Universiteit Utrecht

Departement Wiskunde
Bachelorscriptie Wiskunde

Kardinaliteitsrekening zonder het Keuzeaxioma

Deik van der Horst

Begeleider:
Dr. Jaap van Oosten

Juni 2023

Inhoudsopgave

1 Inleiding

Wanneer we het keuzeaxioma gebruiken om de kardinaliteiten van oneindige verzamelingen te vergelijken, gelden duidelijke regels. Zonder het keuzeaxioma valt veel van deze structuur weg. In deze scriptie wordt een axiomatisering van de regels voor het vergelijken van kardinaliteiten van verzamelingen in ZF behandeld; hierbij baseren we ons op [1].
In hoofdstuk 2 zullen we de kardinaliteitsrekening in ZF algemeen beschrijven, en toelichten hoe de situatie verandert wanneer we het gebruik van het keuzeaxioma toelaten. De axioma's van ZF geven we in appendix A. Vervolgens behandelen we in hoofdstuk 3 het begrip Boole-algebra, waarbij we ons baseren op [2], pagina 78-84. Deze structuur op een verzameling zal op verschillende plekken in deze scriptie terugkomen.
Na de theorie van Boole-algebra's geïntroduceerd te hebben, kunnen we in hoofdstuk 4 het hoofdresultaat van deze scriptie formuleren in Stelling 4.2; zie ook stelling 1.2 van [1]. Deze stelling bevat een vergelijkingsprincipe, *CGFC*, waarmee de kardinaliteiten van verzamelingen in ZF vergeleken kunnen worden. De rest van dit hoofdstuk besteden we aan het bewijzen van dit vergelijkingsprincipe.
In hoofdstuk 5 definiëren we een propositionele formele taal $\mathcal{L}$. We zullen het vergelijken van kardinaliteiten van doorsneden, verenigingen en complementen van verzamelingen vervolgens uitdrukken in een $\mathcal{L}-$theorie. Deze theorie zullen we CardComp noemen. De rest van deze scriptie zal zich richten op het behandelen van de bewijzen van de volledigheid van CardComp met betrekking tot kardinaliteitsmodellen. Het zal blijken dat de correctheid van CardComp met betrekking tot kardinaliteitsmodellen niet lastig te bewijzen is, we behandelen dit bewijs in Stelling 5.9.
We zullen in hoofdstuk 6 bewijzen dat CardComp correct en volledig is met betrekking tot een ander soort modellen dan kardinaliteitsmodellen, namelijk de maatmodellen. Een maat wordt in de kansrekening gebruikt om gebeurtenissen in een gebeurtenissenruimte een kans toe te kennen. Er valt een parallel te zien tussen doorsneden en verenigingen van gebeurtenissen, en die van verzamelingen. We kunnen deze parallel gebruiken om in Stelling 6.9 de volledigheid van CardComp met betrekking tot maatmodellen te bewijzen, zie ook stelling 4.6 van [1].
Vervolgens behandelen we in hoofdstuk 7 hoe we maatmodellen kunnen omzetten in kardinaliteitsmodellen. Hiertoe zullen we dieper ingaan op ZF en de uitbreiding ZFA van ZF. In ZFA komen niet alleen verzamelingen voor zoals in ZF, maar ook zogenaamde oerelementen. We zullen voor ZF en ZFA verschillende modellen construeren. We construeren onder andere voor ZFA permutiemodellen construeren, en voor ZF symmetrische modellen; we baseren ons hierbij op hoofdstuk 4 en 5 van [3]. In appendix B laten we zien dat de geconstrueerde modellen inderdaad modellen van verzamelingenleer zijn.
In hoofdstuk 8 geven we de bewijzen van de correctheid en volledigheid van CardComp met betrekking tot kardinaliteitsmodellen, zie ook stelling 5.4 en stelling 6.1 van [1]. We nemen de volledigheid met betrekking tot maatmodellen, en laten met de theorie van hoofdstuk 7 zien dat volledigheid met betrekking tot kardinaliteitsmodellen volgt.

2 Verzamelingenleer, Kardinaliteitsrekening en Ordeningen

2.1 Verzamelingenleer en Kardinaliteitsrekening

Deze scriptie heeft als onderwerp het rekenen met kardinaliteiten in de Zermelo-Fraenkel verzamelingenleer, kortweg ZF. We baseren ons hierbij hoofdzakelijk op [1]. ZF is een formele verzamelingenleer, een aantal axioma's waarmee verzamelingen gevormd kunnen worden. De axioma's van ZF behandelen we in appendix A, zie ook hoofdstuk 1 van [2].
We zullen werken met een cantoriaanse definitie van kardinaliteit.

Definitie 2.1 (Kardinaliteit)**.** Laten X en Y verzamelingen zijn. Wanneer een injectie tussen X en Y bestaat, schrijven we $|X| \leq |Y|$. Wanneer een bijectie tussen X en Y bestaat, schrijven we $|X| = |Y|$

Geregeld wordt het volgende axioma aan ZF toegevoegd, de theorie die dan ontstaat noemen we ZFC.

Definitie 2.2 (Keuzeaxioma)**.** Neem een surjectieve functie $f : X \to Y$. Nu bestaat een functie $s : Y \to X$ zodat voor elke $y \in Y$ geldt $f(s(y)) = y$.

Anders gesteld zegt het keuzeaxioma dat voor elke verzameling van niet-lege en disjuncte verzamelingen X_i, we een verzameling Y kunnen vormen die precies één element van elke X_i bevat.
Wanneer we verzamelingen zoals gedefinieerd in ZFC bekijken, is het eenvoudig rekenen met kardinaliteiten van verzamelingen. Verzamelingen kunnen eindig of oneindig zijn. Eindige verzamelingen staan in bijectie met een verzameling $\{0, ..., n-1\}$, het rekenen met kardinaliteiten gaat precies zoals het rekenen met natuurlijke getallen. Wanneer X en Y oneindig zijn, kunnen we met het keuzeaxioma de volgende rekenregels bewijzen:

$$|X| + |X| = |X|, \qquad |X| \times |X| = |X|,$$

$$|X| + |Y| = \max(|X|, |Y|), \qquad |X|^{|X|} = 2^{|X|}.$$

Zie voor deze regels ook [4], pagina 20.
Zonder het keuzeaxioma gelden deze regels niet meer. Het is zelfs zo dat de notie van oneindigheid verandert wanneer we het keuzeaxioma niet gebruiken; zie hiervoor ook [5], pagina 60-61, en paragraaf 2.1 van [1]. We geven eerst de gebruikelijke definitie van oneindigheid.

Definitie 2.3 (Oneindigheid)**.** Een verzameling X heet oneindig wanneer er geen $n \in \mathbb{N}$ is zodat

$$|X| = |\{0, 1, ..., n-1\}|.$$

Wanneer zo'n n wel bestaat, noemen we X eindig.

Er bestaat echter nog een andere definitie van oneindigheid. Deze definitie maakt geen gebruik van de natuurlijke getallen om eindigheid dan wel oneindigheid uit te drukken, maar gaat uit van het al dan niet bestaan van een bijectie tussen X en een strikte deelverzaming van X.

Definitie 2.4 (Dedekind-oneindigheid)**.** Een verzameling X heet Dedekind-oneindig wanneer er een bijectie bestaat tussen X en een strikte deelverzameling $Y \subset X$. Wanneer zo'n bijectie niet bestaat, noemen we X Dedekind-eindig.

We merken op dat een injectie $\mathbb{N} \to X$ bestaat, precies wanneer X Dedekind-oneindig is. Het valt met het keuzeaxioma te bewijzen dat Dedekind-oneindigheid en oneindigheid equivalent zijn aan elkaar. Zonder het keuzeaxioma bestaan er verzamelingen die Dedekind-eindig, en ook oneindig in de gebruikelijke zin zijn.

Definitie 2.5 (Amorfe verzameling)**.** Neem een oneindige verzameling X. We noemen X amorf wanneer er geen oneindige, disjuncte $Y, Z \subseteq X$ zijn zodat $X = Y \cup Z$.

We merken het volgende op. Stel X is Dedekind-oneindig, dan bestaat een bijectieve functie $f : X \to Y$, waarbij Y een strikte deelverzameling van X is. Nu is er een injectie $g : \mathbb{N} \to X$, en X is niet amorf. We concluderen dat X Dedekind eindig is, als X amorf is. Omdat onder het keuzeaxioma Dedekind-oneindigheid equivalent is aan oneindigheid, bestaat in ZFC niet zoiets als een amorfe verzameling.
In ZF gelden de volgende twee stellingen voor het rekenen met kardinaliteit.

Stelling 2.6. *Laat Z een Dedekind-eindige verzameling zijn zoals in Definitie 2.4. Neem twee disjuncte verzamelingen X en Y. Nu geldt dat als $|X \cup Z| = |Y \cup Z|$, dan $|X| = |Y|$.*

Stelling 2.7 (Delen door m)**.** *Laten A en B twee verzamelingen zijn zodat $|m \times A| \leq |m \times B|$, met $m \in \mathbb{N}$. Nu geldt dat $|A| \leq |B|$.*

Voor bewijzen van deze stellingen verwijzen we naar [6].
Ook geldt de stelling van Schröder-Cantor-Bergstein, welke we nu zullen bewijzen. Eerst bewijzen we het volgende lemma.

Lemma 2.8. *Stel dat $A \subseteq B \subseteq A_1$ en dat $|A| = |A_1|$. Nu geldt $|A| = |B|$.*

Bewijs. We weten dat een injectie $f : A_1 \to A$ bestaat. Definieer twee rijen verzamelingen als volgt:

$$A_0 = A,\ A_{n+1} = f(A_n) \text{ voor alle } n \in \mathbb{N},$$

$$B_0 = B,\ B_{n+1} = f(B_n) \text{ voor alle } n \in \mathbb{N}.$$

We bewijzen met inductie dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt dat $A_n \subseteq B_n \subseteq A_{n+1}$. De inductiebasis $A_0 \subseteq B_0 \subseteq A_1$ volgt uit het gegevene. Stel nu dat $A_n \subseteq B_n \subseteq A_{n+1}$, dan $f(A_n) \subseteq f(B_n) \subseteq f(A_{n+1})$ en dus $A_{n+1} \subseteq B_{n+1} \subseteq A_{n+2}$.
Stel $C = \bigcup_{n=0}^{\infty}(A_n - B_n)$. Definieer de functie

$$g : A \to B, x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{als } x \in C, \\ x & \text{als } x \in A - C. \end{cases}$$

We zien dat $g(C) \cap g(A - C) = \varnothing$ en dat $g|_C$ en $g|_{(A-C)}$ injectief zijn, waarmee g injectief is. Ook geldt $f(C) \cup (A - C) = B$, waarmee g ook surjectief en dus bijectief is. Nu is bewezen dat $|A| = |B|$. $\square$

Stelling 2.9 (Schröder-Cantor-Bernstein). *Als* $|X| \leq |Y|$ *en* $|Y| \leq |X|$*, dan* $|X| = |Y|$*.*

Bewijs. We weten dat er injecties $f : X \to Y$ en $g : Y \to X$ bestaan, waarmee $g \circ f : X \to X$ injectief is. We zien dat

$$g \circ f(X) \subseteq g(Y) \subseteq X,$$

en merken op dat $|X| = |g \circ f(X)|$ en $|Y| = |g(Y)|$. Met het voorgaande lemma geldt nu dat $|X| = |Y|$. □

2.2 Ordeningen

We zullen in deze scriptie verschillende ordeningen van verzamelingen tegenkomen.

Definitie 2.10 (Pre-ordening). Laat X een verzameling en $\leq$ een binaire relatie op X zijn. Als $\leq$ reflexief en transitief is, heet $(X, \leq)$ een pre-ordening.

Definitie 2.11 (Partiële ordening). Laat $(X, \leq)$ een pre-ordening zijn. Als bovendien voor alle $x, y \in X$ geldt dat $x \leq y$ en $y \leq x$ impliceert dat $x = y$, heet $(X, \leq)$ een partiële ordening.

Definitie 2.12 (Lineaire ordening). Laat $(X, \leq)$ een partiële ordening zijn. Als voor alle $x, y \in X$ geldt dat $x \leq y$ of $y \leq x$, dan heet $(X, \leq)$ een lineaire ordening. Als $(Y, \leq)$ een pre-ordening is die aan de vorige voorwaarde voldoet, heet $(Y, \leq)$ een lineaire pre-ordening.

Definitie 2.13 (Welordening). Laat $(X, \leq)$ een lineaire ordening zijn. Als elke niet-lege $A \subseteq X$ een kleinste element $k \in A$ heeft, dat wil zeggen dat voor alle $a \in A$ geldt dat $k \leq a$, dan heet $(X, \leq)$ een welordening.

De aanname dat voor elke verzameling een volledige ordening bestaat, is equivalent is met de priemideaalstelling. We zullen hierop terugkomen in paragraaf 3.2.

3 Boole-Algebra's

In dit hoofdstuk zullen we Boole-algebra's introduceren. Een Boole-algebra is een bepaald soort structuur op een verzameling. Zoals we zullen zien, zijn Boole-algebra's nauw verwant aan zowel waarheid in de logica als het nemen van doorsneden en verenigingen van verzamelingen. Dit hoofdstuk is gebaseerd op [2], pagina 78-84.

3.1 Definitie en Eigenschappen

Definitie 3.1 (Boole-algebra)**.** Laat B een verzameling met minstens twee elementen zijn. We kiezen twee elementen uit B, en noemen één daarvan het bovenste element, $\top$, en de ander het onderste element, $\bot$. We definiëren op B tweeplaatsige operaties $+$ en $\cdot$, en een eenplaatsige operatie $-$. Deze operaties voldoen aan de volgende axioma's:

- $u+v=v+u$, $\quad u\cdot v=v\cdot u$, (commutativiteit)
- $u+\bot=u$, $\quad u\cdot\top=u$ (identiteit)
- $u+(v+w)=(u+v)+w$, $\quad u\cdot(v\cdot w)=(u\cdot v)\cdot w$, (associativiteit)
- $u\cdot(v+w)=(u\cdot v)+(u\cdot w)$, $\quad u+(v\cdot w)=(u+v)\cdot(u+w)$, (distributiviteit)
- $u\cdot(u+v)=u$, $\quad u+(u\cdot v)=u$, (absorptie)
- $u+(-u)=\top$, $\quad u\cdot(-u)=\bot$. (complementatie)

Nu heet $(B,+,\cdot,-,\top,\bot)$ een Boole-algebra, we zullen deze simpelweg B noemen. Wanneer de verzameling B eindig veel elementen bevat, noemen we de Boole-algebra B eindig.

