste of het kleinste deel van de snede gaat, gebruik ik vanaf nu de termen ‘grootste evenredig gesneden deel’ en ‘kleinste evenredig gesneden deel’.

Met ‘anderen’ bedoelt Wils ‘andere zijvlakken’. Als we bijvoorbeeld de ribbe  $DC$  nemen, dan heeft Wils het eerst over het zijvlak tussen  $DC$  en  $AB$ , en vervolgens over het andere zijvlak, waar  $DC$  in ligt. Van dat andere zijvlak neem je de helft, en daarvan het grootste evenredig gesneden deel.  $DV$  is dus het grootste evenredig gesneden deel van de helft van  $DH$ , en net zo is  $CW$  het grootste evenredig gesneden deel van de helft van  $CG$ .

Het is belangrijk dat je op de goede manier de middens van de tussengronden kiest. Door de instructie ‘een tegen een’ ligt dat vast; je maakt zes combinaties van twee ribbes. Als je  $AB - CD$  hebt gekozen, dan volgen automatisch  $EF - HG$ ,  $DH - CG$ ,  $AE - BF$ ,  $AD - EH$  en  $BC - FG$ . Je kiest dus drie paren van twee evenwijdige lijnen. We zien diezelfde opbouw straks weer in het volgende vertoog.

De vijf snijvlakken  $V(BC)$ ,  $V(AD)$ ,  $V(DH)$ ,  $V(CG)$  en  $V(CD)$  bepalen samen het getekende zijvlak van de dodecaëder ( $KLMNO$ ). De snijlijnen van  $V(AD)$ ,  $V(BC)$ ,  $V(DH)$  en  $V(CG)$  met  $V(CD)$  zijn  $KR$ ,  $LS$ ,  $PN$  en  $QN$ . Deze vier lijnen snijden



elkaar in drie punten:  $O$ ,  $N$  en  $M$ . Samen met  $K$  en  $L$  zijn dit vijf hoekpunten van één zijvlak van de dodecaëder. In de tekening rechts is beter te zien wat er gebeurt.

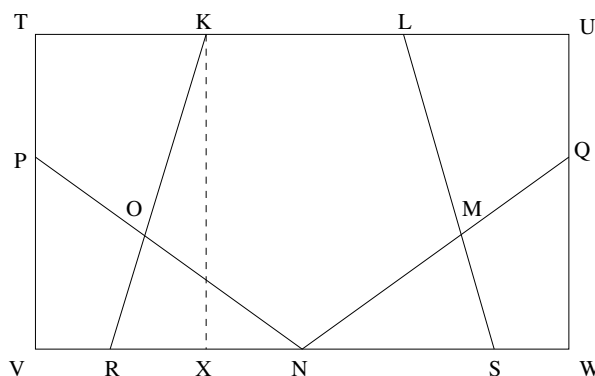
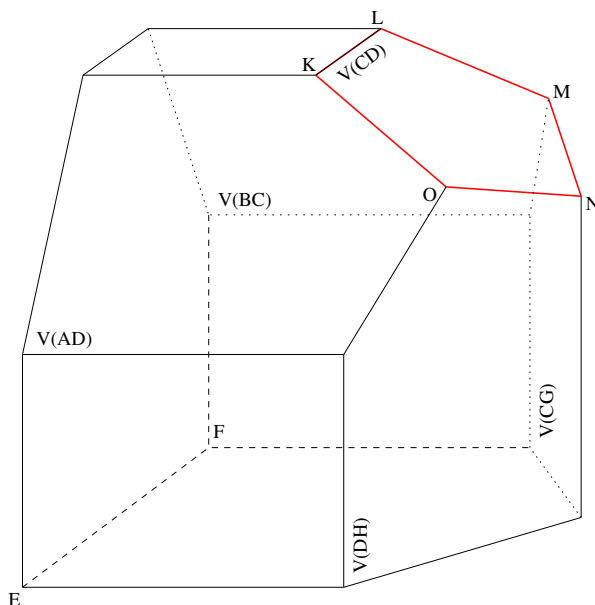
Je ziet wat er overblijft als je de vijf ribben volgens het voorschrift afsnijdt. Duidelijk blijft dan  $KLMNO$  over, waarin  $KO$ ,  $ON$ ,  $NM$  en  $ML$  de restanten van de net genoemde snijlijnen zijn. Omdat  $TK$  en  $LU$  het grootste evenredig gesneden deel zijn van de helft van  $TU$ , is  $KL$  twee keer het kleinste evenredig gesneden deel van de helft, en dus het kleinste evenredig gesneden deel van  $TU$ . Stel dat  $TU = 1$ , dan is de inhoud van de kubus 1.  $KL$  is dan  $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ . De inhoud van een dodecaëder met een ribbe zo groot als  $KL$  is<sup>26</sup>

$$\frac{1}{4} \cdot (15 + 7\sqrt{5}) \cdot \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^3 = -\frac{5}{4} + \frac{3}{4} \cdot \sqrt{5}$$

De verhouding van dodecaëder en kubus is dus  $-\frac{5}{4} + \frac{3}{4} \cdot \sqrt{5} : 1$ , wat bij vermenigvuldiging aan beide kanten met  $\sqrt{45} + 5$  de verhouding  $5 : \sqrt{45} + 5$  oplevert.

De conclusie die we nu kunnen trekken is dat de dodecaëder die Wils in de kubus plaatst ribbes moet hebben ter grootte van  $KL$ . Maar, we hebben nog niet gezien waarom de figuur die zo ontstaat een dodecaëder is. We kunnen, op argumenten van symmetrie, wel concluderen dat een figuur van 12 vijfhoeken van gelijke grootte ontstaat. Maar de vraag is: zijn dit *regelmatige* vijfhoeken?

Rechts heb ik het vlak  $TUWV$  uitgelicht, waarin de vijfhoek  $KLMNO$  verschijnt. (Voor een goed begrip van wat nu volgt is ook het eerste plaatje bij dit vertoog van belang.) Als de ribbe van de kubus lengte 1 heeft, geldt dus  $TU = 1$ .  $KL$  is het kleinste evenredig gesneden deel van  $TU$ , dus  $KL = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ .  $VN = NW = \frac{1}{2}$ .  $TV = UW = \sqrt{TD^2 + DR^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2} = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ . Verder geldt dat  $VP$  het grootste evenredig gesneden deel van  $TV$  is (en  $QW$  het grootste evenredig gesneden deel van  $UW$ ), want  $TP : PV = TZ : ZD$  door gelijkvormigheid van driehoeken.  $PV = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$  en  $VN = \frac{1}{2}$  dus de  $\angle VNP$  (die gelijk is aan  $\angle QNW$  door gelijkvormigheid) is  $\arctan \frac{VP}{VN} = \arctan \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}(-1+\sqrt{5})}{4} = 36$  graden. Daaruit volgt dat  $\angle ONM$  108 graden is, zoals vereist in een regelmatige vijfhoek.



<sup>26</sup>Hazewinkel [1988-1994] Deel 3, pagina 293.

We zien  $\angle RKL = \angle RKX + 90^\circ$ . De tangens van  $\angle RKX$  kunnen we uitrekenen als we  $RX$  weten.  $RX = VX - VR$ . We weten dat  $VX = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ .  $VR$  is net zo groot als  $ZP$ . Door gelijkvormigheid weten we dat  $ZP : DV = TZ : TD$  en dus  $ZP = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$  (want  $TZ$  is het kleinst evenredig gesneden deel van  $TD$ ). We weten dat  $VX = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$  en dus  $RX = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} - \frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ . We zien dus dat  $RX = \frac{1}{2}KL = XN$ .

We weten nu dat  $\angle RKX = \arctan \frac{\frac{3-\sqrt{5}}{4}}{\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}} = 18^\circ$  en omdat  $\angle XKL = 90^\circ$ ,  $\angle OKL = 108^\circ$ . Uit de symmetrie van de constructie volgt dat  $\angle KLM = 108^\circ$ , en dat  $\angle KON = \angle LMN$ . Omdat  $\angle ONM = \angle OKL = \angle KLM = 108^\circ$ , geldt dat  $\angle KON + \angle LMN = 216^\circ$ . Alle hoeken van de vijfhoek zijn dus 108 graden.

Nu blijft alleen nog over te bewijzen dat alle zijden gelijk zijn. Dat is nu niet moeilijk meer. Omdat  $RX = XN$  is driehoek  $RKN$  gelijkbenig met  $\angle RKN = 2 \cdot 18^\circ = 36^\circ$ . Omdat  $\angle KON = 108^\circ$ , blijkt  $\angle KNO = 36^\circ$ . Driehoek  $OKN$  is dus gelijkbenig, en dus  $OK = ON$ . Omdat  $\angle KON = 108^\circ$ , concluderen we ook dat  $\angle RON = 72^\circ$ . Maar, zoals we al eerder zagen,  $\angle RNO = 36^\circ$ , dus  $\angle NRO = 72^\circ$ . Driehoek  $ORN$  is dus gelijkbenig, en  $RN = ON$ . We hebben net berekend dat  $RX = XN = \frac{1}{2}KL$ , en dus  $RN = ON = (KO =)KL$ . Uit symmetrie volgt nog dat  $NM = ML = KL$ , waarmee  $KLMNO$  vijf gelijke zijden heeft, en vijf gelijke hoeken. Het is dus een regelmatige vijfhoek, en Wils' constructie klopt dus. De vraag is wel hoe Wils dat inzag; het bewijs zoals hierboven, met bijvoorbeeld begrip van de arctangens, zal Wils niet geleverd hebben. Het ligt voor de hand dat hij het meetkundige bewijs volgde zoals dat te vinden is in het vijftiende boek van *de Elementen*. (Bijvoorbeeld in de editie van Clavius, die zijn bewijs weer had overgenomen van Candalla. Zie voor een overzicht van de bronnen waar Wils mogelijk beschikking over had hoofdstuk 4 van deze scriptie.)

Elke ribbe van de kubus die wordt afgesneden levert precies een vijfhoek van deze afmetingen op. De figuur die overblijft is de dodecaëder.

Een andere manier om inzicht te krijgen in deze constructie is de volgende. Als onderdeel van zijn bewijs van het bestaan van precies vijf regelmatige veelvlakken, construeert Euclides in zijn dertiende boek, in de zeventiende propositie, een dodecaëder op een kubus.<sup>27</sup> Als je deze constructie bekijkt, en je verkleint de dodecaëder terwijl zijn middelpunt op dezelfde plek blijft totdat zes van zijn ribben in de zijvlakken van de kubus liggen, heb je dezelfde constructie.

---

<sup>27</sup>Zie bijvoorbeeld Euclides [1930] Deel II, p. 264-267.

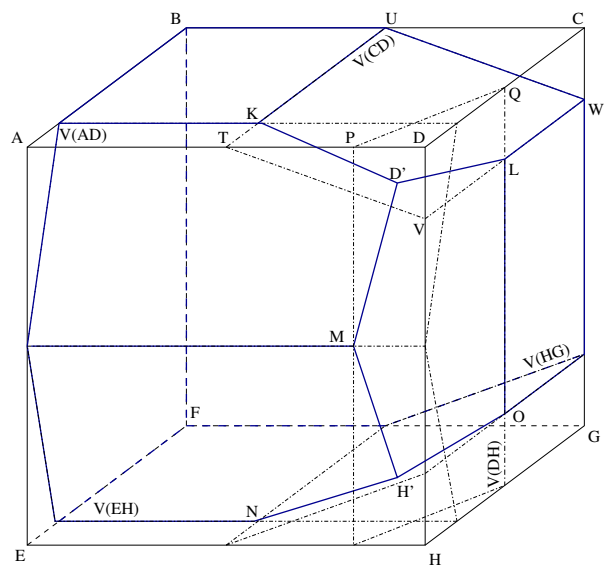
Des ses-grondts kanten af-gesneden, een tegen een, door 't midden des tusschen-grondts, en 't kleynste evereed'nigh-gesneden deel der helft des anderen; en dan der hoecken overblijfsels, door de nieuwe; blijft den ingesloten twintig-grond. In reden tot den ses-grondt, als 5, tot  $\sqrt{45} + 3$ .

**Hertaling:** Kies twee ribben die in een zijvlak van de kubus liggen en evenwijdig aan elkaar zijn. Snijd elk van deze ribbes af door het vlak dat opgespannen wordt door de twee punten die halverwege de twee ribbes liggen die de twee af te snijden ribbes met elkaar verbinden, en de twee punten die de andere twee ribbes die van de af te snijden ribbe aflopen, verdelen in een verhouding  $\frac{3-\sqrt{5}}{4} : \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ . Snijd zo de 12 ribbes van de kubus in 6 groepjes van 2 af. Snijd in de figuur die je overhoudt elk van de acht hoekpunten die over zijn gebleven van de acht hoekpunten van de kubus af door het vlak dat opgespannen wordt door de drie hoekpunten die aan het af te snijden hoekpunt grenzen. Het resultaat is een icosaeëder.

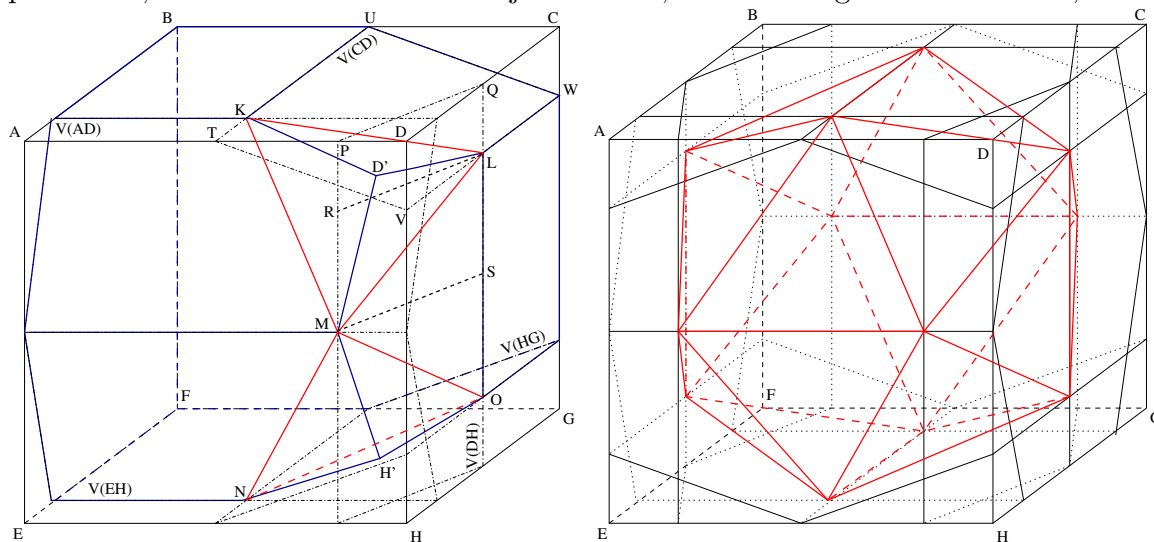
Bij eerste lezing lijkt dit vertoog erg op het voorgaande. Het begin van de instructie is ook nagenoeg gelijk. Het enige verschil is dat niet het grootste, maar het kleinste evenredig gesneden deel van de helft van het 'andere' zijvlak genomen moet worden. Dus, als we in het plaatje rechts kijken, zijn  $DV$  en  $CW$  nu het *kleinst* evenredig gesneden deel van de helft van  $DH$  en  $CG$ .

Er ontstaat eenzelfde soort figuur als in het vorige vertoog, namelijk een figuur met 12 vijfhoekige zijvlakken, maar deze vijfhoeken zijn niet regelmatig. In de figuur hier naast is de oorspronkelijke kubus weergegeven en met stippelijntjes zijn de vijf snijvlakken te onderscheiden. Nadat vijf ribben van de kubus ( $AD$ ,  $DC$ ,  $DH$ ,  $HG$  en  $HE$ ) zijn afgesneden, kunnen we een van de vijfhoeken die overblijven al zien:  $LD'MH'O$ . We zien een grote gelijkenis met de in het vorige vertoog afgebeelde afgeknotte kubus. Dat is ook niet vreemd, want er worden twaalf ribben afgesneden, en er blijft weer een figuur met twaalf zijvlakken over. Wils moet dus nog iets doen om van die twaalf vlakken er twintig te maken. De instructie daarvoor geeft hij in het tweede deel van zijn vertoog. Hij schrijft: 'en dan der hoecken overblijfsels, door de nieuwe'.

Als we alle snedes uitvoeren, heeft de afgeknotte kubus twintig hoekpunten. Twaalf daarvan liggen in een zijvlak van de oorspronkelijke kubus (zoals in het plaatje  $K$ ,  $L$ ,  $O$ ,



$M$  en  $N$ ). Acht van de twintig hoekpunten liggen niet in zo'n zijvlak, zoals  $D'$  en  $H'$  in de tekening. Dat zijn precies de punten die Wils 'der hoecken overblijfsels' noemt. Het zijn punten die 'overgebleven' zijn van de hoekpunten van de kubus. Deze overblijfsels moeten afgesneden worden door 'de nieuwe', en daarmee bedoelt hij de punten die in zo'n zijvlak liggen.  $D'$  is dus het overblijfsel van  $D$ , en wordt afgesneden door de 'nieuwe' punten  $K$ ,  $L$  en  $M$ .  $H'$  is het overblijfsel van  $H$ , en wordt afgesneden door  $M$ ,  $N$  en  $O$ .



Links zijn de ribben  $KL$ ,  $LM$ ,  $MK$ ,  $MO$ ,  $ON$  en  $NM$  het resultaat van het afsnijden van de punten  $D'$  en  $H'$ . Rechts zien we wat er gebeurt als we alle voorgeschreven snedes uitvoeren; dan blijft de icoesaëder over.

We willen nu bewijzen dat dit echt een icoesaëder is. We tellen dat de figuur 20 driehoeken heeft. Alle ribbes zijn, door de symmetrie van de constructie, van het type  $LO$ , of van het type  $LM$ . Van  $LO$  weten we dat  $LO = 2 \cdot \frac{-1+\sqrt{5}}{4} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$  (als de ribbe van de kubus 1 is). Verder zien we in de figuur links, door de hulplijnen  $RL$  en  $MS$  (evenwijdig aan  $PQ$ ) dat  $LM = \sqrt{MS^2 + LS^2}$ . We weten al dat  $LS = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ . We zien dat  $MS = \sqrt{PD^2 + DQ^2}$ .  $DQ = \frac{1}{2}$  en  $PD$  is het kleinst evenredig gesneden deel van  $TD$ , dus  $PD = \frac{3-\sqrt{5}}{4}$ . Invullen levert nu dat

$$\begin{aligned}
 LM &= \sqrt{\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}\right)^2} = \\
 &= \sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{16} + \frac{4}{16} + \frac{14-6\sqrt{5}}{16}} = \\
 &= \sqrt{\frac{24-8\sqrt{5}}{16}} = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = LO
 \end{aligned}$$

Alle driehoeken van de figuur zijn dus gelijkzijdig en van gelijke grootte. De figuur is dus een icoesaëder. Hoe groot is nu deze icoesaëder? Als de kubus waar hij ingeschreven is, ribbes van lengte 1 heeft, heeft de icoesaëder ribbes met lengte  $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ , het grootste evenredig gesneden deel van 1.

De inhoud van de icoesaëder is dan<sup>28</sup>  $\frac{5}{12}(3 + \sqrt{5})\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 = \frac{5}{96}(2 + 2\sqrt{5})(6 - 2\sqrt{5}) = \frac{5}{96}(-8 + 8\sqrt{5})$ .

De kubus en zijn ingeschreven icoesaëder verhouden zich dus als  $1 : \frac{5}{96}(-8 + 8\sqrt{5})$ .

Beide kanten vermenigvuldigen met  $\sqrt{45} + 3$  levert  $\sqrt{45} + 3 : \frac{5}{96}(-8 + 8\sqrt{5})(3 + 3\sqrt{5})$ .

Uitwerken aan de rechterkant levert  $\sqrt{45} + 3 : \frac{5}{96}.96$  en dat is natuurlijk  $\sqrt{45} + 3 : 5$ ; de verhouding die Wils geeft.

### Tweede Lidts vervolgh.

Des ses-grondts in-ghesloten acht-grondt; is in-sluytelijcke, sijns in-ghesloten twaelf-grondts, twintigh-grondts, en kloots: maer een selve kloot, des vier-gronds, en acht-gronds.

Wils zegt hier: de octaëder in de kubus is vervat in de dodecaëder, icoesaëder en bol die in de kubus zitten. Met het tweede deel van het vervolg ('maer...acht-gronds') bedoelt hij denk ik dat de ingeschreven bol van de octaëder dezelfde is als de ingeschreven bol van de tetraëder (die beide in eenzelfde kubus zijn geschreven).

Om met dat laatste te beginnen: de afstand (in een kubus met ribbe 1) van het middelpunt van de kubus (en dus van de tetraëder en de octaëder) tot de middelpunten van de zijvlakken van zowel de tetraëder als de octaëder is  $\sqrt{\frac{1}{12}}$ . Beide ingeschreven bollen hebben dus hetzelfde middelpunt en dezelfde straal en zijn dus identiek.

We weten dat de dodecaëder, de icoesaëder en de bol in de kubus de zijvlaksmiddelpunten van de kubus bevatten. We weten ook dat de icoesaëder, de dodecaëder en de bol convex zijn. Aangezien de octaëder bestaat uit verbindingen van de middelpunten van de kubus, ligt de octaëder dus in de dodecaëder, icoesaëder en bol. Wat mij opvalt is dat Wils niet zegt dat de octaëder in de tetraëder zit. Dat is namelijk wel het geval. Alle ribbes van de octaëder liggen immers in de tetraëder.

---

<sup>28</sup>Hazewinkel [1988-1994] Deel 5, p. 1.

Derde Lidt:

## Snijding des acht-grondts:

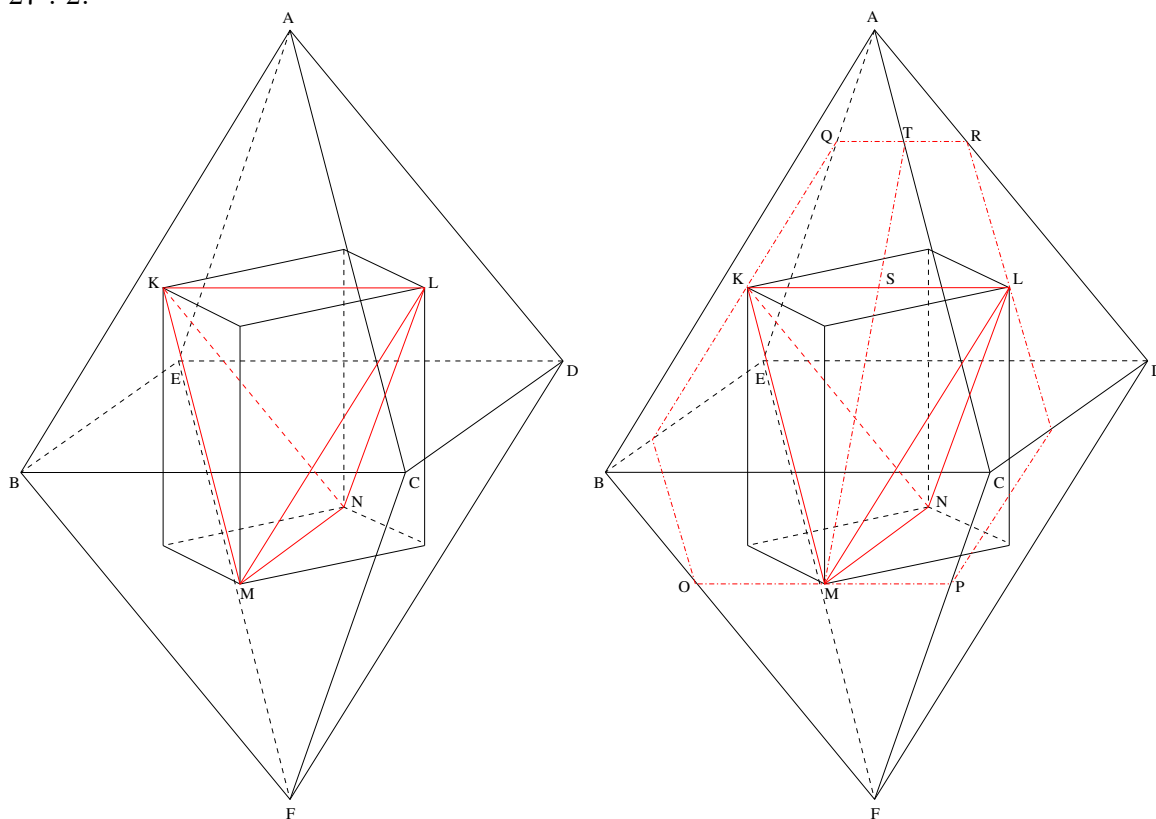
Tot een vier-grondt.

Thiende Vertoogh.

Des acht-grondts-gronden over ander af-ghesneden, door der zijden derde-deelen; of drie'er gronden middel-punten) blijft den in-ghesloten vier-grondt: In reden tot den acht-grondt, als 2, tot 27.

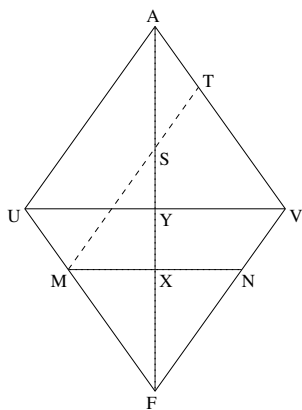
**Hertaling:** Kies vier zijvlakken van de octaëder zodanig dat de vier vlakken geen ribbe met elkaar gemeen hebben. Snijd elk van deze vier vlakken af door een vlak dat wordt opgespannen door de zes punten die de ribbes die van het af te snijden vlak aflopen, verdelen in een verhouding 1 : 2. Het overblijfsel is een tetraëder.

Het grootste werk voor het begrijpen van dit vertoog hebben we al gedaan in de behandeling van het vijfde vertoog (tetraëder in kubus) en wordt hierna gedaan in het elfde vertoog (kubus in octaëder). We hebben gezien dat de kubus drie keer zo groot is als zijn ingeschreven tetraëder, en het volgende vertoog laat zien dat de octaëder zich verhoudt tot zijn ingeschreven kubus als 9 : 2. Verwonderlijk is het daarom niet dat Wils in dit tiende vertoog beweert dat de octaëder zich verhoudt tot zijn ingeschreven tetraëder als 27 : 2.



We zien in het plaatje links de tetraëder  $KLMN$  in de kubus in de octaëder getekend.  $K, L, M$  en  $N$  zijn middelpunten van vier zijvlakken van de octaëder. We zien dan vrij snel wat Wils bedoelt met ‘gronden over ander’ afsnijden over ‘drie’r gronden middelpunten’; de zijvlakken  $ABC, ADE, CDF$  en  $BEF$  worden afgesneden door  $KLM, KLN, LMN$  en  $KMN$ . Met ‘over ander’ bedoelt Wils dus vier zijvlakken die elkaar alleen in hoekpunten raken, en niet een ribbe gemeenschappelijk hebben. Net als we eerder in het vijfde vertoog, betekent ‘over ander’ hier dus zoiets als ‘over elkaar’.

Met behulp van de tekening rechts zien we nu dat deze snijmethode over de middelpunten hetzelfde is als de gronden ‘over ander’ afsnijden ‘door der zijden derde-deelen’. We kijken naar het afsnijden van het octaëderzijvlak  $ABC$  door  $KLM$ . We trekken  $OP$  door  $M$  evenwijdig aan  $KL$ .  $O, P, K$  en  $L$  liggen nu in een vlak, en bovendien zijn  $BO$  en  $CP$  een derde van  $BF$  en  $CF$  respectievelijk, omdat  $OP$  evenwijdig is aan  $BC$  en  $M$  het middelpunt is van de gelijkzijdige driehoek  $BCF$ . We trekken nu de lijn vanuit  $M$  door  $S$ , het midden van  $KL$ . Deze lijn, alsmede het verlengde ervan, ligt in hetzelfde vlak als  $K, L, O$  en  $P$ .



Bekijken we nu de vlakuitsnede  $AUFV$ , met  $U$  en  $V$  de middens van  $BC$  en  $ED$ , dan kunnen we zien dat  $MS$  evenwijdig loopt aan  $UA$ . Immers,  $AY : UY = \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{1}{2} = \sqrt{2} : 1 = \frac{\sqrt{2}}{3} : \frac{1}{3} = SX : XM$ . (Dit alles als de ribbe van de octaëder 1 is.) Omdat  $MS$  evenwijdig is aan  $UA$ , zien we dat  $AT$  een derde van  $AV$  is. Keren we nu terug naar de vorige tekening, dan kunnen we  $QR$  door  $T$  evenwijdig aan  $KL$  tekenen. Omdat  $QR$  ook evenwijdig is aan  $ED$ , zijn  $AQ$  en  $AR$  een derde van  $AE$  en  $AD$ .  $Q, R, K, L, O$  en  $P$  liggen nu in één vlak. Het snijvlak door deze zes punten heeft ook nog twee snijpunten ( $G$  en  $H$ ) met de ribbes  $BE$  en  $CD$ . We zien eenvoudig dat deze snijpunten ook op een derde van de ribbe liggen;  $Q$  en  $R$  liggen namelijk op een derde van  $AE$  en  $AO$ , en omdat  $RL$  en  $QK$  evenwijdig zijn aan  $AC$  en  $AB$  respectievelijk, liggen ook  $G$  en  $H$  op een derde van  $BE$  en  $CD$ .

Het zijvlak  $ABC$  van de octaëder wordt dus afgesneden door het snijvlak door  $Q, R, G, H, O$  en  $P$ , die allezes op een derde liggen van de ribbes die naar  $ABC$  toelopen, precies zoals Wils voorschrijft. We hebben gezien dat  $QRGOPH$  in hetzelfde vlak ligt als  $KLM$ . Vier dergelijke snedes leveren dus een tetraëder op.

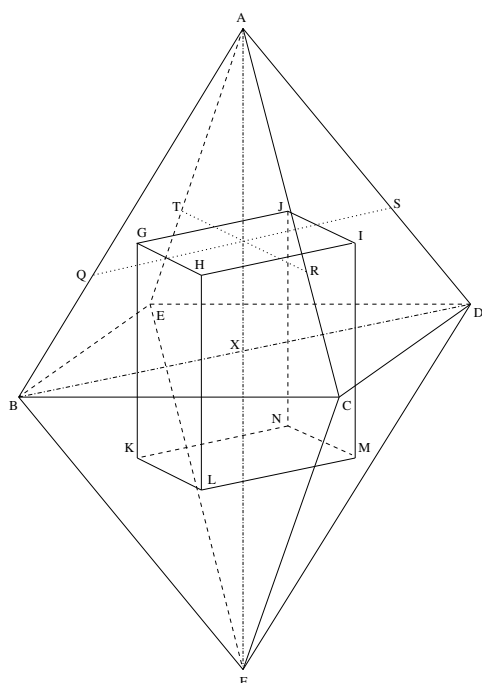
### MERCKT

Dat den acht-grondt oock mach gesneden werden, tot een grootsten inghesloten vier-grondt, (als blijcken sal, achter 't tweede volgende Vertoogh) in reden tot den acht-grondt, als 2, tot  $\sqrt{50} + 7$ .

Deze toevoeging wordt duidelijk na behandeling van het twaalfde vertoog. Met ‘t tweede volgende Vertoogh’ verwijst Wils (die op dit moment in het tiende vertoog zit) naar dat twaalfde vertoog. Omdat Wils daar ook weer terugverwijst naar dit ‘merckt’, laat ik hier deze opmerking onbehandeld.

Des acht-grondts hoecken af-ghesneden, door der zijden twee derde-deelen; (of der gronden middel-punten,) blijft den in-ghesloten ses-grondt: In reden tot den acht-grondt, als 2, tot 9.

**Hertaling:** Snijd ieder hoekpunt van de octaëder af door het vlak dat wordt opgespannen door de vier punten die de ribbes die van het af te snijden hoekpunt aflopen, verdelen in een verhouding 2 : 1, of door het vlak dat wordt opgespannen door de middelpunten van de zijvlakken die in het af te snijden hoekpunt samenkomen. Het overblijfsel is een kubus.



