

## Constructies met passer en liniaal

Een wiskunde-D module geschreven door  
Luuk Hoevenaars van de Hogeschool Utrecht





# Inleiding

*Voor je ligt een Wiskunde D module over vier beroemde problemen uit de Griekse Oudheid die gaan over constructies met passer en liniaal. Je zult zien hoe de Grieken hun uiterste best hebben gedaan om deze problemen op te lossen, maar het is ze uiteindelijk niet gelukt. Pas 2000 jaar later werd duidelijk waarom.*

## 1. Geschiedenis

Vanaf ongeveer 3000 v. chr. hebben de Babyloniërs en Egyptenaren hun vorderingen in de wiskunde opgeschreven en doorgegeven aan ons. Voor hen diende wiskunde meestal een praktisch doel: ze deden berekeningen voor bijvoorbeeld architectuur, landverdeling of het voorspellen van zonsverduisteringen. Daar kwam verandering in bij de Grieken die rond 400 v.chr. een grote bloeiperiode kenden. Zij dachten na over dingen gewoon omdat ze het interessant vonden en dit noemen we tegenwoordig met een Grieks woord filosofie ( $\phi\lambda\epsilon\iota\nu$ =houden van,  $\sigma\phi\alpha$ =kennis). Misschien heb je wel eens gehoord van de filosoof Socrates en zijn leerling Plato. Deze opbloei van kennis heeft ook veel betekend voor de wiskunde: Plato had niet voor niets boven de ingang van zijn Academie een inscriptie laten plaatsen

ΓΕΩΜΕΤΡΗΤΟΣ ΜΗΔΕΙΣ ΕΙΣΙΤΟ

Laat geen meetkundig ongeschoolde hier ooit binnentreden

De Grieken deden wiskunde voornamelijk om hun kennis van de wereld te vergroten, gewoon omdat ze nieuwsgierig waren dus. Ze verdeelden de wiskunde in drie onderwerpen:

- (1) Algebra
- (2) Meetkunde
- (3) Mechanica en Optica

Het laatste onderwerp laat zien dat ze nog geen onderscheid maakten tussen wiskunde en wat we tegenwoordig natuurkunde zouden noemen. Voor deze module is het belangrijk om even stil te staan bij het verschil dat de Grieken maakten tussen meetkunde en algebra. Algebra betekende voor de Grieken het rekenen met gehele getallen en hun verhoudingen (breuken). De school van Pythagoras (ca. 530 v. chr.) heeft bijvoorbeeld veel ontdekkingen gedaan op het gebied van de verhouding tussen muzieknoden en de harmonie van akkoorden. Maar je kent Pythagoras natuurlijk ook van een belangrijke stelling in de meetkunde: voor een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden van lengte  $a$  en  $b$  en schuine zijde  $c$  geldt  $a^2 + b^2 = c^2$ . De zuiverste vorm van meetkunde was voor de Grieken de meetkunde van het platte vlak. Hierin kun je constructies maken met behulp van passer en liniaal volgens bepaalde afspraken die uitgebreid aan bod komen in hoofdstuk ???. Soms is de lengte van een lijnstuk een geheel getal of een breuk, zodat je er algebra mee kunt doen. Maar als je een rechthoekige driehoek neemt met rechthoekszijden van lengte 1, dan is volgens de stelling van Pythagoras de lengte van de schuine zijde gelijk aan  $\sqrt{2}$ . Pythagoras zelf wist al dat dit geen breuk kan zijn (zie

hoofdstuk ??) en dus is dit niet een getal waarmee verder gerekend werd. Een vergelijking als

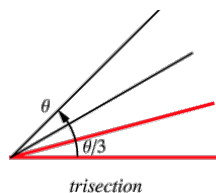
$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$$

zul je bij de Grieken dus niet tegenkomen. Het indrukwekkende boek *de Elementen* van Euclides (ca. 300 v. chr.) bevat alle wiskunde die tot dan toe was gedaan en hierin worden algebra en meetkunde in aparte hoofdstukken behandeld. Pas in de middeleeuwen hebben Arabische wiskundigen lengtes zoals  $\sqrt{2}$  geaccepteerd als getallen waarmee gerekend kan worden en pas in de zeventiende eeuw kreeg Descartes het idee om coördinaatassen in te voeren zodat elk punt in het vlak kan worden gegeven door twee getallen, de  $x$ -coördinaat en de  $y$ -coördinaat. Vanaf dan komen de meetkunde en de algebra volledig samen. Stellingen uit de meetkunde kunnen dan worden bewezen met behulp van algebra en andersom.

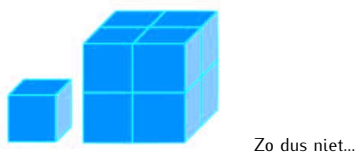
## 2. De vier beroemde problemen

Deze module gaat over het gebruik van algebra bij de aanpak van vier beroemde problemen die gaan over constructies met passer en liniaal:

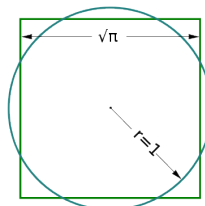
**Beroemd probleem 1** (Driedeling van een hoek). *Kun je een willekeurige hoek met behulp van een constructie in drieën delen?*



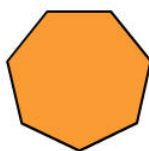
**Beroemd probleem 2** (Het Delische probleem – verdubbeling van een kubus). *Als een kubus met zijden van lengte 1 gegeven is, kun je dan een kubus construeren met twee keer zo groot volume?*



**Beroemd probleem 3** (Kwadratuur van de cirkel). *Kun je een vierkant construeren met dezelfde oppervlakte als een cirkel met straal 1?*



**Beroemd probleem 4.** *Kun je iedere regelmatige veelhoek construeren?*



## HOOFDSTUK 1

### Constructies met passer en liniaal

Dit hoofdstuk gaat over het *construeren* van punten, lijnen en cirkels in het platte vlak. Typische vragen die we ons daarbij stellen zijn: kunnen we een gelijkzijdige driehoek construeren? En een regelmatige vijfhoek? Kunnen we een hoek in tweeën delen? En in drieën? Kunnen we een vierkant construeren met dezelfde oppervlakte als een gegeven cirkel?