Uit deze definitie vallen allerlei eigenschappen van Boole-algebra's af te leiden, we zullen er een aantal bewijzen.

Stelling 3.2. *Laat B een Boole-algebra zijn. Nu geldt voor alle $u,v\in B$ het volgende:*

1. $u+u=u$ *en* $u\cdot u=u$,
2. $-\top=\bot$ *en* $-\bot=\top$,
3. $\top+u=\top$ *en* $\bot\cdot u=\bot$,
4. $u+(u\cdot v)=u=u\cdot(u+v)$,
5. *Als* $(u+v)=\top$ *en* $(u\cdot v)=\bot$, *dan* $-u=v$,
6. $--u=u$,
7. $-(u+v)=-u\cdot-v$ *en* $-(u\cdot v)=-u+-v$.
   (De wetten van De Morgan.)

Bewijs. We bewijzen stuk voor stuk de claims.

1. We zien dat $u + u = (u + u) \cdot \top = (u + u) \cdot (u + -u) = u + (u \cdot -u) = u + \bot = u$, en dat $u \cdot u = (u \cdot u) + \bot = (u \cdot u) + (u \cdot -u) = u \cdot (u + -u) = u \cdot \top = u$.

2. We zien dat $-\top = -\top \cdot \top = \bot$, en dat $-\bot = -\bot + \bot = \top$.

3. We zien met behulp van (1.) dat $\top + u = u + u + -u = u + (-u) = \top$, en dat $\bot \cdot u = u \cdot u \cdot -u = u \cdot -u = \bot$.

4. We zien dat $u+(u\cdot v) = (u+u)\cdot(u+v) = u\cdot(u+v) = (u\cdot u)+(u\cdot v) = u+(u\cdot v) = u$.

5. Stel $(u+v) = \top$ en $(u\cdot v) = \bot$. Nu geldt dat $v\cdot -u = (v\cdot -u)+\bot = (v\cdot -u)+(u\cdot v) = v\cdot(u+-u) = v\cdot\top = v$, en dat $v\cdot -u = (v\cdot -u)+\bot = (v\cdot -u)+(u\cdot -u) = -u\cdot(u+v) = -u \cdot \top = -u$, waarmee $-u = v$.

6. We weten dat $(-u) + u = \top$ en $(-u) \cdot u = \bot$, dus volgt met (5.) dat $u = - - u$.

7. We laten zien dat $-(u+v) = -u\cdot -v$. Merk op dat $(u+v)+(-u\cdot -v) = u+(v+(-u\cdot -v)) = u+(v+-u)\cdot(v+-v) = u+((v+-u)\cdot\top) = u+(v+-u) = \top+v = \top$, en dat $(u+v)\cdot(-u\cdot -v) = -v\cdot(-u\cdot(u+v)) = -v\cdot((-u\cdot u)+(-u\cdot v)) = -v\cdot(\bot+(-u\cdot v)) = -v \cdot -u \cdot v = \bot \cdot -u = \bot$. Met (5.) volgt dat $-(u + v) = -u \cdot -v$.

   We zien ten slotte dat $-(u \cdot v) = -(- - u \cdot - - v) = -(-(-u + -v)) = -u + -v$.

□

Uit de definitie van een Boole-algebra B volgt het bestaan van een partiële ordening op B.

Stelling 3.3. *Zij B een Boole-algebra. Laat $u \leq v$ precies als $u = u \cdot v$. Nu is $(B, \leq)$ een partiële ordening, met grootste element $\top$ en kleinste element $\bot$.*

Bewijs. We bewijzen dat $\leq$ een partiële ordening is. Neem $u, v, w \in B$. We merken op dat $u \cdot u = u$, waarmee $\leq$ reflexief is. Stel dat $u \leq v$ en $v \leq w$, dan $u = u \cdot v = u \cdot v \cdot w = u \cdot w$, waarmee $\leq$ transitief is. Ook is $\leq$ antisymmetrisch, gezien dat als $u \leq v$ en $v \leq u$, dan $u = u \cdot v = v$ en dus $u = v$. We merken op dat voor alle u geldt dat $\top + u = \top$ en $\bot \cdot u = \bot$, waarmee $\bot$ en $\top$ inderdaad het kleinste en grootste element onder $\leq$ zijn. □

Definitie 3.4 (Volledige Boole-algebra)**.** Laat B een Boole-algebra met bijbehorende partiële ordening $\leq$ zijn. Als elke niet-lege deelverzameling $A \subseteq B$ een kleinste bovengrens en een grootste ondergrens met betrekking tot $\leq$ heeft, noemen we B een volledige Boole-algebra. Als B volledig is en $A \subseteq B$, schrijven we $\Sigma\{a \mid a \in A\}$ voor de kleinste bovengrens en $\Pi\{a \mid a \in A\}$ voor de grootste ondergrens van A.

We voeren het begrip atoom van een Boole-algebra in. Zij B een Boole-algebra, en stel $B^+ := B - \{\bot\}$. Neem $a \in B^+$. Nu is het gemakkelijk na te gaan dat $B|_a := \{u \in B \mid u \leq a\}$, met dezelfde $+$ en $\cdot$ als B en met $-u := a \cdot (-u)$ voor alle $u \in B|_a$, een Boole-algebra is. Als $B|_a = \{\bot, a\}$, dan heet a een atoom van B. Kort gezegd is a een atoom, wanneer a een minimaal element van $(B^+, \leq)$ is.

Definitie 3.5 (Isomorfisme van Boole-algebra's)**.** Laat B en C twee Boole-algebra's zijn, en $u, v \in B$. Laat $\Psi : B \to C$ een homomorfisme zijn, dat wil zeggen een afbeelding waarvoor het volgende geldt:

1. $\Psi(\bot) = \bot,\ \Psi(\top) = \top$,
2. $\Psi(u + v) = \Psi(u) + \Psi(v)$,
3. $\Psi(u \cdot v) = \Psi(u) \cdot \Psi(v)$,
4. $\Psi(-u) = -\Psi(u)$.

Als Ψ bovendien bijectief is, heet Ψ een isomorfisme. Wanneer Ψ een isomorfisme van B naar B is, noemen we Ψ een automorfisme.

We geven de definitie van een ideaal en van een filter op een Boole-algebra.

Definitie 3.6 (Ideaal van een Boole-algebra)**.** Laat B een Boole-algebra zijn, en I een deelverzameling van B. Stel dat I voldoet aan de volgende voorwaarden:

1. $\top \notin I, \bot \in I$,
2. Als $u \in I$ en $v \in I$, dan $u + v \in I$,
3. Als $u, v \in B, u \in I$ en $v \leq u$, dan $v \in I$.

Nu heet I een ideaal van B. Als voor alle $u \in B$ geldt dat hetzij $u \in I$, hetzij $-u \in I$, dan heet I een priemideaal.

Definitie 3.7 (Filter van een Boole-algebra)**.** Laat B een Boole-algebra zijn, en F een deelverzameling van B. Stel dat F voldoet aan de volgende voorwaarden:

1. $\top \in F, \bot \notin F$,
2. Als $u \in F$ en $v \in F$, dan $u \cdot v \in F$,
3. Als $u, v \in B, u \in F$ en $u \leq v$, dan $v \in F$.

Nu heet F een filter van B. Als voor alle $u \in B$ geldt hetzij $u \in F$, hetzij $-u \in F$, dan heet F een ultrafilter.

Voorbeeld 3.8 (Dualiteit van filters en idealen)**.** Neem een Boole-algebra $B = (B, +, \cdot, -, \top, \bot)$ met partiële ordening $\leq$. Het volgt nu direct dat $B^{op} = (B, \cdot, +, -, \bot, \top)$ ook een Boole-algebra is; we merken met de wetten van De Morgan op dat $\Psi(u) = -u$ een isomorfisme $B \to B^{op}$ geeft. Voor de partiële ordening $\leq^{op}$ van B^{op} geldt dat $u \leq^{op} v$ precies als $u = u + v$, waaruit volgt dat $v = u \cdot v$ en dus dat $v \leq u$ in de ordening van B.
We merken op dat deelverzameling $I \subseteq B$ een ideaal is op B, precies als I een filter is op B^{op}. Ook is $F \subseteq B$ een filter op B, precies als F een ideaal is op B^{op}. We noemen filters en idealen nu *duaal* aan elkaar. $\triangle$

3.2 Representaties van Boole-Algebra's

We geven nu twee voorbeelden van Boole-algebra's. Het eerste voorbeeld laat zien dat logische equivalentie een Boole-algebra induceert.

Voorbeeld 3.9 (Lindenbaum-algebra)**.** Neem een theorie T in een taal $\mathcal{L}$. We merken op dat de relatie $\sim$, gedefinieerd door

$$\phi \sim \psi \text{ precies als } T \models \phi \leftrightarrow \psi,$$

een equivalentierelatie is:

- Als $\phi \sim \psi$, dan $T \models \phi \leftrightarrow \psi$ en ook $T \models \psi \leftrightarrow \phi$, waarmee $\psi \sim \phi$,
- $T \models \phi \leftrightarrow \phi$ geldt voor elke $\mathcal{L}-$zin ϕ,
- Als $\phi \sim \psi$ en $\psi \sim \theta$, dan ook $T \models \phi \leftrightarrow \psi \leftrightarrow \theta$ en dus $T \models \phi \leftrightarrow \theta$, waarmee $\phi \sim \theta$.

Laat B de verzameling van alle equivalentieklassen van $\sim$ zijn. We definiëren op B de operaties $+$, $\cdot$ en $-$, en elementen $\top$ en $\bot$, als volgt:

$$[\phi] + [\psi] = [\phi \vee \psi] \qquad \top = [\phi \wedge \neg\phi]$$

$$[\phi] \cdot [\psi] = [\phi \wedge \psi] \qquad \bot = [\phi \vee \neg\phi]$$

$$-[\phi] = [\neg\phi]$$

We kunnen gemakkelijk controleren dat B hiermee een Boole-algebra is. We zien dat

$$[\phi] + [\psi] = [\phi \vee \psi] = [\psi \vee \phi] = [\psi] + [\phi],$$

waarmee $+$ commutatief is. De commutativiteit van $\cdot$, en de associativiteit en distributiviteit van $+$ en $-$ volgen op vergelijkbare wijze. Ook zien we dat

$$[\phi] \cdot ([\phi] + [\psi]) = [\phi \wedge \phi \vee \psi] = [\phi]$$

en

$$[\phi] + ([\phi] \cdot [\psi]) = [\phi \vee \phi \wedge \psi] = [\phi],$$

waarmee aan het absorptieaxioma voldaan is. Tenslotte geldt ook het complementatieaxioma, gezien dat

$$[\phi] + -[\phi] = [\phi \vee \neg\phi] = \bot,$$

en

$$[\phi] \cdot -[\phi] = [\phi \wedge \neg\phi] = \bot.$$

$\triangle$

Het volgende voorbeeld laat zien dat we het nemen van doorsnede, vereniging en complement van verzamelingen als Boole-operaties kunnen opvatten.

Definitie 3.10 (Algebra van verzamelingen)**.** Een paar $< S, \mathcal{F} >$, waarbij $\mathcal{F}$ een verzameling van deelverzamelingen van S is zodat $\varnothing \in \mathcal{F}$, en zodat $\mathcal{F}$ gesloten is onder eindige doorsneden en complementen, heet een algebra van verzamelingen. We merken op dat omdat $\varnothing \in \mathcal{F}$, ook $\varnothing^c = S \in \mathcal{F}$.

Voorbeeld 3.11. Neem een algebra van verzamelingen $< S, \mathcal{F} >$. We merken op dat $\cup$ en $\cap$ commutatief, associatief en distributief zijn. Ook geldt, met $X, Y \subseteq S$, dat

$$X \cap (X \cup Y) = X,\ X \cup (X \cap Y) = X,$$

en dat

$$X \cup X^c = S, X \cap X^c = \varnothing,$$

waarmee $(\mathcal{F}, \cup, \cap, \cdot^c, S, \varnothing) := < S, \mathcal{F} >$ een Boole-algebra is. $\triangle$

We zullen nu laten zien dat elke Boole-algebra isomorf is met een algebra van verzamelingen. Hiertoe geven we eerst de volgende stelling.

Stelling 3.12 (Priemideaalstelling)**.** *Elk ideaal op een Boole-algebra B valt uit te breiden tot een priemideaal.*

De priemideaalstelling is te zien als een zwakke versie van het keuzeaxioma. Uit het keuzeaxioma volgt de priemideaalstelling, maar het keuzeaxioma volgt niet uit de priemideaalstelling. Het valt te bewijzen, dat de priemideaalstelling equivalent is met het bestaan van een lineaire ordening (Definitie 2.12) op iedere verzameling. Het keuzeaxioma is equivalent met het bestaan van een welordening op iedere verzameling. Zie voor meer hierover [3], pagina 14-20.

Stelling 3.13 (Representatiestelling van Stone)**.** *Voor elke Boole-algebra B bestaat een algebra van verzamelingen $< S, \mathcal{F} >$, zodat B en $< S, \mathcal{F} >$ isomorf zijn als Boole-algebra's.*

Bewijs. Zij B een Boole-algebra. We nemen de verzameling

$$U = \{p \mid p \text{ is een ultrafilter van } B\} \subseteq \mathcal{P}(B).$$

We definiëren nu voor alle $u \in B$ een verzameling $X_u = \{p \mid p \in U \text{ en } u \in p\}$. Zij nu $\mathcal{U} = \{X_u \mid u \in B\}$. We bekijken de afbeelding $\pi : B \to \mathcal{U}, u \mapsto X_u$. We laten zien dat $\pi(u \cdot v) = \pi(u) \cap \pi(v)$. Als $u, v \in p$, dan $u \cdot v$ omdat p een filter is. Als $u \cdot v \in p$, dan $u, v \in p$ omdat p een filter is en $u \cdot v \leq u$, $u \cdot v \leq v$. Hiermee geldt $\pi(u \cdot v) = \pi(u) \cap \pi(v)$.
Nu volgt $\pi(u + v) = \pi(u) \cup \pi(v)$, gezien dat

$$\pi(u + v) = \pi(-(-u \cdot -v)) = (\pi(u)^c \cap \pi(v)^c)^c = \pi(u) \cup \pi(v).$$

We merken op dat ook $\pi(-u) = S - \pi(u)$, omdat $\pi(-u) \in p$ precies als $-u \in p$. Dan geldt $u \notin p$ en dus $\pi(u) \notin p$, omdat p een ultrafilter is. We concluderen dat $S - \pi(u) = \pi(-u)$.
Hiermee is π een homomorfisme. We laten nu met de priemideaalstelling zien dat π injectief is. Omdat filters en idealen duaal zijn, kunnen we voor elke $u \neq v$ met de priemideaalstelling een ultrafilter vinden waar u een element van is, maar v niet. Hieruit volgt de injectiviteit van π, waarmee π een isomorfisme is.