Het plaatje van de situatie maakt onmiddellijk dit vertoog duidelijk. Wils geeft hier twee aanwijzingen om de kubus uit de octaëder te snijden, die beide op hetzelfde neerkomen. Tussen haakjes noemt hij de optie via de middelpunten van de vlakken. Hoekpunt  $A$  van de octaëder snijdt hij dan af door het vlak door de middelpunten van de aangrenzende vlakken ( $GHIJ$ ). Hoekpunt  $B$  door  $GHKL$ ,  $C$  door  $HIML$ , et cetera. Aan de hand van de hulplijnen  $QS$  en  $TR$  is vrij gemakkelijk te zien dat het vlak door 'twee derde-deelen' van de zijden precies hetzelfde vlak is. Immers, stel de hoekpunten  $GHIJ$  van de kubus liggen op dezelfde hoogte als  $QRST$ .  $GHIJ$  zijn de middelpunten van de vier zijvlakken van de octaëder die in  $A$  uitkomen. Alle zijvlakken zijn gelijkzijdige driehoeken, dus de middelpunten liggen op een derde van de hoogte. Dus, in Wils' woorden: 'des acht-grondts hoecken [bijvoorbeeld  $A$ ] af-ghesneden, door der zijden twee derde-deelen [ $Q$ ,  $R$ ,  $S$  en  $T$  liggen op twee derde

van  $AB$ ,  $AC$ ,  $AD$  en  $AE$ , de ribbes die van  $A$  aflopen.]; (of der gronden middel-punten,) [ $GHIJ$  liggen in hetzelfde vlak als  $Q$ ,  $R$ ,  $S$  en  $T$ ]. Zo kunnen allezes de hoekpunten worden afgesneden, hetzij door de middelpunten van de aangrenzende vlakken, hetzij door (het vlak door) twee derde delen van de samenkomende ribbes.

Stel dat de ribbes van de octaëder lengte 1 hebben, dan is de inhoud tweemaal de inhoud van piramide  $ABCDE$ , dus  $2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ . De ribbes van de kubus zijn  $\frac{\sqrt{2}}{3}$ , dus de kubus heeft als inhoud  $\frac{2 \cdot \sqrt{2}}{27}$ . De octaëder en zijn ingeschreven kubus verhouden zich dus als 9 : 2. Precies zoals Wils beweert.



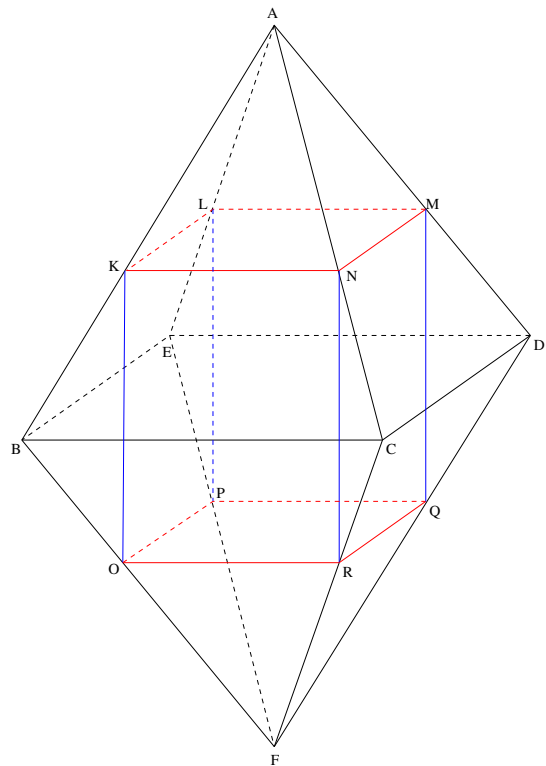
Twee van des acht-grondts teghen-een-staende hoecken af-ghesneden, door sulck deel der zijden, in reden tot het ander, als des vierkants over-hoecksche tot de zijde; en dan de on-gheraeckte kanten, door de nieuwe hoecken, blijft den grootsten in-ghesloten ses-grondt: In reden tot den acht-grondt, als 6, tot  $\sqrt{50} + 7$ .

**Hertaling:** Kies twee hoekpunten van de octaëder die aan weerszijden van een lichaamsdiagonaal liggen. Snijd ieder van deze twee hoekpunten af door het vlak dat opgespannen wordt door de vier punten die de ribbes die van het af te snijden hoekpunt aflopen, verdelen in een verhouding  $\sqrt{2} : 1$ . Snijd vervolgens de ribbes van de octaëder die overblijven af door vier van de hoekpunten die zijn ontstaan na het afsnijden van de twee hoekpunten. Het overblijfsel is de grootste kubus die in de octaëder past.

De kubus die we in het elfde vertoog hebben gezien, is niet de grootste kubus die in de octaëder past. Wils geeft vrij eenvoudig aan hoe die kubus dan wel is te vinden. Ik volg zijn woorden, en leg ze uit aan de hand van de tekening rechts. ‘Twee van des acht-grondts teghen-een-staende hoecken [in het plaatje *A* en *F*] af-ghesneden, door sulck deel der zijden, in reden tot het ander [dus zoals bijvoorbeeld *AK* en *KB* zich verhouden], als des vierkants over-hoecksche tot de zijde [de verhouding van een vierkantsdiagonaal tot de vierkantszijde, dus  $\sqrt{2} : 1$ ]; en dan de on-gheraeckte kanten [in het geval van het plaatje *BC*, *CD*, *DE* en *EB*], door de nieuwe hoecken [de nieuwe hoecken zijn *K*, *L*, *M*, *N*, *O*, *P*, *Q* en *R*, en door die te verbinden, snijd je de voornoemde overgebleven ribbes af], blijft...[etc.]’

We snijden dus (in het geval van het plaatje) *A* en *F* af door de vlakken *KLMN* en *OPQR*. Het is niet zo vreemd dat Wils kiest voor de verhouding  $\sqrt{2} : 1$  om dit te doen, want uit het plaatje blijkt dat  $KO = \sqrt{2}.KB$ . Immers,  $\angle KBO = 90^\circ$  en *KO* is evenwijdig met *AF* (omdat  $OB = BK$ ). We zien dus dat  $KO = KN$ . Alle ribbes van de ontstane figuur zijn dus even lang. Omdat ook alle hoeken recht zijn, is de figuur een kubus.

We moeten daar nog even de inhoud van uitrekenen.  $AK : KB = \sqrt{2} : 1$ . Als  $AB = 1$ , dan  $AK = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$ . Omdat *KN* evenwijdig is aan *AC*, geldt dat *AKN* een gelijkzijdige driehoek is (net als *ABC*). We concluderen dus dat  $KN = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$ . De inhoud van de



kubus is natuurlijk  $KN^3 = \frac{2\sqrt{2}}{7+5\sqrt{2}}$ . De inhoud van de octaëder met ribbe 1 is (zoals we al eerder zagen)  $\frac{\sqrt{2}}{3}$ . De octaëder verhoudt zich dus tot de kubus als

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{3} : \frac{2\sqrt{2}}{7+5\sqrt{2}} &= \\ \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot 6 \cdot \frac{7+5\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} : 6 &= \\ \frac{42\sqrt{2}+60}{6\sqrt{2}} : 6 & \end{aligned}$$

Uitwerken van de linkerkant levert  $\frac{42\sqrt{2}+60}{6\sqrt{2}} = 7 + 5\sqrt{2} = 7 + \sqrt{50}$ . De verhouding is dus zoals Wils die geeft. Net als bij het zevende vertoog is hier de vraag gerechtvaardigd of dit echt de grootste kubus is die in de octaëder past. Dat is niet eenvoudig te bewijzen. Hoofdstuk vijf gaat in op die vraag.

### Eerste Vervolgh.

Hier uyt is openbaer; dat den vier-grondt ghesneden naer 't tweede, en dan naest 't voorgaende deses; blijft den grootsten in-ghesloten ses-grondt: In reden tot den vier-grondt, als in 't Merck des eersten, is aen-gheteyckent.

Hier zegt Wils niets anders dan hij al heeft aangekondigd te zullen zeggen in het 'Merckt' dat achter het eerste vertoog zit. Er staat eigenlijk: 'Als je de tetraëder snijdt volgens het tweede vertoog [met als resultaat een octaëder], en daarna volgens het 'voorgaende' [het twaalfde vertoog; dus de grootste kubus in de octaëder], verhoudt de grootste kubus zich tot de tetraëder waar hij inzit, als gezegd in het 'Merckt'. Met andere woorden: de grootste kubus in een tetraëder vind je door eerst een octaëder in een tetraëder te tekenen (op de manier van het tweede vertoog), en vervolgens in die octaëder een grootste kubus te tekenen (op de manier van het twaalfde vertoog).

We kunnen nu ook kijken naar de getallen die Wils daar noemt. De tetraëder verhoudt zich, zegt hij, tot de grootst ingeschreven kubus als  $\sqrt{50} + 7 : 3$ . We hebben net gezien in het twaalfde vertoog dat de grootste kubus die in de octaëder zit, zich tot de octaëder verhoudt als  $\sqrt{50} + 7 : 6$ . We weten dat, volgens het tweede vertoog, de tetraëder twee keer zo groot is als zijn ingeschreven octaëder, en dus verhoudt de tetraëder zich tot de grootste kubus (in zijn ingeschreven octaëder) als  $\sqrt{50} + 7 : 3$ .

## Tweede Vervolgh.

Ghelijck mede; dat den acht-grondt, ghesneden naer 't naest-voorgaende; en dan naer 't vijfde deses; blijft den grootsten in-ghesloten vier-grondt: In reden tot den acht-grondt, als in 't Merck des thienden is aengheteyckent.

Hier doet Wils precies hetzelfde: hij refereert nog even aan het 'Merckt' dat hij na het tiende vertoog gaf, en zegt dat met dit twaalfde vertoog ook dat 'Merckt' verklaard is. Wat hij zegt is: de grootste tetraëder in een octaëder vinden we door eerst de grootste kubus in de octaëder te tekenen (op de manier van het twaalfde vertoog), en dan daarin een tetraëder te tekenen (op de manier van het vijfde vertoog). We hebben net gezien dat de octaëder zich verhoudt tot zijn grootste ingeschreven kubus als  $\sqrt{50}+7 : 6$ , en we weten uit het vijfde vertoog dat de kubus drie keer zo groot is als zijn ingeschreven tetraëder. Eenvoudig concluderen we dan dat Wils gelijk heeft als hij zegt dat de verhouding tussen een octaëder en de grootst ingeschreven tetraëder  $\sqrt{50} + 7 : 2$  is.

Voor beide opmerkingen die Wils hier maakt is het lastig na te gaan of het ook echt om de grootste inschrijving gaat. Hoofdstuk 5 gaat in op de vraag waarom het niet zo makkelijk is om dat in te zien.

*Tot een twaelf-grondt.*

Derthiende Vertoogh

Des acht-grondts kanten ordentlijck een teghen een af-gesneden, door twe'er gronden middel-punten, en twee die'r gronden rakende kantens tweede derden-deels kleynste everedenigh gesneden deel; blijft den ingesloten twaelf-grondt: in reden tot den acht-grondt, als  $5 + \sqrt{5}$  tot 18.

**Hertaling:** Beschouw een van de hoekpunten van de octaëder. Kies van de vier ribbes die daar samenkomen twee ribbes die loodrecht op elkaar staan. Snijd elk van die twee ribbes af door het vlak dat opgespannen wordt door de middelpunten van de twee zijvlakken die in de af te snijden ribbes samenkomen, en de twee punten die de andere twee ribbes die van het gekozen hoekpunt aflopen, verdelen in een verhouding  $\frac{5-\sqrt{5}}{6} : \frac{1+\sqrt{5}}{6}$ . Snijd op deze manier de 12 ribbes van de octaëder in zes groepjes van twee af. Wat overblijft is een dodecaëder.

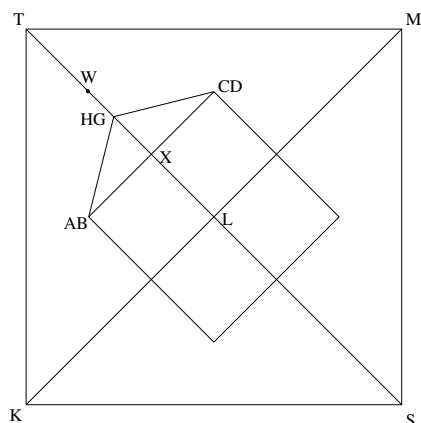
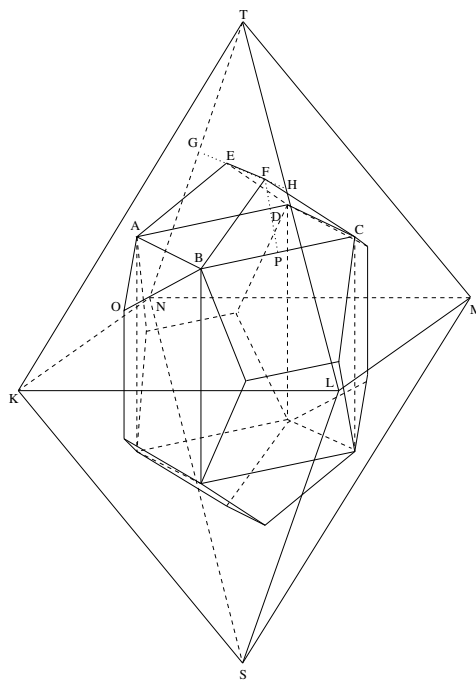
In het elfde vertoog hebben we gezien hoe een kubus in een octaëder geschreven wordt. We hebben gezien dat de middelpunten van de zijvlakken van de octaëder een kubus opspannen. Het voorschrift zoals we dat hierboven lezen doet ons, vanwege de woorden 'twe'er gronden middel-punten' vermoeden dat de dodecaëder in de octaëder zoals Wils die wil snijden, dezelfde is als de dodecaëder om de kubus die opgespannen wordt door de middelpunten van de zijvlakken van de octaëder.

Hiernaast staat de tekening van de kubus in de dodecaëder in de octaëder. Wat we willen, is dat vermoeden omtrent de constructie van de dodecaëder bevestigd zien in de aanwijzingen van Wils. In het plaatje zijn alleen relevante (hoek)punten van een letter voorzien.

De octaëder heeft twaalf ribben. De dodecaëder, die moet ontstaan, heeft uiteraard twaalf zijvlakken. Het ligt dus voor de hand dat Wils zijn aanwijzing begint met een instructie voor het afsnijden van de ‘kanten’ (de ribbes). Nu is natuurlijk de vraag hoe deze worden afgesneden. Als we naar de tekening kijken, en ons bijvoorbeeld concentreren op het afsnijden van ribbe  $TK$ , zien we wat Wils bedoelt met ‘twe’er gronden middel-punten’. Immers, als we snijden over het vlak door  $A$ ,  $B$ ,  $E$  en  $F$ , ligt in dat vlak het zijvlak  $OABEF$ , en dat snijvlak gaat door twee middelpunten van de octaëderzijvlakken die samenkomen in de af te snijden ribbe  $TK$ .

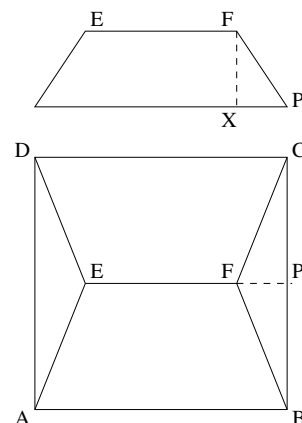
Nu is het natuurlijk lastig om te snijden door  $E$  en  $F$ , aangezien dit punten zijn die *in* de octaëder liggen. Maar het vlak  $OABEF$  gaat ook door  $G$  en  $H$ , die op  $TN$  en  $TL$  liggen. Wie de ribbe  $TK$  eraf snijdt door  $A$ ,  $B$ ,  $G$  en  $H$  snijdt precies over het vlak waar  $OABEF$  in ligt. Als we nu naar de instructie van Wils kijken, zien we dat hij dit ook aangeeft, maar daarvoor moet je wel heel goed lezen:

Des acht-grondts kanten ordentlijk een teghen een [bijvoorbeeld  $TK$  en  $TM$ ] afghesneden, door twe’er gronden middel-punten [ $AB$  en  $CD$  respectievelijk], en twee die’r gronden rakende kantens [ $TL$  en  $TN$ ] tweede derden-deels kleinste everedenigh gesneden deel. (De uitleg van de term ‘evenredenigh gesneden’ staat in de behandeling van het achtste vertoog.)



In eerste instantie was ik geneigd hier het volgende te lezen: ‘...twee derden-deels kleinste everedenigh gesneden deel’. Wie in het zijaanzicht hiernaast (een loodrechte projectie op een vlak dat loodrecht op  $LN$  staat) kijkt, ziet dat  $TX$  twee derde is van  $TL$ , en je vermoedt dan dat  $XHG$  daarvan het kleinste evenredig gesneden deel zal zijn. De afstand  $XHG$  is echter de afstand van ribbe  $EF$  tot het vlak  $ABCD$ . Deze afstand is als volgt te berekenen. Als  $BF = 1$  dan  $BC = 2 \cdot \sin 54^\circ$ ,  $FP = \cos 54^\circ$  en  $AB = BC = 2 \cdot \sin 54^\circ$ . Merk op dat  $2 \cdot \sin 54^\circ = 1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ . Uit de tekening rechts blijkt dat  $PX = \left(\frac{2 \cdot \sin 54^\circ - 1}{2}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$  ( $= \sin 18^\circ$ ) en dat  $FX = \sqrt{FP^2 - PX^2} = \sqrt{(\cos^2 54^\circ) - \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2} = \frac{1}{2}$ .

Kijken we nu weer naar het zijaanzicht van de octaëder, dan zien we dat de afstand  $HGX$  de helft van de ribbe van de dodecaëder is, die op zijn beurt weer het grootste evenredig gesneden deel van de ribbe van de kubus is. Maar omdat  $TX$  precies de lengte van een ribbe van de kubus is, zien we dat  $HGX$  de helft van het grootste evenredig gesneden deel van  $TX$  is. Dat is dus  $TX \cdot \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ . En dat is niet gelijk aan het kleinste evenredig gesneden deel; dat is namelijk  $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ . Er zijn nu twee mogelijkheden: Wils heeft het bij het verkeerde eind, of deze interpretatie klopt niet.



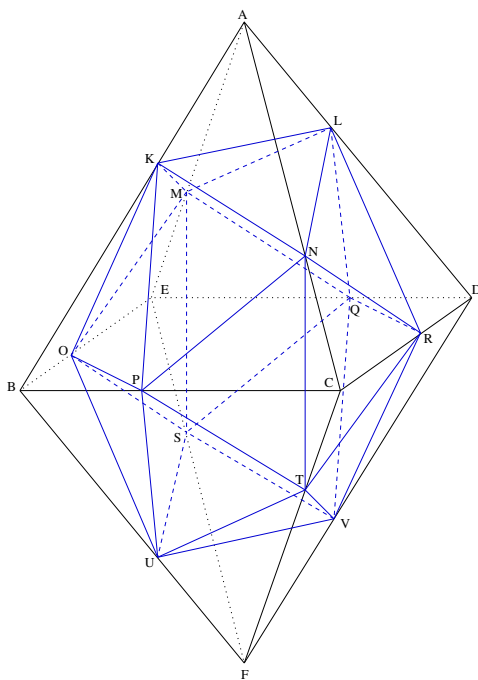
De nauwkeurigheid van Wils in de andere vertogen geeft aanleiding om het laatste vermoeden. Met recht, zo blijkt, want als je dan preciezer leest, zie je dat Wils schrijft ‘twee die’r gronden rakende kantens twee *de* derden-deels kleinste everedenigh gesneden deel’. We hebben gezien dat  $HGX = TX \cdot \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ . Maar dan dus ook  $HGX = \frac{1}{2} \cdot TX \cdot \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ .  $HGX$  is dus het grootste evenredig gesneden deel van de helft van  $TX$ , dus het grootste evenredig gesneden deel van een derde van  $TL$ . Dat betekent dat de afstand tussen  $T$  en  $HG$  gelijk is aan een derde van  $TL$ , plus het kleinste evenredig gesneden deel van een derde van  $TL$ . Dit is, als je goed leest, precies wat Wils zegt. Anders gezegd staat er (zonder ouderwetse genitieven): ‘het kleinste evenredig gesneden deel van het tweede derde deel van de twee ribben die aan deze vlakken raken.’ Als je  $TL$  in drie gelijke delen deelt (in het zijaanzicht gebeurt dat door middel van de punten  $W$  en  $X$ ), ligt  $HG$  in het tweede derde deel ( $WX$ ) en  $WHG$  is het kleinste evenredig gesneden deel van dit tweede derde deel van  $TL$ .

Omdat  $HG$  evenwijdig is aan  $NL$ , verhoudt  $TG$  zich tot  $TN$  als  $TH$  tot  $TL$ , dus voor ‘twee die’r gronden rakende kantens’ ( $TL$  en  $TN$ ) geldt dat ze gesneden moeten worden op het kleinste evenredig gesneden deel van het tweede derde deel. Nu heeft Wils dus met zijn constructie een snijvlak aangegeven door  $A, B, G$  en  $H$  (voor de ribbe  $TK$ ) en door  $C, D, G$  en  $H$  voor de ribbe  $TM$ . Als nu alle ribben zo worden afgesneden, blijft een dodecaëder over.

We hebben in de voorgaande twee vertogen gezien hoe de octaëder zich tot zijn ingeschreven kubus verhoudt, en hoe groot de kubus ten opzichte van zijn omgeschreven dodecaëder is. Deze getallen, en de verhouding die Wils geeft voor de octaëder en zijn ingeschreven dodecaëder, deden vermoeden dat de dodecaëder om de kubus in de octaëder dezelfde is als de dodecaëder in de octaëder. Nu hebben we gezien dat dit vermoeden aansluit bij de constructieaanwijzingen van Wils.

Des acht-grondts hoecken twee-zijdigh ordentlijck af-gesneden, door des een kants grootste, tot d'ander twee'r kantens kleynste evereerd'nigh-gesneden deel; blijft den in-gesloten twintig-grondt: In reden tot den acht-grondt, als 10, tot  $7 + \sqrt{45}$ .

**Hertaling:** Beschouw een hoekpunt van de octaëder. Verdeel de vier ribbes die in dit hoekpunt samenkomen in twee groepjes van twee ribbes die loodrecht op elkaar staan. Verdeel de ribbes in het ene groepje in een verhouding  $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} : \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ , en de twee andere ribbes in de omgekeerde verhouding. Zo ontstaan op de vier ribbes vier punten op twee verschillende afstanden van het af te snijden hoekpunt. Snijd nu het hoekpunt af door twee vlakken; ieder vlak opgespannen door de twee punten die het dichtst bij het hoekpunt liggen en een van de twee punten die het verst van het hoekpunt af ligt. Snijd zo alle hoekpunten van de octaëder af, en wat overblijft is een icoesaëder.



In het belendende plaatje zien we de icoesaëder in de octaëder getekend. Hoewel Wils' woorden misschien ingewikkeld lijken, is vrij gemakkelijk in te zien wat hij bedoelt. Ditmaal snijdt Wils geen ribben af, maar hoeken. Dat betekent dat hij punten op de ribbes zal gebruiken als hoekpunten voor de te tekenen icoesaëder. Laten we bijvoorbeeld van het hoekpunt  $A$  uitgaan. Dan bedoelt Wils het volgende: 'Des acht-grondts hoecken [bijvoorbeeld  $A$  dus] twee-zijdigh ordentlijck [ $AE$  en  $AC$  als ordentlijck (loodrecht) paar, en  $AB$  en  $AD$ ] af-gesneden, door des een kants [instructie voor zowel  $AC$  als  $AE$  (namelijk: *tweezijdigh* ordentlijck)] grootste [ $AN$  en  $AM$ ], tot d'ander twee'r kantens [ $AB$  en  $AD$ ] kleynste [ $AK$  en  $AL$  respectievelijk] evereerd'nigh-gesneden deel'.

In het plaatje is voor alle hoekpunten deze instructie uitgevoerd. Je ziet dan ook dat het punt  $N$  vanuit  $A$  het grootste evenredig gesneden deel van de ribbe is, en vanuit  $C$  het kleinste. Je krijgt zo

per ribbe een punt, en als je deze punten met elkaar verbindt, krijg je een figuur van twintig driehoeken. Nu is de vraag: zijn alle driehoeken even groot, en zijn ze gelijkzijdig?

In de figuur zijn twee verschillende typen driehoeken te herkennen: driehoeken die geheel in één vlak van de octaëder liggen (zoals bijvoorbeeld  $LNR$ ), en driehoeken die niet in een vlak liggen (zoals bijvoorbeeld  $KLN$ ). Door de symmetrie van de octaëder en de constructie zijn alle driehoeken identiek aan  $LNR$  of  $KLN$ . Omdat alle ribbes op dezelfde manier worden opgedeeld, is het eenvoudig in te zien dat  $ALN$  gelijk is aan

$LRD$  en  $NCR$ , en dat dus de driehoek  $LNR$  gelijkzijdig is. Omdat  $KN = LN$  is  $KLN$  gelijkbenig. Nu rest nog te bewijzen dat ook  $KLN$  gelijkzijdig is. Als de ribbe van de octaëder  $ABCDEF$  1 is, dan:

$$KL = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{3 - \sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{14 - 6\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{7 - 3\sqrt{5}}$$

Uit de cosinusregel volgt dat

$$\begin{aligned} LN^2 &= AN^2 + AL^2 - 2 \cdot AN \cdot AL \cdot \cos NAL \\ &= \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4} + \frac{14 - 6\sqrt{5}}{4} - \left(2 \cdot \frac{-3 - 5 + 4\sqrt{5}}{4} \cdot \frac{1}{2}\right) \\ &= 5 - 2\sqrt{5} - (-2 + \sqrt{5}) = 7 - 3\sqrt{5} \end{aligned}$$

Hieruit concluderen we dat  $LN = KL$  en dus dat  $KLN = LNR$ .  $KLMNOPQRSTU$  is dus een icsaëder. Wat nog rest is het uitrekenen van de verhouding van de octaëder ten opzichte van de icsaëder.

De inhoud van octaëder  $ABCDEF$  is twee keer de inhoud van piramide  $ABCDE$ . De hoogte van deze piramide is  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , dus de de inhoud is  $1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{6}$ . De inhoud van de octaëder is dan  $\frac{\sqrt{2}}{3}$ .

De ribbe van de icsaëder is  $\sqrt{7 - 3\sqrt{5}}$ . De inhoud van de icsaëder is dan

$$\frac{5}{12} \cdot (3 + \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{7 - 3\sqrt{5}})^3 = \frac{5}{12} \cdot (6 - 2\sqrt{5}) \cdot \sqrt{7 - 3\sqrt{5}}$$

De verhouding octaëder : icsaëder is dus

$$\frac{5}{12} \cdot (6 - 2\sqrt{5}) \cdot \sqrt{7 - 3\sqrt{5}} : \frac{\sqrt{2}}{3}$$

De verhouding die Wils geeft is

$$10 : 7 + \sqrt{45}$$

Dat is met elkaar in overeenstemming als

$$\frac{7 + \sqrt{45}}{\frac{\sqrt{2}}{3}} \cdot \frac{5}{12} (6 - 2\sqrt{5}) \sqrt{7 - 3\sqrt{5}} = 10$$

We rekenden net uit dat  $KL = \sqrt{7 - 3\sqrt{5}}$  we concluderen eenvoudig uit de figuur (omdat  $AL = AK$  en  $KA$  loodrecht op  $AL$ ) dat  $\sqrt{7 - 3\sqrt{5}} = \sqrt{2} \cdot \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ . Dan blijft over de haakjes uit te werken:

$$\frac{7 + \sqrt{45}}{\frac{\sqrt{2}}{3}} \cdot \frac{5}{12} (6 - 2\sqrt{5}) \sqrt{7 - 3\sqrt{5}} =$$

$$\begin{aligned}
& \frac{7 + \sqrt{45}}{\frac{\sqrt{2}}{3}} \cdot \frac{5}{12} (6 - 2\sqrt{5}) \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right) \sqrt{2} = \\
& (21 + 9\sqrt{5}) \cdot \frac{5}{24} \cdot (6 - 2\sqrt{5})(3 - \sqrt{5}) = \\
& \frac{5}{24} (36 + 12\sqrt{5})(3 - \sqrt{5}) = \\
& \frac{5}{24} (108 - 36\sqrt{5} + 36\sqrt{5} - 60) = \frac{5}{24} \cdot 48 = 10
\end{aligned}$$

De verhouding tussen de octaëder en de ingeschreven icoesaëder is dus, zoals Wils zegt,  $10 : 7 + \sqrt{45}$ .

### Derde Lidts, eerste vervolgh.

Des acht-grondts in-gesloten Vier-grondt, ses-grondt, en twaelf-grondt; zijn in-sluytelijcke, sijns in gesloten twintighgronts, en kloots: En de minst-grondige, der ander: Maer de kloot des twintigh-grondts.

De tetraëder, kubus en dodecaëder in de octaëder zitten vervat in de icoesaëder en de bol in de octaëder, wat in de constructie ook goed te zien is. De hoekpunten van de tetraëder zijn vier zijvlaksmiddelpunten van de octaëder. Alleacht de hoekpunten van de kubus zijn dat ook, en die acht hoekpunten van de kubus zijn ook hoekpunten van de dodecaëder. De omgeschreven bol van de tetraëder, kubus en dodecaëder is dus dezelfde. Aangezien deze omgeschreven bol raakt aan de acht zijvlaksmiddelpunten van de octaëder, is het de ingeschreven bol van de octaëder. We constateerden al eerder dat de inschreven bol van de octaëder ook de ingeschreven bol van de icoesaëder is. We concluderen dus dat de tetraëder, kubus en dodecaëder in de icoesaëder en de bol in de octaëder zitten.

Uit de constructie is al gebleken dat de tetraëder in de kubus zit, en de kubus in de dodecaëder.

Wils merkt tot slot nog op dat de ingeschreven bol van de octaëder ingesloten zit in de icoesaëder. Dat volgt rechtstreeks uit de eerdere constatering dat de ingeschreven bol van de octaëder en zijn ingeschreven icoesaëder gelijk zijn.



# Snijdingh des Twaelf-grondts:

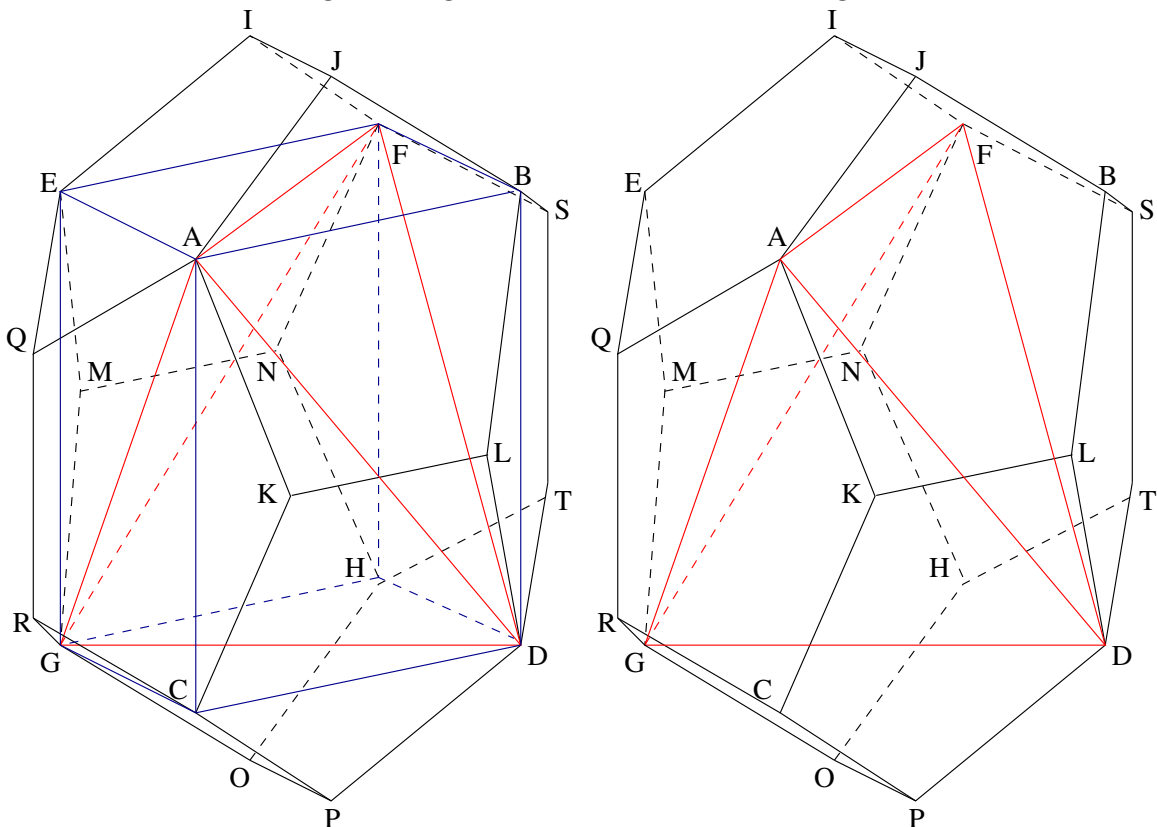
Tot een vier-grondt.

Vijfthiende Vertoogh.

Des twaelf-grondts gronden by drie en drie af-ghesneden, blijft den ingesloten vier-grondt: In reden tot den twaelf-grondt, als 4, tot  $15 + \sqrt{45}$ .

**Hertaling:** Verdeel de 12 zijvlakken van de dodecaëder in 4 groepjes van drie, zodanig dat de drie zijvlakken per groepje precies één punt gemeenschappelijk hebben. Snijd ieder groepje van drie zijvlakken af van de dodecaëder, en wat overblijft is een tetraëder.