Om antwoorden te geven op deze vragen moeten we heel precies omschrijven wat we eigenlijk bedoelen met construeren. Hierbij volgen we de spelregels zoals de Griekse wiskundige Euclides ze opschreef rond 300 v. chr. in zijn beroemde boek *de Elementen*. Hij maakte in zijn constructies alleen gebruik van een passer en een liniaal zonder streepjes (je mag er geen lengte mee meten). De regels van Euclides zijn niet zaligmakend: het is goed mogelijk om een andere verzameling spelregels te verzinnen waarmee je vergelijkbare constructies kunt maken. In hoofdstuk ?? zullen we bijvoorbeeld onderzoeken wat je allemaal kunt doen met *origami*.

Als de spelregels eenmaal zijn vastgelegd kunnen we onderzoeken wat de mogelijkheden zijn en vooral ook welke constructies *onmogelijk* zijn met passer en liniaal. Daarbij stuiten we uiteindelijk op een aantal klassieke problemen uit de Griekse Oudheid. Ten slotte nemen we nog een loopje met de spelregels: door vals te spelen kunnen sommige constructies plotseling wél worden gemaakt!

#### 1. De spelregels

Het gereedschap van Euclides bestond uit een passer, een liniaal zonder streepjes en zijn gezonde verstand. Hij gebruikte ze om punten, lijnen en cirkels in het platte vlak te construeren volgens spelregels, die wij ook zullen hanteren:

##### Spelregels voor constructie met passer en liniaal

###### Constructie van nieuwe lijnen en cirkels:

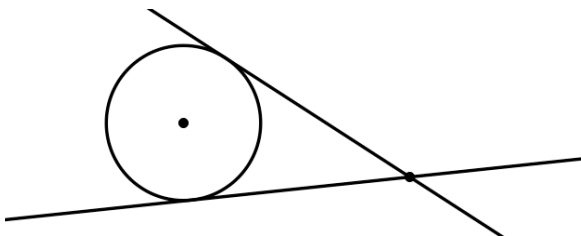
1. Een lijn door twee gegeven punten.
2. Een cirkel door een gegeven punt met een ander gegeven punt als middelpunt.

###### Constructie van nieuwe punten:

3. Snijpunt van twee lijnen.
4. Snijpunt(en) van een lijn en een cirkel.
5. Snijpunt(en) van twee cirkels.

Het ligt nogal voor de hand dat je deze handelingen kunt uitvoeren met een passer en een liniaal. Wat de spelregels bijzonder maakt is dat het er maar heel weinig zijn. Vervolgens is het een uitdaging om te kijken wat je volgens deze regels nog kunt doen, en dat blijkt verrassend veel. Dat is dan ook hun kracht: minimale regels met maximaal effect.

**1.1. Wat mag je niet doen?** Je kunt best wel constructies verzinnen die je volgens de spelregels niet zomaar mag uitvoeren maar in de praktijk geen probleem opleveren. Als er een cirkel en een punt buiten de cirkel gegeven is kun je bijvoorbeeld een lijn tekenen die raakt aan de cirkel en door het punt gaat (er zijn zelfs twee van deze lijnen). Waarom is dit niet zomaar toegestaan? En is er een manier om deze constructie toch te maken?



**Opgave 1.**

- a) Hoe zou je aan een computer het begrip “raken” uitleggen in termen van snijpunten?
- b) Welke instructies zou je de computer geven om bovenstaande constructie uit te voeren?
- b) Weet je zeker dat de computer de constructie in een eindig aantal stappen voltooit?

De raaklijn aan een cirkel door een extern punt kan overigens wel degelijk worden geconstrueerd volgens de spelregels, zie opgave 19.

**Opgave 2.** *Verzin zelf tenminste twee constructies die je in de praktijk wel kunt uitvoeren maar volgens de spelregels niet.*

**1.2. Waarom geen streepjes op de liniaal?** Je bent zelf gewend te werken met een geodriehoek. Daarmee kun je zowel afstanden als hoeken opmeten, wat heel handig kan zijn bij het construeren. Als je bijvoorbeeld een hoek in tweeën moet delen, dan meet je de hoek op en je deelt dit getal door twee. De Grieken vonden dit niet zuiver: de meting is nooit precies. Bovendien zou het meten van lengte in hun ogen tot vreemde conclusies leiden: de schuine zijde van een rechthoekige driehoek met een rechthoekszijde van lengte 1 is in onze moderne notatie het getal  $\sqrt{2}$ , maar de Grieken accepteerden dit niet als een getal omdat ze alleen de gehele getallen en de breuken kenden. Dat het geen breuk is konden ze overigens zelfs bewijzen (zie opgave ??). Dit waren voor de Grieken redenen om lengtes en hoeken niet te vergelijken met de “normale” getallen, dit gebeurde pas in de negentiende eeuw.

**1.3. Wat kunnen we dan wel?** Laten we eens kijken welke constructies zoal mogelijk zijn als we de spelregels nauwkeurig volgen. We beginnen als opwarmertje met de eerste opgave uit *de Elementen*:

**Opgave 3.** *Gegeven twee punten A en B, construeer volgens de bovenstaande spelregels een gelijkzijdige driehoek ABC. Schrijf alle stappen op, alsof je instructies geeft aan een computer of een kleuter. Begin dus met de stap*

Teken een lijn door de punten A en B (spelregel 1).

Misschien vind je het zelf heel logisch dat de driehoek die je hebt geconstrueerd gelijkzijdig is. Toch is het goed om hier nog even bij stil te staan.