$\square$

Merk op dat π zonder het keuzeaxioma een homomorfisme, maar geen isomorfisme is.

4 Hoofdresultaat en een Vergelijkingsprincipe

Nu we Boole-algebra's geïntroduceerd hebben, formuleren we in dit hoofdstuk het hoofdresultaat van deze scriptie. We ontlenen dit resultaat aan [1], pagina 2.

4.1 Hoofdresultaat

Eerst geven we de volgende stelling.

Stelling 4.1. *Laat $(\mathcal{I}, \preceq)$ een partiële ordening zijn. Nu is er een model $\mathcal{N}$ van ZF, en een familie verzamelingen $(A_p)_{p\in\mathcal{I}}$ in $\mathcal{N}$, zodat*

$$p \preceq q \text{ precies als } |A_p| \leq |A_q|.$$

We zullen in hoofdstuk 5 toelichten wat een model van ZF is, en in hoofdstuk 7 zullen we Stelling 4.1 bewijzen. Voor nu kunnen we de stelling als volgt informeel parafraseren: *elke partiële ordening is voor te stellen als de ordening op kardinaliteit van een familie verzamelingen in ZF.* In ZFC zouden we dergelijke verzamelingen niet kunnen vinden, de ordening op kardinaliteit van verzamelingen in ZFC is zoals we weten altijd een lineaire ordening.
Stel, we nemen een algebra van verzamelingen $< X, \mathcal{F} >$. We weten dat de ordening op kardinaliteit van de verzamelingen in $\mathcal{F}$ te zien is als een partiële ordening. Het valt te verwachten dat het nemen van doorsnede, vereniging of complement zich op een regelmatige manier verhoudt tot de ordening op kardinaliteit van de betrokken verzamelingen. De volgende stelling geeft een beschrijving van hoe de ordening op kardinaliteit van verzamelingen verband houdt met het nemen van doorsnede, vereniging en complement.

Stelling 4.2. *Laat B een eindige Boole-algebra met ordening $\leq$ zijn, en laat $\preceq$ een binaire relatie op B zijn. De volgende uitspraken zijn equivalent:*

1. *Er bestaat een model $\mathcal{N}$ van ZF, een verzameling $X \in \mathcal{N}$, en een algebra van verzamelingen $< X, \mathcal{F} >$, $\mathcal{F} = (A_b)_{b\in B}$, die isomorf is met B als Boole-algebra, zodat voor alle $p, q \in B$ geldt:*
$$p \preceq q \text{ precies als } |A_p| \leq |A_q|.$$

2. *$(B, \preceq)$ voldoet aan de volgende voorwaarden:*
   - *(a) niet $\top \preceq \bot$,*
   - *(b) voor alle $b \in B$ geldt $\bot \preceq b$,*
   - *(c) $\preceq$ is reflexief,*
   - *(d) $\preceq$ is transitief,*
   - *(e) Er geldt dat $e \preceq f$, als voor twee rijen $(a_1, ..., a_n, e, ..., e)$, $(b_1, ..., b_n, f, ..., f)$ van gelijke lengte in B aan de volgende drie voorwaarden voldaan is:*
     - *(i) Voor elk atoom a van B zijn er precies evenveel a_i en e als b_i en f die groter zijn onder $\leq$ dan a,*
     - *(ii) $b_i \preceq a_i$ voor alle $i \in \{1, ..., n\}$,*

(iii) *Elke a_i ligt in het kleinste ideaal van de Boole-algebra B dat f bevat; dit ideaal is naar beneden toe gesloten onder $\preceq$.*

Deze stelling zegt dat er, onder bepaalde voorwaarden op de Boole-algebra B, een relatie $\preceq$ op B bestaat die de elementen van B precies zo ordent, als $\leq$ de kardinaliteiten van de verzamelingen in de aan B isomorfe algebra van verzamelingen $< X, \mathcal{F} >$ ordent. De voorwaarden (a) en (b) drukken niet-trivialiteit en positiviteit uit, en zijn intuïtief makkelijk te verantwoorden. Het is ook vanzelfsprekend dat we eisen dat $\preceq$ reflexief en transitief is. Voorwaarde (e), die we vanaf hier CGFC (*Covered Generalized Finite Cancellation*) zullen noemen, is minder vanzelfsprekend. We zullen nu uitleggen wat de plek van CGFC is bij het vergelijken van de kardinaliteiten van verzamelingen in ZF.

4.2 Een Vergelijkingsprincipe

Zoals we weten, kan een oneindige verzameling in ZF Dedekind-eindig of Dedekind-oneindig zijn. Wanneer we het keuzeaxioma gebruiken is een verzameling óf eindig, óf oneindig; in ZF bestaan Dedekind-eindige én oneindige verzamelingen. Wanneer verzamelingen X, Y eindig zijn, hebben we andere informatie over mogelijke injecties tussen de twee dan wanneer X en Y Dedekind-eindig én oneindig zijn. Als X en Y Dedekind-oneindig zijn, hebben we weer andere informatie. We zullen nu varianten van CGFC behandelen, FC en GFC, die werken op respectievelijk eindige en Dedekind-eindige verzamelingen. FC staat voor *Finite Cancellation*, GFC voor *Generalized Finite Cancellation*. Oorspronkelijk zijn GFC en FC geformuleerd binnen theorieën in de kansrekening. In plaats van verzamelingen en hun kardinaliteit, wordt hierbij gekeken naar gebeurtenissen en hun waarschijnlijkheid. De abstractie die een Boole-algebra biedt, maakt het wisselen tussen verschillende contexten eenvoudig. Zie voor meer informatie over GFC in de context van kansrekening [7].
We geven de volgende definitie.

Definitie 4.3 (Evenwicht)**.** Wanneer voor twee rijen verzamelingen $< A_1, ..., A_k >$ en $< B_1, ..., B_k >$ geldt dat elk element s even vaak in $< A_1, ..., A_k >$ als in $< B_1, ..., B_k >$ voorkomt, dat wil zeggen wanneer voor voor alle s geldt dat

$$|\{i|s \in A_i\}| = |\{i|s \in B_i\}|,$$

dan noemen we de rijen in evenwicht. Wanneer $< A_1, ..., A_k >$ en $< B_1, ..., B_k >$ in evenwicht zijn schrijven we

$$< A_1, ..., A_k >=_0 < B_1, ..., B_k > .$$

Voor eindige verzamelingen $A_1, ..., A_k, E, B_1, ..., B_k, F$ kunnen we nu het kardinaliteitsvergelijkingsprincipe FC formuleren.

Stelling 4.4 (FC)**.** *Stel dat voor twee rijen van eindige verzamelingen geldt dat*

$$< A_1, ..., A_k, E, ..., E >=_0 < B_1, ..., B_k, F, ..., F >,$$

dat de verzamelingen E en F beiden $l-$maal herhaald worden, en dat $|A_i| \geq |B_i|$ voor alle $i \leq k$. Nu geldt dat $|E| \leq |F|$.

Bewijs. We zorgen eerst voor dat in ieder van de twee rijen verzamelingen elk element in precies één verzameling zit. Hiertoe vervangen we het i^{de} voorkomen van een element a in een verzameling van $< A_1, ..., A_k, E, ..., E >$ door (a, i), en het j^{de} voorkomen van een element b in een verzameling van $< B_1, ..., B_k, F, ..., F >$ door (b, j). We noemen de resulterende rijen van verzamelingen $< \hat{A}_1, ..., \hat{A}_k, E_1, ..., E_l >$ en $< \hat{B}_1, ..., \hat{B}_k, F_1, ..., F_l >$. We merken op dat nu

$$< A, E_1, ..., E_l >=_0 < B, F_1, ..., F_l >$$

geldt, met $A = \bigcup_{i \leq k} \hat{A}_i$, en $B = \bigcup_{i \leq k} \hat{A}_i$. We concluderen dat

$$< A, E >=_0 < B, F > .$$

Merk op dat we bij dit alles geen gebruik hebben gemaakt van de eindigheid van de betrokken verzamelingen.
Omdat $< A_1, ..., A_k, E, ..., E >$ en $< B_1, ..., B_k, F, ..., F >$ alleen eindige verzamelingen bevatten, zijn ook de verzamelingen in de rijen $< A, E >$ en $< B, F >$ eindig. We weten dat voor elke $i \leq k$ een injectie $f_i : B_i \to A_i$ bestaat, waarmee een injectie $f : B \to A$ bestaat. Uit het in evenwicht zijn van de rijen volgt nu dat een injectie $g : E \to F$ bestaat.

$\square$

Informeel zegt FC dat wanneer $< A_1, ..., A_k, E >$ en $< B_1, ..., B_k, F >$ precies dezelfde elementen bevatten en $< A_1, ..., A_k >$ meer elementen bevat dan $< B_1, ..., B_k >$, de rijen weer in balans gebracht moeten worden door F groter te laten zijn dan E.
Het kardinaliteitsvergelijkingsprincipe GFC geeft een veralgemenisering van FC naar Dedekind-eindige verzamelingen.

Stelling 4.5 (GFC)**.** *Neem aan dat voor twee rijen verzamelingen geldt dat*

$$< A_1, ..., A_k, E, ..., E >=_0 < B_1, ..., B_k, F, ..., F >,$$

waarbij E en F beiden l maal herhaald worden. Zij elke B_i Dedekind-eindig, en $|B_i| \leq |A_i|$, voor elke $i \in \{1, ..., k\}$. Nu volgt dat $|E| \leq |F|$.

Bewijs. Op dezelfde manier als bij stelling Stelling 4.4 kunnen we het gegevene herschrijven tot

$$< A, E >=_0 < B, F > .$$

Een eindige vereniging van Dedekind-eindige verzamelingen is Dedekind-eindig, dus B is Dedekind-eindig. Ook hebben we een injectie $f : B \to A$. We construeren nu een injectie $g : E \to F$.
Zij $x \in E$, dan $x \in B \cup F$, gezien dat $< A, E >=_0 < B, F >$. We stellen $g(x) = x$ als $x \in F$. Neem $x \in B$. Nu geldt $f(x) \in A$, en ook $f(x) \in B \cup F$ gezien dat $< A, E >=_0 < B, F >$. Nu zijn er twee gevallen: $f(x) \in F$ en $f(x) \in B$. Stel $g(x) = f(x)$ als $f(x) \in F$. Stel nu $f(x) \in B$. We laten zien dat er een $k \in \mathbb{N}$ is zodat $f^k(x) \in F$. Als er niet zulke k bestaat, dan geldt $\{f^k(x) | k \in \mathbb{N}\} \subseteq B$. Bovendien geldt met de injectiviteit van f dat $f^k(x) \neq f^l(x)$ voor alle $k \neq l$. Hiermee bestaat een injectie $\mathbb{N} \to B$, wat in tegenspraak is met de Dedekind-eindigheid van B. Definieer nu $g(x) = f^k(x)$, met k zodanig dat k het eerste natuurlijke getal is zodat $f^k(x) \in F$.

Nu we een functie $g : E \to F$ hebben gedefinieerd, laten we zien dat g injectief is. Neem $x, y \in E$ zodat $x \neq y$, en bekijk de rijen

$$x, f(x), f(f(x)), ..., f^k(x) = g(x)$$

en

$$y, f(y), f(f(y)), ..., f^k(y) = g(y).$$

Op $g(x)$ en $g(y)$ na liggen alle elementen van deze rijen in A. Nu volgt dat $x \notin \{f(x), f(f(x)), ..., f^k(x) = g(x)\}$ en $y \notin \{f(y), f(f(y)), ..., f^k(y) = g(y)\}$, omdat $x, y \in E$. Uit de injectiviteit van f volgt dat $f^i(x) \neq f^j(x)$ voor alle $i, j \leq k$. Hiermee delen de rijen geen enkel element, waarmee g injectief is. We concluderen dat $|E| \leq |F|$. $\square$

Nu zullen we het vergelijkingsprincipe CGFC bewijzen, dat voor Dedekind-eindige én Dedekind-oneindige verzamelingen geldt. Informeel gezegd verschilt CGFC in het volgende van GFC. De verzamelingen $B_1, ..., B_k$ kunnen als ze Dedekind-oneindig zijn zo groot worden, dat we de conclusie $|E| \leq |F|$ niet meer kunnen trekken. In CGFC wordt dit probleem opgelost door te eisen dat elke A_i in kardinaliteit begrensd wordt door de kardinaliteit van een eindig veelvoud van F.

Stelling 4.6 (CFGC)**.** *Kies twee rijen verzamelingen* $< A_1, ..., A_k, E, ..., E >$ *en* $< B_1, ..., B_k, F, ..., F >$*, zodat E en F beiden l-maal herhaald worden. Stel dat het volgende geldt:*

(I) $< A_1, ..., A_k, E, ..., E > =_0 < B_1, ..., B_k, F, ..., F >$,

(II) $|B_i| \leq |A_i|$ *voor alle* i,

(III) Voor alle i is er $n \in \mathbb{N}$ zodat $|A_i| \leq |n \times F|$.

Dan volgt dat $|E| \leq |F|$.

Bewijs. We versimpelen eerst het gegevene op dezelfde manier als Stelling 4.4 tot

$$< A, E > =_0 < B, F > .$$

We weten dat $|B| \leq |A|$ en dat $|A| \leq |n \times F|$, dus we kunnen injecties $f : B \to A$ en $g : A \to n \times F$ kiezen.
We gaan nu een injectieve functie $h : E \to F$ definiëren. Hiertoe definiëren we eerst functies $h_X : X \to F$ en $h_Y : Y \times \omega \to n \times F$, waarbij X en Y disjuncte verzamelingen zijn zodat $E = X \cup Y$. We definiëren h_X en h_Y nu als volgt:

- Als $x \in F$, laat dan $x \in X$ en $h_X(x) = x$.
- Stel $x \in B$. Nu geldt $f(x) \in A$ en, gezien dat $< A, E > =_0 < B, F >$, ook $f(x) \in B \cap F$. Als $f(x) \in F$, laat $x \in X$ en stel $h_X(x) = f(x)$. Als er een $k \in \mathbb{N} \cup \infty$ bestaat zodat $f^k(x) \in F$, laat $x \in X$ en stel $h_X(x) = f^k(x)$. Als er niet zulke k bestaat, laat dan $x \in Y$ en stel $h_Y(x, m) = g(f^m(x))$.