We zullen straks in het zestiende vertoog zien dat de kubus zich verhoudt tot zijn omgeschreven dodecaëder als 4 tot  $5 + \sqrt{5}$ . We zien nu dat de te vormen tetraëder volgens Wils zich verhoudt als 4 tot  $15 + \sqrt{45}$ . De tetraëder in de dodecaëder is dus drie keer zo klein als de kubus in de dodecaëder, en we vermoeden dat de tetraëder in de kubus in de dodecaëder in ieder geval de grootte heeft die Wils voor ogen heeft.



Nu bekijken we een tekening van de tetraëder in de kubus in de dodecaëder, en proberen we te achterhalen of we de aanwijzingen van Wils herkennen in de constructie. Het ligt voor de hand dat Wils met ‘des twaelf-grondts gronden by drie en drie’ bedoelt

dat de vlakken in (vier) groepjes van drie worden afgesneden, met vier snedes dus, zodat de tetraëder overblijft. Dat we ‘by drie en drie’ zo kunnen interpreteren, lijkt mij gerechtvaardigd aan de hand van een taalvoorbeeld uit dezelfde tijd. In 1637 – ten tijde van Wils’ leven – verscheen de Statenvertaling van de Bijbel. Als we daarin het verhaal over de ark van Noach opslaan, waar de dieren in groepjes van twee aan boord gaan, lezen we: ‘Ende van alle vleesch, daer een geest des levens in was, quamender twee [en] twee tot Noach inde Arke.’<sup>29</sup> ‘Twee en twee’ moet dus niet vertaald worden als ‘twee plus twee’ maar ‘in groepjes van twee’. Analoog daaraan is ‘by drie en drie’ dus te vertalen als ‘in groepjes van drie’.

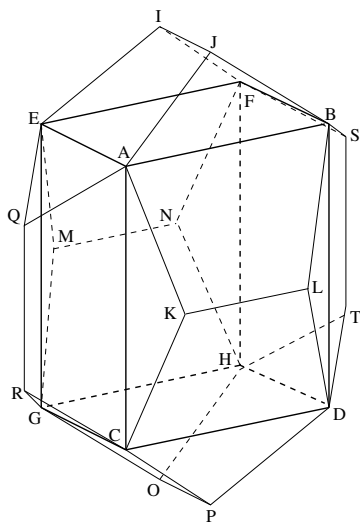
Als we naar het plaatje rechts kijken, alleen de tetraëder in de dodecaëder, dan gaat het om de drie vlakken die in punt  $B$  samenkomen, in punt  $E$ , punt  $C$  en punt  $H$ . (Merk op: dat zijn vier hoekpunten die ook een tetraëder opspannen; een die door een draaiing van negentig graden overgaat in  $AFGD$ .) De drie vlakken die in punt  $B$  samenkomen,  $AJBLK$ ,  $IJBSF$  en  $DLBST$  worden dus afgesneden door  $AFD$ . Zo worden door de zijvlakken van de tetraëder vier keer drie zijvlakken van de dodecaëder afgesneden.

*Tot een ses-grondt.*

*Sesthiende Vertoogh.*

Ses van des twaelf-grondts kanten af-ghesneden door vier naeste en blijvende hoecken, blijft den in-gesloten ses-grondt: In reden tot den twaelf-grondt, als 4, tot  $5 + \sqrt{5}$ .

**Hertaling:** Snijd zes van de ribbes van de dodecaëder af door het vlak dat wordt opgespannen door de vier hoekpunten die aan de af te snijden ribbe grenzen. Wat overblijft is een kubus.



In de tekening hiernaast zien we de dodecaëder met daarin de kubus getekend. De dodecaëder heeft twaalf vlakken, en de kubus heeft twaalf ribben. In elk vlak van de dodecaëder wordt een ribbe getekend. Het is vrij gemakkelijk in te zien dat alle ribben van de zo gevormde figuur even lang zijn; alle ribbes worden gevormd door twee punten in een vijfhoek te verbinden zoals op het plaatje op de volgende bladzijde. Omdat alle vijfhoeken regelmatig en even groot zijn, zijn alle ribbes dus even lang.

Dat maakt het echter nog geen kubus; daarvoor moeten de zijvlakken ook vierkanten zijn. Daarvoor ligt een helder, euclidisch bewijs in *Beginnselen der Meetkonst*<sup>30</sup>. Ik zal dat bewijs toepassen op de figuur hiernaast, en bewijzen dat  $ABCD$  een vierkant is.

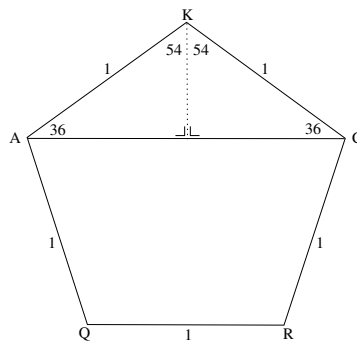
$AB$  is evenwijdig aan  $KL$ , net als  $CD$ . Daarom geldt dat  $AB$  evenwijdig is aan  $CD$ .  $AB$  en  $CD$  liggen dus in één vlak. Als de dodecaëder in

<sup>29</sup>Statenvertaling 1637; Genesis 7:15. Dat ‘en’ tussen vierkante haken staat, is omdat er in het Hebreeuws ‘twee twee’ staat; ‘en’ wordt toegevoegd voor de leesbaarheid. (Statenbijbel [1957] Vol. I, p. 31.)

<sup>30</sup>Euclides [1695] p. 613.

een bol wordt geplaatst, en we snijden over vlak  $ABCD$  een stuk van de bol af, is het snijvlak uiteraard een cirkel, met  $A, B, C$  en  $D$  op de boog. Daaruit concluderen we dat  $ABCD$  een koordenvierhoek is. Bovendien is  $ABCD$  een ruit, want alle zijden zijn gelijk. In een koordenvierhoek zijn de tegenoverstaande hoeken samen 180 graden. Maar omdat in een ruit de tegenoverstaande hoeken gelijk zijn, concluderen we dat alle hoeken van de ruit  $ABCD$  90 graden zijn.  $ABCD$  is dus een vierkant. ‘[M]et deselve swier, zoo sal een lichaam tusschen zes gelijke vierkanten beslooten sijn, dat een teerlink is, die in een twaalfgrondt beschreven is: dat te doen was.’<sup>31</sup>

Nu is de vraag hoe we deze kubusconstructie herkennen in de aanwijzingen van Wils. In de figuur gaat dat het beste met de ribbe  $KL$  van de dodecaëder. Deze ribbe maakt geen deel uit van de kubus. Hij wordt eraf gesneden door het vlak  $ABCD$ .  $A, B, C$  en  $D$  zijn de vier hoeken die direct om de ribbe  $KL$  heen liggen. De ribbe  $KL$  wordt dus afgesneden door de vier ‘naeste hoecken’. Zo worden zes ribben van de dodecaëder afgesneden. Wils’ instructie kun je dus als volgt begrijpen: ‘Ses van des twaelf-grondts kanten [ $KL, MN, ST, QR, IJ$  en  $OP$ ] af-ghesneden door vier naeste en blijvende hoecken [in het geval van  $KL$  dus  $ABCD$  en voor bijvoorbeeld  $ST$  is dat  $FBDH$ ], blijft den in-gesloten ses-grondt: In reden tot den twaelf-grondt, als 4, tot  $5 + \sqrt{5}$ .’



Wat Wils precies bedoelt met ‘blijvende hoecken’ is mij niet met zekerheid duidelijk. Wat het meest waarschijnlijk lijkt, is dat hij dit woord gebruikt om aan te geven dat deze hoekpunten van de dodecaëder ook hoekpunten van de kubus blijven. Wat verder opvalt is dat Wils geen nadere bepaling geeft van de ‘ses kanten’ die je moet afsnijden. De eerste ribbe die je afsnijdt door vier naaste (en blijvende) hoeken, kun je inderdaad vrij kiezen, maar daarna liggen de andere vijf vast. Het was in lijn geweest met de andere vertogen als hij hier een toevoeging als ‘een teghen een’ of ‘tegenover staende’ had gebruikt, om aan te geven dat de zes ribben in drie paren van twee tegenover elkaar gekozen moeten worden.

Nu rest nog de verhouding van de dodecaëder en de ingeschreven kubus. Een dodecaëder met ribbe  $a$  heeft een inhoud van  $\frac{1}{4}(15 + 7\sqrt{5})a^3$ . Kiezen we  $a = 1$ , dan kunnen we de ribbe van de kubus bepalen.  $AC$ , goed zichtbaar in de hiervoor afgebeelde vijfhoek, heeft als lengte  $2 \cdot \sin 54^\circ = 2 \cdot \cos 36^\circ = 2\sqrt{\frac{3}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{5}}$ . De kubus heeft dus als inhoud  $8 \cdot (\frac{3}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{5})\sqrt{\frac{3}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{5}} = (3 + \sqrt{5})\sqrt{\frac{3}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{5}}$ .

De dodecaëder en de kubus verhouden zich dus als volgt:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4}(15 + 7\sqrt{5}) : (3 + \sqrt{5})\sqrt{\frac{3}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{5}} \\ & \frac{1}{4}(15 + 7\sqrt{5}) : (3 + \sqrt{5}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ & \frac{1}{4}(15 + 7\sqrt{5}) : \frac{1}{4}(3 + \sqrt{5})(1 + \sqrt{5}) \end{aligned}$$

<sup>31</sup>Euclides [1695] p. 613-614.

$$(15 + 7\sqrt{5}) : (8 + 4\sqrt{5})$$

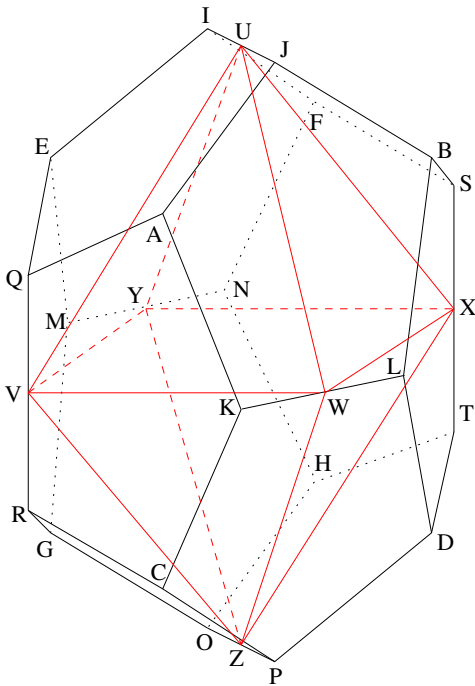
$$5 + \sqrt{5} : 4$$

Dat is de verhouding die Wils geeft.

*Tot een acht-grondt.      Seventiende Vertoogh.*

Des twaelf-grondts kanten by drie, en drie, acht mael, ordentlijk afghesneden, door 't midden der naeste; blijft den in-gesloten acht-grondt: in reden tot den twaelf-grondt, als  $\sqrt{45} + 5$ , tot 30.

**Hertaling:** Verdeel de ribbes van de dodecaëder in acht groepjes van drie, zodanig dat deze drie ribbes per groepje precies één punt gemeenschappelijk hebben. Snijd deze groepjes van drie af door het vlak dat opgespannen wordt door de middens van de (drie) ribbes die aan de af te snijden drie ribbes grenzen en niet in een ander groepje van drie zitten. Wat overblijft is een octaëder.



Een dodecaëder heeft dertig ribbes. Als we die in groepjes van drie gaan afsnijden, kunnen we tien groepjes maken. Maar, we moeten een octaëder krijgen, een achthoek, en Wils schrijft dan ook in zijn instructie 'acht mael, ordentlijk afghesneden'.

Als we nu (zie figuur) de acht hoekpunten nemen van de kubus die in de dodecaëder getekend kan worden ( $ABCDEFGH$ ), dan kunnen we acht groepjes maken van drie ribbes, namelijk de ribbes die naar deze acht punten toelopen. Er blijven dan zes ribbes over die we nog niet in een groepje hebben ondergebracht, namelijk  $IJ, ST, KL, QR, MN$  en  $OP$ . Dit zijn precies de zes ribbes die in de zijvlakken liggen van de omschreven kubus. We hebben in het achtste vertoog gezien hoe een dodecaëder in een kubus wordt geplaatst, en dat zes ribbes van die dodecaëder middelpunten hebben die gelijk zijn aan de middelpunten van de zijvlakken van de kubus. Daarom weten we dat  $UVWXYZ$

een octaëder is; het is namelijk een octaëder zoals je die in een kubus tekent, volgens de methode van het zesde vertoog.

Nu blijft nog de vraag hoe we Wils' woorden daaraan kunnen koppelen. Als we een van de acht groepjes van drie ribbes nemen, bijvoorbeeld  $QA, JA$  en  $KA$ , dan zien we dat deze drie ribbes aan zes andere ribbes grenzen, namelijk  $IJ, BJ, LK, CK, RQ$  en  $EQ$ .  $BJ, CK$  en  $EQ$  zijn al onderdeel van een ander groepje van drie ribbes. Dan blijven over  $IJ, LK$  en  $RQ$ . Dit zijn de ribbes die Wils bedoelt als hij 'door 't midden der

naeste' schrijft;  $KL$ ,  $RQ$  en  $IJ$  zijn drie 'naeste' ribbes van de drie ribbes die in punt  $A$  samenkomen. Door het midden van  $KL$ ,  $RQ$  en  $IJ$  snijden we nu de ribbes die in  $A$  samenkomen af.

De verhouding van de octaëder ten opzichte van de dodecaëder is makkelijk in te zien aan de hand van de verhoudingen ten opzichte van de omgeschreven kubus, die voor beide figuren hetzelfde is. De octaëder verhoudt zich tot zijn omgeschreven kubus als  $1 : 6$ . De dodecaëder verhoudt zich tot de omgeschreven kubus als  $5 : \sqrt{45} + 5$ . De octaëder verhoudt zich dus tot de dodecaëder als  $\frac{\sqrt{45}+5}{6} : 5 = \sqrt{45} + 5 : 30$ . Precies zoals Wils aangeeft.

*Tot een twintig-grondt.*

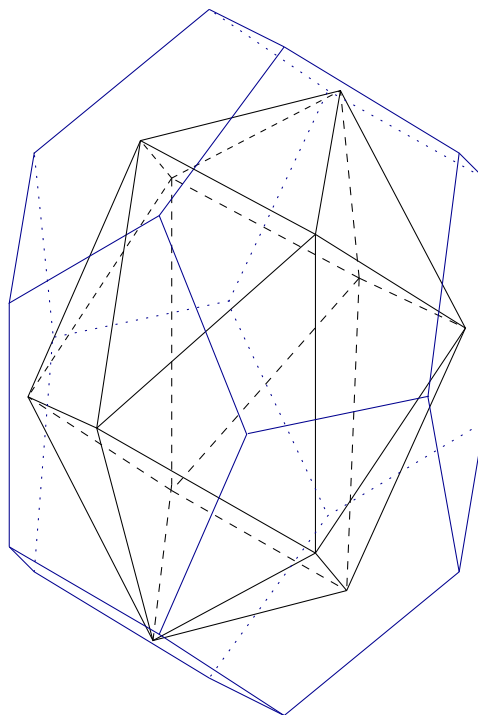
*Achthiende Vertoogh.*

Des twaelf-gronts hoecken af-gesnedē, door drie'r gronden middel-punten; blijft den in-gesloten twintig-grondt: In reden tot den twaelf-grondt, als  $7 + \sqrt{45}$ , tot 30.

**Hertaling:** Snijd ieder hoekpunt van de dodecaëder af door het vlak dat wordt opgespannen door de middelpunten van de drie zijvlakken die in het af te snijden hoekpunt samenkomen. Wat overblijft is een icoesaëder.

De instructie is duidelijk: ieder hoekpunt wordt af-gesneden door drie zijvlaksmiddelpunten. Wils bedoelt natuurlijk de middelpunten van de zijvlakken die samenkomen in het af te snijden hoekpunt. Hij had ook kunnen schrijven 'door drie'r *naeste* gronden middel-punten', maar dat heeft hij eerder in het zesde en het elfde vertoog, waar de in te schrijven figuur ook opgespannen werd door de middelpunten van de zijvlakken, ook niet gedaan. Niet helemaal volledig dus, maar wel consequent.

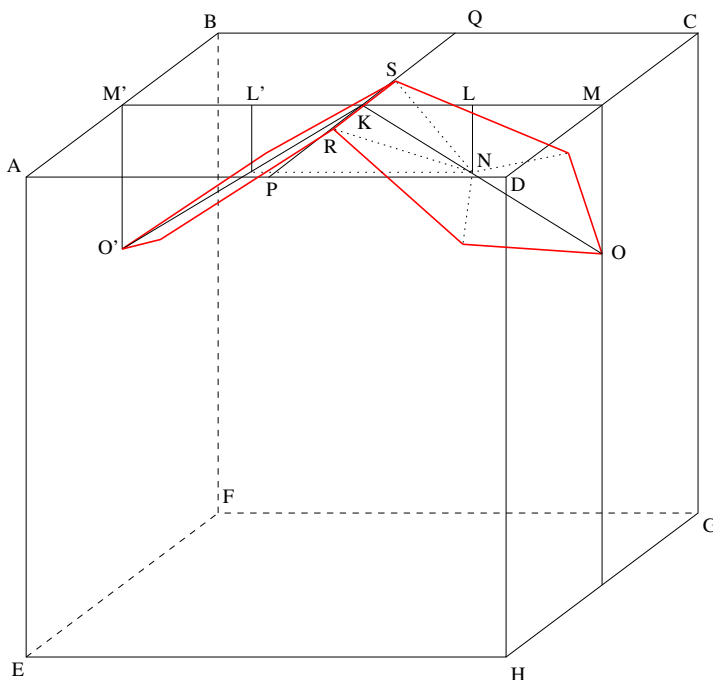
Het afsnijden van ieder hoekpunt van de dodecaëder op die manier levert een figuur als in het plaatje hiernaast. Alle ribbes van de ingeschreven figuur zijn even lang; het zijn immers allemaal verbindingen tussen de middelpunten van aangrenzende vijfhoeken. Je kunt natuurlijk tellen dat er een figuur ontstaat van twintig even grote gelijkzijdige driehoeken, maar dat is ook eenvoudig te berekenen. Iedere vijfhoek heeft vijf aangrenzende vijfhoeken, dus in iedere vijfhoek komen vijf driehoeken samen. Dat zijn dus  $5 \cdot 12 = 60$  driehoeken. Maar iedere driehoek verbindt drie vijfhoeken, dus het totaal aantal driehoeken is  $\frac{60}{3} = 20$ . De ingeschreven figuur is dus een icoesaëder; hij bestaat uit twintig gelijkzijdige driehoeken van gelijke grootte.



In Wils' instructie valt een klein verschil met het zesde en elfde vertoog op. In die vertogen wordt het snijvlak door de middelpunten van de (aangrenzende) zijvlakken eerst nog anders gedefinieerd. In het zesde vertoog staat 'hoecken af-ghesneden, door de drie naeste hoecken, (of door der gronden middel-punten)', en in het elfde: 'hoecken af-ghesneden, door der zijden twee derde-deelen; (of der gronden middel-punten)'. In die twee vertogen is het definiëren van het snijvlak door de middelpunten een andere manier om hetzelfde te zeggen. Maar in dit achttiende vertoog is er maar één manier: het snijvlak door de middelpunten. De reden daarvoor lijkt mij dat het definiëren van het snijvlak aan de hand van andere hoekpunten (zoals in het zesde vertoog) of de aangrenzende ribbes (zoals in het elfde vertoog) nogal ingewikkeld is in dit geval.

We moeten nu nog de afstand tussen twee middelpunten van aangrenzende vijfhoeken berekenen, dat is namelijk de lengte van de ribbe van de ingeschreven icosaeëder. Dat kunnen we mooi doen aan de hand van de constructie van de dodecaëder in een kubus, zoals we die in het achtste vertoog hebben gezien.

We zien in de figuur hier-naast een kubus met daarin twee zijvlakken van de dodecaëder getekend. De afstand  $LL'$  is de afstand tussen de twee middelpunten van de twee zijvlakken. De figuur is symmetrisch in het vlak door  $PQ$  evenwijdig aan  $ABFE$ , dus  $LL' = 2.KL$ . We zien dat driehoek  $KLN$  gelijkvormig is met  $KOM$ , en we concluderen dat  $\frac{KN}{KO} = \frac{KL}{KM} = \frac{2.KL}{2.KM}$  en dus  $2.KL = \frac{2.KM.KN}{KO}$ .



Stel nu dat de lengte van de ribbe van de dodecaëder 1 is. We weten dat de ribbe van de dodecaëder het kleinst evenredig gesneden deel is van de ribbe van zijn omgeschreven kubus. De kubus heeft dan dus ribbe  $\frac{2}{3-\sqrt{5}}$ . Merk op dat dit gelijk is aan  $2.KM$ . Nu we de ribbe van de dodecaëder weten, kunnen we  $KN$  en  $KO$  berekenen.  $\angle KSN = 54^\circ$ , en dus  $SN = NO = \frac{1}{2 \cdot \cos 54^\circ}$  en  $KN = \frac{\sin 54^\circ}{2 \cdot \cos 54^\circ}$ . We weten nu  $KN$ ,  $KO$  en  $KM$ , en kunnen dus  $(2)KL$  berekenen:

$$2.KL = \frac{2.KM.KN}{KO} = \frac{2}{3-\sqrt{5}} \cdot \frac{\sin 54^\circ}{2 \cdot \cos 54^\circ} = \frac{2}{3-\sqrt{5}} \cdot \frac{\sin 54^\circ}{2 \cdot \cos 54^\circ} \cdot \frac{1+\sin 54^\circ}{1+\sin 54^\circ} = \frac{2}{3-\sqrt{5}} \cdot \frac{\sin 54^\circ}{2 \cdot \cos 54^\circ} \cdot \frac{1+\sin 54^\circ}{1+\sin 54^\circ} = \frac{2}{3-\sqrt{5}} \cdot \frac{\sin 54^\circ}{1+\sin 54^\circ} = \frac{1}{10}(5+3\sqrt{5})$$

De laatste stap volgt uit de berekening van de exacte waarde van de sinus;  $\sin 54^\circ = \cos 36^\circ = \sqrt{\frac{3}{8} + \frac{1}{8} \cdot \sqrt{5}}$ . Nu we de lengte van de ribbe van de icoesaëder ( $\frac{1}{10}(5 + 3\sqrt{5})$ ) en de dodecaëder (1) weten, kunnen we beide volumes uitrekenen:

De inhoud van de dodecaëder is  $\frac{1}{4}(15 + 7\sqrt{5})$ .

De inhoud van de icoesaëder is  $\frac{5}{12} \cdot (3 + \sqrt{5}) \cdot (\frac{1}{10} \cdot (5 + 3\sqrt{5}))^3 = \frac{5}{12000} \cdot (3 + \sqrt{5}) \cdot (5 + 3\sqrt{5})^3 = \frac{5}{12000} \cdot (3 + \sqrt{5}) \cdot (800 + 360\sqrt{5}) = \frac{5}{12000} \cdot (4200 + 1880\sqrt{5})$ .

De dodecaëder verhoudt zich tot de icoesaëder als  $\frac{1}{4}(15 + 7\sqrt{5}) : \frac{5}{12000} \cdot (4200 + 1880\sqrt{5})$ .

Vermenigvuldigen aan beide kanten met  $\frac{30}{\frac{1}{4} \cdot (15 + 7\sqrt{5})}$  levert links 30. Rechts komt er dan:

$$\frac{5}{12000} \cdot \frac{120}{15 + 7\sqrt{5}} \cdot (4200 + 1880\sqrt{5}) = \frac{210 + 94\sqrt{5}}{15 + 7\sqrt{5}} = 7 + 3\sqrt{5}.$$

Dat zijn precies de getallen die Wils geeft.

### Vervolgh.

Des twaelf-grondts in-gesloten twintig-grondt; is in-sluytelijcke, sijns in-gesloten kloots.

Dit is vrij eenvoudig te begrijpen. We hebben gezien dat de hoekpunten van de icoesaëder de zijvlaksmiddelpunten van de dodecaëder zijn. We weten dat de ingeschreven bol van de dodecaëder aan al die zijvlaksmiddelpunten raakt. De ingeschreven bol van de dodecaëder heeft dus alle hoekpunten van de icoesaëder op zijn schil liggen. Die bol is dus de omgeschreven bol van de icoesaëder.

### Vierde Lidts vervolgh.

Den twaelf-grondt, en sijn in-gesloten vier grondt, en ses-grondt; sijn in-sluytelijcke, eens selven kloots: En de minst-grondige der ander.

Letterlijk staat hier: de dodecaëder, en zijn ingesloten tetraëder en kubus, zijn vervat in dezelfde bol. Dit is niet vreemd, aangezien de hoekpunten van de kubus en de tetraëder ook hoekpunten van de dodecaëder zijn, zoals we hebben gezien. De afstand van het middelpunt van de dodecaëder naar alle hoekpunten, is dezelfde als van dat middelpunt naar de hoekpunten van de kubus en de tetraëder. De omgeschreven bollen zijn dus identiek. Verder zegt Wils ook hier weer dat ‘de minst-grondige (in-sluytelijcke) der ander’; de tetraëder zit in de kubus, en de kubus zit in de dodecaëder. Dit is evident door de hierboven behandelde constructies.

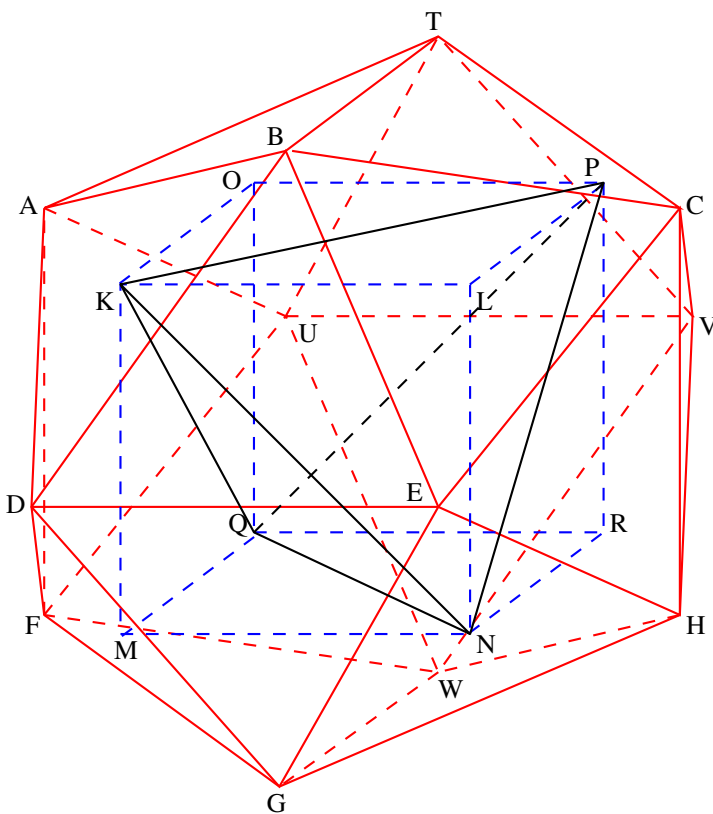
# Snijdingh des Twintig-grondts:

Tot een vier-grondt.

Negentiende Vertoogh.

Vier van des twintig-grondts gronden ordentlick af-gesneden, door de middel-punten der gronden de vorige inde hoeken rakende; blijft den inghesloten Vier-grondt. In reden tot den twintig-grondt, als  $7 + \sqrt{45}$ , tot 135.

**Hertaling:** Kies vier zijvlakken van de icsaëder zodanig dat er geen punt op de icsaëder is dat in twee van deze vier vlakken ligt. Snijd deze vier zijvlakken af door het vlak dat opgespannen wordt door de middelpunten van zijvlakken die met het af te snijden zijvlak alleen een hoekpunt gemeenschappelijk hebben, en geen ribbe gemeenschappelijk hebben met een van de andere drie af te snijden zijvlakken. Wat overblijft is een tetraëder.



Het negentiende vertoogh laat zich het best begrijpen met de kennis uit het tweeëntwintigste en het twintigste vertoogh. We zien al in Wils' tekst dat de tetraëder in de icsaëder drie keer zo klein is als de ingeschreven kubus. Straks zal blijken dat de tetraëder in de icsaëder dezelfde is als de tetraëder in de kubus in de icsaëder.

We zien dat Wils schrijft dat de verhouding van icsaëder tot tetraëder volgens hem  $135 : 7 + \sqrt{45}$  is. We hebben inmiddels vaak genoeg gezien dat de kubus drie keer zo groot is als zijn ingeschreven tetraëder, en we zullen zien dat dat klopt met de verhouding die we straks uitrekenen voor de icsaëder en de kubus. We vermoeden dus dat de tetraëder in de kubus in de icsaëder de tetraëder is die Wils voor ogen heeft.

We zullen nu in het plaatje hiernaast bekijken hoe Wils dat dan bedoeld zou moeten hebben. Als we de tetraëder  $KNPQ$  tekenen in de kubus  $KLMNOPQR$ , zijn de 'vier van des twintig-grondts gronden' die 'ordentlick af-gesneden' moeten worden, de vlakken waar  $L$ ,  $M$ ,  $O$  en  $R$  in



liggen. Het vlak  $BCE$  is bijvoorbeeld een van die vlakken; het wordt afgesneden door de zijvlaksmiddelpunten  $P$ ,  $K$  en  $N$ , die samen een zijvlak van de tetraëder opspannen. Om de middelpunten te bepalen waardoor de snede gemaakt wordt, zegt Wils: ‘de middel-punten der gronden de vorige inde hoecken rakende’. Deze instructie vond ik op het eerste gezicht niet helemaal zuiver, omdat voor ieder zijvlak van de icosaeëder er zes andere zijvlakken zijn die het af te snijden zijvlak alleen in een hoekpunt raken. Voor  $BCE$  zijn dat  $ABT$  en  $ABD$  in hoekpunt  $B$ ,  $DEG$  en  $HEG$  in  $E$  en  $TCV$  en  $CVH$  in  $C$ . Maar alleen de middelpunten van  $ABD$ ,  $TCV$  en  $HEG$  zijn nodig om  $BCE$  af te snijden.

Toch klopt Wils’ aanwijzing, als je ervan uitgaat dat hij met ‘vorige’ de vier zijvlakken bedoelt die afgesneden moeten worden. Als je voor  $BCE$ ,  $ATU$ ,  $DFG$  en  $VWH$  – de vier af te snijden vlakken – alle zijvlakken neemt die die zijvlakken alleen in een hoekpunt raken, blijven alleen  $ABD$ ,  $TCV$ ,  $HEG$  en  $FUW$  over; de middelpunten van deze vier vlakken spannen precies de gewenste tetraëder op.

We weten uit het volgende vertoog dat  $KLMNOPQR$  een kubus is. We zagen in het vijfde vertoog dat  $KNPQ$  een tetraëder is die drie keer zo klein is als  $KLMNOPQR$ . We concluderen dus, met de getallen uit het volgende vertoog als uitgangspunt, dat de tetraëder zich verhoudt tot de icosaeëder als  $7 + \sqrt{45} : 135$ .

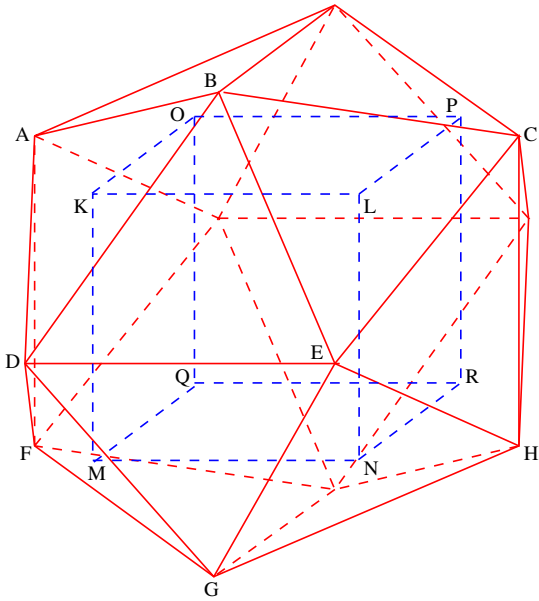
*Tot een ses-grondt.*

Twintighste Vertoogh.

Van des twintig-grondts gronden twee en twee ses-mael ordentlijk afgesneden, door de middel-punten der vier naeste; blijft den in gesloten ses-grondt. In reden tot den twintig-grondt, als  $7 + \sqrt{45}$ , tot 45.

**Hertaling:** Verdeel de zijvlakken van de icosaeëder in zes groepjes van twee zijvlakken die een ribbe gemeenschappelijk hebben, zodanig dat deze groepjes onderling alleen hoekpunten gemeenschappelijk hebben. Snijd elk van deze groepjes van twee zijvlakken af door het vlak dat wordt opgespannen door de middelpunten van de vier zijvlakken die een ribbe met een van de twee zijvlakken in het af te snijden groepje gemeenschappelijk hebben. Wat overblijft is een kubus.