**Opgave 4.** *Bewijs dat de driehoek die je hebt geconstrueerd inderdaad gelijkzijdig is.*

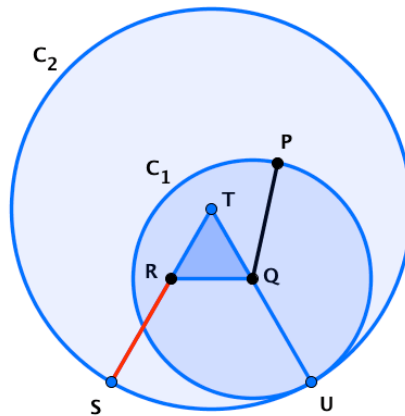
Misschien herinner je je deze constructie nog van de wiskunde op school. Of misschien weet je nog andere constructies die je al een keer hebt uitgevoerd, of vraag je je af wat de mogelijkheden zoal zijn.

---

### Opgave 5.

- Maak een lijstje van constructies die je al eens hebt gezien en probeer ze weer uit te voeren.
- Maak ook een lijstje van (ten minste drie) constructies waarvan je denkt dat je ze kunt uitvoeren als je daarvoor de tijd neemt.
- Maak ten slotte een lijstje van (ten minste drie) constructies waarvan je denkt dat je ze niet kunt uitvoeren.

We komen later nog op deze lijstjes terug.



FIGUUR 1. Voorbeeld van een constructie. De zwarte punten en lijnen zijn gegeven, de blauwe objecten zijn tussenstappen van de constructie en het rode lijnstuk is het eindresultaat.

**Opgave 6.** (tweede opgave uit de Elementen) In figuur 1.3 staat een constructie afgebeeld. De zwarte punten en het zwarte lijnstuk zijn gegeven, het rode lijnstuk is het eindresultaat.

- Wat denk je dat het doel is van de constructie?
- Schrijf een stappenplan, waarbij de deelconstructie van opgave 3 één stap is.

## 2. Basisconstructies

In deze paragraaf proberen we structuur aan te brengen in het denken over constructies. We bekijken een aantal basisconstructies die vaak van pas komen als bouwsteen van grotere constructies.

Stel dat we het middelpunt van een gelijkzijdige driehoek  $ABC$  willen construeren: het punt  $M$  waarvoor geldt  $|AM| = |BM| = |CM|$ . Om te beginnen moeten we dan weten hoe we een gelijkzijdige driehoek construeren, dit hebben we gedaan in opgave 3.

**Opgave 7.** Verzin zelf een constructie van het middelpunt  $M$  van een gelijkzijdige driehoek  $ABC$  en leg uit waarom  $|AM| = |BM| = |CM|$ .

Bij elke driehoek hoort een aantal bijzondere punten<sup>1</sup>:

- (1) het snijpunt van de zwaartelijnen: lijnen door een hoekpunt en het midden van de overstaande zijde
- (2) het snijpunt van de hoogtelijnen: lijnen door een hoekpunt loodrecht op de (verlengde) overstaande zijde
- (3) het middelpunt van de ingeschreven cirkel: snijpunt van de bisectrices, lijnen die de hoeken in tweeën delen
- (4) het middelpunt van de omschreven cirkel: snijpunt van de middelloodlijnen van de zijden

De constructie die je gegeven hebt in de vorige opgave komt waarschijnlijk overeen met één van de punten uit dit lijstje. Als we het middelpunt nu zien als het snijpunt van de zwaartelijnen dan moeten we **het midden van een lijnstuk** kunnen construeren. Voor de tweede karakterisatie moeten we **een loodlijn op een lijn door een punt** kunnen construeren. Deze kleinere stappen zijn voorbeelden van **basisconstructies**: niet al te ingewikkelde constructies waarvan je denkt dat ze wel vaker handig kunnen zijn.

**Opgave 8.** *Kijk nog eens naar de lijstjes die je hebt gemaakt in opgave 5. Probeer de constructies op te breken in kleine stappen en schrijf aan de hand hiervan een aantal basisconstructies op.*

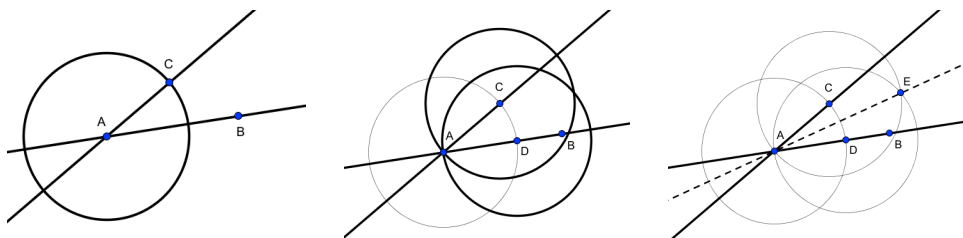
**Opgave 9.**

- a) *Geef een constructie waarmee het midden van een lijnstuk wordt bepaald. Bewijs dat dit ook echt het midden is.*
- b) *Doe hetzelfde voor een andere basisconstructie.*

Welke constructies de naam “basisconstructie” verdienen is natuurlijk nogal arbitrair (zoek ook maar eens op internet). In tabel 2 staat een mogelijk lijstje met de opdracht aan de lezer om deze aan te vullen, de details van de constructies te geven en te bewijzen dat ze voldoen aan de gevraagde eigenschappen. Als voorbeeld nemen we de bisectrice.

**Voorbeeld 1.** *Gegeven zijn drie punten  $A, B$  en  $C$ . We moeten een lijn construeren die de hoek  $\angle CAB$  in twee gelijke hoeken verdeelt. Dit doen we (zie figuur 2) door de cirkel door  $C$  met middelpunt  $A$  te snijden met de lijn  $AB$ ; we noemen het snijpunt  $D$ . Vervolgens snijden we de cirkel door  $A$  met middelpunt  $C$  met de cirkel door  $A$  met middelpunt  $D$ ; het snijpunt dat verschilt van  $A$  noemen we  $E$ . Vervolgens trekken we de bisectrice  $AE$ .*

*Om te bewijzen dat dit ook echt de bisectrice is merken we op dat de vierhoek  $ADEC$  een ruit is: hij heeft vier gelijke zijden. De driehoeken  $AEC$  en  $ADE$  zijn dus gelijkbenig en congruent, want ze hebben gelijke zijden. De hoeken  $\angle CAE$  en  $\angle EAD$  zijn dus ook gelijk.*