We laten zien dat h_X en h_Y injectief zijn. Stel $x, y \in X, x \neq y$. We merken op dat omdat f injectief is, de rijen $x, f(x), f^2(x), ...$ en $y, f(y), f^2(y), ...$ disjunct zijn en h_X injectief. Gezien dat ook g injectief is, is h_Y injectief.
We laten zien dat vereniging $h : E = X \cup Y \to F$ van h_X en h_Y injectief is. Laat $F' = \mathrm{im}(h_Y) \cap F$. We zien nu dat

$$|Y \cup F'| \leq |Y \times \omega|$$

en dus

$$|(Y \cup F') \times \omega| \leq |Y \times \omega| \leq |n \times F'|$$

Hieruit volgt $|(Y \cup F') \times n| \leq |n \times F'|$ en, na delen door n, $|F'| \leq |Y \cup F'| \leq |F'|$. Hieruit volgt $|Y \cup F'| = |F'|$. Laat nu $X_1 = h_X(F')$ en $X_2 = X - X_1$. Nu volgt $|Y \cup X_1| = |F'|$ en $|X_2| \leq |F - F'|$. We concluderen dat $|E| = |X_1 \cup X_2 \cup Y| \leq |F|$.

□

We merken de parallel op tussen de voorwaarden $(I), (II)$ en (III) van Stelling 4.6, en de voorwaarden $(i), (ii)$ en (iii) in Stelling 4.2. In een algebra van verzamelingen $< X, \mathcal{F} >$ wordt de rol van atomen gespeeld door elementen van de verzameling X. Als een verzameling een element bevat, is de verzameling in de ordening van de Boole-algebra groter dan het atoom. Het in evenwicht zijn van twee rijen in een algebra van verzamelingen komt in de Boole-algebra nu neer op voorwaarde (i). De parallel tussen (II) en (ii) spreekt voor zich. Ten slotte merken we het volgende op. Stel dat voor een algebra van verzamelingen $< A_1, ..., A_n, F >$ geldt dat elke A_i in het kleinste ideaal van $< A_1, ..., A_n, F >$ als Boole-algebra ligt dat F bevat. Het ideaal bevat nu alle veelvouden $F \cup ... \cup F$ van F. Stel bovendien dat A_i in kardinaliteit begrensd is. We kunnen nu een verzameling $n \times F$ vinden zodat $|A_i| \leq |n \times F|$.

5 De Taal $\mathcal{L}$ en CardComp

5.1 De Taal $\mathcal{L}$

In het volgende zullen we de theorie CardComp formuleren, waarmee kardinaliteiten van verzamelingen in ZF met elkaar vergeleken kunnen worden. Eerst zullen we de taal definiëren waarin CardComp gegeven zal worden. Dit zal een propositionele taal zijn, waarin dus geen kwantoren voorkomen; in onze taal zal ook geen gelijkheidsteken voorkomen. Een taal bestaat uit een verzameling constanten $\mathrm{Con}(\mathcal{L})$, een verzameling relatiesymbolen $\mathrm{Rel}(\mathcal{L})$, en een verzameling functiesymbolen $\mathrm{Fun}(\mathcal{L})$. Ook hebben we symbolen $\wedge$ en $\neg$ voor conjunctie en negatie.

Definitie 5.1 (De taal $\mathcal{L}$)**.** Laat $\mathrm{Con}(\mathcal{L}) = \Phi$ een niet-lege verzameling constanten zijn, $\mathrm{Rel}(\mathcal{L}) = \{|\cdot| \leq |\cdot|\}$ met $|\cdot| \leq |\cdot|$ een binair relatiesymbool, en $\mathrm{Fun}(\mathcal{L}) = \{\cap, \cdot^c\}$ met $\cap$ een binair functiesymbool en $\cdot^c$ een unair functiesymbool.
De verzameling termen van $\mathcal{L}$ bestaat uit de constanten, en uit de toepassing van de functiesymbolen op termen.
De verzameling zinnen van $\mathcal{L}$ bestaat uit de toepassing van het relatiesymbool op termen, uit de negatie van zinnen, en uit de conjunctie van zinnen.
De hulpsymbolen $\rightarrow$, $\vee$ en $\leftrightarrow$ kunnen we op gebruikelijke wijze definiëren:

$$s \rightarrow t := \neg(s \wedge \neg t),$$

$$s \vee t := \neg(\neg s \wedge \neg t),$$

$$s \leftrightarrow t := (s \rightarrow t) \wedge (t \rightarrow s).$$

Kies een $\phi \in \Phi$ vast. We voeren nu de volgende verzamelingtheoretische notatie in:

$$\varnothing := \phi \cap \phi^c,$$

$$t \subseteq s := |t \cap s^c| \leq |\varnothing|,$$

$$t = s := (t \subseteq s \wedge s \subseteq t),$$

$$t \neq s := \neg(t = s),$$

$$t \nsubseteq s := \neg(t \subseteq s),$$

$$t \subsetneq s := (t \subseteq s \wedge s \nsubseteq t),$$

$$t \cup s := (t^c \cap s^c)^c,$$

waarbij s en t termen zijn. Ook zullen we $|t| \geq |s|$ voor $|s| \leq |t|$ schrijven, $|s| < |t|$ voor $\neg(|t| \geq |s|)$, en $|s| = |t|$ voor $|s| \leq |t| \wedge |t| \leq |s|$.

5.2 (C)GFC als $\mathcal{L}-$zin

We schrijven GFC als een $\mathcal{L}-$zin, zie hiervoor ook [7]. We zoeken eerst een uitdrukking in $\mathcal{L}$ voor het in evenwicht zijn van twee rijen $< s_1, ..., s_k, e, ..., e >$ en $< t_1, ..., t_k, f, ..., f >$, waarbij e en f allebei l maal herhaald worden. De vereniging van alle doorsnedes van de vorm

$$s_1^{c_{(s,1)}} \cap ... \cap s_1^{c_{(s,k)}} \cap e^{c_{(e,1)}} \cap ... \cap e^{c_{(e,l)}},$$

noemen we $\mathcal{S}_j$. Hierbij zijn precies $k-j$ elementen van de verzameling $\{c_{(s,1)}, ..., c_{(s,k)}, c_{(e,1)}, ..., c_{(e,l)}\}$ het complementsymbool c, de andere j elementen in $\{c_{(s,1)}, ..., c_{(s,k)}, c_{(e,1)}, ..., c_{(e,l)}\}$ laten hetgeen waar ze boven zijn geschreven onveranderd. We kunnen $\mathcal{S}_j$ zien als de verzameling van elementen die precies j keer in $< s_1, ..., s_k, e, ..., e >$ voorkomen.
Door de $s_1, ..., s_k$ te vervangen door $t_1, ..., t_k$, en de e door f, definiëren we eenzelfde soort uitdrukking $\mathcal{T}_j$. We merken op dat

$$< s_1, ..., s_k, e, ..., e > =_0 < t_1, ..., t_k, f, ..., f >$$

in $\mathcal{L}$ uit te drukken is als

$$\bigwedge_{j=1}^{k} (\mathcal{S}_j = \mathcal{T}_j).$$

Nu wordt GFC in $\mathcal{L}$ uitgedrukt door

$$\mathrm{GFC}_{k,l}(s_1, ...s_k, e, t_1, ..., t_k, f) := \bigwedge_{j=1}^{k} ((\mathcal{S}_j = \mathcal{T}_j) \wedge (|s_j| \geq |t_j|)) \rightarrow |e| \leq |f|.$$

We zullen ook CGFC als een $\mathcal{L}-$zin schrijven. We maken hierbij gebruik van een binaire boom.

Definitie 5.2 (Binaire boom)**.** Neem een verzameling T met een relatie $\geq$ heet een binaire boom wanneer het volgende geldt:

- Er is een element w zodat voor alle $a \in T$ geldt $a \geq w$. Dit element noemen we de wortel van T.

- Andere elementen van T komen in twee soorten voor. Er zijn knoesten, elementen waar precies twee elementen direct onder zitten met betrekking tot $\leq$. Als σ een knoest is, schrijven we $\sigma 0$ en $\sigma 1$ voor de elementen direct onder σ. Als σ geen knoest is, dan is σ een blad. Onder een blad zit geen enkel ander element, een boom eindigt bij zijn bladeren.

Als de onderliggende verzameling T eindig is, heet de binaire boom T eindig.

We zoeken een uitdrukking in $\mathcal{L}$ voor de voorwaarde dat er voor alle i een $n \in \mathbb{N}$ is zodat $|A_i| \leq |n \times F|$.
Neem een eindige binaire boom T, en een verzameling $\mathcal{L}$-termen $\{u_\sigma \mid \sigma \in T\}$. Laat $\theta(f, \{u_\sigma \mid \sigma \in T\})$ de conjunctie zijn over T van $|u_\sigma| \leq |u_{\sigma 0} \cup u_{\sigma 1}|$ als σ een knoest is, en van $|u_\sigma| \leq |f|$ als σ een blad is. Hiermee is $|u_w|$ van boven begrensd door $|n \times f|$, voor een $n \in \mathbb{N}$.

Voorbeeld 5.3. Zij T een binaire boom met wortel w. Boven w ligt een blad ζ, en een knoest σ. Boven σ liggen bladeren $\sigma 1$ en $\sigma 2$. Zij

$$\theta(f, \{u_\sigma \mid \sigma \in T\}) =$$
$$|u_w| \leq |u_\sigma \cup u_\zeta| \wedge |u_\sigma| \leq |u_{\sigma 0} \cup u_{\sigma 1}| \wedge |u_{\sigma 0}| \leq |f| \wedge |u_{\sigma 1}| \leq |f| \wedge |u_\zeta| \leq |f|.$$

We merken op dat

$$|u_w| \leq |u_\sigma \cup u_\zeta| \leq |u_{\sigma 0} \cup u_{\sigma 1} \cup u_\zeta| \leq |3 \times f|.$$

In dit geval is $|u_w|$ begrensd door $|3 \times f|$. △

De $\mathcal{L}$-zin $\bigwedge_{j=1}^{k}(|s_j| \leq |u_w|) \wedge \theta(f, \{u_\sigma \mid \sigma \in T\})$ drukt uit dat elke $|s_i|$ begrensd is door $|u_w|$, en $|u_w|$ begrensd is door $|n \times f|$. We kunnen CGFC nu als volgt in $\mathcal{L}$ schrijven:

$$\mathrm{CGFC}_{k,l,T}(s_1, ...s_k, e, t_1, ..., t_k, f, \{u_\sigma \mid \sigma \in T\}) :=$$
$$(\bigwedge_{j=1}^{k}((\mathcal{S}_j = \mathcal{T}_j) \wedge (|t_j| \leq |s_j|) \wedge (|s_j| \leq |u_w|)) \wedge \theta(f, \{u_\sigma \mid \sigma \in T\})) \rightarrow |e| \leq |f|.$$

We merken op dat elke s_i in het kleinste ideaal van de Boole-algebra ligt, dat uit $\{u_\sigma \mid \sigma \in T\}$ bestaat, f bevat en gesloten is onder kardinaliteit.

5.3 De Theorie CardComp

We kunnen nu in de propositionele taal $\mathcal{L}$ de logische theorie formuleren, waarvan de zinnen overeenkomen met de voorwaarden van de tweede uitspraak van Stelling 4.2. We noemen deze theorie CardComp, een afkorting voor *cardinality comparison*.

Definitie 5.4 (CardComp)**.** De $\mathcal{L}$-theorie CardComp wordt gegeven door de volgende $\mathcal{L}$-zinnen:

1. alle tautologieën van de propositielogica,
2. $|\varnothing| \leq |s|$,
3. $\neg(|\varnothing^c| \leq |\varnothing|)$,
4. $|s| \leq |s|$,
5. $(|s| \leq |t| \wedge |t| \leq |u|) \rightarrow |s| \leq |u|$,
6. $\mathrm{CGFC}_{k,l,T}(s_1, ...s_k, e, t_1, ..., t_k, f, \{u_\sigma \mid \sigma \in T\})$

Hierbij nemen we voor $s, s_1, ..., s_k, t, t_1, ..., t_k, e, f$ en u $\mathcal{L}-$termen, $k, l \in \mathbb{N}$, en T een eindige binaire boom.

Door de zinnen $\mathrm{CGFC}_{k,l,T}(s_1, ...s_k, e, t_1, ..., t_k, f, \{u_\sigma \mid \sigma \in T\})$ te vervangen door de zinnen $\mathrm{GFC}_{k,l}(s_1, ...s_k, e, t_1, ..., t_k, f)$, en verder alle zinnen van CardComp te behouden, ontstaat een $\mathcal{L}-$theorie die beschrijft hoe Dedekind-eindige en eindige verzamelingen zich ordenen onder kardinaliteit met betrekking tot doorsnede, vereniging en complement. We noemen deze theorie DedCardComp.

5.4 Kardinaliteitsmodellen

De rest van deze scriptie richt zich op het behandelen van bewijzen van de correctheid en volledigheid van CardComp en DedCardComp. Zie voor de volgende definities respectievelijk [8], pagina 13-14, en [4], pagina 67.

Definitie 5.5 (Correctheid met betrekking tot modellen van een bepaalde soort)**.** Zij T een theorie in een taal $\mathcal{L}$, en M een verzameling modellen van een bepaalde soort. Wanneer in alle modellen van M de zinnen van T waar zijn, heet T correct met betrekking tot de modellen van M.

We schrijven $T \models \phi$ voor een theorie T, wanneer $\mathcal{M} \models T$ impliceert dat $\mathcal{M} \models \phi$.

Definitie 5.6 (Volledigheid met betrekking tot modellen van een bepaalde soort)**.** Laat T een theorie in een taal $\mathcal{L}$ zijn. Neem een verzameling modellen M van een bepaalde soort, met vervulbaarheidsrelatie $\models$. We zeggen dat T volledig is met betrekking tot de modellen van M, wanneer voor elke $\mathcal{L}-$zin ϕ geldt dat

$$T \models \phi \quad \text{óf} \quad T \models \neg\phi.$$

We zullen ons richten op de correctheid en volledigheid van CardComp en DedCardComp met betrekking tot kardinaliteitsmodellen. Eerst geven we de volgende definitie.