Hoe langer je bezig bent met Wils’ instructies, hoe sneller je ze gaat begrijpen. Deze aanwijzing laat zich makkelijk lezen, zeker met behulp van een plaatje van een icosaeëder. ‘Van des twintig-grondts gronden twee en twee ses-mael [dus (zes) groepjes van twee aan elkaar grenzende driehoeken; neem in het plaatje bijvoorbeeld  $BDE$  en  $DEG$ ] ordentlijk afgesneden, door de middelpunten der vier naeste [ $BDE$  en  $DEG$  hebben vier ‘naeste’ driehoeken die een ribbe gemeenschappelijk hebben;  $ABD$ ,  $BCE$ ,  $EGH$  en  $DFG$ , met middelpunten  $K$ ,  $L$ ,  $N$  en  $M$ ]. Je snijdt dus, kortgezegd,  $BDE$  en  $DEG$  af door het vlak door  $K$ ,  $L$ ,  $M$  en  $N$ .



We weten uit de constructie van een icsaëder in een kubus dat  $CH$  loodrecht staat op  $DE$ . Door de symmetrie van de constructie zien we dat  $KL$  en  $MN$  evenwijdig zijn aan  $DE$ , en  $KM$  en  $LN$  aan  $CH$ . Omdat  $KL$ ,  $LN$ ,  $MN$  en  $KM$  even lang zijn (dat weten we ook door de symmetrie van de icsaëder), is  $KLMN$  een vierkant. Door gelijke argumenten zijn ook de andere zijvlakken van de uitgesneden figuur vierkanten.  $KLMNOPQR$  is dus een kubus. Als we nu behalve de kubus volgens deze voorschriften, ook de dodecaëder inschrijven in de icsaëder, krijgen we de figuur als hiernaast – waarin ten behoeve van het overzicht slechts vier vlakken van de dodecaëder zijn getekend. We zien dat het vlak  $KLMN$  vier hoekpunten van de ingeschreven dodecaëder verbindt zoals

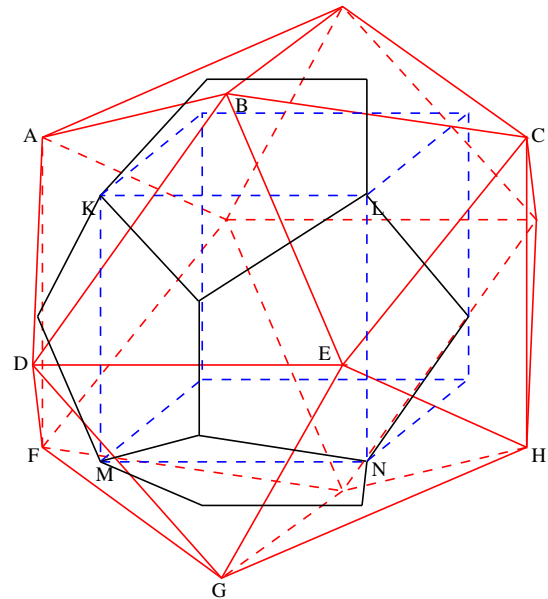
dat gebeurde in het zestiende vertoog. We zien zo dat de kubus in de icsaëder precies de kubus is zoals die in de dodecaëder wordt geschreven.

De dodecaëder verhoudt zich tot zijn ingeschreven kubus als  $5 + \sqrt{5} : 4$ .

De icsaëder verhoudt zich tot zijn ingeschreven dodecaëder als  $90 : 25 + \sqrt{605}$ , zoals te zien valt in het tweeëntwintigste vertoog. We concluderen nu dat de icsaëder zich verhoudt tot zijn ingeschreven kubus als

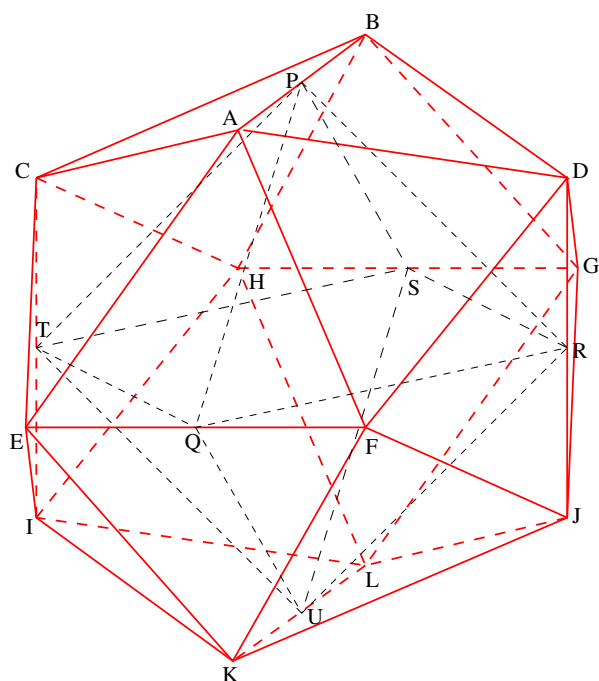
$$\begin{aligned}
 & 90 \cdot (5 + \sqrt{5}) : 4 \cdot (25 + 11\sqrt{5}) \\
 & 450 + 90\sqrt{5} : 100 + 44\sqrt{5} \\
 & 45 : 100 + 44\sqrt{5} \cdot \frac{45}{450 + 90\sqrt{5}} \\
 & 45 : \frac{100 + 44\sqrt{5}}{10 + 2\sqrt{5}} \\
 & 45 : 7 + 3\sqrt{5}
 \end{aligned}$$

Dat is de verhouding die Wils geeft.



Acht van des twintig-gronts gronden ordentlijk af-gesneden, door 't midden der naeste zijden; blijft den in-ghesloten acht-grondt. In reden tot den twintig-grondt, als  $\sqrt{5} + 1$ , tot 10.

**Hertaling:** Kies acht zijvlakken van de icoesaëder zodanig dat elk van deze acht vlakken in ieder hoekpunt een van de andere zeven zijvlakken ontmoet. Snijd deze zijvlakken af door een vlak dat wordt opgespannen door de middens van de drie ribbes die naar het af te snijden zijvlak toe lopen, en niet in een van de andere af te snijden zijvlakken liggen. Wat overblijft is een octaëder.



Deze constructie heeft veel gelijkenissen met het zeventiende vertoog, waar Wils een octaëder in een dodecaëder construeert. De gelijkenis is zo groot, omdat de constructie van de dodecaëder en de icoesaëder in de kubus zo op elkaar lijken.

We weten van de icoesaëder hiernaast dat de ribbes  $AB$ ,  $DJ$ ,  $CI$ ,  $HG$ ,  $EF$  en  $KL$  in de zijvlakken van de omgeschreven kubus liggen, en dat  $P$ ,  $R$ ,  $T$ ,  $S$ ,  $Q$  en  $U$ , de middens van deze ribbes, de zijvlaksmiddelpunten van de kubus om de icoesaëder zijn.  $PQRSTU$  is dus een octaëder.

In het zeventiende vertoog werden acht groepjes van drie ribbes weggesneden om zo de octaëder over te houden. In dit vertoog worden acht vlakken weggesneden. In het plaatje betekent Wils' instructie het volgende: 'Acht van des twintig-gronts gronden ordentlijk af-gesneden [dit zijn

$ADF$ ,  $BDG$ ,  $ACE$ ,  $BCH$ ,  $EIK$ ,  $FJK$ ,  $HIL$  en  $GLJ$ ] door 't midden der naeste zijden [buiten de acht genoemde vlakken zijn er nog zes ribbes over;  $AB$ ,  $DJ$ ,  $CI$ ,  $HG$ ,  $EF$  en  $KL$  – hun middens zijn de zijvlaksmiddelpunten van de kubus]'

De verhouding tussen de kubus en de ingeschreven icoesaëder is  $\sqrt{45} + 3 : 5$ .

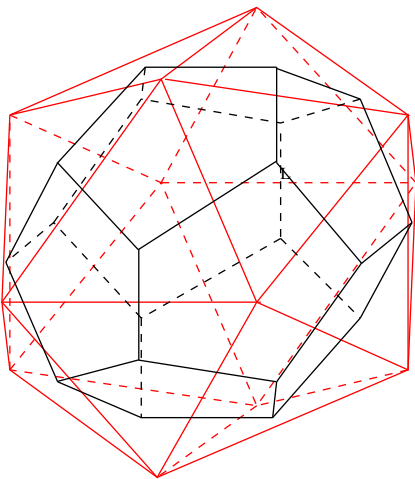
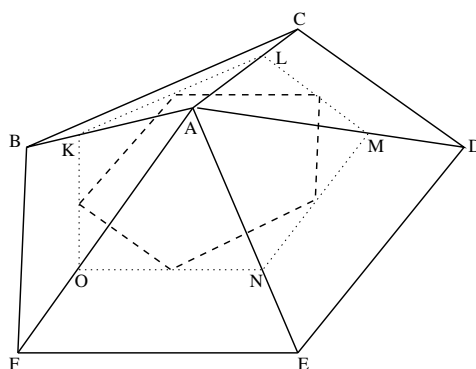
De verhouding tussen de kubus en de ingeschreven octaëder is  $6 : 1$ .

De verhouding tussen de icoesaëder en de ingeschreven octaëder is dus  $30 : \sqrt{45} + 3$ ; dat is  $10 : \sqrt{5} + 1$ .

Des twintig-gronds hoecken af gesneden, door der zijden twee derde deelen; (of der gronden middel-punten;) blijft den in gesloten twaelf-gront. In reden tot den twintig-grondt, als  $25 + \sqrt{605}$ , tot 90.

**Hertaling:** Snijd ieder hoekpunt van de icsaëder af door het vlak dat wordt opgespannen door de punten die de ribbes die van het af te snijden hoekpunt af lopen, verdelen in een verhouding 2 : 1 (of door het vlak dat wordt opgespannen door de middelpunten van de zijvlakken die in het af te snijden hoekpunt samenkomen). Het overblijfsel is een dodecaëder.

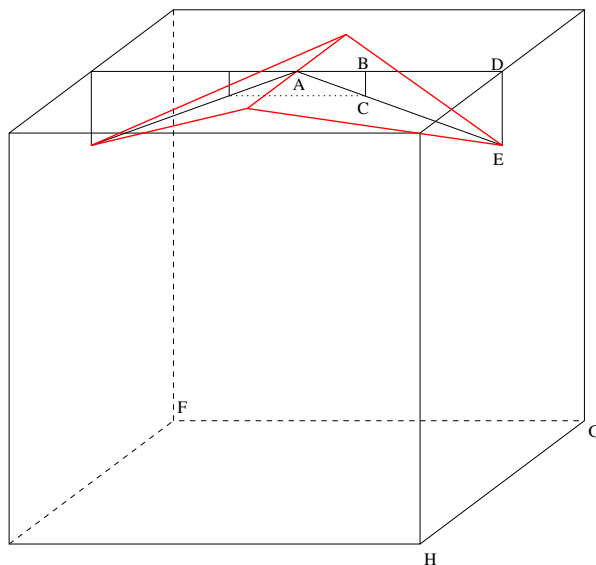
Zoals de octaëder en de kubus elkaars duale zijn, zo zijn ook de icsaëder en de dodecaëder dat. De zijvlaksmiddelpunten van de dodecaëder spannen een icsaëder op, en net zo zijn de zijvlaksmiddelpunten van de icsaëder de hoekpunten van een dodecaëder. We weten uit het achttiende vertoogh dat in een hoekpunt van de icsaëder vijf driehoeken (en dus vijf ribben) samenkomen. Hiernaast is zo'n hoekpunt getekend. Omdat  $A, B, C, D, E$  en  $F$  alle middelpunten van een zijvlak van een dodecaëder zijn, weten we dat  $BCDEF$  een regelmatige vijfhoek is. De dunne stippellijn is het snijvlak waardoor  $A$  wordt afgesneden langs twee derde van de ribbes.



We zien eenvoudig, omdat alle driehoeken in de tekening gelijkzijdig zijn, dat het snijvlak door de middelpunten van de driehoeken in hetzelfde vlak ligt.

Omdat  $K, L, M, N$  en  $O$  allemaal op dezelfde afstand van  $A$  liggen, is  $KLMNO$  gelijkvormig met  $BCDEF$ .  $KLMNO$  is dus een regelmatige vijfhoek. Maar dan is de vijfhoek door de middelpunten van de driehoeken ook regelmatig, omdat de hoekpunten de middens zijn van  $KL, LM, MN, NO$  en  $OK$ . Pakken we nu de complete icsaëder erbij, en verbinden we daarin de middelpunten van de zijvlakken (de figuur die overblijft als je alle snedes hebt uitgevoerd), dan zien we dat er een lichaam van twaalf even grote regelmatige vijfhoeken overblijft; een dodecaëder.

Hoe groot is nu de ribbe van de dodecaëder? Net als in het achttiende vertoog kunnen we voor die berekening de constructie van de icosaeëder in de kubus gebruiken. De afstand tussen de twee zijvlaksmiddelpunten is  $2 \cdot AB$ . We zien, omdat  $BC$  evenwijdig is aan  $DE$ , dat  $\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD}$ . Omdat  $C$  het middelpunt van een gelijkzijdige driehoek is, geldt dat  $\frac{AC}{AE} = \frac{1}{3}$ . We concluderen dus dat  $AB = \frac{AD}{3}$  en dus dat de ribbe van de dodecaëder een derde is van de ribbe van de kubus. Als nu de ribbe van de icosaeëder 1 is, is de ribbe van de kubus  $\frac{2}{-1+\sqrt{5}}$ . De ribbe van de dodecaëder in de icosaeëder is dus  $\frac{2}{-3+3\sqrt{5}}$ . De inhoud van een icosaeëder met ribbe 1 is  $\frac{5}{12} \cdot (3 + \sqrt{5})$ .



De inhoud van een dodecaëder met ribbe  $\frac{2}{-3+3\sqrt{5}}$  is  $\frac{1}{4} \cdot (15 + 7\sqrt{5}) \cdot \left(\frac{2}{-3+3\sqrt{5}}\right)^3 =$

$$\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot (15 + 7\sqrt{5}) \cdot \left(\frac{1}{-1 + \sqrt{5}}\right)^3 =$$

$$\frac{2}{27} \cdot (15 + 7\sqrt{5}) \cdot \left(\frac{1}{-16 + 8\sqrt{5}}\right) = \frac{15 + 7\sqrt{5}}{-216 + 108\sqrt{5}}$$

De verhouding tussen icosaeëder en ingeschreven dodecaëder is dus:

$$\frac{5}{12} \cdot (3 + \sqrt{5}) : \frac{15 + 7\sqrt{5}}{-216 + 108\sqrt{5}}$$

$$\frac{5}{12} \cdot (3 + \sqrt{5}) : \frac{15 + 7\sqrt{5}}{-216 + 108\sqrt{5}}$$

$$90 : 90 \cdot \frac{12}{5(3 + \sqrt{5})} \cdot \frac{15 + 7\sqrt{5}}{-216 + 108\sqrt{5}}$$

$$90 : 216 \cdot \frac{15 + 7\sqrt{5}}{-108 + 108\sqrt{5}}$$

$$90 : 2 \cdot \frac{15 + 7\sqrt{5}}{-1 + \sqrt{5}}$$

$$90 : \frac{30 + 14\sqrt{5}}{-1 + \sqrt{5}}$$

Omdat  $(-1 + \sqrt{5}) \cdot (25 + 11\sqrt{5}) = 30 + 14\sqrt{5}$ , is de verhouding tussen icosaeëder en dodecaëder dus  $90 : 25 + 11\sqrt{5}$ . (Merk op dat  $11\sqrt{5} = \sqrt{605}$ .) Wils' getallen kloppen dus.

### Vijfde Lidts vervolgh.

Des twintig-grondts in-gesloten vier-grond, ses-grond, en twaelf-grondt; zijn in-sluytelijcke, sijns in ghesloten kloots: En de minst-grondige, der ander.

De tetraëder, kubus en dodecaëder in de icsaëder worden omgeschreven door een en dezelfde bol, namelijk de ingeschreven bol van de icsaëder. Dit volgt eigenlijk rechtstreeks uit de bovenstaande vertogen. We hebben gezien dat de zijvlaksmiddelpunten van de icsaëder de hoekpunten van de dodecaëder zijn. Deze zijvlaksmiddelpunten zijn precies de punten waar de ingeschreven bol raakt aan de icsaëder. De schil van de ingeschreven bol heeft dus met de dodecaëder uitsluitend de hoekpunten van de dodecaëder gemeen. Daarom is deze bol de omgeschreven bol van de dodecaëder.

De hoekpunten van de tetraëder en de kubus zijn ook hoekpunten van de dodecaëder, en met dezelfde argumentatie als in het vervolg van het vierde 'lidt', zien we dat de omgeschreven bol van de dodecaëder ook de omgeschreven bol is van de tetraëder en de kubus. Verder voegt Wils weer toe dat de tetraëder in de kubus zit, en die kubus (met de tetraëder erin dus) in de dodecaëder.

Nota bene: Wils noemt hier, net als in het vorige vervolg, niet de octaëder. Deze neemt een soort tussenpositie in. We hebben in de constructie van het eenentwintigste vertoog gezien dat de hoekpunten van de octaëder samenvallen met de middelpunten van zes ribben van de icsaëder. De afstand van het midden van de icsaëder tot de middens van de zijvlakken is kleiner dan de afstand tot de middens van de ribben. Die laatste afstand is weer kleiner dan de afstand van het middelpunt tot de hoekpunten. De bol om de octaëder is dus groter dan de ingeschreven bol, en kleiner dan de omgeschreven bol.

## 4 Wils' veelvlakkenhoofdstuk in historische context

In het vorige hoofdstuk zijn negen pagina's uit Wils' *Wiskonstige Wercken* uitgebreid besproken. Dit hoofdstuk gaat in op hoe het probleem van de inschrijvingen van de regelmatige veelvlakken voorkomt in het vijftiende boek van diverse Euclidesedities (paragraaf 4.1), geeft een vergelijking tussen Wils' bespreking van het probleem en de manier waarop het in de Euclidesedities aan bod komt (4.2) en doet ten slotte een poging de vraag te beantwoorden wat de bronnen van Wils kunnen zijn geweest (4.3).

### 4.1 Geschiedenis van het vijftiende boek van *de Elementen*

Zoals in het derde hoofdstuk is aangestipt, is het probleem van de inschrijvingen dat Wils behandelt terug te vinden in het apocriefe vijftiende boek van Euclides *Elementen*. Euclides schreef zijn *Elementen*, bestaande uit dertien boeken, in de derde eeuw voor Christus.<sup>32</sup> Het veertiende en vijftiende boek zijn pas in een later stadium toegevoegd aan de oorspronkelijke dertien. Samen met deze twee extra boeken is het werk van Euclides door de eeuwen heen talloze malen overgeschreven en vanaf 1482 ook gedrukt. Thomas Heath, die de meest gangbare Engelse vertaling met commentaar van *de Elementen* bezorgde, is in zijn commentaar erg duidelijk over het vijftiende boek: 'Het tweede boek dat aan de oorspronkelijke dertien is toegevoegd, borduurt ook voort op de discussie over regelmatige veelvlakken, maar is wiskundig een stuk minder dan boek 14. Wat erin staat is veel minder van belang, en de uitvoering laat veel te wensen over.'<sup>33</sup>

Heath baseert zijn vertalingen en commentaar op de originele Griekse tekst van *de Elementen* van Euclides zoals die is bezorgd door Heiberg. Heath legt in zijn *Greek Mathematics* uit dat er door de eeuwen heen diverse uitgaves zijn geweest van *de Elementen*, maar dat Heiberg tussen 1883 en 1888 een originele Griekse tekst heeft gepubliceerd, gebaseerd op de 'juiste' keuzes van de diverse manuscripten die voor handen waren.<sup>34</sup> (Dat wil zeggen: keuzes die door de meeste historici worden geaccepteerd. Er waren ook mensen die het oneens waren met Heiberg; zie bijvoorbeeld Knorr [2001].)

Het vijftiende boek van Heibergs editie bestaat uit drie delen. Deel I geeft vijf inschrijvingen van regelmatige veelvlakken in elkaar. Deel II gaat erover hoe je van ieder regelmatig veelvlak uitrekenet hoeveel ribben en hoekpunten het heeft. Deel III geeft een instructie voor het berekenen van de hoeken tussen de zijvlakken van de veelvlakken.

Wie precies de schrijver is van het veertiende en vijftiende boek blijkt lastig te zeggen. Het veertiende boek wordt in zijn geheel toegeschreven aan Hypsicles, die vermoedelijk zo'n honderdvijftig jaar na Euclides leefde. Heath is veel minder uitgesproken over de herkomst van het vijftiende boek; hij zegt niets over de mogelijke auteur van het deel over de inschrijvingen van de regelmatige veelvlakken. Wel blijkt dat deel III van het vijftiende boek geschreven is door een leerling van Isidorus van Milete, en dan zitten we inmiddels in de zesde eeuw na Christus.

---

<sup>32</sup>Een veel preciezer datering is niet te geven; over Euclides' leven is nauwelijks iets bekend.

<sup>33</sup>Heath [1908] Vol III. p. 519. Vertaald uit het Engels.

<sup>34</sup>Heath [1921] Vol. I, p. 360-361.

John Murdoch schrijft in zijn artikel ‘Euclid: Transmission of the Elements’ dat het buitengewoon moeilijk is om de geschiedenis van Euclides’ *Elementen* te schetsen tegen de achtergrond van de wiskunde en de wetenschap in het algemeen.<sup>35</sup> Maar ondanks de door hemzelf opgemerkte problemen geeft Murdoch een helder overzicht. Hij doorloopt daarbij de hele geschiedenis van 300 voor Christus tot nu, maar ik beperk mij hier tot zijn laatste hoofdstuk, ‘The Renaissance and Modern Euclid’. Dit doe ik omdat het mij onwaarschijnlijk lijkt dat Pieter Wils een Arabische editie van *de Elementen* bezat, of over een manuscript beschikte. Bovendien lijkt mij de kans dat hij het Arabisch machtig was niet bijzonder groot.

Vanaf het moment dat in 1482 de eerste gedrukte versie van *de Elementen* verscheen, is het drukken van dit boek niet meer opgehouden. Omdat de inschrijvingen die Wils behandelt opgenomen zijn in het vijftiende boek van *de Elementen*, is het interessant te kijken hoe dit vijftiende boek in een aantal belangrijke *Elementen*-edities opgenomen is. (Het is onmogelijk om *alle* gedrukte versies te bekijken die tussen 1482 en 1648, het moment dat Wils’ *Wiskonstighe Wercken* uitkwam, zijn verschenen.) Murdoch noemt in zijn artikel uit deze periode de vier belangrijkste edities van Euclides’ boek:

	Jaartal	Auteur	Taal
①	1482	Campanus van Novarra	Latijn
②	1505	Bartolomeo Zamberti	Latijn
③	1533	Simon Grynaeus	Grieks
④	1572	Federico Commandino	Latijn

Naast deze vier noemt Murdoch nog twee belangrijke edities, die ik hieronder met ①a en ①b heb geïndiceerd. Daaraan voeg ik zelf een derde editie (①c) toe, namelijk de eerste Nederlandse editie van Vooght. Die stamt weliswaar uit 1695, dus na Wils, maar is interessant omdat Vooght daarin verwijst naar ① en ①a, en omdat er helemaal geen onderzoek naar die eerste Nederlandse editie is gedaan.

	Jaartal	Auteur	Taal
①a	1566	Franciscus Flussatus Candalla	Latijn
①b	1574	Christopher Clavius	Latijn
①c	1695	Claas Jansz. Vooght	Nederlands

Allezeven hierboven genoemde boeken bevatten het zogenoemde vijftiende boek over de inschrijvingen van de regelmatige veelvlakken. Maar niet alle edities bevatten alle mogelijke inschrijvingen, zoals dit bij Wils wel het geval is. In de tabel op de volgende pagina is te zien in welke editie welke inschrijvingen worden behandeld. In de eerste kolom zijn de 22 inschrijvingen verkort weergegeven; 6 in 4 moet gelezen worden als de inschrijving van een regelmatig zesvlak (kubus) in een regelmatig viervlak (tetraëder), 8 in 4 als de octaëder in de tetraëder, et cetera. Op de eerste rij zijn de zeven belangrijke edities weergegeven, met daaraan toegevoegd het boek van Wils. De cijfers in de tabel corresponderen met het volgnummer van de inschrijving in de desbetreffende editie. Voorbeeld: in (het vijftiende boek van) de editie van Candalla, ①a, wordt de inschrijving van de icosaeëder in de octaëder (20 in 8) als 16e behandeld.

---

<sup>35</sup>Murdoch [1971] p. 437.



	①	②	③	④	a	b	c	Wils
6 in 4					18	18	18	1
8 in 4	2	2	2	2	2	2	2	2
12 in 4					20	20	20	3
20 in 4					19	19	19	4
4 in 6	1	1	1	1	1	1	1	5
8 in 6	3	3	3	3	3	3	3	6
grootste 8 in 6								7
12 in 6					13	13	13	8
20 in 6					14	14	14	9
4 in 8	5	5			6	6	6	10
6 in 8	4	4	4	4	4	4	4	11
grootste 6 in 8								12
12 in 8					17	17	17	13
20 in 8					16	16	16	14
4 in 12	10	10			10	10	10	15
6 in 12	8	8			8	8	8	16
8 in 12	9	9			9	9	9	17
20 in 12	7	7			7	7	7	18
4 in 20	12	12			12	12	12	19
6 in 20	11	11			11	11	11	20
8 in 20					15	15	15	21
12 in 20	6	6	5	5	5	5	5	22

In de tabel valt een aantal dingen op:

1. Wat volgorde en inhoud betreft zijn edities ① en ② aan elkaar gelijk, net als ③ en ④. Ook a, b en c verschillen niet van elkaar.
2. ③ en ④ zijn later verschenen dan ① en ②, maar behandelen toch minder inschrijvingen.
3. In ① en ② valt de inschrijving van de dodecaëder in de icosaeëder (12 in 20) buiten de eerste vijf, in tegenstelling tot de edities ③–c.
4. De volgorde die Wils hanteert wijkt volledig af van wat in Euclidesedities gebruikelijk was.
5. Wils is de enige die de inschrijving van de grootste octaëder in de kubus en de grootste kubus in de octaëder behandelt.

Punt 4 wordt behandeld in paragraaf 4.2, en op punt 5 kom ik in het volgende hoofdstuk (5) terug. Aan de hand van de punten 1–3 zal ik nu eerst een vergelijking maken tussen de edities. Die vergelijking is allesbehalve uitputtend – het zou een aparte studie waard zijn om deze boeken onder de loep te nemen en met elkaar te vergelijken. Mij ontbreekt de tijd om dat volledig te doen, en bovendien is mijn kennis van vooral het Grieks te

ver weggezakt. Een dergelijk onderzoek zou eveneens kennis van het Arabisch vereisen, omdat dan ook gekeken kan worden naar de herkomst van de kennis die de schrijvers van de zeven bovengenoemde edities hadden.

We zien in de tabel dat in ① en ② 12 dezelfde inschrijvingen worden behandeld. Dat deze twaalf precies identiek zijn wordt duidelijk zodra je de twee versies naast elkaar legt: Zamberti citeert in ② letterlijk de tekst van Campanus (①). Zamberti vermeldt bij deze inschrijvingen ook steevast ‘Euclid. ex Camp.’, waarmee hij zijn bron aangeeft. De spelling verschilt hier en daar, maar de woorden zijn hetzelfde. De plaatjes zijn ook verschillend, maar de letters in de plaatjes komen overeen (zodat ook de tekst letterlijk overgenomen kon worden). Na deze twaalf inschrijvingen begint Zamberti echter opnieuw, en geeft hij alleen de vijf inschrijvingen die ook in ③ en ④ staan. Dit zijn precies de vijf inschrijvingen die ook in Deel I van de Heibergeditie staan. Achter deze vijf inschrijvingen volgen de delen II en III zoals die in de editie van Heiberg voorkomen. Eigenlijk bevat Zamberti’s editie dus twee versies van het vijftiende boek. Als je die tweede versie in Zamberti met ③ en ④ vergelijkt, zie je dat de tekst over hetzelfde gaat. Er worden andere woorden gebruikt, maar het lijkt erop dat dit vooral een vertaalverschil is. De delen II en III van het vijftiende boek komen ook voor in ④, de editie van Commandino.

De eerste editie waar alle twintig inschrijvingen in behandeld worden is die van Franciscus Flussatus Candalla. Zijn editie uit 1566 is prachtig vormgegeven. De opmaak is overzichtelijk en de plaatjes zijn van een (in andere edities) ongeëvenaard niveau. Of hij de acht inschrijvingen die in ① en ② nog ontbraken, zelf heeft bedacht is niet helemaal duidelijk. Murdoch schrijft dat Candalla (zoals ik hem kortheidshalve zal noemen) ‘niet teruggreep op de Griekse tekst, maar op Zamberti en Campanus. En waar hij iets schrijft dat niet van deze twee afkomstig is, lijkt het er vaak op alsof het niet Candalla’s eigen ideeën waren.’<sup>36</sup> Maar Peter R. Cromwell schrijft echter dat Candalla ‘eigen werk aan de canon toevoegde: verhandelingen die laten zien hoe de regelmatige veelvlakken in elkaar geschreven kunnen worden.’<sup>37</sup> Het zou goed kunnen dat Cromwell het daar heeft over de boeken zestien, zeventien en achttien die Candalla ook nog schreef (waarin hij ook inschrijvingen behandelt, maar dan van niet-regelmatige veelvlakken), en dat hij niet doelt op de 8 nog ontbrekende inschrijvingen.

Maar zelf schrijft Candalla er ook iets over. Nadat hij de twaalfde inschrijving in zijn vijftiende boek heeft behandeld, schrijft hij: ‘Hactenus quae partim a maioribus ex decimoquinto Elementorum recepimus, subsequuntur autem quae relicta erant perscienda, a Flussate peracta.’<sup>38</sup> Dit betekent zoveel als: Wat er tot hier is behandeld komt grotendeels uit het vijftiende boek van de Elementen. Wat daar nu op volgt zijn de dingen die nog overgebleven waren om te weten te komen, door Flussatus gedaan. Candalla claimt dus zelf dat deze laatste acht inschrijvingen van hem zijn.

Die lezing wordt onderschreven door wat we aantreffen in ©. In die editie uit 1695 zegt Vooght na zijn vijfde vertoog: ‘Tot dus verre toe heeft of Euclides, of zijn navolger Hypsicles dit boek vervolgt, en hier mede gemaakt een eynde der beginselen der Meetkonst, maar nadien Campanus hier noch acht voorstellen bygeklampt heeft, soo sullenwe

<sup>36</sup>Murdoch [1971] p. 449. Vertaald uit het Engels.

<sup>37</sup>Cromwell [1997] p. 140. Vertaald uit het Engels.

<sup>38</sup>Euclides [1578] p. 457.

deselve hier in rang byvoegen.<sup>39</sup> Vooght geeft dus aan dat het vijftiende boek na het vijfde vertoog blijkbaar ‘officieel’ ophoudt, maar dat hij voor de volgende reeks inschrijvingen refereert aan de eerste gedrukte Elementeneditie van Campanus. Na de twaalfde inschrijving, 5 + 7, schrijft Vooght: ‘Nadien Campanus hier noch een voorstel aanhangt, om in yder geschikt lichaam een bol te beschrijven, maar vermids Franciscus Candalla, om dese bereydzelen in alle deelen aan te wijzen, hier noch acht voorstellen byvoegt, soo sullenwe deselve hier in vervolg aanknoopen, en dan ’t laatste voorstel van Campano daar aanhangen, of datse tot een algemeene beschrijving gedijt.’<sup>40</sup>

Vooght had dus een vastomlijnd idee over wat er oorspronkelijk tot het vijftiende boek behoorde. Verder refereert hij aan de eerste gedrukte versie waar twaalf inschrijvingen in voorkomen (①) en vervolgens aan de eerste druk waar ze alletwintig in staan (Ⓐ). Vooght was er kennelijk ook van overtuigd dat Candalla de eerste was die alle inschrijvingen behandelde.

Deze Candalla is een vrij onbekende figuur. Hoewel hij dus de eerste was die alle inschrijvingen behandelde, nog drie boeken aan het geheel toevoegde en door Murdoch als een van de belangrijkste Euclidesbewerkers van zijn tijd wordt genoemd, heeft hij geen lemma gekregen in de *Dictionary of Scientific Biography*. De reden daarvoor lijkt me dat hij buiten de twee drukken van zijn *Elementen*-editie niets wiskundigs heeft gepubliceerd.