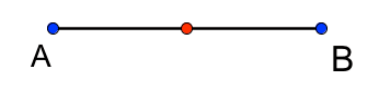
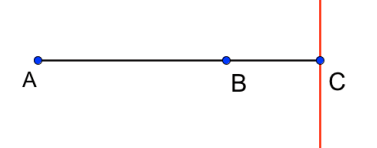
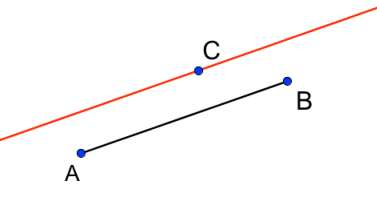
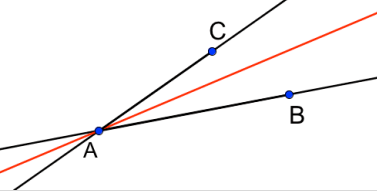


FIGUUR 2. Constructie van een bisectrice

<sup>1</sup>Hierbij hoort het werkblad “Middelpunt van een driehoek”



TABEL 1. Basisconstructies

I	Het midden van lijnstuk $AB$ . 
II	De loodlijn van $AB$ door punt $C$ . Punt $C$ ligt niet op $AB$ .           ...
III	... 
IV	De combinatie van I en III. Hoe heet dit?           ...
V	De lijn door $C$ evenwijdig aan $AB$ . 
VI	De bisectrice: lijn die de hoek $\angle CAB$ door midden deelt. 
VII	...           ...

Het is een kwestie van smaak of de (samengestelde) middelloodlijn onder de basisconstructies valt. Aan de andere kant hebben we basisconstructies verzwegen vanwege hun eenvoud: verdubbeling van de lengte van een lijnstuk bijvoorbeeld is te eenvoudig om apart te worden genoemd. Waar het bij construeren vooral op aankomt is om een gereedschapskist te hebben waarin constructies zijn verzameld. Hebben we een bepaald type constructie eenmaal uitgevoerd en begrepen, dan kan deze dienen als bouwsteen in volgende constructies.

Het is natuurlijk leuk om te zien dat je met de basisconstructies in de hand een aantal ingewikkelde constructies kunt uitvoeren. Interessanter zijn echter de constructies die je nog niet kunt maken! Dit kan twee oorzaken hebben: je bent ofwel niet handig genoeg geweest bij het verzinnen van een mogelijke constructie, of de constructie is *principeel onmogelijk*. Op

deze laatste mogelijkheid komen we later terug, eerst gaan we nog wat warmdraaien voordat we ons wagen aan de beroemde problemen uit de Griekse Oudheid.

**Geogebra**

Je wilt liever niet iedere keer de basisconstructies expliciet uitvoeren. Het is daarom heel handig om gebruik te maken van computersoftware zoals Geogebra, waarin veel basisconstructies al voor-geprogrammeerd zijn. Dit programma biedt zelfs de mogelijkheid om constructies die je hebt gemaakt op te slaan onder een knop. Daarbij gaat het "slim" te werk: er wordt rekening gehouden met de onderlinge afhankelijkheden. Als in basisconstructie V (de bissectrice) bijvoorbeeld het punt  $C$  gesleept wordt, dan verandert de bissectrice mee.

**Opgave 10.** *Zijn er constructies in opgave 5c) die je inmiddels wel met passer en liniaal kunt maken?*

De volgende constructies hebben iets te maken met de beroemde problemen. Voer ze uit in Geogebra of schrijf ze op als je geen computer ter beschikking hebt.

**Opgave 11.** *(Verdubbeling van een vierkant)*

a) *Gegeven is een vierkant  $ABCD$  waarvan de zijde 1cm lang is. Construeer een vierkant met oppervlakte  $2\text{cm}^2$ .*

b) *Gegeven is een vierkant  $ABCD$ . Construeer een vierkant waarvan de oppervlakte twee keer zo groot is.*

**Opgave 12.** *(Kwadratuur van een rechthoek)*

*Gegeven is een rechthoek  $ABCD$ . Construeer een vierkant met dezelfde oppervlakte.*

**Hint:** *Introduceer getallen  $a = |AB|$  en  $b = |BC|$ . De oppervlakte van de rechthoek is dus gelijk aan  $ab$  en we zoeken een vierkant met zijde  $\sqrt{ab}$ . Ga na dat*

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

*Als we dit lezen met een "Pythagorasbril" op, dan staat hier dat een rechthoekige driehoek met schuine zijde  $\sqrt{\frac{a+b}{2}}$  en rechte zijde  $\sqrt{\frac{a-b}{2}}$  een tweede rechte zijde heeft met lengte  $\sqrt{ab}$ . Construeer zo'n rechthoekige driehoek.*

**Opgave 13.** *(Kwadratuur van een driehoek)*

*Gegeven is een driehoek  $ABC$ . Construeer een vierkant met dezelfde oppervlakte. Geef hierbij nauwkeurig aan welke constructies van de voorgaande opgaven je hebt gebruikt.*

**Hint:** *Probeer dit probleem te reduceren tot de kwadratuur van een rechthoek.*

**Opgave 14.** *(Regelmatische veelhoeken)*

*In opgave 3 heb je vanuit twee gegeven punten een regelmatige driehoek geconstrueerd. Construeer nu een regelmatige zeshoek en een regelmatige twaalfhoek.*

**Hint:** *Construeer de omschreven cirkel van de driehoek en gebruik bissectrices.*

**Opgave 15.** *(Regelmatische veelhoeken)*

*Construeer vanuit twee punten  $A, B$  een regelmatige achthoek en een regelmatige zestienhoek.*

**Opgave 16.** *[Verdieping] Construeer een regelmatige vijfhoek met passer en liniaal.*

### 3. Onmogelijke constructies

Van sommige constructies is redelijkerwijs niet te verwachten dat ze met passer en liniaal kunnen worden uitgevoerd: het construeren van een ellips, parabool of hyperbool bijvoorbeeld behoort niet tot de mogelijkheden omdat volgens de spelregels in de constructiestappen alleen punten, lijnen en cirkels kunnen ontstaan. Het is overigens wel leuk om te zien hoe ver we kunnen komen; in opgave 17 gebruiken we Geogebra om een meetkundig onderzoekje te doen.