Definitie 5.7 (Model van ZF)**.** Een klasse $\mathcal{W}$ is een model van ZF wanneer $\mathcal{W}$ voldoet aan de axioma's van ZF. Als $\mathcal{W}$ bovendien aan het keuzeaxioma voldoet, is $\mathcal{W}$ een model van ZFC.

Een kardinaliteitsmodel bestaat uit een model $\mathcal{W}$ van ZF. Ook kiezen we een verzameling $X \in \mathcal{W}$, die we als grootste verzameling van een algebra van verzamelingen $< X, \mathcal{F} >$ nemen. Merk op dat $< X, \mathcal{F} >$ isomorf is met een Boole-algebra B, wat met het oog op Stelling 4.2 de keuze voor kardinaliteitsmodellen motiveert. We geven nu de formele definitie van een kardinaliteitsmodel.

Definitie 5.8 (Kardinaliteitsmodel)**.** We noemen $\mathcal{N} =< \mathcal{W}, X, \mathcal{F}, V >$ een kardinaliteitsmodel wanneer aan het volgende is voldaan:

- $\mathcal{W}$ is een een model van ZF,
- X is een niet-lege verzameling in $\mathcal{W}$,
- $< X, \mathcal{F} >$ is een algebra van verzamelingen,
- $V : \Phi \to \mathcal{F}$, met Φ de verzameling constanten van $\mathcal{L}$, is een functie.

Als alle $U \in \mathcal{F}$ Dedekind-eindig zijn, noemen we $\mathcal{N}$ een Dedekind-eindig kardinaliteitsmodel. We construeren voor $\mathcal{N}$ een functie V' van termen naar naar verzamelingen in $\mathcal{F}$:

- $V'(a) = V(a)$ als $a \in \Phi$,
- $V'(t^c) = X - V'(t)$,

- $V'(t \cap s) = V'(t) \cap V'(s)$

We definiëren nu een vervulbaarheidsrelatie $\models$ voor kardinaliteitsmodellen:

- $\mathcal{N} \models |t| \geq |s|$ precies als $\mathcal{W} \models |V'(t)| \geq |V'(s)|$,
- $\mathcal{N} \models \neg\phi$ precies als $\neg(\mathcal{N} \models \phi)$,
- $\mathcal{N} \models \phi \wedge \psi$ precies als $\mathcal{N} \models \phi$ en $\mathcal{N} \models \psi$.

Wanneer CardComp volledig is, zijn de zinnen van CardComp die waar zijn bewijsbaar. Dit komt neer op de implicatie (1.) naar (2.) van Stelling 4.2. Wanneer CardComp correct is zijn alle bewijsbare zinnen waar. Dit komt neer op de implicatie van (2.) naar (1.) van Stelling 4.2. Hierbij merken we op dat CardComp precies de Boole-algebra van voorwaarde (2.) beschrijft.
We zullen de volledigheid van CardComp en DedCardComp met betrekking tot kardinaliteitsmodellen niet rechtstreeks bewijzen. In hoofdstuk 6 zullen we laten zien dat CardComp en DedCardComp met betrekking tot zogenoemde maatmodellen volledig zijn. Vervolgens zullen we in hoofdstuk 8 zien dat voor elk maatmodel een isomorf oerelement-kardinaliteitsmodel bestaat, welke we ten slotte kunnen omzetten in een kardinaliteitsmodel. Hiermee zal de volledigheid met betrekking tot kardinaliteitsmodellen zijn bewezen.
De correctheid van CardComp en DedCardComp is eenvoudig te bewijzen.

Stelling 5.9 (Correctheid met betrekking tot kardinaliteitsmodellen)**.** CardComp *en* DedCardComp *zijn correct met betrekking tot kardinaliteitsmodellen.*

Bewijs. We laten zien dat alle $\mathcal{L}-$zinnen van CardComp en DedCardComp geldig zijn in een willekeurig kardinaliteitsmodel. We hebben in Stelling 4.5 en Stelling 4.6 bewezen dat GFC en CGFC geldig zijn in ZF, en daarmee in een willekeurig kardinaliteitsmodel.
Neem nu s, t en u $\mathcal{L}-$termen, en $\mathcal{N} =< \mathcal{W}, X, \mathcal{F}, V >$ een willekeurig kardinaliteitsmodel. We merken dat ook de andere zinnen van CardComp en DedCardComp geldig zijn:

1. In $\mathcal{N}$ gelden alle tautologieën van de propositielogica,
2. $\mathcal{W} \models |V'(\varnothing)| \leq |V'(s)|$, dus $\mathcal{N} \models |\varnothing| \leq |s|$,
3. $\mathcal{W} \models \neg(|V'(\varnothing^c)| \leq |V'(\varnothing|))$ want $\neg(\mathcal{W} \models |V'(X)| \leq |V'(\varnothing)|)$, dus $\mathcal{N} \models \neg(|\varnothing^c| \leq |\varnothing|)$,
4. $\mathcal{W} \models |V'(s)| \leq |V'(s)|$, dus $\mathcal{N} \models |s| \leq |s|$,
5. Stel $\mathcal{N} \models |s| \leq |t| \wedge |t| \leq |u|$, dan $\mathcal{N} \models |s| \leq |t|$ en $\mathcal{N} \models |t| \leq |u|$. Uit de transitiviteit van $\leq$ volgt nu dat $\mathcal{N} \models |s| \leq |u|$, dus $\mathcal{N} \models (|s| \leq |t| \wedge |t| \leq |u|) \rightarrow |s| \leq |u|$.

Hiermee zijn CardComp en DedCardComp correct met betrekking tot kardinaliteitsmodellen.
$\square$

6 Correctheid en Volledigheid met Betrekking tot Maatmodellen

We zullen nu een soort model definiëren dat gebruik maakt van een maat. We zullen deze modellen maatmodellen noemen. We zullen zien dat CardComp correct en volledig is met betrekking tot deze soort modellen.

6.1 Maatmodellen

Een maat is een bepaald soort functie die een verzameling naar een niet-negatief reëel getal stuurt. We eisen dat het domein van een maat een algebra van verzamelingen is, die gesloten is onder het nemen van aftelbaar veel doorsneden. We zullen deze structuur een $\sigma-$algebra noemen.

Definitie 6.1 (σ-Algebra)**.** Neem een niet-lege verzameling W. Een verzameling $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(W)$ bestaande uit deelverzamelingen van W heet een $\sigma-$algebra als:

- $\varnothing \in \mathcal{A}$,
- als $A \in \mathcal{A}$, dan $A^c \in \mathcal{A}$,
- Als $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$, dan $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Merk op dat de machtsverzameling van W een $\sigma-$algebra is, $\mathcal{P}(W)$ is bovendien de maximale $\sigma-$algebra op W. Ook volgt voor alle $(A_n) \in \mathcal{A}$ met de wet van De Morgan dat

$$\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c\right)^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}.$$

We zullen een nauwere definitie van maat gebruiken dan mogelijk, door onze maten alleen te laten werken op de machtsverzameling. Ook zullen we eisen dat een maat eindig-additief is, en niet aftelbaar-additief.

Definitie 6.2 (Maat)**.** Zij W een niet-lege verzameling. Een functie $\mu : \mathcal{P}(W) \to [0, \infty]$ heet een maat wanneer:

- $\mu(\varnothing) = 0$,
- Als A en B disjunct zijn, dan geldt $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

We noemen μ een kansmaat als $\mu(W) = 1$. Merk op dat een kansmaat bereik $[0, 1]$ heeft.

Definitie 6.3 (Maatruimte)**.** Zij $\mathcal{A}$ een $\sigma-$algebra op een verzameling X en μ een maat. Nu heet $(\mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte. Als μ een kansmaat is, heet $(\mathcal{A}, \mu)$ een kansruimte.

We kunnen met kansmaten de volgende soort modellen definiëren:

Definitie 6.4 (Kansmaatmodel)**.** Een drietal $< W, P, V >$ heet een kansmaatmodel als aan de volgende voorwaarden voldaan is:

- W is een niet-lege verzameling,
- P is een verzameling kansmaten $\mathcal{P}(W) \to [0,1]$,
- $V : \Phi \to \mathcal{P}(W)$, met Φ de verzameling constanten van $\mathcal{L}$, is een functie.

Omdat onze kansmaten eindig-additief zijn, mogen we limieten buiten beschouwen laten. Daardoor kunnen we als bereik van de maten $[0,1] \subseteq \mathbb{Q}$ in plaats van $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ nemen. Zij $X_1, ..., X_n \subseteq W$. Er zijn dan voor elke X_i getallen $t_i, d_i \in \mathbb{N}$ zodat $\mu(X_i) = \frac{t_i}{d_i}$.
We merken op, met kgv(A) het kleinste gemeenschappelijke veelvoud van $A \subseteq \mathbb{N}^n$, dat

$$\text{kgv}(d_1, ..., d_n)(\mu(X_1), ..., \mu(X_n)) \subseteq \mathbb{N}^n$$

de ordening van $\mu(X_1), ..., \mu(X_n)$ met betrekking tot $\leq$ behoudt. We kunnen op deze manier voor een eindige familie deelverzamelingen $\{X_1, ..., X_n\} \subseteq \mathcal{P}(W)$ en een kansmaat $\mu : \mathcal{P}(W) \to [0,1]$ zodat $\mu(X_1) \leq ... \leq \mu(X_n)$, een maat $\nu : \mathcal{P}(W) \to \mathbb{N}$ vinden zodat $\nu(X_1) \leq ... \leq \nu(X_n)$. Precies wanneer een verzameling kleiner is dan een andere verzameling onder een kansmaat, is hij dat ook onder de bijbehorende maat met waarden in $\mathbb{N}$.

Definitie 6.5 (Eindig danwel oneindig maatmodel)**.** Een drietal $\mathcal{N} =< W, P, V >$ heet een eindig maatmodel als aan de volgende voorwaarden voldaan is:

- W is een niet-lege verzameling,
- P is een verzameling maten $\mathcal{P}(W) \to \mathbb{N}$,
- $V : \Phi \to \mathcal{P}(W)$ is een functie.

Wanneer we een eindig maatmodel nemen, waarbij we toestaan dat de maat waarden in $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ aanneemt, noemen we het model een oneindig maatmodel.
We definiëren nu voor alle $E, F \in \mathcal{P}(W)$ de waarschijnlijkheidsrelatie $\precsim$:

$$E \precsim F \text{ precies als voor alle } \mu \in P \text{ geldt dat } \mu(E) \leq \mu(F).$$

We definiëren een functie V' van $\mathcal{L}-$termen naar $\mathcal{P}(W)$:

- $V'(a) = V(a)$ als $a \in \Phi$,
- $V'(u^c) = X - V'(u)$,
- $V'(u \cap v) = V'(u) \cap V'(v)$

We definiëren nu een vervulbaarheidsrelatie $\models$ voor het maatmodel:

- $\mathcal{N} \models |v| \leq |u|$ precies als $V'(v) \precsim V'(u)$,
- $\mathcal{N} \models \neg\phi$ precies als $\neg(\mathcal{N} \models \phi)$,
- $\mathcal{N} \models \phi \wedge \psi$ precies als $\mathcal{N} \models \phi$ en $\mathcal{N} \models \psi$.

Het doel van dit hoofdstuk is te bewijzen dat CardComp correct en volledig is met betrekking tot oneindige maatmodellen. Hier zullen we nu aan beginnen.

6.2 Correctheid en Volledigheid

We bewijzen eerst de correctheid van CardComp en van DedCardComp met betrekking tot maatmodellen.

Stelling 6.6. CardComp *is met betrekking tot oneindige maatmodellen correct.*

Bewijs. We laten zien dat alle $\mathcal{L}-$zinnen van CardComp geldig zijn met betrekking tot oneindige maatmodellen. Zij $\mathcal{N} =< W, P, V >$ een willekeurig oneindig maatmodel, $\mu \in P$ een maat, s, t en u $\mathcal{L}-$termen, $E, F, G \in \mathcal{P}(W)$ zodat $E = V'(s)$, $F = V'(t)$ en $G = V'(u)$. We merken nu de volgende punten op:

1. elk oneindig maatmodel vervult de tautologieën van de propositielogica,
2. $0 \leq \mu(E)$ voor alle E, dus $V'(\varnothing) \precsim V'(s)$ en $\mathcal{N} \models |\varnothing| \leq |s|$,
3. We merken op dat $\mu(\varnothing) = 0 \leq \mu(\varnothing^c) = \mu(W)$, dus $\neg(|\varnothing^c| \leq |\varnothing|)$
4. $\mu(E) \leq \mu(E)$, dus $V'(s) \precsim V'(s)$ en $\mathcal{N} \models |s| \leq |s|$,
5. Stel dat $\mathcal{N} \models |s| \leq |t| \wedge |t| \leq |u|$, dan $\mu(E) \leq \mu(F)$ en $\mu(F) \leq \mu(G)$. Nu volgt $\mu(E) \leq \mu(G)$, dus $\mathcal{N} \models \ |s| \leq |u|$. Hieruit volgt $\mathcal{N} \models (|s| \leq |t| \wedge |t| \leq |u|) \rightarrow |s| \leq |u|$.
6. Stel dat voor $< s_1, ..., s_k, e, t_1, ..., t_k, f >$ het antecedent van CGFC geldt, zie ook paragraaf 5.2. Nu geldt dat

$$\mathcal{N} \models (\bigwedge_{j=1}^{k}((\mathcal{S}_j = \mathcal{T}_j) \wedge (|t_j| \leq |s_j|) \wedge (|s_j| \leq |u_w|)) \wedge \theta(f, \{u_\sigma \mid \sigma \in T\})).$$

   We willen bewijzen dat $\mathcal{N} \models |e| \leq |f|$ geldt. Hiertoe onderscheiden we twee gevallen. Zij $V'(s_i) = S_i, V'(t_i) = T_i, V'(e) = E, V'(f) = F$. Als er een i is zodat $\mu(S_i) = \infty$, dan drukt $\theta(f, \{u_\sigma \mid \sigma \in T\})$ uit dat $\mu(F) = \infty$. Nu volgt dat $\mathcal{N} \models |e| \leq |f|$.