Toch is Fransiscus Flussatus Candalla, zoals zijn Latijnse naam luidt, een interessante man. Hij werd geboren als Francois de Foix de Candale, als telg van een adellijke familie. Teissier geeft een korte biografische schets van hem in zijn *Les Eloges des Hommes Scavans*<sup>41</sup>, en Moritz Cantor noemt hem zijdelings in zijn *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*.<sup>42</sup> Cantor verwijst echter voor meer informatie naar Kästners *Geschichte der Mathematik*<sup>43</sup>, waarin Candalla 12 pagina’s krijgt toebedeeld in het hoofdstuk ‘Ausgaben von Euclids Elementen und geometrische Lehrbücher’.<sup>44</sup>

Uit de diverse bronnen blijkt dat Candalla om met name twee verdiensten een groot wetenschapper is. Aan de ene kant zijn Latijnse editie met commentaar op *de Elementen*, en aan de andere kant zijn Latijns/Griekse en later zelfs Franse editie van *Pimander*, een boekwerk van Hermetische geschriften. Dat wat er over Candalla is gepubliceerd, is met name geënt op zijn verdiensten voor het hermetische gedachtegoed.

Het is om die reden dat ik niet te diep inga op Candalla. Ik denk dat zijn wiskundige publicaties dat zeker zouden verdienen, gezien zijn buitengewoon fraaie edities van *De Elementen*, die voor Kepler bijvoorbeeld de interesse in veelvlakken (verder) hebben aangewakkerd.<sup>45</sup> Dat zou echter een flink onderzoek van zijn twee edities vragen, en dat valt buiten het kader van deze scriptie.

De meest uitgebreide bron, volgens Westman & McGuire, over Candalla’s leven en werk

---

<sup>39</sup>Euclides [1695] p. 609.

<sup>40</sup>Euclides [1695] p. 616.

<sup>41</sup>Teissier [1696] Deel II, p. 204-206.

<sup>42</sup>Cantor [1907] Deel II, p. 554.

<sup>43</sup>Kästner [1796]

<sup>44</sup>Kästner [1796] Deel I, p. 313-324.

<sup>45</sup>Westman & McGuire [1977] p. 42.

is een ongepubliceerd (en door mij ook niet ingezien<sup>46</sup>) promotieonderzoek van Jeanne Harrie, *François Foix de Candalle and the Hermetic Tradition in Sixteenth Century France*. Westman & McGuire zeggen dat Harrie ‘niet alleen Foix de Candales plaats in de hermetische traditie beschrijft, maar ook overtuigend zijn belang voor de culturele bloei in het Bordeaux van de late zestiende eeuw laat zien.’<sup>47</sup>

Hoewel Harrie Candalla met name in een hermetische context plaatst, zegt ze ook iets over Candalla’s drijfveer om wiskunde te doen. Candalla was een hermetist, omdat hij vond dat in het hermetisme de grond van zijn katholieke geloof lag. (Later werd hij bisschop van Aire, in Frankrijk.) Harrie schrijft dat Candalla vanuit dit hermetisme geloofde dat ‘wiskunde een belangrijke rol speelde in het verkrijgen van religieuze waarheid en geestelijke puurheid’.<sup>48</sup>

Zover ik kan nagaan is Kästner de enige historicus die echt wiskundig-inhoudelijk naar Candalla’s boek heeft gekeken. Het interessante is dat Kästner Candalla’s editie vergelijkt met andere *Elementen*-uitgaves uit die tijd. Kästner begint met de beschrijving van het boek, en de bespreking van de voorwoorden, waaruit hij optekent dat Candalla zich ten doel stelde om een evenwichtige *Elementen*-editie te maken, omdat hij de edities die er al waren soms te summier en soms te overvloedig vond.<sup>49</sup>

Na deze beschrijvingen haalt Kästner vooral een aantal verschillen aan met andere edities. Hij doet dat nauwgezet en in een detail dat doet vermoeden dat hij die andere edities ook echt gelezen had. Hij loopt daarbij op volgorde door de boeken heen, en maakt opmerkingen over onder andere vertaalkwesties en wiskundige ongelijkheden.

Als het gaat over de eigen inbreng van Candalla, zegt Kästner over boek 16 t/m 18: ‘Zeker is dat de drie boeken die na de eerste vijftien komen [...] van Candalla zijn.’ Helaas zegt hij niets over het vijftiende boek, en of de inschrijvingen daarin deels van Candalla zijn. Wel vertelt hij nog het verhaal van de wiskundeleerstoel die Candalla ingesteld heeft in Bordeaux. ‘Van de kandidaten voor deze leerstoel moest de waardigste worden uitgekozen, door daartoe bevoegde experts. Als proeve van bekwaamheid moest door de aspirant-bekleders op de ene dag een voordracht met eigen bevindingen gehouden worden, die niet over het negende boek van de *Elementen* mocht gaan, en de volgende dag een andere voordracht die over regelmatige veelvlakken moest gaan, en met louter Euclidische handvatten moest kunnen worden begrepen.’<sup>50</sup> Van deze door hem ingestelde leerstoel wordt ook melding gemaakt in Teissier [1696].

## 4.2 Wils’ tekst in vergelijking met boek XV van de *Elementen*

Nu zal ik wat Wils opschreef vergelijken met hoe de problemen in het vijftiende boek worden besproken. Dat doe ik aan de hand van de eerste volledige Nederlandse editie met bewijzen van Vooght, die zoals gezegd in 1695 verscheen. Ik citeer nu uit

---

<sup>46</sup>De auteur van dit proefschrift liet mij per mail weten dat ze niet wist of ik veel aan haar dissertatie zou hebben. ‘Ik was voornamelijk geïnteresseerd in zijn wiskundige werk als illustratie van zijn interesse in de neoplatonische filosofie, en in het bijzonder het hermetische gedachtegoed.’

<sup>47</sup>Westman & McGuire [1977] p. 84.

<sup>48</sup>Harrie [1978] p. 503.

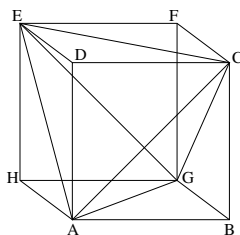
<sup>49</sup>Kästner [1796] p. 315.

<sup>50</sup>Kästner [1796] p. 323. Vertaald uit het Duits.

die 1695-editie het equivalent van Wils' vijfde verhoog – de constructie van de tetraëder in de kubus.<sup>51</sup> Doel is om uit dit citaat te laten zien hoezeer Wils' benadering van het probleem van de regelmatige veelvlakken afwijkt van de gangbare manier van opschrijven in die tijd.

't Eerste Voorstel.

In een gegeven teerlink ABCDEFGH een viergrond ACEG te beschrijven.



't Berydzet. Uyt d'eene hoek E zijn in de grondplaten deselve be-  
sluytende gethoogen de hoekstreepen AE, EC en EG, uyt welkers  
uytersten wederom de hoekstreepen AC, AG en GC gethoogen,  
soo sal 't ligchaam ACEG een viergrond zijn.

't Bewijs. Om de rechten hoeken en gelijkheyt der zijden der vier-  
kanten, zijn de hoekstreepen 't tweevoud der zijden der vierkan-  
ten vermoogende. En vervolgens, om de gelijkheyt haarer vier-  
kanten, malkanderen gelijk. Daarom zijn ook de vier driehoeken

ACE, ACG, AEG gelijkzijdige, en malkanderen gelijk. Daarom is 't lichaam ACEG een viergrond, die in den teerlink ABCDEFGH beschreeven is. Dat te doen was.<sup>52</sup>

In bovenstaand citaat zien we de geijkte weergave van een vraagstuk in die tijd, precies volgens het stramen van Euclides. Eerst het vraagstuk, dan de constructie die het vraagstuk oplost, en tot slot het bewijs van de juistheid van die constructie. Dit alles meestal voorzien van een verhelderend plaatje. Ter herinnering: Wils beschrijft de inschrijving van de tetraëder in kubus als volgt:

Des ses-grondts hoecken over ander af-ghesneden, door de drie naeste hoecken; blijft den in-gesloten vier-gront: In reden tot den ses-grondt, als 1 tot 3.<sup>53</sup>

Uiterlijk is daar gelijk een groot verschil zichtbaar; Wils geeft alleen het vraagstuk en de constructie, zonder plaatje. Maar ook inhoudelijk is er een groot verschil. In alle genoemde Euclidesbewerkingen wordt bij dit soort vraagstukken een tekeninstructie gegeven. Hierboven lezen we in de vertaling van Vooght dat uit hoekpunt *E* drie lijnen getrokken moeten worden (*AE*, *EC* en *EG*) waarna nog drie lijnen moeten worden getekend (*AC*, *AG* en *GC*) om zo de tetraëder te verkrijgen. Wils daarentegen geeft geen *teken-*, maar een *snij-*instructie. Vooght laat zien we hoe we een tetraëder in een kubus tekenen, en Wils schrijft voor hoe je een tetraëder uit een kubus snijdt. Dit verschil tussen tekenen en snijden zien we bij alle inschrijvingen.

Wat verder opvalt in een vergelijking tussen Wils en de edities van het vijftiende boek van *de Elementen*, is dat Wils een verhouding geeft tussen het veelvlak en zijn ingeschrevene. Die verhoudingen worden in geen enkele uitgave van het vijftiende boek gegeven. Die

<sup>51</sup>Deze transcriptie laat zien dat aan de eerste volledige Nederlandse editie nog wel een en ander mankerde; zo wordt een van de vier driehoeken van de tetraëder vergeten in het bewijs. Verder zijn ook de figuren van een belabberd niveau. (De figuur die hier is weergegeven heb ik zelf nagetekend.)

<sup>52</sup>Euclides [1695] p. 603.

<sup>53</sup>Wils [1654] p. 75.

verhoudingen komen wel voor in het zestiende boek, dat door Candalla is geschreven, en door Clavius en Vooght ook in hun edities is opgenomen. Het motto van het zestiende (en laatste) boek in Vooghts editie is:

Nu komt Candalla laatst, en weet de ware reden  
Der ingevoegde lichamen net alhier t'ontleden  
In een-en-dertig Voorstels loopt dit Werk ten end:  
Door zesthien Boeks is nu de Meetkonsts grond bekend.<sup>54</sup>

Wat zou Wils gewild hebben met zijn hoofdstuk over regelmatige veelvlakken? Het is een vraag die we niet met zekerheid kunnen beantwoorden. Het antwoord wordt natuurlijk bemoeilijkt door het feit dat zijn boek na zijn dood is samengesteld uit zijn aantekeningen, en niet door Wils zelf is geordend. Ik denk niet dat Wils deze passage schreef als onderdeel van een (nog te verschijnen) leerboek. Als hij dat had gewild, had hij wel voor het gebruikelijke euclidische stramien gekozen, dat hij wel hanteert in de eerste zestig pagina's van zijn boek als hij (passer)problemen uit de vlakke meetkunde bespreekt.

Toch is het ook niet een snel neergekrabbelde samenvatting van het vijftiende en zestiende boek. Daarvoor is het te zorgvuldig opgebouwd en geformuleerd. Dan was hij niet eerst begonnen met de definities van veelvlakken en had hij niet de instructies over de snijproblemen (eerste 'begheerte') gegeven. Alles wijst erop dat het opgesteld is om te worden gelezen door iemand anders. Wellicht dat Wils beknopt is geweest in zijn manier van opschrijven omdat hij moest schipperen met de ruimte in een publicatie, maar dat kan uiteraard niet dit werk geweest zijn, aangezien hij met het drukken daarvan zelf niets te maken had.

Een argument om te betogen dat dit deel niet voor wiskundige doeleinden werd opgesteld, ligt in de ordening van de vertogen. Zoals in de tabel in paragraaf 4.1 te zien is, wordt in alle tot dan toe verschenen edities van het vijftiende boek begonnen met de vijf vertogen die ook in de Heibergeditie staan. Eerst de tetraëder in de kubus, dan de octaëder in de tetraëder, enzovoorts. Die ordening is te typeren als 'van makkelijk naar moeilijk'. Ook is die volgorde, later uitgebreid door Campanus en Candalla, zodanig, dat je bij het behandelen van een vraagstuk gebruik kunt maken van al eerder bewezen resultaten.

Wils heeft systematisch geordend, niet wiskundig van makkelijk naar moeilijk. We hebben dat ook gezien; in de behandeling van zijn vertogen (hoofdstuk 3) heb ik hier en daar vooruitgewezen, om zo niet te veel dubbel werk te doen. Wils' ordening is geheel gericht op het fabriceren van het ene veelvlak uit het andere. Een bondig overzicht.

Ik ga er hierbij van uit dat Kinckhuysen, toen hij de redactie over dit boek voerde, alleen heeft samengevoegd, en niet zelf allerlei dingen heeft veranderd of toegevoegd. Kinckhuysen merkt in zijn voorwoord ook op dat hij uit Wils' (wiskundige) nalatenschap enkele stukken heeft uitgekozen, '[a]lle welke meestendeel al voor langhe van hem zijn gheschreven gheweest, alzo sij andere en later *Wis-konstige* Verhandelinghen en Schriften (door dien hem (als gezeydt) vermidts de over-gekomen doodt, tijdt ghebrack)

---

<sup>54</sup>Euclides [1695] p. 641.

meest niet vol en waren.<sup>55</sup> Met andere woorden: wat niet voltooid was, heeft Kinckhuysen niet opgenomen, en we mogen dus concluderen dat deze verhandeling over de regelmatige veelvlakken door Wils, maar in ieder geval door Kinckhuysen, als afgerond werd beschouwd.

Op één punt voegt Wils wiskundig iets toe aan wat in de eeuwen voor hem geschreven is over deze inschrijvingen. In alle versies van het vijftiende boek staan maximaal eenentwintig vertogen genoemd. Twintig voor de vijf keer vier inschrijvingen, en een over de bol die in en om alle veelvlakken geplaatst kan worden. Maar de inschrijvingen van de grootste kubus in de octaëder en de grootste octaëder in de kubus, zoals Wils die behandelt in zijn zevende en twaalfde vertoog (zie hoofdstuk 3), worden in geen enkele Euclideseditie behandeld.

Dat Wils in die twee gevallen de opmerkingen over de grootst mogelijke inschrijving maakt, betekent dat hij voor die twee gevallen wist dat de 'gangbare' inschrijvingen (namelijk die uit eerdere Euclidesbewerkingen) niet maximaal (van volume) waren. Maar de twee gevallen die Wils behandelt zijn niet de enige twee waar geen sprake is van een 'maximale' inschrijving. Hoofdstuk 5 gaat in op de vraag over wanneer een inschrijving maximaal is. Wiskundig is die vraag interessant, maar niet gemakkelijk, zo zal blijken.

### 4.3 De bronnen van Pieter Wils

Wat is nu de positie van Wils' werk in het licht van al deze verschillende edities van het vijftiende boek van *de Elementen*? En welke edities zouden de bronnen van Wils kunnen zijn geweest?

Hoewel van *de Elementen* toen Wils leefde nog geen volledige Nederlandse editie beschikbaar was, waren er al wel twee Nederlandse werken gedrukt die stellingen uit Euclides' werk weergaven. Cornelis van Nienrode en Frans van Schooten hadden in 1615 en 1617 respectievelijk voor deze uitgaves gezorgd. Wils was dus niet de eerste die de inhoud van het vijftiende boek in het Nederlands onder de aandacht bracht. Maar, het vijftiende boek bij zowel Van Schooten als Van Nienrode bevat slechts vijf inschrijvingen (precies de vijf die ook in ③ en ④ staan), zodat er voor Wils zover ik weet nog geen uitgave in het Nederlands voorhanden was waar alle inschrijvingen in behandeld werden.

Het is onmogelijk te achterhalen welke bewerking van *de Elementen* Wils tot zijn beschikking had. Dat hij zeker bekend was met Euclides' werk weten we uit zijn eerste zestig pagina's, waarin hij meermaals aan *de Elementen* refereert. Maar we kunnen het ook zien in het besproken gedeelte over de regelmatige veelvlakken. Bij zijn tweede (octaëder in tetraëder), vijfde (tetraëder in kubus), zesde (octaëder in kubus), elfde (kubus in octaëder) en tweeëntwintigste vertoog (dodecaëder in icoesaëder), verwijst Wils naar proposities uit het vijftiende boek van *de Elementen*. Die verwijzing naar Euclides staat alleen bij deze vijf inschrijvingen; precies de vijf inschrijvingen die later, volgens Heiberg, behoorden tot het 'originele' vijftiende boek.

Wils moet dus een argument gehad hebben om niet bij al zijn vertogen te refereren aan Euclides. Het meest voor de hand ligt dat hij een exemplaar had waar alleen deze vijf

---

<sup>55</sup>Wils [1654] Uit het (ongenummerde) voorwoord.

proposities in stonden, of een exemplaar waar in stond dat alleen deze vijf oorspronkelijk bij *de Elementen* behoorden. Candalla's uitgave bijvoorbeeld was zo'n editie, maar ook in Clavius' editie staat vermeld dat alleen deze vijf inschrijvingen 'origineel' zijn. Wils was in elk geval zorgvuldig genoeg om niet alle inschrijvingen klakkeloos aan Euclides toe te schrijven. Wils zou in het bezit kunnen zijn geweest van zowel Candalla's als Clavius' editie, omdat beide boeken voor 1600 werden gedrukt. Ik heb een licht vermoeden dat het de editie van Clavius zal zijn geweest. Ik zal uitleggen waarom.

We zullen in hoofdstuk zes zien dat Pieter Wils in andere hoofdstukken van zijn boek veel overeenkomsten vertoont met Simon Stevin, zowel wat taal als wat inhoud betreft. Stevin besteedt in zijn *Problematum Geometricorum* aandacht aan de regelmatige veelvlakken, en aan enkele half-regelmatige veelvlakken. Struik schrijft: 'Alles wat Stevin tot zijn beschikking had was Euclides' *Elementen*, boek XIII, de zogenoemde boeken XIV, XV en XVI, die Clavius ook had vertaald, en Dürers *Underweysung der Rechnung mit dem Zirckel und Richtscheit* uit 1525. Uit Euclides-Clavius haalde Stevin zijn kennis over de vijf regelmatige veelvlakken, uit Dürer de methode om halfregelmatige veelvlakken te verkrijgen.'<sup>56</sup>

We leren verder van Struik dat Stevin goed bekend was met de Euclidesbewerkingen van Zamberti (ⓐ) en Clavius (ⓑ).<sup>57</sup> Omdat Clavius in het vijftiende boek alle twintig inschrijvingen behandelt (in tegenstelling tot Zamberti), maar alleen van zijn eerste vijf zegt dat die oorspronkelijk bij Euclides behoren, en omdat hij het zestiende boek van Candalla met de verhoudingen van de veelvlakken ook opneemt, lijkt het mij niet onwaarschijnlijk dat Wils net als Stevin zich baseerde op een editie van Clavius.

Ik wil hier verder niet uitgebreid op die halfregelmatige veelvlakken van Stevin ingaan, maar een ding wil ik er nog kort over zeggen. Je krijgt een halfregelmatig veelvlak door de regelmatige veelvlakken op een bepaalde manier af te knotten. Stevin merkt bijvoorbeeld op: 'Als de hoekpunten van een tetraëder op dezelfde manier [als in Stevins vorige voorbeeld, JB] worden afgesneden door het midden van de ribbes, is het veelvlak dat overblijft een octaëder.'<sup>58</sup> Deze opmerking heeft een zeer grote gelijkenis met de manier waarop Wils het snijden van een octaëder uit een tetraëder opschrijft: 'Des vier-grondts hoecken af-gesneden, door 't midden der zijden, blijft den in-gesloten acht-grondt...'<sup>59</sup> Ik acht het goed mogelijk dat Wils beschikking had over het vijftiende en zestiende boek van *de Elementen*, en de *Problematum Geometricorum* van Stevin, en dat het lezen van die twee boeken hem tot de vraag heeft gebracht of het mogelijk was om alle inschrijvingen van de regelmatige veelvlakken in elkaar weer te geven als een snij-instructie. Daarin is hij geslaagd.

---

<sup>56</sup>Struik [1958] Deel IIa, p. 124-125.

<sup>57</sup>Struik [1958] Deel IIa, p. 6.

<sup>58</sup>Struik [1958] Deel IIa, p. 231. Vertaald uit de Engelse vertaling van Stevins Latijn.

<sup>59</sup>Wils [1654] p. 74.



## 5 Probleem van de grootste inschrijving

Na bestudering van de ontwikkeling van dit vijftiende boek door de eeuwen heen, komt er een wiskundig probleem bovendrijven dat noch in het vijftiende, noch in het zestienste boek wordt opgelost. Zoals ik heb aangestipt maakt Wils, in tegenstelling tot zijn voorgangers, een onderscheid tussen de constructie van een regelmatig  $m$ -vlak in een regelmatig  $n$ -vlak, en het grootste regelmatige  $m$ -vlak dat in het regelmatige  $n$ -vlak past. Dit brengt ons logischerwijs bij het volgende wiskundige probleem:

**Probleem:** Wat het is grootste regelmatige  $m$ -vlak dat in een gegeven regelmatig  $n$ -vlak getekend kan worden, voor alle gevallen waar  $m \neq n$ ?

Hierin zijn  $n$  en  $m$  uiteraard het aantal zijvlakken van het regelmatig veelvlak (dus  $m, n \in \{4, 6, 8, 12, 20\}$ ). Met ‘grootste’ wordt bedoeld: grootst van volume. Onder een regelmatig veelvlak wordt verstaan het geheel van de zijvlakken en de ruimte die deze zijvlakken omsluiten. Een regelmatig veelvlak  $M$  zit ‘in’ een regelmatig veelvlak  $N$  als  $\forall x \in M : x \in N$ .

Concreet zou je het probleem zo kunnen stellen: als ik een massief houten model heb van een regelmatig  $n$ -vlak, hoe zaag ik daar dan een zo groot mogelijk regelmatig  $m$ -vlak uit?

We kunnen de inschrijvingen die Wils behandelt in drie groepen opdelen:

**Groep 1:** De omgeschreven bol van het ingeschreven veelvlak is de ingeschreven bol van het omgeschreven veelvlak. Voorbeeld: de duale octaëder in de kubus.

**Groep 2:** De omgeschreven bol van het ingeschreven veelvlak is gelijk aan de omgeschreven bol van het omgeschreven veelvlak. Voorbeeld: de kubus in de dodecaëder.

**Groep 3:** De omgeschreven bol van het ingeschreven veelvlak is groter dan de ingeschreven, maar kleiner dan de omgeschreven bol van het omgeschreven veelvlak. Voorbeeld: de dodecaëder in de kubus.

De twintig constructies zijn als volgt over de groepen verdeeld:

Groep 1	Groep 2	Groep 3
Kubus in de tetraëder	Tetraëder in de kubus	Octaëder in de tetraëder
Dodecaëder in de tetraëder	Tetraëder in de dodecaëder	Icosaëder in de tetraëder
Duale octaëder in de kubus	Kubus in de dodecaëder	Dodecaëder in de kubus
Tetraëder in de octaëder		Icosaëder in de kubus
Duale kubus in de octaëder		Icosaëder in de octaëder
Dodecaëder in de octaëder		Octaëder in de dodecaëder
Icosaëder in de dodecaëder		Octaëder in de icosaëder
Tetraëder in de icosaëder		
Kubus in de icosaëder		
Dodecaëder in de icosaëder		

Van vier van de constructies in groep 1 geeft Wils aan dat er een grotere inschrijving mogelijk is dan die waar de hoekpunten van de ingeschreven figuur samenvallen met de zijvlaksmiddelpunten van de omgeschreven figuur. Dat doet hij bij de constructie van de grootste octaëder in de kubus (zevende vertoog) en de grootste kubus in de octaëder (twaalfde vertoog). Uit deze twee constructies volgt ook nog dat er een grotere kubus is die in de tetraëder past ('merckt' bij het eerste vertoog) en een grotere tetraëder in de octaëder ('merckt' bij het tiende vertoog). Als je deze instructie voor de grootste inschrijving opvolgt, verhuizen deze vier inschrijvingen van groep 1 naar groep 3.

Het is echter vrij eenvoudig in te zien dat ook de andere zes constructies in groep 1 niet maximaal (van volume) zijn. Het argument daarvoor is als volgt. De omgeschreven bol van het ingeschreven veelvlak is de ingeschreven bol van het omgeschreven veelvlak. Deze ingeschreven bol ligt geheel 'in' het omgeschreven veelvlak. Maar, deze ingeschreven bol is de omgeschreven bol van het ingeschreven veelvlak, en dit veelvlak ligt helemaal 'in' zijn omgeschreven bol. Je kunt het ingeschreven veelvlak dus draaien in zijn omgeschreven bol, zonder dat het buiten het omgeschreven veelvlak komt.

Omdat ieder ingeschreven veelvlak eindig veel hoekpunten heeft, en ieder omgeschreven veelvlak eindig veel zijvlaksmiddelpunten, maar er oneindig veel posities zijn van het ingeschreven veelvlak in zijn omgeschreven bol, kan ik een positie vinden waar niet een van de hoekpunten van het ingeschreven veelvlak samenvalt met een zijvlaksmiddelpunt van het omgeschreven veelvlak. Omdat deze hoekpunten het verst verwijderd zijn van het middelpunt van het ingeschreven veelvlak, ligt niet een punt van het ingeschreven veelvlak in een van de zijvlakken van het omgeschreven veelvlak. Maar dit betekent dat ik een  $\delta > 0$  kan vinden zodat ik het ingeschreven veelvlak met een factor  $1 + \delta$  kan vergroten, totdat (minimaal) een van de hoekpunten van het ingeschreven veelvlak weer in een van de zijvlakken van het omgeschreven veelvlak ligt. De inschrijving die Wils geeft is dus niet maximaal.

Omdat de regelmatige veelvlakken gesloten en begrensd zijn, heeft dit proces van het vergroten van het ingeschreven veelvlak een maximum. De vraag is dus hoe groot dat maximum is. Die vraag ga ik hier niet beantwoorden. Het valt buiten het bereik van het (historische) kader van deze scriptie, en bovendien ziet het er niet naar uit dat de wiskunde die nodig is om dit vraagstuk op te lossen heel gemakkelijk is.

Van de vier maximale gevallen die Wils noemt kan worden uitgezocht of dit inderdaad de grootste inschrijvingen zijn. De andere zes gevallen waarvoor zeker een grotere inschrijving is, moeten worden berekend. De constructies in de derde groep vallen eigenlijk weer in twee categorieën uiteen: De octaëder in de icoesaëder en de octaëder in de dodecaëder hebben als hoekpunten de middens van zes ribben van de icoesaëder en de dodecaëder. Bij deze twee hoort ook de inschrijving van de (volgens Wils) grootste tetraëder in de octaëder. Alle andere constructies (de vijf die nog in de tabel staan, plus de drie andere grootste inschrijvingen van Wils) hebben een aantal ribben of zelfs zijvlakken die geheel in een zijvlak liggen van de omgeschreven figuur.

Intuïtief zou ik zeggen dat deze laatste negen inschrijvingen maximaal zijn. In ieder geval resulteert iedere draaiing over een as door het middelpunt erin dat minimaal een

van de hoekpunten buiten de omgeschreven figuur komt.

De tweede groep bevat volgens mij drie inschrijvingen die al maximaal zijn. Dat kan ik echter niet voor alledrie de inschrijvingen hard maken – alleen van de inschrijving van de kubus in de dodecaëder kan ik dat bewijzen. We hebben gezien dat de kubus acht hoekpunten gemeenschappelijk heeft met de dodecaëder, en dat beide figuren dezelfde omgeschreven bol hebben. Stel dat de straal van deze bol  $r$  is, dan is de grootste afstand in de kubus en in de dodecaëder  $2r$ . Stel dat er een grotere kubus in de dodecaëder zou passen, dan zou er in die kubus een afstand  $2r + \varepsilon$  zijn, met  $\varepsilon > 0$ , maar dat is in tegenspraak met het feit dat  $2r$  de grootste afstand in de dodecaëder is. Een grotere kubus past dus niet in de dodecaëder.

Dit argument gaat niet op voor de tetraëder in de kubus en de tetraëder in de dodecaëder, omdat als een tetraëder een omgeschreven bol met straal  $r$  heeft, de grootste afstand in de tetraëder kleiner dan  $2r$  is.

Gesprekken met Frans Oort, Wilberd van der Kallen, Gunther Cornelissen, Jan Stienstra, Frits Beukers, Joop Kolk (allen werkzaam bij het Mathematisch Instituut, UU) en Aad Goddijn (Freudenthal Instituut, UU) hebben geholpen bij het inzicht krijgen in dit probleem. Zij waren unaniem in hun oordeel over het probleem – een mooi concreet en elementair meetkundevraagstuk – maar bij geen van hen was een publicatie bekend die in een oplossing voorziet. Joop Kolk merkte op dat de analytische oplossing flink wat rekenwerk zou vergen, vooral omdat het aantal parameters oploopt, maar niet ondoenlijk is. Aad Goddijn voegde toe dat het probleem goed programmeerbaar moet zijn in Maple of Mathematica – al levert dat waarschijnlijk wel fraaie plaatjes en een volumeverhouding, maar geen sluitend bewijs op.

## 6 De rest van het boek

In de vorige hoofdstukken is aandacht besteed aan de inhoud en achtergrond van pagina 72-80 uit Pieter Wils' *Wis-konstige Wercken*. Zo uitgebreid als die negen bladzijdes zal ik de rest van Wils' boek niet behandelen. Enerzijds omdat de omvang van deze scriptie daardoor uit de hand zou lopen, maar ook omdat daar gegronde redenen voor zijn. Door in dit hoofdstuk in te gaan op de andere 150 pagina's uit het boek, hoop ik te beargumenteren dat die wiskundig en historisch niet zo interessant zijn als de verhandeling over de regelmatige veelvlakken.

Om een goed idee te krijgen van de inhoud van Wils' boek, is het goed om even een overzicht te maken:

Pagina	Inhoud
I <sup>a</sup>	Voorblad
II	Leeg
III - IV	Tot den Leser: voorwoord door Gerard Kinckhuysen.
1-5	Meet-konstige Vertooghen. In hoeck-lijnen, der Boogen.
6-19	Meet-konstige Vertooghen. In recht-linische Formen.
20-63	Meet-konstigh Passer-Werck.
64-82	Aenhangh, Bestaende in eenige Wis-konstige stucken. [p. 64-65] Probleem met een driehoek en een punt. [p. 66-67] Vraegh-stuck Gestelt tot besluit der Geometrische fundamenten, door Mr. Ludolf van Ceulen. [p. 67-69] Werckinghe, Op een vraegh-stuck, ghestelt aen 't eynde van de Practijcq des Lant-metens uytgegeven by Iohan Sems, ende Ian Pietersz. Dou. [p. 69-71] Kort Onderricht, Om de hoecken, of zijden, van alle platte drie-hoecken te vinden; sonder behulp van Tafelen. [p. 72-80] Van de Snijdingh, Der plat-grondigh-geschickte lichamen, en haer reden, tot elck ander. [p. 81-82] Aenteyckeningen, op de Kegel-sneden.
83-92	Rekeningh Der Krom-streecken.
93-152	Hemel-klootsche Werck-Stucken. Sonder kennis der Klootsche drie-hoecken af te veerdighen.
153-155	Aenteyckeningh, Op de Metael-waegh.

<sup>a</sup>De eerste pagina's zijn ongenummerd. De nummering van I tot IV is van mijn hand.

Zonder verder nog een letter gelezen te hebben, geeft deze inhoudsopgave een mooie invulling van de woorden van Kinckhuysen uit het voorwoord, die vertellen dat het boek een verzameling is van 'Wis-konstige stucken en verhandelingen'. Alle stukken en verhandelingen vallen wel binnen de meetkunde, maar dat is voor die tijd, zeker voor een

landmeter, allesbehalve vreemd. Verder blijkt ook dat Wils werken van andere Nederlandse wiskundigen las; behalve de hierboven naar voren komende Ludolf van Ceulen en Johan Sems en Jan Pieterszoon Dou verwijst hij in de tekst ook naar werken van Stevin en Snellius. Verder refereert hij in de eerste negentig pagina's veelvuldig aan *De Elementen* van Euclides.

De verschillende referenties naar andere wiskundigen en hun boeken komen aan de orde in dit komende hoofdstuk. Doel is echter vooral om aan de hand van enkele voorbeelden de inhoud van de pagina's 1-71 en 81-155 door te nemen, en zo een redelijk beeld te geven van wat Wils allemaal nog meer deed naast de bestudering van de regelmatige veelvlakken die we hebben gezien.

## 6.1 Pagina I-IV

Het plaatje op het titelblad is hetzelfde als op pagina 93. De volledige titel van het boek luidt *Wis-konstige Wercken: Bestaende in eenighe Meet-konstighe ende Hemel-klootsche aenteyckeningen, elck met hare verklaringhen ende bewijsen*. Daarmee geeft dit een zeer beknopte samenvatting van de inhoud, maar de bewering 'elck met hare verklaringhen ende bewijsen' wordt niet overal gestand gedaan. Bijvoorbeeld alle snedes van de regelmatige veelvlakken zijn zonder bewijs behandeld (zie hoofdstuk 3 van deze scriptie). Ook in de laatste zestig pagina's is Wils summier tot zeer summier met het verklaren van de juistheid van zijn methodes. Het lijkt me dat deze zinsnede in de titel ook meer een standaardformulering is dan inhoudelijk adequaat.