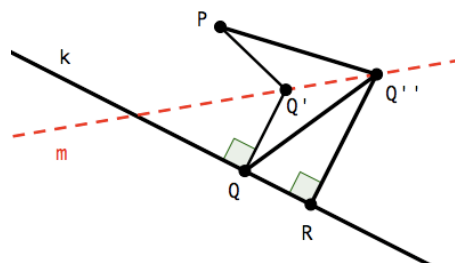
Er zijn dus zeker constructies in het platte vlak die principieel onmogelijk zijn omdat ze niet gaan over punten, lijnen en cirkels. Een interessante vraag is of er ook constructies bestaan die onuitvoerbaar zijn, maar waarvan je dat niet meteen kunt zien. En of je van een onuitvoerbare constructie kunt *bewijzen* dat dat zo is. Als wiskundigen lange tijd een constructie niet hebben kunnen maken dan bewijst dat natuurlijk nog niets, er zijn genoeg wiskundige stellingen waar pas na eeuwen een bewijs voor is gegeven. Een voorbeeld is de beroemde *laatste stelling van Fermat* die uiteindelijk is bewezen door Andrew Wiles, zie ook

<http://www.wiskundemeisjes.nl/20090103/de-laatste-stelling-van-fermat/>

Op deze bewijsbare onmogelijkheid komen we in hoofdstuk ??, ?? en ?? uitgebreid terug: hiervoor is een flinke dosis algebra nodig. In de volgende paragraaf bespreken we eerst nog vier beroemde constructies uit de Griekse Oudheid die 2000 jaar lang onuitgevoerd bleven. Zijn ze misschien onmogelijk?

**Opgave 17.** *Bij deze opgave maken we gebruik van Geogebra. Teken een lijn  $k$  en een punt  $P$  dat niet op de lijn ligt. Kies een punt  $Q$  op de lijn  $k$  en teken de middelloodlijn  $m$  van het lijnstuk  $PQ$ . Klik met de rechter muisknop op de lijn  $m$  en kies voor de optie "trace on". Sleep nu met de muis het punt  $Q$  heen en weer op de lijn  $k$ . Welke figuur zie je nu ontstaan?*

Om te controleren of dit ook echt een parabool is, gebruiken we de beschrijving van een parabool als *meetkundige plaats*: het is de verzameling punten die gelijke afstand hebben tot een punt (het zogenaamde brandpunt, in dit geval  $P$ ) en een lijn (de zogenaamde richtlijn, in dit geval  $m$ ). Als we het punt  $Q$  over de lijn  $k$  slepen dan lijken de middelloodlijnen  $m$  een waaier van raaklijnen aan de parabool te vormen. In de volgende opgave bewijzen we dat dit zo is door aan te tonen dat de middelloodlijnen precies één punt van de parabool bevatten.



FIGUUR 3

**Opgave 18.** *Bewijs de volgende uitspraken (zie ook figuur 3):*

- Voor elk punt  $Q$  op  $k$  ligt er een punt  $Q'$  van de parabool op  $m$ .*
- Het punt  $Q'$  is het enige punt van de parabool op  $m$ .*

**Hint:** *Stel dat er nóg een punt  $Q''$  van de parabool op  $m$  ligt. Noem het snijpunt van de loodlijn op  $k$  door  $Q''$  het punt  $R$ . Waarom is  $QQ''R$  een onmogelijke driehoek?*

We kunnen dus wel willekeurig veel punten van een parabool construeren met passer en liniaal, maar nooit de hele parabool omdat deze uit oneindig veel punten bestaat.

Er zijn ook constructies waarvan niet meteen gezegd kan worden of ze uitvoerbaar zijn of niet. Bij het uitleggen van de spelregels van het construeren met passer en liniaal zeiden we dat een raaklijn aan een cirkel door een extern punt wel construeerbaar is. Dit ga je in de volgende opgave zelf bewijzen.

**Opgave 19.** *Gegeven is een cirkel  $c$  met middelpunt  $M$  en een punt  $P$  dat buiten de cirkel ligt.*

a) *Bekijk een willekeurige middellijn  $m$  van de cirkel  $c$  en een snijpunt  $S$  van  $c$  met  $m$ . Bewijs dat de lijn  $k$  door  $S$  en loodrecht op  $m$  maar één snijpunt heeft met  $c$ . Het is dus een raaklijn aan de cirkel.*

**Hint:** *Net als in de vorige opgave leidt een tweede snijpunt tot een onmogelijke driehoek.*

b) *Zoek de stelling van Thales nog eens op.*

c) *Construeer de cirkel met middellijn  $MP$  en noem de snijpunten met  $c$  respectievelijk  $Q_1$  en  $Q_2$ . Leg uit waarom de lijnen  $PQ_1$  en  $PQ_2$  raken aan de cirkel.*

d) *Wat gebeurt er als het externe punt  $P$  op de cirkel ligt? En als het er binnen ligt?*

#### 4. Beroemde problemen

De Oude Grieken zijn ware passer–en–liniaal kunstenaars geweest. Toch is er een viertal constructieproblemen waarvan redelijkerwijs te verwachten zou zijn dat ze kunnen worden opgelost die zelfs hun pet te boven gingen:

- (1) De driedeling van een hoek.
- (2) De verdubbeling van een kubus.
- (3) De kwadratuur van een cirkel.
- (4) De constructie van regelmatige veelhoeken.