   Stel er is niet zo'n i, dan geldt voor alle s_i dat $\mu(S_i) < \infty$. Nu geldt voor elke i dat $\mu(S_i) \leq n \times \mu(F)$, en dus $\mathcal{N} \models |s_i| \leq |n \times f|$. We kunnen het gegevene nu herschrijven tot

$$\mathcal{N} \models \bigwedge_{j=1}^{k}((\mathcal{S}_j = \mathcal{T}_j) \wedge (|t_j| \leq |s_j|));$$

   dit is precies het antecedent van GFC. Er geldt nu dus dat $< s_1, ..., s_k, e, ..., e >=_0 < t_1, ..., t_k, f, ..., f >$. Ook geldt voor alle j kleiner dan k dat $\mathcal{N} \models |t_j| \leq |s_j|$, en dus dat $\mu(T_j) \leq \mu(S_j)$. Stel nu dat $\mu(E) > \mu(F)$, dan volgt

$$\mu(S_1 \cup ... \cup S_k \cup E \cup ... \cup E) > \mu(T_1 \cup ... \cup T_k \cup F \cup ... \cup F),$$

   wat in tegenspraak is met $< s_1, ..., s_k, e, ..., e >=_0 < t_1, ..., t_k, f, ..., f >$. Nu geldt $\mu(E) \leq \mu(F)$, en dus $\mathcal{N} \models |e| \leq |f|$.

Hiermee is CardComp correct met betrekking tot oneindige maatmodellen. □

Stelling 6.7. DedCardComp *is correct met betrekking tot eindige maatmodellen.*

Bewijs. We merken op dat elk eindig maatmodel de tautologieën van de propositielogica vervult. In punt 1. tot en met 5. van Stelling 6.6 wordt nergens verondersteld dat een maat in P de waarde ∞ aan kan nemen, waarmee deze punten ook gelden voor een eindig maatmodel.
Ten slotte willen we laten zien dat een willekeurig eindig maatmodel GFC waarmaakt. Precies dit wordt bewezen in punt 6. van Stelling 6.6 bewezen, bij het geval dat $\mu(s_i) < \infty$ voor alle s_i. Hiermee is DedCardComp correct met betrekking tot eindige maatmodellen. □

We zullen nu de volledigheid van CardComp met betrekking tot oneindige maatmodellen bewijzen, zie ook stelling 4.6 van [1]. Hierbij zullen we de volgende stelling gebruiken, zie stelling 2 van [9]. Deze stelling geeft een relatie tussen eindige Boole-algebra's en maatruimtes.

Stelling 6.8. *Zij B een eindige Boole-algebra met ordening $\leq$, en $\preceq$ een tweeplaatsige relatie op B. Nu bestaat er een maat $\mu : B \to \mathbb{N}$ zodat voor alle $a, b \in B$ geldt dat*

$$a \preceq b \text{ precies als } \mu(a) \leq \mu(b),$$

precies als aan de volgende voorwaarden is voldaan:

1. *Niet $\top \preceq \bot$,*
2. *Voor alle $b \in B$ geldt $\bot \preceq b$,*
3. *$\preceq$ is transitief,*
4. *$(B, \preceq)$ is een lineaire pre-ordening,*
5. *Voor twee rijen $< a_1, ..., a_n >$, $< b_1, ..., b_n >$ in B geldt dat als*
    - *voor elk atoom $c \in B, i \in \{1, ..., n\}$ geldt dat $|\{a_i \mid c \leq a_i\}| = |\{b_i \mid c \leq b_i\}|$ voor alle $i \in \{1, ..., n\}$,*
    - *$a_i \succeq b_1$ voor alle $i \in \{1, ..., n-1\}$,*

    dan $a_n \preceq b_n$.

Stelling 6.9. CardComp *is met betrekking tot oneindige maatmodellen volledig.*

Bewijs. Neem een eindige verzameling $\mathcal{L}-$zinnen Γ, zodat uit Γ geen tegenspraak volgt. We kunnen ons de situatie voorstellen als een Boole-algebra B met ordening $\leq$, en bovendien een pre-ordening $\preceq$ zodat het volgende geldt:

- Niet $\top \preceq \bot$),
- $\bot \preceq b$ voor alle $b \in B$,
- Stel dat voor twee rijen $\alpha = (a_1, ..., a_n, e, ..., e)$ en $\beta = (b_1, ..., b_n, f, ..., f)$ van gelijke lengte het volgende geldt:
    1. $|\{b \leq x \mid x \in \alpha\}| = |\{b \leq x \mid x \in \beta\}|$ voor alle $b \in B$,

2. $a_i \succeq b_i$ voor alle i kleiner dan n,
3. Er is een eindige binaire boom T en er zijn elementen $\{u_\sigma \mid \sigma \in T\}$ in B zodat voor elke i geldt dat $a_i \preceq w$, voor elke tak σ geldt dat $u_\sigma \preceq u_{\sigma 0} + u_{\sigma 1}$, en voor elk blad κ geldt dat $u_\kappa \preceq f$.

Dan geldt $e \preceq f$.

We zullen laten zien dat er een verzameling P van maten bestaat zodat $x \preceq y$ precies als voor alle $\mu \in P$ geldt dat $\mu(x) \leq \mu(y)$, voor alle $x, y \in B$. Als dit het geval is, dan is $\mathcal{M} =< B, P, V >$ een oneindig maatmodel zodat $\mathcal{M} \models \Gamma$, en is bewezen dat CardComp volledig is met betrekking tot oneinige maatmodellen.
Neem een $a \in B$. Zij B_a het kleinste ideaal wat naar beneden gesloten is onder $\preceq$ zodat $a \in B_a$. Nu is B_a precies het ideaal wat bestaat uit elementen $b \in B$ waarvoor een binaire boom T_b bestaat waarvoor geldt dat $x \preceq w$ voor alle $x \in B$, en dat $u_\sigma \preceq u_{\sigma 0} + u_{\sigma 1}$ voor elke tak σ, en $u_\kappa \preceq f$ voor elk blad κ. We merken dat B_a een Boole-algebra is met dezelfde ordening als B.
We kiezen $b \in B_a$ zodat $b \not\preceq a$. We zullen nu laten zien dat de pre-ordening $\preceq$ op B_a voortgezet kan worden tot een lineaire ordening $\preceq^*$ waarvoor geldt dat $b \not\preceq^* a$. Bovendien zal $\preceq^*$ aan de voorwaarden van Stelling 6.8 voldoen:

1. niet $\top \preceq \bot$,
2. voor alle $b \in B_a$ geldt $\bot \preceq b$,
3. $\preceq$ is transitief,
4. voor twee rijen $(a_1, ..., 1_n)$, $(b_1, ..., b_n)$ in B_a geldt dat als
   - voor elk atoom $c \in B_a, i \in \{1, ..., n\}$ geldt dat $|\{a_i | c \leq a_i\}| = |\{b_i | c \leq b_i\}|$ voor alle $i \in \{1, ..., n\}$,
   - $a_i \succeq b_1$ voor alle $i \in \{1, ..., n-1\}$,

   dan $a_n \preceq b_n$.

Zij $\preceq_0$ de kleinste pre-ordening op B_a die het redeneren met GFC via $\preceq$ uitdrukt. Dat wil zeggen dat $e \preceq_0 f$ wanneer hetzij $e \preceq f$, hetzij voor twee rijen $< a_1, ..., a_n, e, ..., e >$, $< b_1, ..., b_n, f, ..., f >$ van gelijke lengte in B_a het volgende geldt:

- Voor elk atoom u van B zijn er precies evenveel a_i en e als b_i en f die groter zijn dan u onder de ordening $\leq$ van de Boole algebra,
- $a_i \succeq b_1$ voor alle $i \in \{1, ..., n\}$.

We noemen $\preceq_0$ de afsluiting van $\preceq$ onder GFC. We merken op dat $(B_a, \preceq_0)$ een pre-ordening is zodat niet $\bot \preceq_0 \top$ geldt, en voor alle $b \in B_a$ geldt dat $\bot \preceq_0 b$.
We laten zien dat $b \not\preceq_0 a$. Stel dat wel $b \preceq_0 a$, dan kunnen we met GFC terug beredeneren dat rijen $(x_1, ..., x_n, a, ..., a)$ en $(y_1, ..., y_n, b, ..., b)$ in B_a moeten bestaan zodat bestaan:

$$< x_1, ..., x_n, a, ..., a >=_0 < y_1, ..., y_n, b, ..., b >,$$

en $x_i \preceq y_i \ \forall i$. We merken hierbij op dat we een reeks op elkaar aansluitende toepassingen van GFC hebben, we deze eenvoudig tot één toepassing kunnen samenvoegen. We zien dat elke x_i in B_a ligt, dus kunnen we deze toepassing van GFC als een toepassing van CGFC opvatten. Nu zou moeten gelden dat $b \preceq a$, waarmee we een tegenspraak hebben bereikt. Er geldt dus $b \npreceq_0 a$.
We gaan nu elk paar $c, d \in B$ af, en laten zien dat er voor elk volgend paar een voortzetting van een pre-ordening $\preceq_s$ op het totaal van de vorige paren bestaat, zodat $c \preceq_{s+1} d$ of $d \preceq_{s+1} c$. Bovendien eisen we steeds dat $\preceq_{s+1}$ voldoet aan GFC, en dat $b \npreceq_{s+1} a$. We nemen hierbij $\preceq_0$ als basis. Na alle paren in B_a afgegaan te zijn, hebben we een lineaire pre-ordening $(B_a, \preceq^*)$ geconstrueerd waarvoor GFC geldt, en waarvoor geldt dat $b \preceq^* a$.
Neem een pre-ordening $\preceq_s$ die aan GFC voldoet, en waarvoor geldt dat $b \preceq_s a$. Stel dat er uitbreidingen $\preceq'$ en $\preceq''$ van $\preceq_s$ zijn, door respectievelijk $c \preceq' d$ en $d \preceq c$ aan $\preceq_s$ toe te voegen. We zoeken nu een toepassingen van GFC die horen bij $b \preceq' b$ en $b \preceq'' a$. We vinden voor $b \preceq' a$

$$< c, ..., c, x_1, ...x_n, b, ..., b > =_0 < d, ..., d, y_1, ..., y_n, a, ..., a >$$

waarbij c en d r_1-maal herhaald worden en a en b s_1-maal, en $y_i \preceq x_i$ voor alle i kleiner of gelijk aan n. Voor $b \preceq'' a$ vinden we

$$< d, ..., d, u_1, ...u_m, b, ..., b > =_0 < c, ..., c, v_1, ..., v_m, a, ..., a >$$

waarbij c en d r_2-maal herhaald worden en a en b t_2-maal, en $v_i \preceq u_i$ voor alle i kleiner of gelijk aan m. We kunnen dit combineren tot

$$< x_1, ..., x_n, u_1, ..., u_m, b, ..., b > =_0 < y_1, ..., y_n, v_1, ..., v_m, a, ..., a >,$$

met GFC volgt nu dat $b \prec_s a$. Hiermee hebben we tegenspraak bereikt, en dus bestaat er een lineaire pre-ordening $\preceq^*$ waarin GFC geldt, en waarvoor geldt dat $a \succeq^* b$.
De Boole-algebra B_a met relatie $\preceq^*$ voldoet hiermee aan de voorwaarden van Stelling 6.8, waarmee een maat $\mu_{a,b} : B_a \to \mathbb{N}$ bestaat zodat voor alle $x, y \in B_a$ geldt dat

$$x \preceq^* y \text{ precies als } \mu_{a,b}(x) \leq \mu_{a,b}(y).$$

We zetten $\mu_{a,b}$ voort op B, door te stellen dat $\mu_{a,b}(x) = \infty$ als $x \in B - B_a$. Neem ρ_a de maat die 0 is op B_a, en ∞ op $B - B_a$. Nu is

$$P = \{\mu_{a,b} \mid b \in B_a, b \npreceq a\} \cup \{\rho_a \mid a \in B\}$$

een verzameling maten zodat voor alle $x, y \in B$ geldt dat $x \preceq y$ precies als $\mu(x) \leq \mu(y)$ voor alle $\mu \in P$. □

Het valt te bewijzen dat DedCardComp volledig is met betrekking tot eindige maatmodellen. Wij zullen dit bewijs niet behandelen, en verwijzen naar stelling 1 van [10].

Stelling 6.10. DedCardComp *is met betrekking tot oneindige maatmodellen volledig.*

7 Permutatiemodellen en ZFA

In het voorgaande hebben we bewezen dat CardComp met betrekking tot oneindige maatmodellen correct en volledig is. In dit hoofdstuk zal de basis gelegd worden voor het bewijs van de volledigheid van CardComp met betrekking tot kardinaliteitsmodellen. Hiertoe zullen we een uitbreiding van ZF behandelen, de Zermelo-Fraenkel verzamelingenleer met oerelementen (ZFA). We baseren ons hierbij op hoofdstuk 4 van [3]. Vervolgens zullen we permutatiemodellen voor ZFA construeren, en de notie van een kardinaliteitsmodel uitbreiden naar de context van ZFA.
De rest van dit hoofdstuk zullen we besteden aan het slaan van een brug tussen modellen van ZFA en van ZF. Hiertoe zullen we symmetrische extensiemodellen van ZF construeren, daarvoor zullen we Boole-waardige modellen van ZF gebruiken. We volgen hierbij [3], pagina 55-60, 64-65. De symmetrische extensiemodellen stellen ons in staat een permutatiemodel van ZFA in een bepaalde zin over te zetten naar een model van ZF. In hoofdstuk 8 zullen we deze theorie gebruiken om volledigheid met betrekking tot maatmodellen om te zetten in volledigheid met betrekking tot kardinaliteitsmodellen.

7.1 Verzamelingenleer met Oerelementen

We zullen nu een aanpassing van ZF beschrijven, die we ZFA noemen. In ZFA bestaan er behalve verzamelingen ook nog objecten die geen elementen bevatten, maar ook niet de lege verzameling zijn.

Definitie 7.1 (Oerelement)**.** Een object dat niet-leeg is en geen elementen bevat noemen we een *oerelement*.

De taal waarin we ZFA formuleren noemen we $\mathcal{Z}_{ZFA}$. Dit is, net als de taal $\mathcal{Z}$ waarin we ZF hebben geformuleerd in appendix A, een eerste-orde taal met de tweeplaatsige relatiesymbolen $=$ en $\in$. Bovendien bevat $\mathcal{Z}_{ZFA}$ constanten A en $\varnothing$. De verzameling van oerelementen is gegeven door A, de lege verzameling door $\varnothing$. Merk op dat wanneer we $A = \varnothing$ kiezen, we ZF geformuleerd hebben in $\mathcal{Z}_{ZFA}$.
De axioma's van ZFA komen grotendeels overeen met die van ZF, op de volgende aanpassingen na:

∅. *(Lege verzameling)* $\neg\exists X(X \in \varnothing)$

Door dit axioma toe te voegen is de lege verzameling daadwerkelijk leeg, en bevat hij geen oerelementen.