De inhoud van het voorwoord komt uitgebreider aan de orde in hoofdstuk 2 over Pieter Wils. Samengevat komt het erop neer dat Gerard Kinckhuysen, de auteur van het voorwoord, zegt dat hij het boek heeft samengesteld zodat de wiskunde van zijn meester niet verloren ging, en dat de wiskundige verhandelingen in het boek 'meestendeel al voor langhe van hem zijn gheschreven gheweest', en dus niet van vlak voor zijn dood dateren. We kijken dus naar voornamelijk vroeg werk van Wils. Zoals in hoofdstuk twee te lezen is, is Wils rond 1600 geboren. Het is natuurlijk gissen op basis van de woorden van Kinckhuysen, maar daaruit vermoed ik dat de wiskunde die in het boek verzameld is ongeveer in de periode 1620-1630 door Wils geschreven is.

## 6.2 Pagina 1-5

De eerste vijf pagina's bevatten zeven stellingen over 'hoeklijnen', 'snijlijnen' en 'raaklijnen'. Bij ons zijn deze lijnen bekend als de sinus, de secans en de tangens. Alle stellingen zijn gemakkelijk te begrijpen, en maken vooral gebruik van verhoudingen binnen driehoeken. Het idioom dat Wils gebruikt voor de beschrijvingen van de lijnen in de cirkels en de driehoeken lijkt rechtstreeks afkomstig uit Simon Stevins *Wisconstige Gedachtenissen*. Alleen waar Stevin het woord 'schilhouck'<sup>60</sup> gebruikt (wij zeggen nu: complement), schrijft Wils 'vier-en-deel rond-schil hoeck'. Wils houdt consequent aan deze langere schrijfwijze vast, door het hele boek heen. (Met name ook op de pagina's

---

<sup>60</sup>t'verschil tusschen een ghestelden houck ende den rechthouck', Stevin [1608] Fol I-v (p. 2).

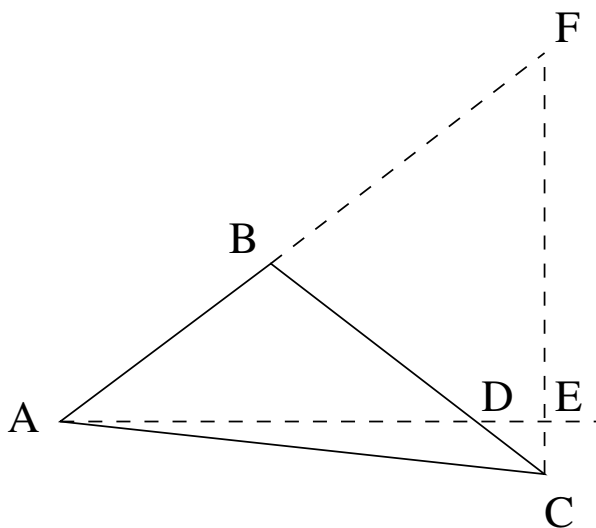
met ‘Hemel-klootsche Werck-stucken’ (92-152).)

Stevin schrijft overigens dat de ‘schilboog’ in het Latijn *complementum arcus* wordt genoemd, en doorgaans in de vertaling het woord ‘vervulling’ kreeg. Maar omdat je ingeval een hoek van 120 graden ook spreekt van een *complementum arcus* van 30 graden, is het woord vervulling volgens Stevin niet goed, omdat het hier niet om een vervulling, maar een overschot gaat. ‘T’welck so sijnde ick vercoos de naem Schilbooch, so veel te segghen als booch des verschils tusschen de gestelde booch ende het vierendeelronts: Welcke naem t’sy de ghestelde grooter of cleender is dan een vierendeelronts, altijd haer eyghentlicke beteyckening heeft.’<sup>61</sup> We zien dus dat de benaming ‘vierendeelrond’ ook al door Stevin werd gebruikt.

De bewijzen zijn sober en recht op hun doel af, zoals het volgende voorbeeld laat zien:

### Sevende Vertoogh.

*In alle drie-hoecken hebben twee zijden (welcke men wil,) t’samen, sulcken reden tot haer verschil; als raecklijn van’t vier-en-deel-rondt-schil, des halven hoecks van de selve begrepen, tot raeck-lijn van’t halve verschil der ander hoecken: En wederom, de selve zijden t’samen, tot de derde; als d’eerste raeck lijns sny lijn, tot d’ander.*



*'t Gegeven.* Laet ABC, een drie-hoeck wesen.

*'t Begeerde.* Wy moeten bewijzen, dat twee zijden t’samen, (ick neem AB, en BC) staen in reden tot haer verschil; als vier-en-deel-rondt-schils raeck-lijn des halven hoecks B, tot raeck-lijn van’t halve verschil der ander hoecken: Ende als d’eerste raeck-lijns sny-lijn, tot d’ander; alsoo AB, en BC, t’samen, tot AC.

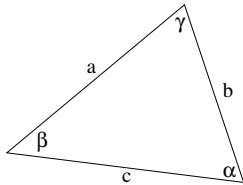
*'t Bereydt sel.* Laet zijn getrocken een on-eyndelijcke uyt A, door D, soo dat BD, zy even aen AB; En een ander uyt C, recht-hoeckigh door d’eerste, snyende malkander in E: Daer nae zy AB, voortgetrocken, tot in de leste valt in’t punt F.

*'t BEWYS.*

BF, is even aen BC; daerom AF, even aen AB, en BC, t’samen: Oock is den hoeck CDE, even aen BDA; en dese aen BAD; en daerom, ghelijck EF, tot EC; alsoo FA, tot CD: maer den hoeck BAD, is de helft van’t half-rondt-schil des hoecks B; en daerom even aen’t vier-en-deel-rondt-schil des halven hoecks B: Oock is den hoeck CAD, ‘thalve verschil der ander hoecken; nu, genomen AE, voor half-middel-lijn, soo is FE, raeck-lijn, en AF, sny-lijn des hoecks BAD; Maer CE, raeck-lijn, en AC, sny-lijn des hoecks

<sup>61</sup>Stevin [1608] p. 331.

CAD: Daerom, gelijk raeklijn des hoecks BAD, tot die des hoecks CAD; also AB, en BC, t'samen, tot DC, (haer verschil.) Ende gelijk snylijn des hoecks BAD, tot die des hoecks CAD; also AB, en BC, t'samen, tot AC: soo wy bewijsen moesten.<sup>62</sup>



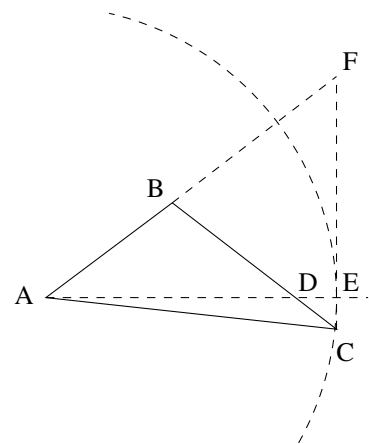
In moderne bewoordingen staat hier: Bewijs dat voor een willekeurige driehoek met zijdes  $a$ ,  $b$  en  $c$ , met tegenoverliggende hoeken  $\alpha$ ,  $\beta$  en  $\gamma$  (zoals in het plaatje hiernaast), geldt dat

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan(90 - \frac{\gamma}{2})}{\tan(\frac{\alpha-\beta}{2})}$$

en dat

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\sec(90 - \frac{\gamma}{2})}{\sec(\frac{\alpha-\beta}{2})}.$$

Het bewijs dat Wils geeft berust op het construeren van  $AD$  zodanig dat  $AB = BD$ , waarna vanuit  $C$  de loodlijn  $CEF$  op  $AD$  wordt getrokken, en  $AB$  wordt verlengd tot in  $F$ . Uit de gelijkvormigheid van de driehoeken  $AEF$  en  $DEC$  in de constructie volgt dan dat  $EF : EC = AF : CD$ . We zien in het plaatje hiernaast met behulp van de cirkelboog gemakkelijk in dat  $\frac{EF}{EA}$  en  $\frac{EC}{EA}$  de tangensen zijn van de hoeken  $BAD$  en  $DAC$ . Die twee hoeken zijn precies de verschilhoeken uit de stelling.  $\frac{AF}{AE}$  en  $\frac{AC}{AE}$  zijn de secansen van die twee verschilhoeken, en omdat  $AF = AB + BC$ , is de tweede bewering ook snel duidelijk.



De opzet van stelling en bewijs is overigens volgens het klassieke Euclidesstramien. In deze eerste pagina's refereert Wils één keer aan Euclides; in het eerste vertoog verwijst hij naar een stelling uit het zesde boek van *de Elementen*, voor een zeer eenvoudige verhoudingskwestie in gelijkvormige driehoeken.

### 6.3 Pagina 6-63

Hoewel deze pagina's in de inhoudsopgave in twee delen uiteen vallen, wil ik ze hier samen bespreken. Dat heeft een zeer eenvoudige reden: ze horen bij elkaar. Het is natuurlijk moeilijk om in te schatten hoe 'af' het werk van Wils was toen het werd gebundeld, maar Kinckhuysen schrijft niet voor niets dat hij alleen de dingen heeft gebundeld die voltooid waren.

Wils verwijst in het 'Meet-konstigh Passer-werck' (p. 20-63) meer dan eens terug naar de 'Meet-konstighe Vertooghden In recht-linische Formen' (p. 6-19). Als we ervan uitgaan dat Kinckhuysen niets heeft toegevoegd, heeft Wils deze twee passages dus als een geheel geschreven.

<sup>62</sup>Wils [1654] p. 4-5.

Net als op de eerste vijf bladzijdes zijn de stellingen op pagina 5-19 vrij gemakkelijk in te zien. De bewijzen zijn helder, zoals je verwacht, en Wils refereert zo af en toe naar stellingen van Euclides. Alle problemen betreffen, zoals de titel van het hoofdstuk ook zegt, meetkunde in het platte vlak.

Ik geef nu eerst een overzicht van alle proposities die Wils behandelt in dit gedeelte. Dit is een lijst zonder bewijzen, maar die aan de lezer een snelle indruk geeft van de wiskunde waar Wils zich mee bezighield. Daarna ga ik op enkele vertogen wat dieper in.

**Eerste propositie:** In een driehoek  $ABC$  met  $AC$  als basis en  $BD$  als hoogtelijn geldt dat  $\frac{AD-DC}{AB-BC} = \frac{AB+BC}{AD+DC}$ .

**Tweede propositie:** In een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden  $a$  en  $b$  en schuine zijde  $c$  geldt  $a + b \leq \sqrt{2} \cdot c$ .

**Derde propositie:** Zij  $ABC$  en  $ABD$  twee rechthoekige driehoeken met dezelfde schuine zijde  $AB$ . Dan geldt  $AC + CB \leq AD + DB$  als  $AC - CB \leq AD - DB$ . (Mits  $AC$  en  $AD$  de langste rechthoekszijde zijn in  $ABC$  resp.  $ABD$ ).

**Vierde propositie:** Voor twee driehoeken  $ABC$  en  $DEF$  met  $\angle ACB = \angle DFE$  geldt  $\frac{AC+CB}{AB} \leq \frac{DF+FE}{DE}$  als  $AC - CB \leq DF - FE$ . (Mits  $AC$  en  $DF$  de langste van de twee zijdes zijn die in  $\angle ACB$  resp.  $\angle DFE$  samenkomen.)

**Vijfde propositie:** Zij  $ABC$  een driehoek met ingeschreven vierkant  $EFGH$  (met een zijde op de basis  $BC$ ) en hoogtelijn  $AD$ . Dan geldt  $\frac{EF}{CB} = \frac{AD}{AD+CB}$ .

**Zesde propositie:** In een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden  $a$  en  $b$  en schuine zijde  $c$ , geldt dat  $(a + b - c)^2 = 2(c - a)(c - b)$

**Zevende propositie:** In een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden  $a$  en  $b$  en schuine zijde  $c$ , geldt dat  $(c + a - b)^2 = 2 \cdot (c + a)(c - b)$ .

**Achtste propositie:** In een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden  $a$  en  $b$  en schuine zijde  $c$ , geldt dat  $(c + a + b)^2 = 2 \cdot (c + a)(c + b)$ .

**Negende propositie:** Als  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  dan  $(c + b)^2 + (a - d)^2 = (a + d)^2 + (c - b)^2$ .

**Tiende propositie:** In iedere driehoek is de oppervlakte van elke ingeschreven rechthoek niet groter dan de helft van de oppervlakte van de driehoek.

**Elfde propositie:** In iedere driehoek met basis  $x$  en hoogte  $y$ , met een ingeschreven rechthoek met lengte  $a$  ( $\frac{x}{2} \leq a \leq x$ ) en hoogte  $b$  ( $0 \leq b \leq \frac{y}{2}$ ) geldt dat  $\frac{1}{4}xy - ab = (a - \frac{1}{2}x)(\frac{1}{2}y - b)$ .

**Twaalfde propositie:** Voor iedere (scherphoekige) driehoek geldt dat het grootste ingeschreven vierkant op die zijde staat die het minst verschilt met zijn hoogtelijn.

Tot zover de 12 proposities zoals die voorkomen in het eerste hoofdstuk van dit deel van Wils boek (pagina 6 - 19). Dit zijn proposities waarin een bepaalde wiskundige bewering wordt bewezen. Het tweede hoofdstuk van dit deel (pagina 20 - 63) bestaat uit 24 proposities. Iedere propositie bestaat uit een gevraagde constructie, de manier waarop die constructie moet worden uitgevoerd en een bewijs van de juistheid ervan. In alle 24 gevallen gaat het om een probleem in een plat vlak, en moet dat probleem kunnen worden opgelost met passer en liniaal.

**Eerste propositie:** Een rechthoekige driehoek van gegeven oppervlakte te tekenen op een gegeven lijnstuk als schuine zijde. (Als het gegeven lijnstuk lengte  $a$  heeft, mag de



gegeven oppervlakte niet groter zijn dan  $\frac{a^2}{4}$ .)

**Tweede propositie:** Een rechthoekige driehoek te tekenen op een gegeven lijnstuk als schuine zijde, zodanig dat een tweede gegeven lijnstuk de middelevenredige is tussen de rechthoekszijden. (Als het eerste gegeven lijnstuk lengte  $a$  heeft, mag het tweede lijnstuk niet langer zijn dan  $\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot a$ .)

**Derde propositie:** Een rechthoekige driehoek te tekenen op een gegeven lijnstuk als een van de rechthoekszijden, zodanig dat een tweede gegeven lijnstuk de middelevenredige is tussen de twee andere driehoekszijden.

**Vierde propositie:** Een rechthoekige driehoek  $ABC$  te tekenen (met  $\angle ABC$  loodrecht en  $BD$  de hoogtelijn) zodanig dat  $AB + AD$  en  $BC + DC$  even lang zijn als twee gegeven lijnstukken.

**Vijfde propositie:** Een rechthoekige driehoek te tekenen van gegeven oppervlakte, zodanig dat de langste rechthoekszijde de middelevenredige is tussen de kortste rechthoekszijde en de schuine zijde.

**Zesde propositie:** Een rechthoekige driehoek te tekenen op een gegeven lijnstuk als schuine zijde, zodanig dat een tweede gegeven lijnstuk (korter dan het eerste gegeven lijnstuk) evenlang is als het verschil tussen de twee rechthoekszijden.

**Zevende propositie:** Een rechthoekige driehoek te tekenen op een gegeven lijnstuk als een van de rechthoekszijden, zodanig dat een tweede gegeven lijnstuk (korter dan het eerste gegeven lijnstuk) evenlang is als het verschil tussen de andere twee driehoekszijden.

**Achtste propositie:** Een rechthoekige driehoek te tekenen op een gegeven lijnstuk als schuine zijde, zodanig dat een tweede gegeven lijnstuk even lang is als de twee rechthoekszijden bij elkaar. (Als het eerste gegeven lijnstuk lengte  $a$  heeft, moet het tweede lijnstuk langer zijn dan  $a$ , maar korter dan  $\sqrt{2}\cdot a$ .)

**Negende propositie:** Een rechthoekige driehoek te tekenen op een gegeven lijnstuk als een van de rechthoekszijden, zodanig dat een tweede gegeven lijnstuk (langer dan het eerste gegeven lijnstuk) evenlang is als de andere twee driehoekszijden bij elkaar.

**Tiende propositie:** Een rechthoekige driehoek van gegeven oppervlakte te tekenen zodanig dat de lengte van de zijdes bij elkaar gelijk is aan de lengte van een gegeven lijnstuk. (Als het gegeven lijnstuk lengte  $a$  heeft, mag de gegeven oppervlakte niet groter zijn dan  $\frac{a^2}{12+4\sqrt{8}}$ .)

**Elfde propositie:** Twee gelijkvormige rechthoekige driehoeken te tekenen zodat

- de hoogte van een van de twee driehoeken een gegeven lijnstuk is;
- de oppervlakte van de andere driehoek gelijk is aan een gegeven oppervlakte;
- de som van twee corresponderende rechthoekszijden een gegeven lengte is.

Dat wil zeggen: gegeven zijn een lijnstuk  $AB$ , een lijnstuk  $C$  en een driehoek  $D$ . Trek een loodlijn  $AI$  op  $AB$ , zodanig dat  $AI = C$ . Voor elk punt  $H$  op  $AB$  maken we een loodlijn  $BK$  op  $AB$  zodat driehoek  $IAH$  gelijkvormig is met driehoek  $KBH$  (dat wil zeggen  $IA : AH = KB : BH$ ). Gevraagd wordt nu het punt  $H$  zodat de oppervlakte van driehoek  $KBH$  gelijk is aan  $D$ .

**Twaalfde propositie:** Twee gelijkvormige rechthoekige driehoeken te tekenen zodat

- de hoogte van een van de twee driehoeken een gegeven lijnstuk is;
- de oppervlakte van de andere driehoek gelijk is aan een gegeven oppervlakte;
- het verschil tussen twee corresponderende rechthoekszijden een gegeven lengte is.

(Als het gegeven verschil lengte  $a$  heeft, en de gegeven hoogte is  $b$ , mag de gegeven oppervlakte niet kleiner zijn dan  $2.a.b.$ )

**Dertiende propositie:** In een gegeven driehoek een vierkant te tekenen.

**Veertiende propositie:** Een vierkant te tekenen om een gegeven gelijkzijdige driehoek.

**Vijftiende propositie:** In een gegeven vierkant een gelijkzijdige driehoek te tekenen.

**Zestiende propositie:** Om een vierkant een driehoek te tekenen die gelijkvormig is met een gegeven driehoek.

**Zeventiende propositie:** Uit een hoek van een gegeven vierkant een rechte lijn te trekken die een zijde en een andere doorgetrokken zijde van het vierkant snijdt, zodanig dat het lijnstuk tussen de twee snijpunten even lang is als een gegeven lijnstuk.

**Achttiende propositie:** Een gegeven driehoek door middel van een rechte lijn vanuit een gegeven punt buiten die driehoek in twee delen te snijden, zodanig dat de oppervlaktes van de twee delen een gegeven verhouding hebben.

**Negentiende propositie:** Gegeven twee punten, een cirkel te tekenen, zodanig dat vanuit een willekeurig punt op de omtrek van de cirkel de twee lijnstukken vanuit dat punt naar de twee gegeven punten een gegeven verhouding hebben.

**Twintigste propositie:** Uit twee gegeven punten twee rechte lijnen te trekken naar één punt op een lijn van willekeurige vorm [niet per se recht], zodanig dat de getrokken rechte lijnen elkaar snijden onder een gegeven hoek.

**Eenentwintigste propositie:** Op een cirkelboog  $AB$  een punt  $C$  te vinden, zodanig dat de koordes  $AC$  en  $CB$  een gegeven verhouding hebben.

**Tweëntwintigste propositie:** Op een cirkelboog  $AB$  een punt  $C$  te vinden, zodanig dat de koordes  $AC$  en  $CB$  bij elkaar even lang zijn als een gegeven lijnstuk. (Het gegeven lijnstuk moet langer zijn dan de koorde  $AB$ , maar korter dan de lengte van de koordes  $AD$  en  $DB$  bij elkaar (waarbij  $D$  het midden van de cirkelboog  $AB$  is).

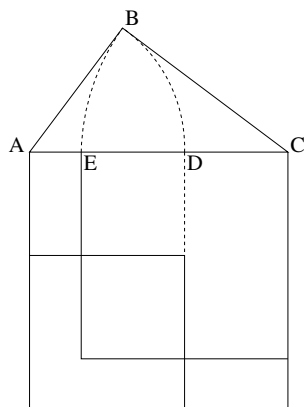
**Drieëntwintigste propositie:** Op een cirkelboog  $AB$  een punt  $C$  te vinden, zodanig dat het verschil in lengte tussen de koordes  $AC$  en  $CB$  even lang is als een gegeven lijnstuk. (De gegeven lengte moet kleiner zijn dan de koorde  $AB$ ).

**Vierentwintigste propositie:** In één cirkel de zijdes van de regelmatige driehoek tot en met de regelmatige twaalfhoek te construeren, waarbij de boog van de passer constant gelijk blijft aan de boog waarmee de cirkel is getekend.

Zoals gezegd zal ik nu enkele proposities uit de bovenstaande lijst nader bekijken. Ik bespreek nu eerst een propositie (nummer 6) uit het eerste hoofdstuk, en vervolgens twee proposities (nummer 15 en 24) uit het tweede hoofdstuk.

## Seste Vertoogh.

*In de recht-hoekighe drie-hoecken is 't vierkant op 't ghene de recht-hoeck-zijden t'samen langher zijn dan de schoensche, even aen tweemaal den recht-hoeck onder 'tghene yeder recht-hoeck-zijde korter is.*



't Gegeven. Laet ABC, een rechthoekighe drie-hoeck wesen; diens schoensche AC, in welke zy geteyckent de langde AB, van A, tot D; en BC, van C tot E: soo is ED, 'tghene de recht-hoeckzijden t'samen langher zijn: maer AE, en DC, 'tghene elck korter is.

't Begeerde. Wy moeten bewijzen dat 't vier-kant op ED, is even an twee-mael den recht-hoeck onder AE, DC.

't Bereydtzel. Laet zijn geteyckent het vierkant op AC; mede een op EC, en een op AD.

't BEWYS.

Gemerckt de vierkanten op AD, EC, t'samen, zijn even aen dat op AC; 't is uyt de form openbaer, dat 't vierkant op ED, is even aen tweemaal den recht-hoeck onder AE, DC: (aengesien voor 't gebrekende vierkant op ED, resten twee der genoemde recht-hoecken) soo wy bewijzen moesten.<sup>63</sup>

In moderne woorden staat hier: In een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden  $a$  en  $b$  en schuine zijde  $c$ , geldt dat  $(a + b - c)^2 = 2(c - a)(c - b)$ . Voor het bewijs maakt Wils gebruik van Pythagoras en een eenvoudig argument op basis van het plaatje. Wils refereert voor Pythagoras overigens niet aan boek- en stellingnummer bij Euclides (1-47) zoals hij wel doet bij de eerste en de achtste stelling (p. 8 en 15). De verwijzingen zijn door het hele boek heen correct, maar niet altijd even consequent. Met name in de hemelklootsche aantekeningen (zie paragraaf 6.7) is hij summier met verwijzen, terwijl hij doorlopend stellingen van Stevin gebruikt. Net als de hierboven geciteerde stelling zijn ook de andere stellingen van de 'recht-linische vormen' wiskundig weinig opzienbarend. Wils refereert aan stellingen uit het eerste, tweede en zesde boek van Euclides. Dit 'seste vertoogh' wordt weer als argument gebruikt op pagina 37, in het elfde voorstel van het 'Meet-konstig Passerwerck'. Uit dat passerwerk komen de volgende twee proposities.

## Vijfthiende Voorstel.

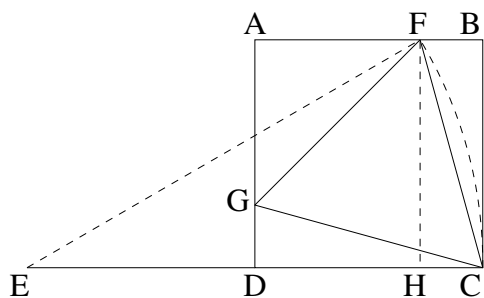
*In een ghegeven vierkant, een gelijk-zijdighen driehoek te teyckenen.*

't Gegheven. Laet ABCD, een vierkant wesen.

't Begeerde. Wy moeten in ABCD, een gelijk-zijdighen drie-hoeck teyckenen.

't WERCK.

<sup>63</sup>Wils [1654] p. 12.



Ick treck CD, voort tot E; alsoo dat DE, zy even aen CD; beschrijf dan met EC, (als half-middel-lijn, en E, middel-punt,) de Boogh CF: teycken oock de rechte lini CF; daer nae CG, even aen CF; en ten laetsten FG; makende soo den driehoek CFG; welck ick segh den begheerden te wesen.

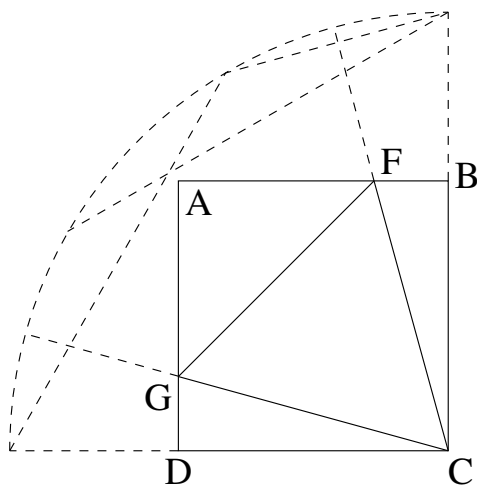
't *Bereydtse*. Laet zijn getrocken FH, evenwijdig met BC.

't BEWYS.

De lini FH (als helft der half middel-lijn) is de halve zijde des in-schrijvelijcken ses-hoecks: daerom CF de zijde des in-schrijvelijcken twaelf-hoecks: en volgens soo begrijpt den hoek FCE, vijf-seste deelen eenes rechten-hoecks: maer den hoek GCD, is even aen den hoek FCB, zijnde dan een seste deel des rechten-hoecks: daerom blijft voor den hoek FCG, twee derde deelen des rechten hoecks: en dan noch twee-mael soo veel voor de twee hoeken CFG, CGF; welke oock beyde (om de even zijden CF, CG) even zijn: en daerom den drie-hoek CFG (geteyckent in ABCD) evenhoeckigh; en volghens even ende gelijk-zijdigh: soo wy bewijzen moesten.

### *Ander manier van werckingh.*

't *Gegeven, en Begheerde, zy als vooren.*



't WERCK.

Ick treck CF, CG, alsoo dat de hoeken BCF, DCG, elck zijn een 6. deel des rechten hoecx BCD; en dan FG; makende soo den drie-hoek CFG: welck hier vooren bewesen is den begheerden te wesen.

MERCKT.

Dat dese laetste manier oock dienstigh is tottet teyckenen der even-beenige drie-hoeken, in 't vierkant; nae een gegeven even-beenige, diens hoek begrepen van de even zijden scherp is: want gestelt zijnde de hoeken BCF, DCG, elck even aen de helft van 't vieren-deel-rondt-schil des ghenamden hoecks, en ghetrocken FG: men heeft 't begheerde.<sup>64</sup>

Wils zoekt een manier om in een gegeven vierkant een gelijkzijdige driehoek te tekenen. Het bewijsargument dat Wils hanteert is wederom eenvoudig.  $FH$  (in het plaatje op de vorige pagina) is de halve zijde van de ingeschreven zeshoek ( $FH = BC = DC = \frac{1}{2}EC$ ), dus  $FC$  is de zijde van een ingeschreven twaalfhoek in de cirkel met straal  $EC$ . Daarom  $\angle FCE = \frac{5}{6} \cdot 90^\circ$ . Omdat  $\angle GCD = \angle FCB = \frac{1}{6} \cdot 90^\circ$  (door de constructie), geldt

<sup>64</sup>Wils [1654] p. 43-45.

$\angle FCG = \frac{2}{3} \cdot 90^\circ = 60^\circ$ .  $CG = CF$  als gevolg van de constructie, en natuurlijk  $\angle CGF = \angle CFG = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2}$ , dus de andere twee hoeken zijn ook zestig graden.

De ‘ander manier van werckinh’ is precies wat het zegt: het geeft een andere manier om de gevraagde driehoek te tekenen, maar voor het bewijs verwijst hij naar het eerste deel van de propositie. In het plaatje bij de constructie is duidelijk dat hij met stippellijnen de zijde van een twaalfhoek tekent, om vervolgens de hoek  $BCF$  15 graden te maken. Er lijkt overigens in het plaatje een stippellijn te ontbreken, namelijk die waaruit de hoek  $DCG$  wordt geconstrueerd. Wils gebruikt in het tiende vertoog (p. 16-17) overigens de term ‘blinde linien’ voor stippellijnen.

Het ‘Merckt’ dat na het voorstel komt, geeft aan dat de tweede methode gebruikt kan worden voor het tekenen van gelijkbenige driehoeken in het vierkant, waarvan de gegeven hoek  $\alpha$  tussen de gelijke zijdes scherp is. De hoeken  $BCF$  en  $DCG$  zijn dan ieder ‘de helft van ’t vieren-deel-rondt-schil des ghenamden hoecks’, dus  $\frac{90-\alpha}{2}$ .

Alle proposities die Wils in dit hoofdstuk behandelt zijn meetkundig zo doeltreffend als hierboven. Hij verwijst veelvuldig naar Euclides, vooral naar stellingen uit het eerste en zesde boek, maar ook uit de boeken 2 tot en met 5 haalt hij soms stellingen ter ondersteuning van de bewijzen. Hij zou voor al deze proposities genoeg gehad kunnen hebben aan een uitgave van Euclides waar alleen de eerste zes boeken in stonden – en daar waren er in die tijd heel veel van. Maar, we hebben gezien dat Wils in het deel over de regelmatige veelvlakken ook refereert aan het vijftiende boek van Euclides, dus als hij een *Elementen*-editie had waarin alleen de eerste zes boeken in stonden, dan was dat niet de enige editie waar hij beschikking over had.

De laatste propositie van de 24 in dit hoofdstuk luidt als volgt<sup>65</sup>:

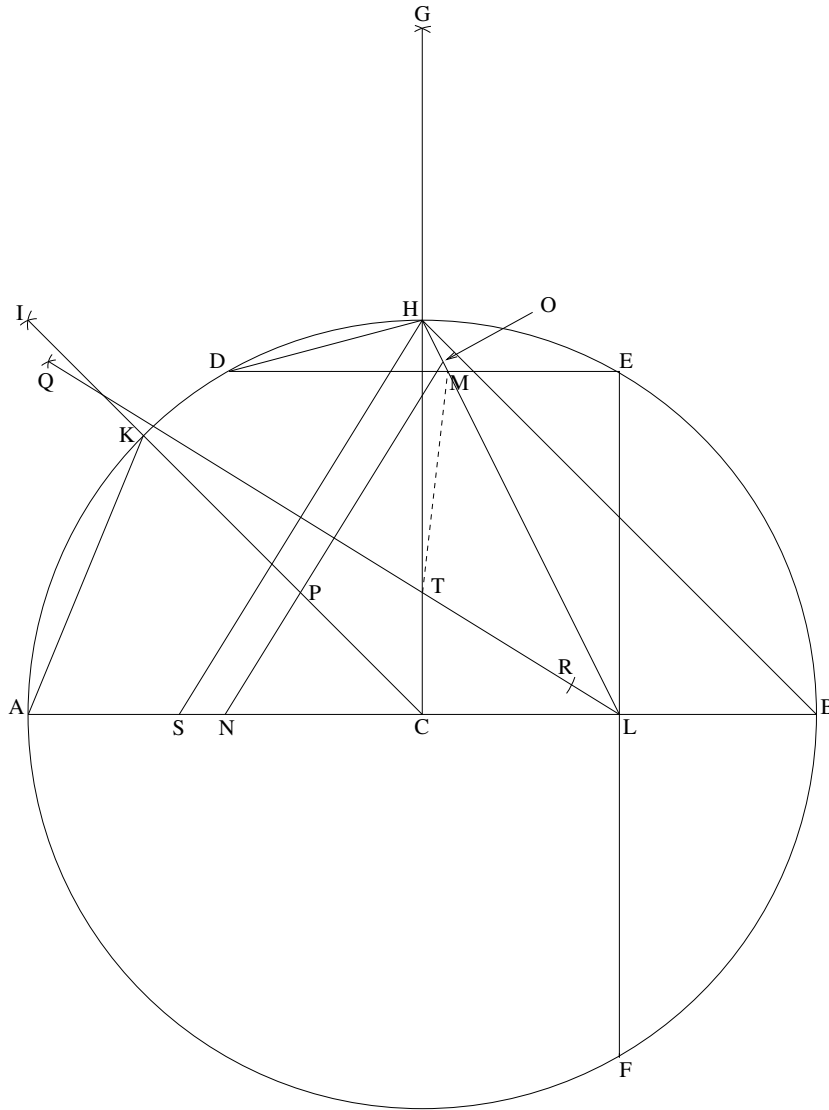
### Vier-en-Twintigste Voorstel.