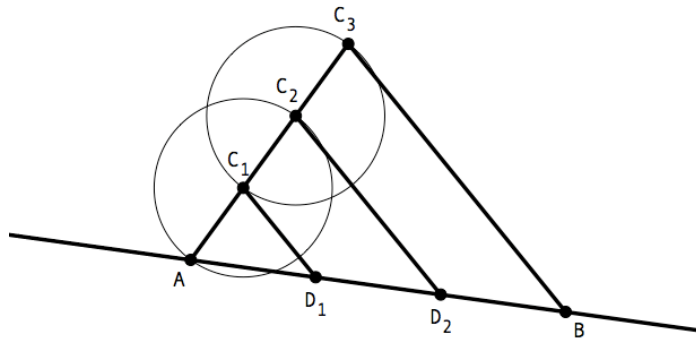
In de komende paragrafen zullen we een beschrijving geven van deze problemen. De Grieken hebben ze niet kunnen oplossen met passer en liniaal, hoe goed ze ook zochten naar constructies. Deze constructies bleken wél mogelijk als ze de spelregels wat versoepelden zodat ook andere hulpmiddelen beschikbaar waren (kortom, als ze vals speelden). Toch bleven ze zoeken naar de meest zuivere constructie, namelijk die met alleen passer en liniaal.

**4.1. Driedeling van een hoek.** We hebben uitgelegd waarom de Grieken het opmeten van lengtes en hoeken afkeurden. Toch kunnen we inmiddels via de basisconstructies lijnstukken en hoeken in tweeën delen. Door deze weer in tweeën te delen, en deze weer in tweeën, enzovoorts kunnen we dus ieder lijnstuk en iedere hoek zelfs verdelen in  $2^k$  gelijke delen voor iedere  $k$ . Zouden we nu ook een lijnstuk of een hoek in drieën kunnen delen?

**Stelling 1.** *Met passer en liniaal kan een lijnstuk in een willekeurig aantal gelijke stukken worden verdeeld.*

**Bewijs:**

We leggen eerst uit hoe een lijnstuk in drieën kan worden gedeeld. Kies twee willekeurige punten  $A, B$  op de lijn en een punt  $C_1$  dat niet op de lijn ligt. Verleng het lijnstuk  $AC_1$  twee keer en noem de tussenliggende punten  $C_2$  en  $C_3$ . We krijgen dus  $|AC_1| = |C_1C_2| = |C_2C_3|$ . Teken nu de lijnen door  $C_1$  en  $C_2$  die evenwijdig zijn aan  $BC_3$ . De snijpunten  $D_1, D_2$  met  $AB$  delen dit lijnstuk op in 3 gelijke delen omdat de driehoeken  $ABC_3$ ,  $AD_2C_2$  en  $AD_1C_1$  allen gelijkvormig zijn. Onder het motto “een plaatje zegt meer dan duizend woorden” staat



FIGUUR 4. De driedeling van een lijnstuk

in figuur 4 dit bewijs geïllustreerd. Het opdelen in meer gelijke stukken gaat analoog, door het lijnstuk  $AC_1$  vaker te verlengen.

Het in drieën delen (trisectie) van een hoek is een ander verhaal. De Grieken hadden hier grote moeite mee. Zijn wij slimmer dan de Grieken?

**Opgave 20.** *Bekijk een driehoek  $ABC$ . Verdeel zijde  $BC$  in drie gelijke delen. Kun je dit gebruiken om de hoek  $\angle CAB$  in drieën te delen?*

Ruim 2000 jaar lang bleef het onbekend of een hoek in drieën kan worden gedeeld. Het is ons eerste beroemde passer-en-lijnaal probleem.

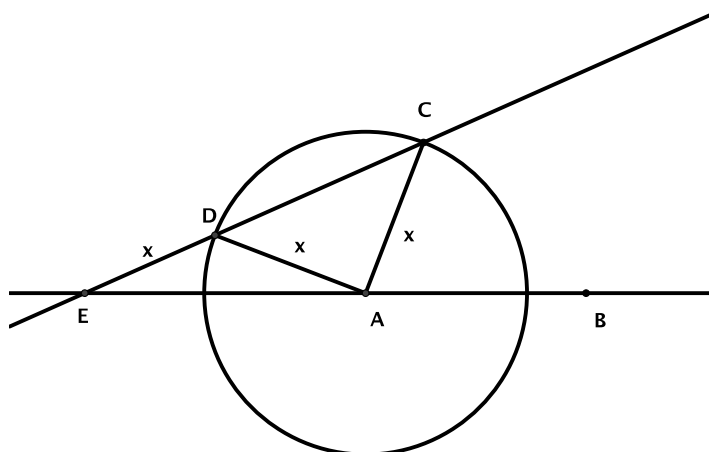
**Beroemd probleem 1** (Driedeling van een hoek). *Kun je een willekeurige hoek met passer en lijnaal in drieën delen?*

**Opgave 21.**

- Verzin een constructie om een hoek van  $90^\circ$  oftewel  $\frac{\pi}{2}$  in drieën te delen.*
- Probeer een stappenplan te schrijven met deelconstructies waarmee je een willekeurige hoek in drieën kunt delen.*

Het is dus in ieder geval mogelijk om *sommige* hoeken met passer en lijnaal in drieën te delen. De Grieken konden trouwens wel degelijk alle hoeken in drieën delen. Ze maakten daarbij gebruik van extra hulpmiddelen naast de gewone passer en lijnaal, zoals de populaire *neusis* (Grieks: *νευσις*). Dit is een lijnaal waarop je streepjes mag zetten (zoals op je geodriehoek) en die je mag schuiven zodat je één streepje op een gegeven lijn mag zetten en een ander streepje op een andere gegeven lijn. De simpelste driedeling van een hoek met behulp van een *neusis* is van Archimedes.