A. *(Oerelementen)* $\forall X(X \in A \leftrightarrow (X \neq \varnothing \wedge \neg\exists Y(Y \in X)))$

Een element uit A is niet de lege verzameling, en bevat ook geen elementen.

A1. *(Extensionaliteit)* $\forall X\, \forall Y(\forall Z(Z \in X \leftrightarrow Z \in Y) \leftrightarrow X = Y)$,
hierbij zijn X en Y zijn verzamelingen.

We laten in het extensionaliteitsaxioma alleen verzamelingen toe, omdat anders alle oerelementen gelijk aan elkaar zouden zijn. Ten slotte passen we ook het regulariteitsaxioma aan:

A8. *(Regulariteit)* $\forall X \exists (Y \in X)[Y \cap X = \varnothing]$
X is hier een niet-lege verzameling.

We gaan nu permutatiemodellen voor ZFA definiëren. Hiertoe zullen we eerst de hiërarchie van verzamelingen in ZFA beschrijven, waarna we filters en idealen op verzamelingen behandelen.

7.2 De Hiërarchie van Verzamelingen

We willen structuur aanbrengen in de klasse

$$\{x \mid x \text{ is te beschrijven in ZFA}\},$$

opdat we permutaties van de verzameling oerelementen kunnen voortzetten op willekeurige verzamelingen in ZFA. We zullen hierbij gebruik maken van ordinaalgetallen.

Definitie 7.2 (Transitiviteit)**.** We noemen een verzameling X transitief als voor alle verzamelingen $Y \in X$ geldt dat $Y \subseteq X$.

Definitie 7.3 (Ordinaalgetal)**.** Een verzameling X heet een ordinaalgetal als X transitief is, en welgeordend is onder $\in$. Ook eisen we dat X geen oerelementen bevat.
De klasse van alle ordinaalgetallen noemen we On.

We construeren nu de hiërarchie van verzamelingen in ZFA. We definiëren voor elke $S \subseteq A$ en $\alpha \in \mathrm{On}$ het volgende:

$$\mathcal{P}^0(S) = S,$$

$$\mathcal{P}^{\alpha+1}(S) = \mathcal{P}^\alpha(S) \ \cup \ \mathcal{P}(\mathcal{P}^\alpha(S)),$$

$$\mathcal{P}^\alpha(S) = \textstyle\bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{P}^\beta(S), \qquad (\alpha \text{ een limietelement})$$

$$\mathcal{P}^\infty(S) = \textstyle\bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}} \mathcal{P}^\alpha(S).$$

De hiërarchie van verzamelingen in ZFA wordt nu gegeven door $V = \mathcal{P}^\infty(A)$. We kunnen nu aan elke verzameling een rang toekennen.

Definitie 7.4 (Rang)**.** Wanneer α het kleinste ordinaalgetal is zodat $x \subseteq \mathcal{P}^\alpha(S)$, dan heet α de rang van x.

We kunnen ook de hiërarchie van verzamelingen in ZF construeren, door $A = \varnothing$ te kiezen. We verkrijgen dan het volgende:

$$V_0 = \varnothing,$$

$$V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha),$$

$$V_\alpha = \textstyle\bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta. \qquad (\alpha \text{ een limietelement})$$

De hiërarchie van verzamelingen in ZF wordt nu gegeven door $V = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}} V_\alpha$

7.3 Filters en Idealen op Verzamelingen

Bij de beschrijving van permutatiemodellen zullen we filters en idealen op een verzameling gebruiken. Dit zijn toespitsingen van de idealen en filters op Boole-algebra's uit Definitie 3.6 en Definitie 3.7.

Definitie 7.5 (Filter)**.** Zij S een verzameling en $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(S)$ niet-leeg. Nu is $\mathcal{F}$ een filter van S wanneer het volgende geldt:

1. $S \in \mathcal{F}, \varnothing \notin \mathcal{F}$,
2. Als $X \in \mathcal{F}$ en $Y \in \mathcal{F}$, dan $X \cap Y \in \mathcal{F}$,
3. Als $X \in \mathcal{F}$ en $X \subseteq Y$, dan $Y \in \mathcal{F}$.

We zullen geïnteresseerd zijn in permutaties van de verzameling oerelementen. Als we een permutatiegroep $\mathcal{G}$ nemen, kunnen we door de groepsstructuur buiten beschouwing te laten en $\mathcal{G}$ als verzameling op te vatten filters op een permutatiegroep vinden. Een aanscherping van een filter in de context van permuatiegroepen is de volgende.

Definitie 7.6 (Normaal filter)**.** Zij $\mathcal{G}$ de permutatiegroep van een verzameling A, en $\mathcal{F}$ een verzameling deelgroepen van $\mathcal{G}$. Nu heet $\mathcal{F}$ een normaal filter op $\mathcal{G}$ als aan de volgende voorwaarden is voldaan:

1. $\mathcal{G} \in \mathcal{F}$,
2. Als $H \in \mathcal{F}$ en $H \subseteq K$, dan $K \in \mathcal{F}$,
3. Als $H \in \mathcal{F}$ en $K \in \mathcal{F}$, dan $H \cap K \in \mathcal{F}$,
4. Als $\pi \in \mathcal{G}$ en $H \in \mathcal{F}$, dan $\pi H \pi^{-1} \in \mathcal{F}$,
5. Voor alle $a \in A$ geldt dat $\{\pi \in \mathcal{G} \mid \pi a = a\} \in \mathcal{F}$.

We voeren nu idealen op een verzameling in.

Definitie 7.7 (Ideaal)**.** Zij S een verzameling en $I \subset \mathcal{P}(S)$ niet-leeg. Nu is I een ideaal van S wanneer het volgende geldt:

1. $\varnothing \in I, S \notin \varnothing$,
2. Als $X \in I$ en $Y \subseteq X$, dan $Y \in I$,
3. Als $X \in I$ en $Y \in I$, dan $X \cup Y \in I$.

Definitie 7.8 (Normaal ideaal)**.** Zij $\mathcal{G}$ de permutatiegroep van een verzameling A. Een verzameling I van deelverzamelingen van A heet een normaal ideaal als voor alle $E, F \subseteq A$ aan de volgende voorwaarden is voldaan:

1. $\varnothing \in I$,
2. Als $E \in I$ en $F \subseteq E$, dan $F \in I$,

3. Als $E \in I$ en $F \in I$, dan $E \cup F \in I$,

4. Als $\pi \in \mathcal{G}$ en $E \in I$, dan $\{\pi(y) \mid y \in E\} \in I$,

5. Voor alle $a \in A$ geldt dat $\{a\} \in I$.

Ten slotte merken we nog het volgende op.

Stelling 7.9. *Filters en idealen zijn duaal aan elkaar.*

Bewijs. Laat S een verzameling. Neem een filter $\mathcal{F}$ op S, en laat $I = \{S - X \mid X \in \mathcal{F}\}$. We laten zien dat I een ideaal is. Stel $X \in I, Y \subseteq X$. Nu $S - X \in \mathcal{F}$, dus $S - Y \in \mathcal{F}$ waarmee $Y \in I$. Stel nu dat $X, Y \in I$. Nu $(S - X) \cap (S - Y) = S - (X \cup Y) \in \mathcal{F}$, waarmee $X \cup Y \in \mathcal{F}$. Hiermee is I een ideaal.
Neem nu een ideaal I op S, en laat $\mathcal{F} = \{S - X \mid X \in I\}$. Stel $X \in \mathcal{F}, Y \subseteq X$. Nu $S - X \in I$, dus $S - Y \in I$ waarmee $Y \in \mathcal{F}$. Stel nu dat $X, Y \in \mathcal{F}$. Nu $(S - X) \cup (S - Y) = S - (X \cap Y) \in \mathcal{F}$, waarmee $X \cap Y \in \mathcal{F}$. Hiermee is $\mathcal{F}$ een filter. $\square$

7.4 Permutatiemodellen

Nu zullen we permutatiemodellen behandelen. Laat π een permutatie van de verzameling A van oerelementen zijn. We kunnen nu, middels de hiërarchie van $\mathcal{P}^\infty(A)$ en $\in$ −recursie, π als volgt op $\mathcal{P}^\infty(A)$ voortzetten:

$$\pi(\varnothing) = \varnothing, \pi(x) = \{\pi(y) \mid y \in x\}$$

We merken op dat π bijectief is en dat $x \in y$ precies als $\pi(x) \in \pi(y)$. Hiermee is π een $\in$ −automorfisme van $\mathcal{P}^\infty(A)$.

Voorbeeld 7.10. Stel $a, b \in A$, en π een permutatie van A. We zien dat

$$\pi(\{a, \{b, \varnothing\}\}) = \{\pi(a), \pi(\{b, \varnothing\})\} = \{\pi(a), \pi(b), \pi(\varnothing)\} = \{\pi(a), \pi(b), \varnothing\}.$$

$\triangle$

Definitie 7.11. Laat $\mathcal{G}$ een groep permutaties van de verzameling van oerelementen A zijn. Voor elke X kunnen we de deelgroep

$$\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(X) = \{\pi \in \mathcal{G} \mid \pi(X) = X\}$$

van $\mathcal{G}$ definiëren. We noemen $\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(X)$ het symmetrisch deel van $\mathcal{G}$ met betrekking tot X. Neem een normaal filter $\mathcal{F}$ op de permutatiegroep $\mathcal{G}$ vast. Als $\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(X) \in \mathcal{F}$, dan noemen we X symmetrisch voor $\mathcal{F}$.

Definitie 7.12 (Permutatiemodel)**.** We noemen de klasse

$$\mathcal{V} = \{X \mid X \text{ is symmetrisch en } X \subseteq \mathcal{V}\}$$

een permutatiemodel.

Merk op dat een permutatiemodel $\mathcal{V}$ afhangt van de keuze van normaal filter.
Een permutatiemodel $\mathcal{V}$ is een model van ZFA, dat wil zeggen dat alle axioma's van ZFA gelden in $\mathcal{V}$. We bewijzen dit in Stelling B.4.
We zullen nu een methode geven waarmee we permutatiemodellen van een eenvoudig soort kunnen construeren.

Definitie 7.13 (stabilisator)**.** Voor elke X kunnen we de deelgroep

$$\mathrm{stab}_{\mathcal{G}}(X) = \{\pi \in \mathcal{G} \mid \pi y = y \quad \forall y \in X\} \subseteq \mathcal{G}$$

van $\mathcal{G}$ definiëren. Deze deelgroep heet de stabilisator van X.

Neem nu de permutatiegroep $\mathcal{G}$ van een verzameling A en een normaal ideaal I van A. We definiëren

$$\mathcal{B} = \{\mathrm{stab}_{\mathcal{G}}(E) \mid E \in I\}.$$

Neem het kleinste filter $\mathcal{F}$ dat $\mathcal{B}$ bevat, we noemen $\mathcal{F}$ het filter voortgebracht door $\mathcal{B}$. We laten zien dat $\mathcal{F}$ bovendien een normaal filter is. Kies $\pi \in \mathcal{G}$ en $H \in \mathcal{F}$ vast. Nu is er een $E \in I$ zodat $\mathrm{stab}_{\mathcal{G}}(E) \subseteq H$. We zien dat

$$\begin{aligned} \phi \in \pi(\mathrm{stab}_{\mathcal{G}}(E))\pi^{-1} &\iff \pi^{-1}\phi\pi \in \mathrm{stab}_{\mathcal{G}}(E) \\ &\iff \forall x \in E \mid \pi^{-1}\pi x = x \\ &\iff \forall x \in E \mid \phi\pi x = \pi x \\ &\iff \phi \in \mathrm{stab}_{\mathcal{G}}(\pi(E)) \in \mathcal{B}, \end{aligned}$$

waarmee $\pi(\mathrm{stab}_{\mathcal{G}}(E))\pi^{-1} \in \mathcal{F}$. Ten slotte laten we zien dat voor alle $a \in A$ geldt dat $\{\pi \in \mathcal{G} \mid \pi a = a\} \in \mathcal{F}$. We merken op dat $\{a\} \in I$ omdat I een normaal ideaal van A is, dus $\{\pi \in \mathcal{G} \mid \pi a = a\} = \mathrm{stab}_{\mathcal{G}}(\{a\}) \in \mathcal{F}$. Hiermee is $\mathcal{F}$ een normaal filter, en

$$\mathcal{V} = \{X \mid \mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(X) \in \mathcal{F} \text{ en } X \subseteq \mathcal{V}\}$$

een permutatiemodel. We merken op dat X symmetrisch is, precies als er $E \in I$ is zodat

$$\mathrm{stab}_{\mathcal{G}}(E) \subseteq \mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(X).$$

We noemen E een drager van X.

Nu we permutatiemodellen van ZFA hebben ingevoerd, zullen we oerelement-kardinaliteitsmodellen voor CardComp definiëren. Deze modellen zijn het analoog over ZFA van de eerder beschreven kardinaliteitsmodellen over ZF.

Definitie 7.14 (Oerelement-kardinaliteitsmodel)**.** We noemen $\mathcal{N} =< \mathcal{U}, X, \mathcal{F}, V >$ een oerelement-kardinaliteitsmodel wanneer aan het volgende is voldaan:

- $\mathcal{U}$ is een model van ZFA,
- X is een niet-lege verzameling in $\mathcal{U}$,
- $< X, \mathcal{F} >$ is een algebra van verzamelingen in $\mathcal{U}$,
- $V : \Phi \to \mathcal{F}$, met Φ de verzameling constanten van $\mathcal{L}$, is een functie.

Als $\mathcal{U}$ een permutatiemodel van ZFA is, noemen we $\mathcal{N}$ een permutatie-oerelement-kardinaliteitsmodel.