*Om in een Circkel alle in-geschreven ghelijck-zijdighe figuyrs zijden te vinden, van den driehoek, tot den twaelfhoek toe; behoudende den Passer de selve wijdte daer den Circkel mede beschreven is.*

In den ghegheven Circkel, zy den Diameter AB: Het Centrum C.  
 Voor eerst maect uyt A, en B, de punten D, E, F; en uyt D, E, het cruys-punt G; dan treckt GC, die snijdt den omloop in H; maect noch uyt de punten A, H, het cruyspunt I; en treckt IC, die snijdt den om-loop in K; treckt noch EF, die snijdt CB, in L; treckt voorts HB, HL, AK, DH; en de snijding van HL, en DE, teyckent met M; daer nae maect uyt het punt L, de punten N, O; en treckt de lini NO; dese snijdt KC, in P; Voorts uyt de punten N, O, maect het cruys-punt Q; dan treckt QL: Noch maect uyt H, in QL, ’t punt R; en dan uyt R, in AC, ’t punt S: En ten lesten getrocken HS.

---

<sup>65</sup>Wils [1654] p. 62-63.



Aldus hebben wy gevonden de begeerde Zijden; en de zijn,

$$\left\{ \begin{array}{l} EF, \\ HB, \\ HS, \\ DE, \\ EL, \\ AK, \\ PO, \\ SC, \\ DM, \\ \text{of } MT, \\ \text{of } KP, \\ DH, \end{array} \right\} \text{ een zijde des } \left\{ \begin{array}{l} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{array} \right\} \text{ Hoecks.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{165} \\ \frac{1}{160} \\ \frac{1}{232} \\ \frac{1}{1170} \end{array} \right\} \text{ te lang.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{160} \\ \frac{1}{232} \\ \frac{1}{1170} \end{array} \right\} \text{ te kort.}$$

NOTA.

Dat in desen de Zijden des 7, 9, en 11 Hoecx, (van welke geen volkomen Geometrische vindingh bekend is,) soo naer als door eenighe ander ordinaris middel ghevonden worden.

De vraag is om in een cirkel alle zijdes van de ingeschreven driehoek tot en met de twaalfhoek te tekenen, zonder daarbij de benen van de passer van hoek te veranderen. Dit is een wat curieus probleem. Allereerst omdat dit de enige propositie van de 24 is waar Wils geen bewijs bij geeft. Verder is het wat vreemd dat als voorwaarde wordt gesteld dat de passer niet van boog mag veranderen, maar geheel ongebruikelijk was dat niet. Het levert nauwkeurige constructies op voor de zijdes van regelmatige veelhoeken in de cirkel.

Wils is niet helemaal zorgvuldig in zijn uitleg. Hij vergeet te melden dat het punt  $O$  op de lijn  $HL$  ligt,  $N$  op  $AC$ , en hij trekt, althans in de bijbehorende figuur, nog de stippellijn  $MT$ .

Omdat Wils zelf het bewijs achterwege laat, is het goed om even te kijken naar de constructie, en de juistheid te controleren. De constructie die Wils geeft is, behalve de drie genoemde omissies, verder wel goed te begrijpen. Vervolgens geeft hij in de tabel aan welke lijnstukken in de figuur overeenkomen met welke ingeschreven veelhoeken.

Zonder verder bewijs wil ik met Wils constateren dat  $EF$  de zijde van de driehoek is,  $HB$  de zijde van de vierhoek,  $DE$  de zijde van de zeshoek en  $DH$  de zijde van de twaalfhoek. Dit zijn elementaire, overbekende constructies. Ook van  $AK$  is heel gemakkelijk in te zien dat het de zijde van de achthoek is;  $I$  is immers getekend vanuit  $A$  en  $H$ , en dus  $\angle ACI = 45$  en  $AK$  is dus de zijde van de ingeschreven achthoek.

Dan kijken we naar de zijde van een ingeschreven vijfhoek.  $N$  en  $O$  liggen op de cirkel met middelpunt  $L$ .  $Q$  is het snijpunt van de twee cirkels met middelpunt  $O$  en  $N$ . Daarom  $LN = NQ = QO = OL = 1$ , dus  $LNQO$  is een ruit. De lijn  $LQ$  deelt  $\angle NLP$  dus doormidden.  $H$  en  $S$  liggen in het verlengde van  $LO$  respectievelijk  $LN$ , en  $R$  ligt op de lijn die  $\angle NLO$  doormidden deelt. Omdat  $RS$  en  $RH$  even lang zijn (door de constructie) zien we dat  $HO = NS$ . (Immers, als  $HO$  langer is dan  $NS$  (maar wel  $H$  op het verlengde van  $LO$ !) dan nooit  $RH = RS$ .)

Nu we weten dat  $NS = HO$ , zien we dat  $LS = LH$ . (Wils heeft de constructie van het punt  $R$  nodig om te zorgen dat  $LS = LH$ ; hij kan immers niet vanuit  $L$  het punt  $H$  omcirkelen tot punt  $S$  op  $AC$ ; dan moet hij de passerboog veranderen wat tegen de voorwaarde van de propositie is.)

Als de straal van de cirkel 1 is, dan zien we met Pythagoras eenvoudig dat  $LS = LH = \sqrt{1^2 + (\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$ . Vervolgens vinden we dat  $CS = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$ , en met Pythagoras vinden we dat  $HS = \sqrt{(\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2})^2 + 1^2} = \sqrt{2\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = 2 \cdot \sin 36^\circ$ .  $HS$  is dus de zijde van de vijfhoek.

Nu is het vrij eenvoudig om in te zien dat  $SC$  de zijde van een ingeschreven regelmatige tienhoek is. Immers, met Pythagoras zien we dat  $SC = \sqrt{(4 \cdot \sin^2 36^\circ - 1)}$  en dat is twee keer de sinus van 18 graden, dus is  $SC$  de zijde van een ingeschreven regelmatige tienhoek.

Over blijven nu de zijdes van de regelmatige 7-, 9- en 11-hoek. Wils zegt daar zelf al over dat er geen ‘volkomen geometrische vindingh bekend is’, en hij benadert dus deze waarden, en geeft er soms een foutmarge bij.

De zijde van de ingeschreven regelmatige zevenhoek benadert hij met  $EL$ .  $EL$  is de helft van  $EF$ , dus  $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,86603$ . De zijde van een zevenhoek is  $2 \cdot \sin \frac{360^\circ}{14} \approx 0,86777$ . De afwijking is dus ongeveer  $0,00174$ . We kunnen het niet vergelijken met de afwijking van Wils, want de afwijking staat niet gegeven voor de zevenhoek. Overigens is dit een klassieke constructie voor de bepaling van een zevenhoek.

Wils zegt dat de zijde van de ingeschreven regelmatige negenhoek  $\frac{1}{165}$  kleiner is dan  $PO$ .  $PO$  kunnen we uitrekenen als het verschil van  $NO$  en  $NP$ .  $LO = LN = 1$  en we zien dat  $\angle NLO = \angle HLC = \arctan 2$ , dus  $NO = 2 \cdot \sin(\frac{\arctan 2}{2}) \approx 1,05146$ .

We weten dat  $\angle NCP = 45^\circ$  en dat  $\angle CNP = 90^\circ - \angle CLT \approx 58,28^\circ$ .  $\angle NPC \approx 180^\circ - 45^\circ - 58,28^\circ \approx 76,72^\circ$ . We weten dat  $NC = \frac{1}{2}$ , en met de sinusregel zien we  $\frac{\frac{1}{2}}{\sin 76,72^\circ} = \frac{NP}{\sqrt{2}}$ , dus dat  $NP \approx 0,36327$ , waarna  $OP \approx 1,05146 - 0,36327 \approx 0,688189$ .

Dit is ongeveer  $\frac{1}{240}$  groter dan de zijde van een negenhoek, want die is  $2 \cdot \sin(\frac{360^\circ}{18}) \approx 0,68404$ . Maar, de afwijking is zeer afhankelijk van de afronding. Als je afrondt op twee cijfers achter de komma, vind je  $PO = 0,69$ , en dan is  $PO \frac{1}{168}$  te lang. Net zo belangrijk is het gebruik van de sinustabel. Deze tabellen, bijvoorbeeld die van Stevin, ronden af op graden en minuten. In die keuzes zit ook een afrondingsfout, omdat de hoeken niet altijd een rond aantal minuten hebben. Verder moet worden opgemerkt dat ik hier in de berekening een arctangens heb gebruikt; dat is een modern begrip. Wils moet een andere manier gehad hebben om de afwijking vast te stellen.

Als we kijken naar de zijde van de 11-hoek, zien we dat Wils zegt dat  $KP$  de nauwkeurigste benadering is, namelijk  $\frac{1}{1170}$  te kort. De berekening en afwijking van  $DM$  en  $MT$  (de andere twee benaderingen voor de zijde van de ingeschreven 11-hoek) laat ik daarom buiten beschouwing.  $KP = 1 - PC$ , en  $PC$  berekenen we uit de sinusregel:  $\frac{\frac{1}{2}}{\sin 76,72^\circ} = \frac{PC}{\sin 58,28^\circ}$ , dus  $PC \approx 0,4370$ , en  $KP \approx 0,5630$ . De zijde van een 11-hoek is  $2 \cdot \sin(\frac{360^\circ}{22}) \approx 0,5635$ . Met deze afrondingen is  $KP$  ongeveer  $\frac{1}{2000}$  te kort. Ik heb geprobeerd om te achterhalen hoe Wils afgerond moet hebben, en welke tabel hij gebruikt heeft, maar ik kom niet op een verschil van  $\frac{1}{1170}$  uit. Er zijn bij deze kleine foutmarges te veel zaken van invloed om dat te achterhalen. Wat overigens ook goed mogelijk is, is dat Wils beter dan ik in staat was om de waarden voor  $KP$ ,  $PO$  en  $EL$  exact uit te rekenen, en dat met een preciezere methode ook de afwijking beter te bepalen is.

Wat overblijft is het resultaat van deze propositie. Wat het oplevert zijn de al bekende constructies van zijdes van ingeschreven regelmatige veelhoeken, maar dan met een vaste stand van de passer te tekenen. Verder hebben we benaderingen voor de zijdes van de inschreven 7-, 9- en 11-hoek, die zoals we gezien hebben inderdaad vrij nauwkeurige benaderingen zijn van de exacte waarden.



## 6.4 Pagina 64-71

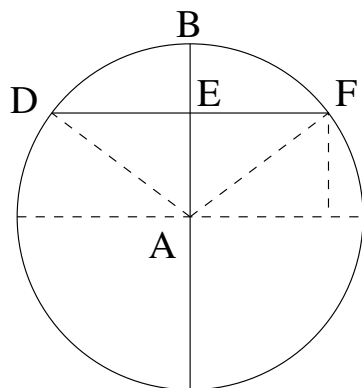
In dit hoofdstuk bespreekt Wils vier vraagstukken, waarvan ik de middelste twee wil behandelen. Dit zijn allebei vraagstukken die komen uit twee bekende boeken uit de Nederlandse wiskunde; de *Geometrische Fondamenten* van Ludolf van Ceulen (1540-1610) en de *Practijcq des Lant-metens* van Johan Sems (1572 - ?1656) en Jan Pietersz. Dou (1572 - 1635).

### 6.4.1 Vraagstuk van Ludolf van Ceulen

Zonder verdere aankondiging gaat Wils hier over tot de beantwoording van een probleem dat hij toeschrijft aan Ludolf van Ceulen, en gevonden heeft in diens *Geometrische Fondamenten*. Inderdaad is in Ludolf van Ceulens *De Arithmetische en Geometrische fundamenten* (zoals de volledige titel luidt) dit vraagstuk te vinden, op pagina 271.<sup>66</sup> Hij neemt Van Ceulens tekst niet woordelijk over, maar hij verandert niets aan het probleem. Het probleem betreft een cirkel met diameter 20000, waarin een boog en diens sinus zich verhouden als 7 : 6. Gevraagd wordt naar de waarde van de sinus en de boog, alsmede naar de oppervlakte van het cirkelsegment *DBFE* (zie plaatje hieronder). Letterlijk is Wils' tekst als volgt:

### Vraegh-Stuck.

*Gestelt tot besluyt der Geometrische fundamenten, door  
Mr. Ludolf van Ceulen*



In desen Cirkel doet den Diameter, 20000, en den boog BF, heeft een reden tegen sijn Sinus EF, als 7, tegen 6: Vraghe naer den Sinus; en den boogh midts naer de grootte des stuckx, DBFE.

't WERCK.

Ick sie in de tafelen der Cirkel-bogen, welke boog tot sijn Sinus de gestelde reden (als van 7, tot 6) ten naesten heeft; En vinde de selve op 54, gr. 15 minut (als van 9468411, tot 8115740,) een weynigh te groot: Maer op 54 - 12, (welck in de selve Tafelen de naeste aen d'ander is) veel te kleen: alsoo dat ick sie de begeerde te sullen vallen tusschen 54 - 15 ende 54 - 14; soecke dan de langhde des booghs van 54 - 14, aldus; 90 grad. gheeft 15707963; wat 54 - 14? komt 9465502 voor de ghemelde boog; en sijn Sinus is 8114040: voorts 7 geeft 6; wat de boog van 54 - 15; (als 9468411?) ende die van 54 - 14; (als 9465502?) komt van d'eerste,  $8115780\frac{6}{7}$ ; dat 's  $40\frac{6}{7}$  meer als den Sinus: Van d'ander,  $8113287\frac{3}{7}$ , dat 's  $752\frac{4}{7}$ , min als den Sinus: Daerom, ghelijck  $40\frac{6}{7}$ , tot  $752\frac{4}{7}$ ; alsoo 't ghedeelte der minute, (nae ghenoech) onder 54 - 15, tot dat boven 54 - 14: Komt dan voor de Boogh BF, 54 - 14 -  $56\frac{2528}{2777}$ . Dat 's voor de begheerde DBF,  $108 - 29 - 53\frac{2279}{2777}$ . Ende is langh  $18936\frac{522}{1000}$ . En

<sup>66</sup>Van Ceulen [1615].

den Sinus EF, doet  $8115\frac{652}{1000}$ . Nu ghemenghuldicht de langde BF, als  $9468\frac{251}{1000}$ ; met BA, 10000; Komt voor 't stuck ADBF, 94682610. En dan den Sinus EF,  $8115\frac{652}{1000}$ , ghemenghuldicht met sijn Sinus complement (even aen AE,) als  $5842\frac{619}{1000}$ ; Komt voor den driehoek ADF,  $47416662\frac{572588}{1000000}$ : Welcke genomen van 't stuck ADBF, blijft voor de begheerde groote des stuck DBFE,  $47265947\frac{427412}{1000000}$ . Waer af 't bewijs door 't werck openbaer is.

Wat Wils hier doet is vrij duidelijk. Hij gaat eerst op zoek naar een boog en een sinus die de verhouding 7 : 6 hebben. Hij vindt als beste benadering de boog en de sinus van 54 graden en 15 minuten; inderdaad zijn de boog en de sinus horend bij die hoek zoals hij zegt 9468411 en 8115740. Blijkbaar beschikt hij over een sinustabel waar de booglengtes per drie minuten in staan, omdat hij vervolgens zegt 'maer op 54 - 12, (welck in de selve Tafelen de naeste aen d'ander is) veel te kleen: alsoo dat ick sie de begeerde te sullen vallen tusschen 54 - 15 ende 54 - 14'. Eerst lijkt het dat de 14 een drukfout is, maar vervolgens gaat Wils de sinus van 54 graden en 14 minuten berekenen. Hij bepaalt eerst de lengte van de boog van 54 graden en 14 minuten; daarvoor berekent hij eerst de boog van 90 graden (bij een cirkel met diameter 10000000 is dat inderdaad 15707963), om vervolgens met een verhouding te vinden dat de gezochte boog 9465502 is. Merk op: in het vraagstuk van Van Ceulen staat een cirkel met diameter 20000, maar Wils rekt dus met drie nullen extra. Wils geeft ook nog de sinus van 54 graden en 14 minuten: die is 8114040. Deze sinus is in alle zeven cijfers correct, en dus waarschijnlijk niet geïnterpoleerd. Als hij lineair had geïnterpoleerd ligt het voor de hand dat hij de sinus van  $54^{\circ}15'$  en  $54^{\circ}12'$  had gebruikt. Dan had hij vermoedelijk  $\frac{2.8115740+8110638}{3} = 8114039$  gevonden, een waarde die nauwelijks verschilt, maar toch in de laatste decimaal afwijkt. Omdat voor een verschil tussen 39 en 40 twee getallen veranderd moeten worden, lijkt me de kans dat het een drukfout betreft nihil. Waarschijnlijk was zijn sinustabel dus wel op de minuut nauwkeurig.

Vervolgens vermenigvuldigt Wils beide bogen (9468411 en 9465502) met  $\frac{6}{7}$ , en kijkt hij hoeveel die getallen verschillen van hun respectivelijke sinussen.  $\frac{6}{7}.9468411 = 8115780\frac{6}{7}$ . Dat is  $40\frac{6}{7}$  meer dan de sinus van  $54^{\circ}15'$ .  $\frac{6}{7}.9465502 = 8113287\frac{3}{7}$ , en dat is  $752\frac{4}{7}$  minder dan de sinus van  $54^{\circ}14'$ . Wat Wils dan doet is lineair interpoleren, dus 'ghelijck  $40\frac{6}{7}$ , tot  $752\frac{4}{7}$ ; alsoo 't ghedeelte der minute, (nae ghenoech) onder 54 - 15, tot dat boven 54 - 14'. Daarom is boog BF 54 graden, 14 minuten en  $\frac{752\frac{4}{7}}{40\frac{6}{7}+752\frac{4}{7}}.60 = 56\frac{2528}{2777}$  seconden.

Vermenigvuldigd met twee geeft dat voor boog DBF 108 graden, 29 minuten en  $53\frac{2279}{2777}$  seconden. De booglengte is dan  $\frac{DBF}{360}.20000000.\pi = 18936\frac{523}{1000}$ . Merk op: Wils vergist zich dus in de afronding van het derde cijfer achter de komma.

Daarna vermenigvuldigt Wils boog BF met BA om zo de oppervlakte van ADBF te krijgen, want ( $ADBF = r.r.\pi.\frac{\angle DAF}{360} = AD.2r.\pi.\frac{\frac{1}{2}\angle DAF}{360} = AD.BF.$ ) Vervolgens berekent hij de oppervlakte van ADF door EF met AE te vermenigvuldigen. Dit doet hij met de afgeronde waardes die hij voor EF en AE heeft berekend. (Als je doorreket met niet afgeronde antwoorden, vind je een iets ander antwoord.) Vervolgens is het stuk DBFE, de te vinden oppervlakte, gelijk aan de oppervlakte van ADBF min de oppervlakte van ADF. De cijfers die Wils geeft kloppen allemaal; dus  $DBFE = 47265947\frac{427412}{1000000}$ .

Inderdaad is deze werkmethode juist; Wils formuleert dat als volgt: ‘Waer af ’t be-  
 wijjs door ’t werck openbaer is.’ De enige kanttekening die erbij moet worden gemaakt is  
 dat er een heel kleine fout ontstaat door het interpoleren voor het juiste aantal seconden.

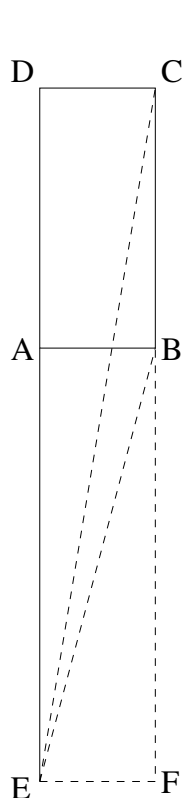
### 6.4.2 Vraagstuk van Sems en Dou

Na de behandeling van dit vraagstuk van Van Ceulen, bekijkt Wils een probleem dat  
 opgenomen is in een boek van Sems en Dou, de *Practijcq des Lant-metens*. Dat hij  
 als landmeter dit boek gelezen heeft is niet verrassend. In Sems & Dou [1600] is dit  
 vraagstuk te vinden op wat pagina’s 307 en 308 moeten zijn.<sup>67</sup>

Het probleem is als volgt: Zij  $ABCD$  een rechthoek met korte zijden  $AB$  en  $DC$  met  
 lengte 9 en lange zijden  $AD$  en  $CB$  met lengte 19. Vind een punt  $E$  op het verlengde van  
 $AD$  zodanig dat de zijde  $AB$  vanuit  $E$  drie keer zo lang lijkt als  $CB$ . Wils formuleert  
 dit probleem als volgt:

### Werckinghe,

*Op een vraegh-stuck, ghestelt aen ’t eynde van de Practijcq des Lant-metens  
 uyt-gegeven by Iohan Sems, ende Ian Pietersz. Dou: Welcke vraegh-stuck  
 aldus mach ghestelt worden.*



*’t Gegeven.* Laet  $ABCD$  een recht-hoekigh vier-hoek wesen: Diens  
 zijden  $AB, DC$ , elck langh zijn 9 Roeden, ende  $AD, BC$  elck 19 Roeden:  
 Ende  $DA$ , zy oneyndelijck voort ghetrocken.

*’t Begeerde.* Wy moeten vinden hoe wijt van  $A$  een punt zy (in de voort-  
 ghetrocken  $DA$ ) uyt welke  $AB$ , schijnt driemael soo langh te wesen,  
 als  $BC$ .

’t Werck

Ick segh  $AB$  9, geeft  $BC$  19, wat 10000000? (zijnde des ronts halfmiddel-  
 lijn der tafel die wy gebruycken sullen) komt 21111111, soeck daer na  
 (in de tafel der Raeck-lijnen) twee getalen, waer van ’t een 21111111  
 grooter zy als ’t ander, ende dat haer bogens verschil zy even aen de  
 helft van ’t vier-en-deel rondt-schil des grootsten getals boogh. Om  
 dan sulcke getalen te vinden: Ick neem twee getallen (te weten Raeck-  
 lijnen) welcker bogens verschil even is aen de helft van ’t vierendeel  
 rond-schil des grootsten getals boog. Als (by voorbeelt) de Raeck-lijn  
 van 60 ende van 70 trappen zijnde 17320508, ende 27472777, treck de  
 minste van de meeste blijft 10154269, en moste 21111111 wesen. Neemt  
 derhalven 2 meerder getalen (na de voorschreven orden) als de Raeck-  
 lijn van 78, ende van 82, Trappen, zijnde 47046295, ende 71153706,  
 Treck (wederom) de minste van de meeste blijft 24107411, ende moeste

<sup>67</sup>Er wordt niet doorgenummerd tot de laatste pagina’s; het vraagstuk bevindt zich helemaal achterin het boek.

maer 21111111 wesen. Daerom neem ick (wederom) twee naerder ghetalen, daer me werckende als vooren: 't Welck ick (altijt naerderende) vervolge, tot dat ick hebbe twee getalen, welckers verschil (na genoeg) even aen het voorsz. getal is. Ende vinde die te wesen de Raeck-lijn van 76 trap. 15 eerst. 18 tweed. en van 80 trap. 50 eerst 12 tweed. zijnde 40882117, ende 61993227, segge dan; half Middel-lijn 10000000, geeft AB 9, wat raeck-lijn van 76 tr.15 eerst. 18 tweed. als 40882117? Komt  $36 \frac{7939053}{10000000}$ . Daerom gemeten van A, (inde voort getrocken DA)  $36 \frac{7939053}{10000000}$  Roeden, als tot E: Ick segge E, 't begeerde punt te wesen.

't *Bereytsel van 't Bewijs*. Laet getrocken worden EF, even ende even-wijdigh met AB; ende dan BF, BE, ende CE.

### 't Bewijs

Ghelijck half Middel-lijn tot AB, alsoo minste Raeck-lijn, tot AE, deur 't werck. Maer EF, is even aen AB, deur 't bereydtel: ende BF, even aen AE, deur het 33. *Voorstel des 1. Boecx van Euclides*. Daerom gelijk half Middel-lijn tot EF, alsoo minste Raeck-lijn tot BF. Ende deur overanderde reden, ghelijck half Middel-lijn tot minste Raeck-lijn, alsoo EF, tot FB. Voorder, gelijk half Middel-lijn tot 't verschil der twee Raeck-lijnen, alsoo AB, of EF, tot BC, deur 't werck: Ende deur versaemde reden, gelijk half Middel-lijn tot minste Raeck-lijn met 't verschil der Raeck-lijnen (dat is tot meeste Raeck-lijn) alsoo EF, tot FB, met BC, (dat is tot FC,) soo is dan den hoeck BEF, minste Raeck-lijns hoeck: CEF, meeste Raecklijns hoeck: CEB, schil-hoeck, der twee Raecklijns hoecken: CED, vier-en-deel rond-schil des meesten Raeck-lijns hoeck. Maer den schil-hoeck der Raecklijns hoecken (als CEB) is even aen de helft van 't vier-en-deel rondt-schil des meesten Raeck-lijns hoeck, (als CED) deur 't werck: Dat is gelijk 1, tot 2, alsoo den hoeck CEB, tot den hoeck CED. Ende deur versaemde reden, gelijk 1 tot 2 en 1, (dat is tot 3,) alsoo den hoeck CEB, tot den hoeck CED, met den hoeck CEB, dat is tot den hoeck DEB.) Waer uyt blijkt den hoeck DEB, (van welcke de lini AB, begrepen wort) driemael so wijt te wesen, als den hoeck CEB, (van welcke de lini BC, begrepen wordt.) Ende volght dan, dat uyt het punt E, de lini AB, schijnt driemael soo langh te wesen als BC.

Het punt E, dan, is het begeerde punt, 't welck wy bewijsen moesten.

### Merckt.

Dat wy in 't werck, 't verschil der twee Raeck-lijnen te klein vinden de twee meerder; ende te groot vindende twee minder Raeck-lijnen genomen hebben: Welcke regel, wel soo veel als tot 't ghebruyck noodigh schijnt te wesen, ghemeen is, maer niet over de heele tafel. Want zijnde de minste Raeck-lijn van 9 trappen, 33 eersten, afklimmende, soo keert sich die orden: sulcx dat (na de voorschreven orden) de minste Raeck-lijn van 9 trappen, 33 eersten, (ofte daer ontrent) wesende, het verschil der Raeck-lijnen ten alder minsten is.<sup>68</sup>

---

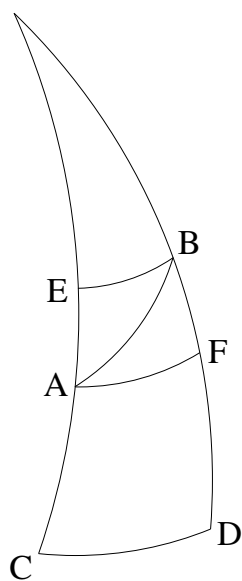
<sup>68</sup>Wils [1654] p. 67-69.



‘ellips’ de woorden ‘Brandt-snede’, ‘Wassende snede’ en ‘Langh-rondt’ gebruikt. Wils behandelt drie constructies zonder bewijs, maar de getallen die hij geeft kloppen en de plaatjes ook. Maar het voegt niet echt iets toe aan de verhandelingen over kegelsnedes die er in die tijd al waren. Het ziet er meer uit als een kleine aantekening bij de basisprincipes van enkele kegelsnedes. Ook valt moeilijk in te schatten of het misschien deel uitmaakte van een groter geheel.

## 6.6 Pagina 83-92

Het hoofdstuk op pagina 83 tot en met 92 bestaat uit de zogenaamde *Rekeningh Der Krom-streecken*. Een ‘krom-streeck’ is wat wij vandaag een loxodroom noemen; een lijn op de bol die alle meridianen onder dezelfde hoek snijdt. De wiskunde die in dit deel van het boek wordt behandeld, is ook terug te vinden bij Simon Stevin. Stevin behandelt de stof veel uitgebreider en duidelijker, in het tweede deel van het eerste boek van zijn *Wisconstige Gedachtenissen*<sup>71</sup>, dat *Vant Eertklootschrift* heet. Het vierde boek van dat *Eertklootschrift*, van pagina 87 tot 152, geeft een overzicht van hoe je moet rekenen met deze ‘krom-streecken’. Stevin behandelt in dat boek ook enkele problemen op de bol, die overeenkomen met de zeven problemen die Wils in dit deel van zijn boek behandelt.



Al die problemen hebben betrekking op dezelfde situatie (zie het plaatje links hiernaast). Wils zegt dat er vijf gegevens van belang zijn: de geografische breedte van  $A$  (in het plaatje  $AC$ ), de geografische breedte van  $B$  ( $BD$ ), het verschil in geografische lengte van de punten  $A$  en  $B$  ( $CD$ ), de hoek van de loxodroom die door  $A$  en  $B$  gaat ( $\sphericalangle BAE$ ), en de afstand tussen  $A$  en  $B$  over die loxodroom ( $AB$ ). Verder zijn in de figuur  $EAC$  en  $BD$  stukken van de meridianen door de plaatsen  $A$  en  $B$ .  $CD$  is een boog op de evenaar.  $AF$  en  $BE$  zijn bogen van de parallelcirkels door  $A$  en  $B$ . Wils veronderstelt telkens dat twee van de vijf gegevens onbekend zijn, en laat zien hoe je de onbekenden uit de overige drie kunt halen. Stevin doet dat ook op de pagina's 144 tot en met 152 van zijn boek.<sup>72</sup>

Wils gebruikt in zijn zeven problemen telkens dezelfde getallen om de voorbeelden met de verschillende onbekenden langs te lopen. Dat maakt het geheel betrekkelijk saai, en het is ook niet zo dat deze pagina's dienen als basis voor de berekeningen die hij straks gaat maken in het deel dat daadwerkelijk *Hemel-klootsche Werck-stucken* heet. Dit deel uit het boek laat ons alleen zien dat hij vermoedelijk Stevins werk goed bestudeerd had, hoewel hij niet naar Stevin verwijst. De termen die hij gebruikt voor de verschillende gegevens op de bol ('breede', 'langde-schil', 'krom-streeck' en 'verheydt' (afstand)) zijn precies de woorden die Stevin gebruikt. In de volgende paragraaf zullen we zien dat ook het laatste deel van Wils' boek wat inhoud en taal betreft overeenkomsten met Stevins werk heeft.

<sup>71</sup>Stevin [1608].

<sup>72</sup>Zie voor een bespreking van Stevins behandeling van de loxodromen Dijksterhuis [1943] p. 177 e.v. Stevins *Eertklootschrift* is digitaal beschikbaar via de Universiteitsbibliotheek van Delft (<http://www.library.tudelft.nl>).

## 6.7 Pagina 93-152

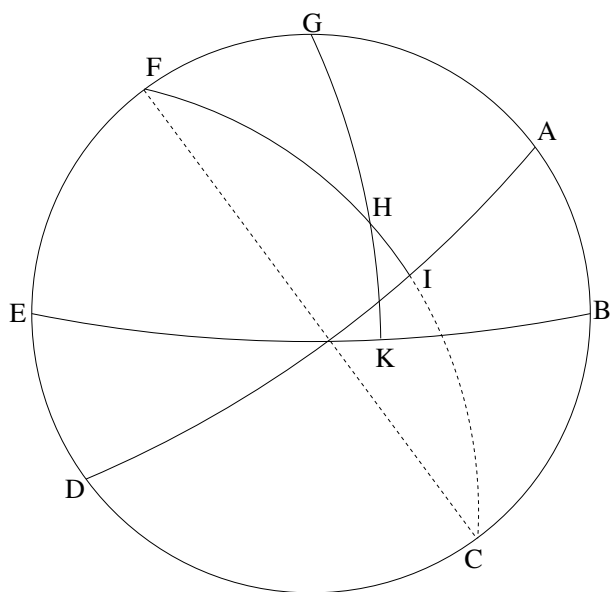
Wils behandelt in dit grote laatste deel van zijn boek 12 *Hemel-klootsche Werck-stucken*; 12 problemen in de boldriehoeksmmeetkunde. Het woord 'hemel' is niet voor niets onderdeel van de titel; alle problemen hebben betrekking op het waarnemen van hemellichamen en het uitrekenen van hun posities of het berekenen van de positie van de waarnemer aan de hand van de positie van de waargenomen hemellichamen.

Dit hoofdstuk heeft een aparte vermelding gekregen in de (onder)titel van het boek van Wils: ...*Bestaende in eenighe Meet-konstighe ende Hemel-klootsche aenteyckeningen, elck met hare verklaringhen ende bewijsen*. Het lijkt me dat deze plaats op het voorblad vooral een kwantitatieve oorzaak heeft: het is de grootste aaneengesloten passage over een onderwerp in dit boek.

Ik ben geen expert op het gebied van sterrenkunde, en ik acht mijzelf dan ook ongeschikt om Wils' werk te plaatsen in een brede context, of om uitspraken over de historische of sterrenkundige waarde ervan te doen. Ik zal nu een van de twaalf problemen kort bespreken, om zo een inzicht te geven in het soort problemen dat Wils hier behandelt.