**Opgave 22.** *(De constructie van Archimedes) Kijk naar figuur 5. Hierin wordt het punt  $D$  geconstrueerd door op een *neusis* de lengte  $x$  te markeren en daarmee te schuiven zodat  $C$  zowel op de cirkel als op de *neusis* ligt en lengte  $|DE|$  gelijk is aan  $x$ . Laat zien dat  $\angle CAB$  in drieën wordt gedeeld door hoek  $\angle CEB$ .*



FIGUUR 5. De driedeling van een hoek door Archimedes



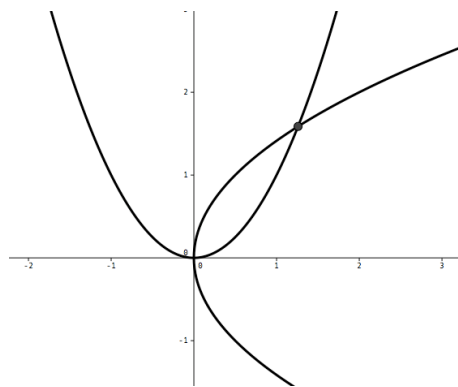
Archimedes van Syracuse (287 - 212 v.Chr.) was een Grieks wiskundige, natuurkundige, ingenieur, uitvinder en sterrenkundige. In opdracht van de koning moest hij een kroon testen op het goudgehalte zonder deze kapot te maken. Hij zat in bad na te denken, ontdekte in een flits de wet van de opwaartse kracht, sprong uit bad en rende naakt door de straten van Syrakuse. Hij schreeuwde:  $\epsilon\upsilon\rho\eta\kappa\alpha$  (eureka) – ik heb het gevonden! Hier zie je Archimedes afgebeeld op de Fields Medaille, de “Nobelprijs” voor de wiskunde.

**4.2. Verdubbeling van een kubus.** Volgens de legende consulteerden de burgers van het eiland Delos in 430 v.Chr. het orakel van Apollo op Delos (niet te verwarren met het orakel van Delphi) om te horen hoe zij de pest, die een vernietigende werking had op hun land, moesten bestrijden. Het orakel antwoordde dat, om de pest te stoppen, zij hun altaar in grootte moesten verdubbelen. De Deliërs verdubbelden plichtsgestrouw elke zijde van het altaar, en de pest verslechterde! De correcte interpretatie was dat zij het volume van het altaar moesten verdubbelen, niet slechts de lengte van de zijdes; dit bleek een zeer moeilijk oplosbaar probleem. Ten gevolge van deze legende wordt het probleem vaak het Delische probleem genoemd.

In opgave 11 heb je de oppervlakte van een vierkant verdubbeld. Als het oorspronkelijke vierkant zijden met lengte 1 heeft, dan heeft volgens de stelling van Pythagoras het nieuwe vierkant zijden met lengte  $\sqrt{2}$ . Nu moeten we een soortgelijke constructie maken voor een kubus:

**Beroemd probleem 2** (Het Delische probleem – verdubbeling van een kubus). *Als een kubus met zijden van lengte 1 gegeven is, kun je dan een kubus construeren met twee keer zo groot volume?*

**Opgave 23.** *Waarom is dit hetzelfde als de vraag of een lijnstuk met lengte  $\sqrt[3]{2}$  construeerbaar is?*



De Grieken konden het Delische probleem wel degelijk oplossen. Ze maakten daarbij echter wel gebruik van extra hulpmiddelen naast de gewone passer en liniaal. Menaechmus (380-320 v.chr.) vond een oplossing door de snijpunten te bekijken van een liggende en een staande parabool. Dit was nogal bijzonder, omdat hij speciaal hiervoor het begrip parabool heeft uitgevonden!

**Opgave 24.** Geef de algemene vergelijkingen van een liggende en van een staande parabool. Kies nu de liggende en staande parabool zo, dat de  $x$ -coördinaat van één van de snijpunten voldoet aan de vergelijking  $x^3 = 2$ .

De beschrijving van de oplossing van Menaechmus verschilt nogal van de manier waarop hij er zelf tegenaan keek. Laten we even samenvatten wat we hebben gedaan. We hebben eerst het meetkundige probleem vertaald naar een algebraïsch probleem (zoek een oplossing van de vergelijking  $x^3 = 2$ ). Ook de meetkunde van de parabool hebben we vertaald naar algebra door de vergelijkingen ervoor op te schrijven. We weten dat het snijpunt van de parabolen gevonden wordt door een stelsel van vergelijkingen op te lossen. Zo is het hele meetkundige probleem vertaald naar algebra! Menaechmus had deze omweg via de algebra nooit kunnen vinden, omdat het verband tussen meetkunde en vergelijkingen toen nog niet bestond. Dit blijkt nu juist de sleutel te zijn tot het antwoord op de vraag of de beroemde Griekse problemen construeerbaar zijn of niet.

**4.3. Kwadratuur van de cirkel.** Een ander berucht probleem is de kwadratuur van de cirkel. Misschien weet je dat een cirkel met straal 1 een oppervlakte heeft die gelijk is aan  $\pi \approx 3,1415$ . Dit is zelfs een heel gebruikelijke manier om  $\pi$  te definiëren. Om meer te weten te komen over dit interessante getal verwijzen we bijvoorbeeld naar het boekje van Frits Beukers met de titel *Pi* in de epsilon-reeks.

In opgave 13 heb je een vierkant geconstrueerd met dezelfde oppervlakte als een gegeven driehoek. Dit noem je de *kwadratuur* van de driehoek. Om hetzelfde te doen voor de cirkel met straal 1 heb je dus een vierkant nodig waarvan de zijde lengte  $\sqrt{\pi}$  is.

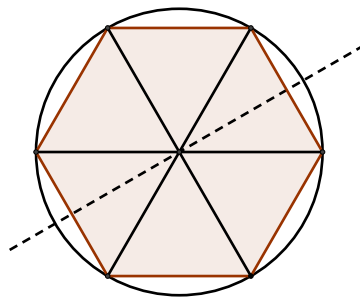
**Beroemd probleem 3** (Kwadratuur van de cirkel). Gegeven is een cirkel met straal 1. Kun je een vierkant met dezelfde oppervlakte construeren?

Dezelfde Archimedes die zich met de driedeling van een hoek heeft bemoeid heeft zich ook geworpen op de kwadratuur van bekende meetkundige objecten. Om de kwadratuur van de cirkel te verkrijgen gebruikte hij benaderingen: hij construeerde eerst een vierkant binnen de cirkel en om de cirkel. Hij wist dan dat het gezochte vierkant tussen deze twee in moest liggen. Vervolgens construeerde hij een zeshoek in en om de cirkel. Zodra hij deze kon kwadreren wist hij dat het gezochte vierkant tussen deze twee in moet liggen. Omdat de oppervlakten

van de zeshoeken dichter bij elkaar liggen dan die van de vierkanten geeft dit al een betere benadering. Daarna construeerde hij achthoeken in en om de cirkel, kwadreeerde deze en kreeg een nog betere benadering enzovoorts.