### Derde Werck-stuck.

*Wesende bekent de hooghde boven den sicht-eynder, en de evenaer-brede der Son, of eenige Ster, met de verheffingh des As-punts: de streeck te vinden.*



*'t Gegeven.* Laet ABCDEFG, een middach-rond zijn; AD, den evenaer; BE, den sicht-eynder, F; ('t een als neem ick) 't Noorder, en C 't Zuyder As-punt; G, het top-punt; H, de plaets der Son, hebbende noortlicke brede (als HI,) 23 tr.30. HK, de hooghde boven den zicht-eynder zy 42 tr. en de verheffingh des As-punts F, (als EF,) 52 trap. 20. soo is dan FH, 66 trap. 30: GH, 48 trap. en FG, 37 trap. 40.

*'t Begheerde.* Wy moeten de streeck, (dat is den kloot-hoeck KGB, of den boogh KB,) vinden.

Ick menichvuldigh hoeck-maet van GF, met hoeck-maet van GH, als 6111, met 7431, komt 45410841. Daer af soo veel talteyckens gesneen als recht-hoecks hoeckmaet talpunten heeft, blijft ('t weck ick eerste getal noeme,)	4541.
Trecke dan de minste deser twee bogen, FG, GH, van de meeste, blijft 10 tr. 20; welckers hoeck-maet-pijl als	162,
Ick trecke van de hoeck-maet-pijl des booghs EH, als	6012. <sup>73</sup>
Blijft (welck ick tweede getal noeme,)	5850.
Segge voorts, eerste getal	4541,
Geeft recht-hoecks hoeck-maet	10000;
Wat tweede getal	5850?
Komt hoeck-maet-pijl	12883.
Diens boogh voor EK	106 tr. 45,
Blijft voor de begeerde boogh KB	73 tr. 15.
Waer van 't bewijs is af te nemen uyttet 30 voorstel der klootsche drie-hoecken van S. Stevin. <sup>74</sup>	

De vraagstelling van Wils is, in moderne bewoordingen, als volgt: Als van de zon, of een andere waar te nemen ster, bekend is hoe hoog deze boven de horizon staat, wat zijn declinatie is, en op welke breedtegraad de waarneming wordt gedaan, wordt gevraagd om uit te rekenen wat het azimut is, dat wil zeggen, de richting van de zon.

In het plaatje is de situatie weergegeven als volgt: Zij  $ABCDEFGH$  de meridiaan,  $AD$  de hemelevenaar,  $BE$  de horizon,  $F$  de hemelnoordpool,  $C$  de hemelzuidpool,  $H$  de zon,  $HI$  de declinatie,  $GA$  de geografische breedte van de waarnemer en  $KB$  het te vinden azimut.

Ook in de praktijk is de oplossing van dit probleem nuttig; je kunt uit drie waarden die je meestal goed kunt bepalen (de hoogte van de zon, zijn declinatie en de breedtegraad waarop je je bevindt) de richting van de zon bepalen, wat bij navigeren goed van pas kan komen.

Wils lost dit probleem op met boldriehoeksmeetkunde, en hij gebruikt daarvoor de proposities van Simon Stevin, die in zijn *Wiskonstige Gedachtenissen* een heel boek aan boldriehoeken besteedt.<sup>75</sup> Wils wil de lengte van boog  $KB$  weten, en daarvoor het is voldoende om de groote van  $\sphericalangle FGH$  te weten; we weten immers dat  $\widehat{KB} = \sphericalangle KGB = 180^\circ - \sphericalangle FGH$ . Bij lang niet alle problemen die Wils behandelt verwijst hij naar de precieze propositie van Stevin die hij gebruikt, maar hier doet hij dat wel. De 30e propositie van Simon Stevin<sup>76</sup> waar hij aan refereert zegt over boldriehoek  $FGH$  dat, als de straal van de cirkel 1 is,

$$(\sin \widehat{FG} \cdot \sin \widehat{GH}) : 1 = (\cos(\widehat{GH} - \widehat{FG}) - \cos \widehat{FH}) : 1 - \cos(\sphericalangle FGH)$$

<sup>73</sup>Er staan twee fouten in deze regel. EH moet FH zijn, en de waarde 6012 moet 6013 zijn. In beide gevallen is vermoedelijk sprake van een drukfout.

<sup>74</sup>Wils [1654] p. 96-97.

<sup>75</sup>Stevin [1608] Deel 1, p. 183-326.

<sup>76</sup>Stevin [1608] Deel 1, p. 227.



We hebben dan alleen nog de door Wils al verstrekte gegevens nodig:

$$\widehat{FG} = 90^\circ - 52^\circ 20' = 37^\circ 40'$$

$$\widehat{GH} = 90^\circ - 48^\circ = 42^\circ$$

$$\widehat{FH} = 90^\circ - 23^\circ 30' = 66^\circ 30'$$

Hierna is invullen een koud kunstje, en zien we dat  $\sphericalangle FGH = 106^\circ 45'$ . Daaruit volgt dat  $\sphericalangle KGB = \widehat{KB} = 73^\circ 15'$ ; dezelfde waarde als Wils vindt.

Dit is een eenvoudig voorbeeld. Eenvoudig omdat met één verhouding de gevraagde boog gevonden kan worden, en omdat Wils er dus bij zegt welke propositie van Stevin zijn handelswijze rechtvaardigt. Na Wils' vierde probleem verdwijnen de verwijzingen naar Stevin, en wordt het werk lijviger. De voorbeelden worden ingewikkelder, en in bijvoorbeeld het vijfde probleem worden drie verschillende mogelijkheden doorgerekend waarbij achtereenvolgens de 27e, 23e, 21e, 22e en 26e propositie van Stevin nodig zijn – sommige meer dan eens – om uiteindelijk tot de gevraagde waarde te komen. Dat moet je als lezer zelf uitzoeken dus, want Wils geeft die uitleg niet meer.

Daarom doet de zinsnede 'elck met hare verklaringhen ende bewijsen' uit de titel van het boek wat vreemd aan. Wils beschrijft in dit deel telkens een probleem, en vervolgens een methode om dat probleem aan te pakken. Een bewijs voor die aanpak geeft hij meestal niet. Toch kun je deze 60 pagina's doorwerken zonder iets van de boldriehoeken te weten. Als je gewoon braaf doet wat Wils voorschrijft, kom je vanzelf uit bij de waarde die je zocht. Je hebt daarvoor alleen maar diverse tabellen nodig, en die waren veelvuldig voorhanden in die tijd. Je moet er dan wel op vertrouwen dat Wils' methodes correct zijn. Voorzover ik heb kunnen narekenen is dat ook zo. Hij past de formules van Stevin goed en veelvuldig toe, en doet niets wat niet mag.

Wils gaat bij het oplossen van de problemen uit van een bol met straal 10000, wat waarschijnlijk aansloot bij de sinus- en cosinustabellen die hij gebruikte. Toch waren er tabellen in die tijd die hem de mogelijkheid hadden gegeven preciezer te zijn. Hij had ook een straal van 10000000 kunnen nemen, zoals hij doet in de behandeling van het probleem van Sems en Dou.<sup>77</sup> De sinussen, secansen en tangensen hebben nu 3, 4 of 5 cijfers. Daardoor laat hij soms wat nauwkeurigheid liggen, al is het voor het uiteindelijke resultaat meestal niet of nauwelijks (1 minuut verschil) van invloed. Op een enkele druk- of afrondfout na zijn de getallen ook juist – zover ik kan constateren.

Hoewel het soms veel werk is, is het wel betrekkelijk rechttoe-rechtaan wat Wils in deze zestig pagina's doet. Hij schetst de situatie, past de formules van Stevin toe, rekent de voorbeelden uit en geeft uitleg en maakt opmerkingen bij de uitzonderingen. Het ziet er degelijk en correct uit.

Twee opmerkingen nog: De geografische breedte van de waarnemer in bovenstaand voorbeeld is  $52^\circ 20'$ , bijna precies de breedtegraad van Haarlem. (De Sint-Bavo, in het centrum, ligt op  $52^\circ 23'$  Noorderbreedte.) De waarnemer uit het bovenstaande probleem

---

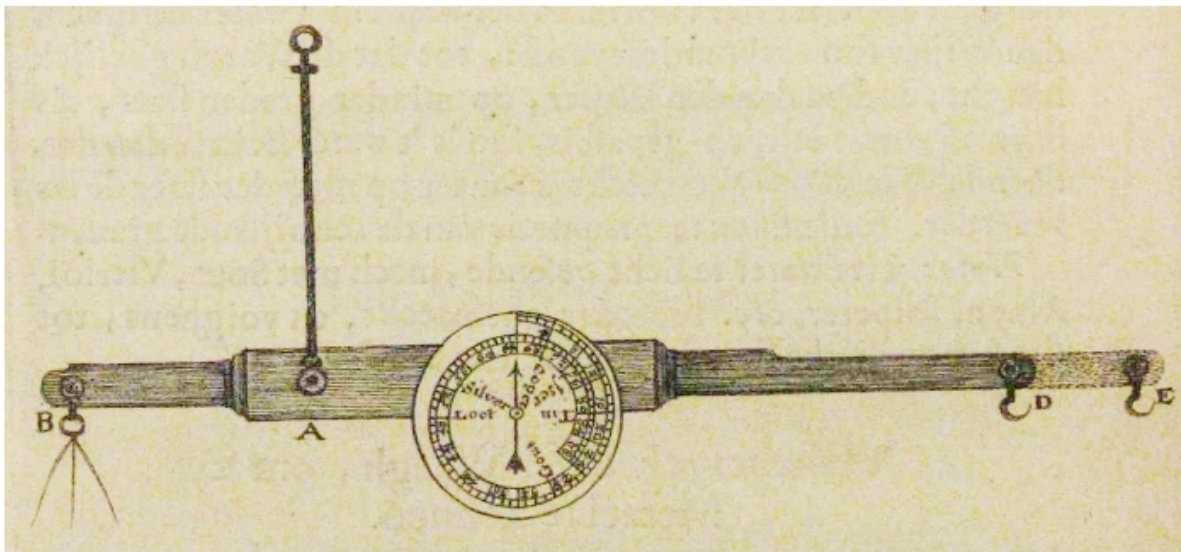
<sup>77</sup>Wils [1654] p. 67-69 of paragraaf 6.4.2 van deze scriptie.

bevindt zich dus ongeveer 5,5 km zuidelijker. Haarlem was de stad waar Wils het grootste deel van zijn werkzame leven doorbracht.

Simon Stevin is ook degene aan wie Wils zijn terminologie ontleent. Behalve benamingen als 'hoeck-maet' (sinus), 'raeck-lijn' (tangens) en 'sny-lijn' (secans), komen (onder andere) ook 'as-punt' (pool), 'middag-rondt' (meridiaan), 'dwaelder' (planeet) en 'sicht-einder' (horizon) voor in de *Wiskonstighe Ghedachtnissen* van Stevin.

## 6.8 Pagina 153-155

De laatste drie pagina's van het boek worden besteed aan de zogenoemde *Aenteyckeningh, Op de Metael-waegh. Gemeten proportie, op de Waegh*. Wils beschrijft hier een weeginstrument dat kan bepalen wat voor soort metaal je hebt. Op pagina 153 staat het volgende plaatje:



Wils beschrijft de werking van het apparaat als volgt:

'Het Metael dat ghy ondersoecken wilt, hanght met een fijn zijden draetjen aen den haeck; en (den Wijser op 't begin der graden staende) leght soo veel ghewicht in de Schael, dat de Waegh ghelijck hanght: Dan laet het Metael in 't water hanghen, den Wijser soo veel omdaeyende, tot dat de Waegh wederom ghelijck hanght; ende leght soo veel graed-wicht in de Schael, als den Wijser graden aenwijst; midts den selven noch omdraeyende, ende Wicht in-legghende, tot de teyckeningh op den Wijser, ende 't ingheleydt ghewicht in getal accordeert, ende met een de Waegh ghelijck hanght: Soo sal dan den Wijser het Metael aenwijzen: ofte van twee bekende Metalen ghemenght wesende; de proportie der mengingh.'<sup>78</sup>

Eerst wordt dus de wijzer op nul gezet en het te onderzoeken metaal aan de haak (in punt D) gehangen. Vervolgens zorg je dat de weegschaal gelijk komt te hangen door

<sup>78</sup>Wils [1654] p. 154-155.

‘ghewicht in de Schael’ te leggen; die schaal hangt aan punt B. Vervolgens hang je het metaal in het water, waardoor de weegschaal natuurlijk ongelijk komt te hangen. Vervolgens, zegt Wils, moet je de wijzer zo draaien dat de weegschaal weer gelijk hangt. (Merk op: er is een spiraalvormige schaalverdeling.) Blijkbaar beweegt de wijzer niet onafhankelijk van het uit- of inschuiven van het punt D. De tekening laat volgens mij ook twee verschillende standen van hetzelfde instrument zien. Het lijkt erop alsof je het punt D kunt uitschuiven tot het punt E, maar ook inschuiven. Als je het punt D kunt inschuiven, kan de weegschaal natuurlijk weer gelijk komen te hangen, omdat de arm dan minder groot is.

Hierna leg je zoveel gewicht in de schaal als de wijzer op dat moment aangeeft, en dat proces herhaal je totdat het getal dat de wijzer aanwijst gelijk is aan de hoeveelheid ingelegd gewicht. Op de wijzer kun je dan aflezen welk metaal het is, of je kunt de verhouding van de legering aflezen.

Daarvoor heeft Wils nog gezegd dat je wel eerst het water moet controleren, om te zorgen dat het water dezelfde dichtheid heeft als dat waar de weegschaal op geijkt is. Hij zegt daar: ‘Het water te licht wesende, mach met Sout, Vitriol, Aluyn, Salpeter, &c. swaerder ghemaect, en volghens, tot sijn behoorlijcke swaerheyt gebracht worden.’

Het is geen gangbaar instrument dat Wils hier beschrijft, en zover ik heb kunnen nagaan zijn er in Nederland geen exemplaren van een dergelijk instrument uit die tijd overgeleverd.<sup>79</sup> In het boek worden verder geen instrumenten van Wils besproken, maar Maria Rooseboom maakt in haar *Bijdrage tot de geschiedenis der instrumentmakerskunst in de Noordelijke Nederlanden tot omstreeks 1840* melding van Pieter Wils:

**‘Wils, Pieter; Haarlem.**

Een samengesteld tijd- en hoogtebepalingsinstrument in de Whipple Collection te Cambridge draagt de inscriptie: “PIETER WILS fecit Haarlem”. Vermoedelijk 18e eeuw.<sup>80</sup>

Tenzij het hier om een naamgenoot gaat, zit de vermelding ‘vermoedelijk 18e eeuw’ er een eeuw naast. Het bestaan van dit instrument werpt de vraag op of er nog meer instrumenten van Wils bewaard zijn gebleven. Rooseboom zegt in haar inleiding: ‘[...] zo zien wij, dat sommige der grootste geographen en kartographen zich zelf gingen toeleggen op het vervaardigen van observatie-instrumenten, geschikt als zij daartoe waren, niet alleen door hun theoretische kennis, maar ook door hun grote vaardigheid in het graveren van koper.’ Rooseboom noemt daarna als voorbeeld de bekende kaartenmaker Willem Jansz. Blaeu, en dat was een tijdgenoot van Wils. Het is goed mogelijk dat Wils ook tot de groep kaartenmakers behoorde die zich op het maken van instrumenten toelegde.

---

<sup>79</sup>Hierbij moet worden opgemerkt dat mijn zoektocht naar een dergelijk instrument beslist niet uitputtend is geweest.

<sup>80</sup>Rooseboom [1950] p. 131.

## 7 Conclusie

Wie in de universiteitsbibliotheek van Utrecht het aldaar gelegen exemplaar van Candalla's *Elementen*-editie inziet, kan alleen maar in grote bewondering ernaar kijken. Het is een schitterend bewaard gebleven, mooi ingebonden exemplaar uit 1578. Niet een andere editie die ik heb ingezien heeft zulke mooie illustraties bij het (apocriefe) vijftiende boek over de inschrijvingen van de regelmatige veelvlakken. De plaatjes worden in de extra boeken die Candalla erbij heeft geschreven alleen maar spectaculairder. Je vraagt je af hoe het mogelijk is dat nog niemand daar uitgebreid inhoudelijk naar gekeken heeft.

Misschien heeft het wel te maken met de woorden die Thomas Heath aan het vijftiende boek van *de Elementen* besteedt. Omdat hij schrijft dat het vijftiende boek wat inhoud betreft minder interessant is (dan het veertiende), en dat de uiteenzetting ervan te wensen overlaat, nodigt dat in eerste instantie niet uit om een kijkje te nemen in het boek. Als je dat dan toch doet, daartoe aangezet door het deel uit Wils' boek over de regelmatige veelvlakken, dan zie je dat de inschrijvingen van de regelmatige veelvlakken in elkaar een mooi, elementair probleem vormen, en wel degelijk de moeite waard zijn. En blijkens de ontwikkelingen in de diverse edities van het vijftiende boek waren er meer mensen die er zo over dachten. Verder onderzoek naar de verschillende edities van dit vijftiende boek zou dan ook zeer de moeite waard zijn. Ook de drie extra apocriefe boeken die Candalla daarnaast geschreven heeft, en in welke mate deze boeken werden gelezen door volgende generaties wiskundigen, verdienen verdere studie.

Pieter Wils was zeker ook een van de mensen die het vijftiende boek van *de Elementen* met aandacht gelezen had. De manier waarop hij de inhoud van dit vijftiende boek bespreekt bewijst dat hij een zeer helder begrip van het probleem gehad moet hebben. Hoewel de wiskunde die Wils behandelt al sinds 1566 voorhanden was (toen verscheen de eerste druk van Candalla's Euclideseditie die alle inschrijvingen bevatte), maakt zijn afwijkende invalshoek zijn behandeling van de inschrijvingen zeer de moeite waard. Zijn grootste wiskundige verdienste lijkt zijn observatie dat de inschrijvingen zoals ze behandeld werden in het vijftiende boek van *de Elementen* niet allemaal maximaal van volume waren. Hij is daarmee de enige in zijn tijd die deze kanttekening bij de inhoud van het vijftiende boek maakt. Een complete oplossing van dat probleem (voor alle inschrijvingen) geeft Wils overigens niet, en dat blijkt ook niet zo eenvoudig. Hoe Wils aan de informatie kwam voor zijn verhandeling over de regelmatige veelvlakken weten we niet. Hij zou wat tijd betreft in het bezit kunnen zijn geweest van bijvoorbeeld Candalla's boek. Meer voor de hand ligt dat hij dezelfde bron had als Simon Stevin, namelijk de *Elementen*-editie van Clavius.

Behalve de genoemde passage over de regelmatige veelvlakken is de wiskunde in Wils' boek niet verrassend of vernieuwend. Het sluit aan bij wat je zou verwachten van een landmeter in die tijd. Vlakke meetkunde, bolmeetkunde, en wat losse snippers hier en daar. Vooral de beschrijving van het niet echt gangbare weeginstrument in de laatste drie pagina's valt daarbij op, en roept de vraag op of er nog meer instrumenten van hem bewaard zijn gebleven.

Het beeld dat van Wils overblijft is dat van een typisch product van het zeventiende-eeuwse wetenschappelijke Nederland. Een landmeter die fraaie kaarten maakte en daarvoor admmissie kreeg na een examen bij Van Schooten en Snellius. Iemand die boeken van lofdichten voorzag. Iemand die behalve in Euclides zich ook verdiepte in boeken van Van Ceulen en Sems en Dou, en zich bezighield met hun problemen. Iemand die duidelijk ook Stevins werk goed bestudeerd had en schreef in diens taal. Dat alles deed Wils wiskundig degelijk, zonder dat het spectaculair was – hij was kortom een brave wiskonstenaer.

# Referenties

## Primaire bronnen

- [1] Wils, P. [1654] *Wis-konstige Wercken: Bestaende in eenighe Meet-konstighe ende Hemel-klootsche aenteyckeningen, elck met hare verklaringhen ende bewijsen*. Thomas Fonteyn, Amsterdam. Eerste druk 1648, Haarlem.
- [2] Ampzing, S. [1628] *Beschrijving ende lof der stad Haerlem in Holland: In Rijm bearbeyd: ende met veele oude ende nieuwe stucken buyten Dicht uyt verscheyde kronijken / Handvesten / Brieven / Memorien ofte Geheugeniszen / ende diergelijke Schriften verklaerd / ende bevestigd*. Adriaen Roomen, Ordinaris Stads-Boekdrucker, Haarlem.
- [3] Archief van de Gecommitteerde Raden der Staten van Holland en West-Friesland. Beschikbaar via Nationaal Archief, Den Haag. Toegang 3.10.05, Archiefbloknummer 3516. De admessie van Wils staat bij inventarisnummer 3000A, folio 146.
- [4] Ceulen, L. van [1615] *De Arithmetische en Geometrische fundamenten*, Joost van Colster en Jacob Marcus, Leiden.
- [5] Euclides [1509] *Euclidis Megarensis elementorum libri XV ex traductione Campani*, Venetië. Eerste druk 1482, Ratholdt, Venetië.
- [6] Euclides [1537] *Euclidis Megarensis Mathematici Clarissimi Elementorum Geometricorum. Lib. XV. Sum expositione Theonis in priores XIII a Bartholomaeo Veneto latinitate donata, Campani in omnes & Hypsiclis Alexandrini in duos postremos*. Bezorgd door Bartholomaeus Zambertus Venetus. Johannes Hervagius, Basel.
- [7] Euclides [1575] *De Gli Elementi D'Euclide Libri Qvindici. Con Gli Scholii Antichi. Tradotti Prima in Lingua Latina Da M. Federico Commandino Da Urbino, Domenico Frisolino, Urbino*.
- [8] Euclides [1578] *Euclidis Megarensis Mathematici Clarissimi Elementa, Libris XV, Ad Germanam Geometriae intelligentiam è diuersis lapsibus temporis iniuria contractis restituta*, bezorgd door D. Franciscus Flussate Candalla. Jacob du Puys, Parijs. Eerste druk 1566, Parijs.
- [9] Euclides [1591] *Euclidis Elementorum Libri XV*, bezorgd door Christophorus Clavius. Giovanni Baptista Ciotti, Keulen. Eerste druk 1584.
- [10] Euclides [1615] *De vyfthien boecken Evclides. / Uyt den Latijnsche spraecke overgeset in nederduyts, verciert met schoone verclaringen ende leringen van de outste naturalisten ende constige schrijvers: mitsg. het fundament der surdische, ende binomische getallen door C.V.N.*, bezorgd door Cornelis van Nienrode. Utrecht.
- [11] Euclides [1617] *De propositien vande XV. boucken der elementen Euclidis; overgeset en tsamenghestelt, met corte verclaringen sommiger propositien*, bezorgd door Frans van Schooten. Govert Basson, Leiden.

- [12] Euclides [1695] *Beginselen der Meetkonst, Vervaat in 15 Boeken, Waar by 't 16 Boek Fr. Flussatis Candallae. Begrijpende de Beginselen, op dewelke de gantsche Wiskonst rust, Daarom ook te recht genaamt Beginselen der Wiskonst.* Vertaald door Claas Jansz. Vooght. Johannes van Keulen, Amsterdam.
- [13] Euclides [1908] *The Thirteen Books of Euclid's Elements.* Vertaling en commentaar door T.L. Heath, University Press, Cambridge. Drie delen.
- [14] Euclides [1930] *De Elementen van Euclides. Deel II. De boeken II - XIII der Elementen.* Vertaald door E.J. Dijksterhuis, P. Noordhoff N.V., Groningen.
- [15] Sems, J. en J.P. Dou [1600] *Practijck des Lantmetens. Leerende alle rechte ende cromsijdige Landen, Bosschen, Boomgaerden, ende ander velden meten, soo wel met behulp des Quadrants, als sonder het selve.* Jan Bouwensz., Leiden.
- [16] Stevin, S. [1608] *Wisconstige Gedachtenissen,* Jan Bouwensz., Leiden.

## Secundaire bronnen

- [17] Aa, A.J. van der [1852] *Biographisch Woordenboek der Nederlanden,* J.J. van Brederode, Haarlem. Zeven delen. Herdruk 1969, B.M. Israël, Amsterdam.
- [18] Berkel, K. van [1985] *In het voetspoor van Stevin,* Boom, Meppel, Amsterdam.
- [19] Cantor, M. [1907 e.v.] *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik,* B.G. Teubner, Leipzig. Vier delen.
- [20] Cromwell P.R. [1997] *Polyhedra,* Cambridge University Press, New York.
- [21] Dijksterhuis, E.J. [1943] *Simon Stevin,* Martinus Nijhoff, Den Haag.
- [22] Grünbaum, B. [1994] 'Regular polyhedra' in I. Grattan-Guinness (red.) *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences,* Routledge, Londen en New York. Deel II, p. 866-876.
- [23] Harrie, J. [1978] 'Duplessis-Mornay, Foix-Candale and the Hermetic Religion of the World' in *Renaissance Quarterly* Vol. 31, nr. 4, p. 499-514, University of Chicago Press, Chicago.
- [24] Hazewinkel, M. (red.) [1988-1994] *Encyclopaedia of Mathematics,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston en Londen. Tien delen.
- [25] Heath, T.L. [1921] *A History of Greek Mathematics,* Clarendon Press, Oxford. Twee delen.
- [26] Høyrup, J. [1994] *In Measure, Number and Weight – Studies in Mathematics and Culture,* State University of New York Press, Albany.
- [27] Kästner, A.G. [1796] *Geschichte der Mathematik,* Göttingen. Vier delen. Herdruk (facsimile) 1970, Georg Olms Verlag, Hildesheim & New York.

- [28] Knorr, W.R. [2001] ‘On Heiberg’s Euclid’ in *Science in Context* 14 (1/2), p. 133-143, Cambridge University Press.
- [29] Molhuysen, P.C. en P.J. Blok (red.) [1911] *Nieuw Nederlandsch Biografisch Woordenboek*, Sijthoff’s Uitgevers-Maatschappij, Leiden. Tien delen.
- [30] Muller, E. en K. Zandvliet (red.) [1987] *Admissies als landmeter in Nederland voor 1811*, Canaletto, Alphen aan den Rijn.
- [31] Murdoch, J. [1971] ‘Euclid: Transmission of the Elements’ in C.C. Gillispie (red.), *Dictionary of Scientific Biography*, Charles Scribner’s Sons, New York, Deel IV, p. 437-459.
- [32] Pouls, H.C. [1997] *De Landmeter – van de Romeinse tot de Franse tijd*, Canaletto, Alphen aan den Rijn.
- [33] Pouls, H.C. [2004] *De landmeter Jan Pietersz. Dou en de Hollandse Cirkel*, Nederlandse Commissie voor Geodesie i.s.m. Stichting De Hollandse Cirkel, Delft.
- [34] Rooseboom [1950] *Bijdrage tot de geschiedenis der instrumentmakerskunst in de Noordelijke Nederlanden*, Rijksmuseum voor de Geschiedenis der Natuurwetenschappen, Leiden.
- [35] Ruurs, R. [1983] ‘Pieter Saenredam: zijn boekenbezit en zijn relatie met de landmeter Pieter Wils’ in *Oud Holland*, Jaargang 97, p. 59-68.
- [36] Sijs, N. van der [2001] *Chronologisch Woordenboek*, L.J. Veen, Amsterdam.
- [37] Statenbijbel [1957] *Statenbijbel met nieuwe bijgevoegde verklaringen op de duistere plaatsen, en aantekeningen van de gelijkkluidende teksten*, Den Hertog’s Uitgeverij B.V., Utrecht. Drie delen.
- [38] Struik, D.J. (red.) [1958] *The Principle Works of Simon Stevin. Volume II: Mathematics*, C.V. Swets & Zeitlinger, Amsterdam.
- [39] Teissier, A. & J.A. de Thou [1696] *Les éloges des hommes scavans / tirez de l’histoire de M. de Thou; avec des additions contenant l’abrégé de leur vie, le jugement et le catalogue de leurs ouvrages par Antoine Teissier*, Frans Halma, Utrecht.
- [40] Waterhouse, W.C. [1972] ‘The Discovery of the Regular Solids’ in *Archive for History of Exact Sciences*, Vol. 9, p. 212-221.
- [41] Wells, D. [1991] *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry*, Penguin Books, Londen.
- [42] Westman, R.S & J.E. McGuire [1977] *Hermeticism and the Scientific Revolution*, William Andrews Clark Memorial Library, University of California, Los Angeles.



# Bijlage

## Loflieddicht voor Cornelis Drebbel, door Pieter Wils

LOF-LIED-DICHT

*Op de Natuer-kund,*

K.I. Drebbel.<sup>81</sup>

O Wat on-gehoorde zaken!  
Noch geraken, an den dagh:  
Yder wel verblijden magh,  
Die in 't weten héft vermaken:  
Nu men smaken, mach, waer an  
Ons de Wet-lust leyden kan.

Gy die met geen laffe reden  
U tevreden, houdt zoo licht,  
Maer véel meer betraut 't gezicht:  
Kom doch ras by Drebbel-treden:  
Eer gy heden, weder keert  
Zult verkrygen u begeert.

Is wel oyt een opgerezén,  
Die, als dezen, Drebbelaer  
Drebbeld' de Natuere naer?  
Neen voorwaer: van geen wy lezen,  
Die bewesen, en verklaert  
Zoo héft, der Begins'len aerd.

Hier gy meugt den Donder hooren  
Van te vooren, bald'ren gram,  
Daer volgt naer een Blixem-vlam:  
Regen, Hagel, Snee om d'ooren,  
Me kond spooren, (als gy wilt)  
Koud', of Hitte, Wind, of Stilt'.

Hier gy ziet de Lust van 't leven!  
Sterren zweven, om haer As  
Noch te langzaem, noch te ras,  
Maer als 't Groote-rond gedreven:  
Wilt dan geven, Eer en Lof,  
Die beschreven héft déz' stof.

---

<sup>81</sup>Cornelis Drebbel [1621] *Een kort tractaet van de Natuere Der Elementen, ende hoe sy veroorsaecken, den Wint, Regen, Blixem, Donder, ende waeromme dienstich zijn.* Pieter Jansz., Rotterdam.

Die 't beschreven doet verstercken,  
Met Tuyg werken, die in schyn  
Levend', (doch Natuerlijck) zyn.  
Meer als Mensch! Naer menschen mercken  
Baut dan Kerken, 't zynder Eer.  
Daer m'hem lòv, en leer' zyn Leer,

't Vernoegen héft WILS genoeg.

FINIS.

## Eerdicht voor Ampzing, door Pieter Wils

EER-DICHT

Aen Haerlem, en haere Beschrijvinge,

Gedaen Door

D. S. Ampzingius<sup>82</sup>

Wel gelukkig sijn de Steden,  
Daer de kloekheyd, daer de reden,  
Daer de wijsheyd, daer de deugd,  
Daer de liefd'en vreed'haer segen  
Storten (als een vruchtbaer regen,  
Die den landman 'thert verheugd.)  
Daer 't an wacker heyl-besorgers,  
Daer 't an trouw en vroomme borgers,  
Nimmermeer ontbroken heeft:  
Daer 't vol goegeleerdheyd minders,  
Daer 't vol nutte konsten vinders,  
(Tot al 'swerelds voordeel) leefd.  
Daer Natuer aen alle kanten  
Heeft een Lusthof willen planten;  
Tot vermaek der borgerij:  
Tot verwondering der vreemden;  
So van Bergen, Bosschen, Beemden,  
Visch, en VVater-rijk daerby.  
Niet mag sulk een Stad ontbreken,  
(Dat m'haer niet gelukkig reken',)  
Dan alleen dit eene stuck,  
„Dat mag-schien niet wijd bekend is,  
„Al 't vermaek dat daer omtrent is:  
Sulkx was HAERLEMS ongeluck.  
Hier af sal sy voords bevrijd sijn:  
Hier om Haerlem mag verblijd sijn:  
Hier af moet sy danken hem,  
Die haer roem, haer eer, haer oudheyd,  
Haer vermaek, en strijdbaer stoutheyd  
Maekt roem-ruchtig, door sijn stem.  
Alexander wenst'(met treuren,)  
Dat hem (als Achilles) beuren

---

<sup>82</sup>Uit: S. Ampzing [1628] *Beschrijving ende lof der stad Haerlem in Holland: In Rijm bearbeyd: ende met veele oude ende nieuwe stucken buyten Dicht uyt verscheyde kronijken / Handvesten / Brieven / Memorien ofte Geheugeniszen / ende diergelijke Schriften verklaerd / ende bevestigd.* Adriaen Roomen, Ordinaris Stads-Boekdrucker, Haarlem. Laatste van de (ongenummerde) eerdichten.

Mogt een ander Homerus;  
Om sijn lof wel uyt te drucken.  
Doch die wensch wil HAERLEM lucken;  
Want sy heeft Ampzingius.

P. VVils.