**Opgave 25.** *Bekijk figuur 6. In deze opgave gaan we de regelmatige zeshoek kwadreren. De eerste stap (zie opgave 13) is het kwadreren van de driehoeken die het middelpunt met de hoekpunten verbinden. Het resultaat is een zestal even grote vierkanten.*

- a) *Leg uit waarom je deze verzameling vierkanten (en dus de zeshoek) kunt kwadreren.*
- b) *Leg uit hoe je een willekeurige regelmatige veelhoek kunt kwadreren.*



FIGUUR 6. Een regelmatige zeshoek

De methode van Archimedes geeft een uitstekende benadering van de kwadratuur van de cirkel. Via ingeschreven en omgeschreven 96-hoeken kon hij zelfs aantonen dat  $\pi$  (de oppervlakte van de cirkel met straal 1) een waarde heeft tussen  $3\frac{10}{71} \approx 3,1408$  en  $3\frac{1}{7} \approx 3,1429$ . Een fantastische prestatie! Toch erkende hij dat dit niet een zuivere constructie met passer en liniaal oplevert. Het probleem blijft dus onopgelost.

Ook voor de kwadratuur van de cirkel geldt overigens weer dat de Grieken het konden oplossen door de spelregels te versoepelen. Dit keer moesten ze hun toevlucht nemen tot een kromme die speciaal hiervoor verzonden is: de *quadratrix* van Hippias.

**Opgave 26.** *[Verdieping] Bewijs van Archimedes voor kwadratuur van een paraboolsegment.*

**Opgave 27.** *[Verdieping] Kwadratuur van de cirkel met behulp van de quadratrix.*

**Opgave 28.** *[Verdieping] De maantjes van Hippocrates als kwadreeerbare “gekromde” oppervlakken.*

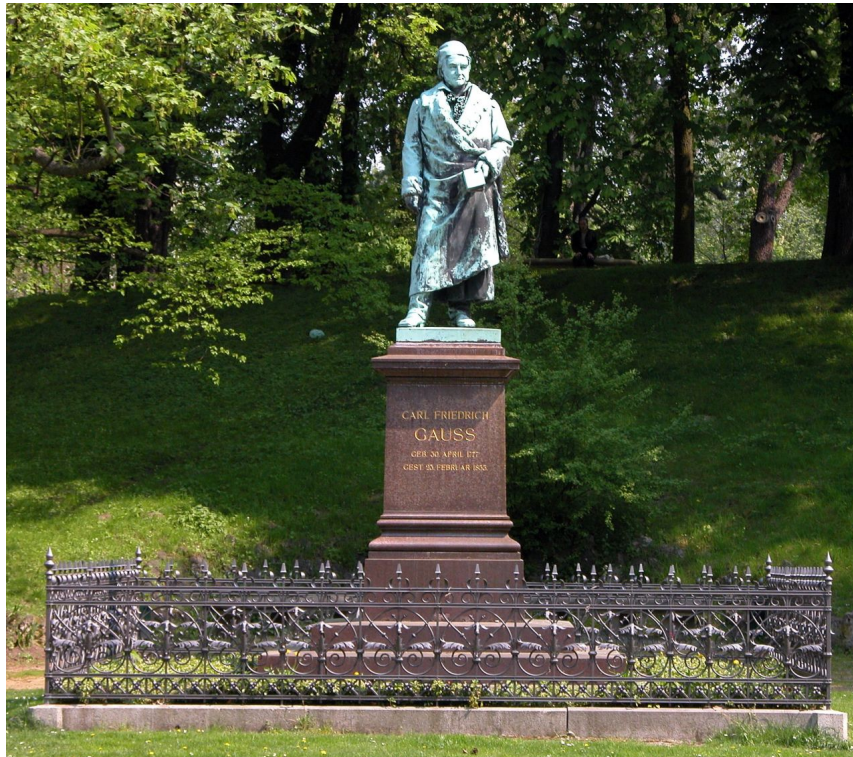
**4.4. De constructie van regelmatige veelhoeken.** We komen bij het laatste van de beoemde meetkundige problemen uit de Griekse Oudheid. In opgaven 3, 14 en 15 heb je regelmatige veelhoeken geconstrueerd met passer en liniaal, bijvoorbeeld een driehoek, vierkant en zeshoek. Verdiepingsopgave 16 gaat over het construeren van een regelmatige vijfhoek. Dit roept de vraag op of het mogelijk is om elke regelmatige veelhoek te construeren.

**Beroemd probleem 4** (Regelmatige veelhoeken). *Is het mogelijk om elke regelmatige veelhoek te construeren?*



---

De constructies van regelmatige drie-, vier-, vijf- en zeshoeken waren in de Griekse Oudheid bekend. Niemand kon echter een regelmatige zevenhoek produceren. Pas toen de wiskundige Carl Friedrich Gauss zich er rond 1800 mee ging bemoeien werd dit probleem volledig opgelost: hij gaf een volledige beschrijving van de veelhoeken die wel en niet kunnen worden geconstrueerd. Een regelmatige zevenhoek blijkt niet construeerbaar. Maar Gauss heeft op 18-jarige leeftijd een regelmatige 17-hoek geconstrueerd (!) en hierop was hij zo trots dat hij besloot wiskunde te gaan studeren (en geen taalkunde). In zijn geboorteplaats Braunschweig staat een standbeeld van Gauss met een sokkel in de vorm van een zeventienpuntige ster.



De constructie van regelmatige veelhoeken is gerelateerd aan de verdeling van hoeken, zoals blijkt uit de volgende opgave.

**Opgave 29.** *Kijk nog eens naar figuur 6, waarin een regelmatige zeshoek staat afgebeeld. Leg uit: als je de hoeken van  $60^\circ$  niet met passer en liniaal in drieën kunt delen, dan kun je ook geen regelmatige negenhoek construeren.*

**Opgave 30.** *[Verdieping] De regelmatige 17-hoek van Gauss.*