7.5 Symmetrische Modellen

We gaan nu een bepaald model van ZF construeren, het symmetrisch extensiemodel. We zullen in Stelling 7.18 zien dat we voor elk permutatiemodel van ZFA een symmetrisch model van ZF kunnen vinden. Dit zal cruciaal blijken te zijn wanneer we in hoofdstuk 8 voor elk oerelement-kardinaliteitsmodel een isomorf kardinaliteitsmodel willen vinden.
We behandelen eerst Boole-waardige modellen van ZFC, zie ook hoofdstuk 1 van [11]. Deze zullen we gebruiken om generieke extensies te construeren, de symmetrische extensies zullen in de generieke extensies blijken te liggen.
Zij $\mathcal{M}$ een transitief model van ZFC, en $B \in \mathcal{M}$ een volledige Boole-algebra. We definiëren recursief de klasse $\mathcal{M}^B$:

$$\mathcal{M}^B_0 = \varnothing,$$

$$\mathcal{M}^B_{\alpha+1} = \{x \mid x \text{ een functie met domein in } \mathcal{M}^B_\alpha \text{ en bereik in } B\},$$

$$\mathcal{M}^B_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{M}^B_\beta \qquad (\alpha \text{ een limietelement}),$$

$$\mathcal{M}^B = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}} \mathcal{M}^B_\alpha.$$

We noemen $\mathcal{M}^B$ een Boole-waardig model. Dit is een model van ZF, zie hiervoor appendix B. Neem nu de functie $\check{-} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}^B$, met $\in -$recursie gedefinieerd door

- $\check{\varnothing} = \varnothing$,
- $\check{x}$ is precies de functie met domein $\{\check{y} \mid y \in x\}$,
- $\check{x}(\check{y}) = \top$ voor alle $y \in x$.

We merken op dat $\check{-}$ injectief is en de structuur van $\mathcal{M}$ met betrekking tot $\in$ behoudt, en dus een inbedding van $\mathcal{M}$ in $\mathcal{M}^B$ geeft.
Zij $\phi(x_1, ..., x_n)$ een $\mathcal{Z}-$formule, en $x_1, ..., x_n \in \mathcal{M}^B$. We willen aan $\phi(x_1, ..., x_n)$ een element $[\![\phi(x_1, ..., x_n)]\!]$ in de Boole-algebra B toekennen. We noemen $[\![\phi(x_1, ..., x_n)]\!]$ de Boole-waarde van $\phi(x_1, ..., x_n)$. Eerst definiëren we voor alle $x, y \in \mathcal{M}^B$ Boole-waarden $[\![x \in y]\!], [\![x = y]\!] \in B$.
Zij $\rho(x)$ het kleinste ordinaalgetal zodat $x \in \mathcal{M}^B_{\rho(x)+1}$. We definieren nu $[\![x \in y]\!]$ en $[\![x = y]\!]$ middels recursie op $(\rho(x), \rho(y)) \in \mathrm{On}\times\mathrm{On}$:

- $[\![x \in y]\!] = \sum_{z\in\mathrm{dom}(y)}(y(z) \cdot [\![z = x]\!])$,
- $[\![x = y]\!] = \prod_{z\in dom(x)}(x(z) \implies [\![z \in y]\!]) \cdot \prod_{z\in dom(y)}(y(z) \implies [\![z \in x]\!])$;

hierbij zijn $\sum(A)$ en $\prod(A)$ respectievelijk de kleinste bovengrens en grootste ondergrens van een $A \subseteq B$ met betrekking tot de ordening van B.

We definiëren nu, middels recursie op ϕ, voor elke $\mathcal{Z}-$formule ϕ een Boole waarde:

$$\llbracket \neg\phi \rrbracket = -\llbracket \phi \rrbracket, \qquad \llbracket \phi \to \psi \rrbracket = \llbracket \phi \rrbracket \implies \llbracket \psi \rrbracket,$$

$$\llbracket \phi \wedge \psi \rrbracket = \llbracket \phi \rrbracket \cdot \llbracket \psi \rrbracket, \qquad \llbracket \phi \vee \psi \rrbracket = \llbracket \phi \rrbracket + \llbracket \psi \rrbracket,$$

$$\llbracket \forall x \phi \rrbracket = \prod \{ \llbracket \phi(x) \rrbracket \mid x \in \mathcal{M}^B \}, \qquad \llbracket \exists x \phi \rrbracket = \sum \{ \llbracket \phi(x) \rrbracket \mid x \in \mathcal{M}^B \}.$$

We noemen een formule ϕ geldig in $\mathcal{M}^B$, precies als $\llbracket \phi \rrbracket = \top$.
De volgende stelling zegt dat geldigheid in $\mathcal{M}^B$ zich goed gedraagt ten opzichte van de eerste-orde logica en ZFC. Wij zullen deze stelling niet bewijzen, en verwijzen naar [3], pagina 57.

Stelling 7.15. *De volgende twee uitspraken gelden voor $\mathcal{M}^B$:*

1. *Alle tautologieën van de eerste-orde logica zijn geldig in $\mathcal{M}^B$. Als de afleidingsregels van de eerste-orde logica toegepast worden op formules geldig in $\mathcal{M}^B$, is de resulterende formule geldig in $\mathcal{M}^B$.*

2. *Elk axioma van ZFC is geldig in $\mathcal{M}^B$, wat ZFC correct maakt met betrekking tot Boole-waardige modellen.*

We zullen het Boole-waardige model $\mathcal{M}^B$ gebruiken om $\mathcal{M}$ voort te zetten tot een groter model $\mathcal{M}[G]$.

Definitie 7.16 ($\mathcal{M}$-generiek ultrafilter)**.** Zij $\mathcal{M}$ een model van ZFC, en $B \in \mathcal{M}$ een volledige Boole-algebra. Een verzameling $G \subseteq B$ heet een $\mathcal{M}$-generiek ultrafilter als G een ultrafilter van de Boole-algebra B is, en bovendien geldt dat als $A \subseteq G$ en $A \in \mathcal{M}$, dan $\prod(A) \in G$.

Zij G een $\mathcal{M}$-generiek ultrafilter op een volledige Boole-algebra B die we vast nemen. Met recursie op $\rho(x)$, het kleinste ordinaalgetal zodat $x \in \mathcal{M}^B_{\rho(x)+1}$, definiëren we de volgende functie op $\mathcal{M}^B$:

- $i_G(\varnothing) = \varnothing$,
- $i_G(x) = \{ i_G(y) \mid x(y) \in G \}$.

We noemen i_G de interpretatie van $\mathcal{M}^B$ door G. De generieke extensie $\mathcal{M}[G]$ van $\mathcal{M}$ wordt nu gegeven door

$$\mathcal{M}[G] = \{ i_G(x) \mid x \in \mathcal{M}^B \}.$$

Een generiek extensiemodel is een model van ZF, zie hiervoor Stelling B.7. Als voor $\underline{x} \in \mathcal{M}^B$ en $x \in \mathcal{M}[G]$ geldt dat $i_G(\underline{x}) = x$, dan heet $\underline{x}$ de *naam* van x.
De volgende stelling zegt dat een formule waar is in een generieke extensie $\mathcal{M}[G]$, precies als zijn Boole-waarde in G ligt.

Stelling 7.17. *Zij ϕ een $\mathcal{Z}-$formule, en $\underline{x_1}, ..., \underline{x_n} \in \mathcal{M}^B$ namen van $x_1, ..., x_n \in \mathcal{M}[G]$. Nu geldt*

$$\mathcal{M}[G] \models \phi(x_1, ..., x_n) \text{ precies als } \llbracket \phi(\underline{x_1}, ..., \underline{x_n}) \rrbracket \in G.$$

We zullen nu een bepaald soort deelmodellen van de generieke extensies construeren, de symmetrische modellen. De constructie zal veel weg hebben van de constructie van permutatiemodellen.
Neem een automorfisme π, zoals in Definitie 3.5, van een volledige Boole-algebra B. We merken op dat π nu ook kleinste bovengrenzen en grootste ondergrenzen behoudt. We kunnen met recursie op $\rho(x)$ vervolgens π op $\mathcal{M}^B$ voortzetten:

- $\pi(\varnothing) = \varnothing$,
- Stel π is gedefinieerd op $\mathrm{dom}(x)$. We stellen nu dat $\mathrm{dom}(\pi(x)) = \pi(\{y \mid y \in \mathrm{dom}(x)\})$, en $(\pi(x))(\pi(y)) = \pi(x(y))$ voor alle $\pi(y) \in \mathrm{dom}(\pi(x))$.

We construeren een symmetrisch extensiemodel als volgt. Zij $\mathcal{M}$ een transitief model van ZFC, B een volledige Boole-algebra, en $\mathcal{G}$ een groep automorfismen van B. We vinden nu, op vergelijkbare manier als bij Definitie 7.11, voor elke $x \in \mathcal{M}^B$ een deelgroep

$$\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(x) = \{\pi \in \mathcal{G} \mid \pi(x) = x\} \subseteq \mathcal{G}.$$

Neem een normaal filter $\mathcal{F}$ van $\mathcal{G}$ vast. Ook nu heet x symmetrisch, als $\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(x) \in \mathcal{F}$. We definiëren de klasse $\mathrm{ES} \subseteq \mathcal{M}^B$ van alle erfelijk symmetrische namen recursief:

- $\varnothing \in \mathrm{ES}$,
- Als $\mathrm{dom}(x) \subseteq \mathrm{ES}$ en x symmetrisch is, dan $x \in \mathrm{ES}$.

We merken op dat $\pi(\breve{x}) = \breve{x}$ voor alle $\pi \in \mathcal{G}, x \in \mathcal{M}$, dus ES bevat $\{\breve{x} \mid x \in \mathcal{M}\} \subseteq \mathcal{M}^B$.
Neem nu ten slotte een $\mathcal{M}-$generiek ultrafilter G op B, met i_G de interpretatie van $\mathcal{M}^B$ door G. De symmetrische extensie $\mathcal{N}$ van $\mathcal{M}$ wordt nu gegeven door

$$\mathcal{N} = \{i_G(x) \mid x \in \mathrm{ES}\}.$$

Een symmetrisch extensiemodel is een model van ZF, zie hiervoor Stelling B.8
De volgende stelling beschrijft een relatie tussen permutatiemodellen en symmetrische modellen, zie voor het bewijs pagina 86-89 van [3].

Stelling 7.18 (Inbeddingsstelling van Jech-Sochor)**.** *Zij $\mathcal{Y}$ een model van ZFA met keuzeaxioma, A de verzameling oerelementen van $\mathcal{Y}$, $\mathcal{K}$ het deel van $\mathcal{Y}$ wat geen oerelementen bevat, en α een ordinaalgetal in $\mathcal{Y}$. Voor elk permutatiemodel $\mathcal{U} \in \mathcal{Y}$ van ZFA bestaat nu een symmetrisch extensiemodel $\mathcal{U}^* \supseteq \mathcal{K}$ van ZF, en een verzameling $\tilde{A} \in \mathcal{U}^*$, zodat het volgende geldt:*

$$(\mathcal{P}^\alpha(A)) \subseteq \mathcal{U} \textit{ is } \in -\textit{isomorf met } (\mathcal{P}^\alpha(\tilde{A})) \subseteq \mathcal{U}^*.$$

We kunnen met de in dit hoofdstuk behandelde theorie Stelling 4.1 bewijzen.

Stelling 4.1 *Laat $(I, \preceq)$ een partiële ordening zijn, en laat $\mathcal{Y}$ een model van ZFC zijn. Nu is er een symmetrisch model $\mathcal{N}$ van ZF, en verzamelingen $(A_p)_{p\in I}$ in $\mathcal{U}$, zodat*

$$p \preceq q \textit{ precies als } |A_p| \leq |A_q|.$$

Bewijs. We kennen aan elke $i \in I$ de verzameling $\{j \in I \mid j \preceq i\}$ toe, en geven zo een inbedding van $(I, \preceq)$ in $(\mathcal{P}(I), \subseteq)$. We kunnen $(\mathcal{P}(I), \preceq)$ in de kern van ZFA nemen, de kern van ZFA is immers precies ZF.
Neem aan dat voor de verzameling oerelementen van ZFA geldt dat $|A| = |I| \cdot |\mathbb{N}|$. Nu geeft $\{a_{i,n} \mid i \in I, n \in \mathbb{N}\}$, waarbij $a_{i,n} = a_{j,m}$ precies als $i = j, n = m$, een opsomming van A over I en $\mathbb{N}$. We kiezen voor elke $p \subseteq I$ een verzameling

$$S_p = \{a_{i,n} \mid i \in p, n \in \mathbb{N}\}.$$

Zij $\mathcal{G}$ de groep van permutaties van A die elke S_i vasthouden; wanneer $\pi \in \mathcal{G}$, dan impliceert $\pi(a_{i,n}) = a_{j,n}$ dat $i = j$. We laten zien dat

$$I = \{X \mid X \text{ een eindige deelverzameling van } A\}$$

een normaal ideaal is. Ten eerste geldt dat $\varnothing \in I$, en dat $A \notin I$ omdat we A oneindig hebben gekozen.
Ook merken we op dat als $X, Y \in I$, dat dan ook $X \cup Y \subseteq A$ eindig is en dat $X \cup Y \in I$.
Wanneer we $\pi \in \mathcal{G}$ en $X \in I$ nemen, dan geldt $\{\pi(x) \mid x \in X\} \in I$ omdat P eindig is en π elke A_μ vasthoudt. Ook geldt voor elke $a \in A$ dat $\{a\} \in I$. Ten slotte merken we op dat als $X \in I$, $Y \subseteq X$, dan $Y \subseteq A$ eindig en $Y \in I$.
We nemen het filter

$$F = \{\text{stab}_{\mathcal{G}}(E) \mid E \in I\}.$$

In paragraaf 7.4 hebben we laten zien dat F een normaal filter is. We definiëren nu het permutatiemodel

$$\mathcal{V} = \{X \mid \text{sym}_{\mathcal{G}}(X) \in F \text{ en } X \in \mathcal{V}\}.$$

We merken op dat elke $X \in \mathcal{V}$ een eindige drager $E \subseteq A$ heeft, zodat $\text{stab}_{\mathcal{G}}(E) \subseteq \text{sym}_{\mathcal{G}}(X)$. We laten nu zien dat $\mathcal{V}$ aan het volgende voldoet:

1. $\{S_p \mid p \subseteq I\} \in \mathcal{V}$,
2. Er is een functie $h : I \to \mathcal{V}, p \mapsto S_p$ in $\mathcal{V}$,
3. $p \subseteq q$ precies als $\mathcal{V} \models |S_p| \leq |S_q|$.

We zien dat $\text{sym}_{\mathcal{G}}(S_p) = \mathcal{G}$ voor alle $p \in I$, en dat ook $\text{sym}_{\mathcal{G}}(h) = \mathcal{G}$. Hiermee gelden (1.) en (2.).
We laten nu zien dat $p \subseteq q$ precies als $\mathcal{V} \models |S_p| \leq |S_q|$. We zien dat als $p \subseteq q$, dan $S_p \subseteq S_q$. Nu volgt dat $|S_p| \leq |S_q|$.
We laten met contrapositie zien dat $p \subseteq q$, als $\mathcal{V} \models |S_p| \leq |S_q|$. Stel dat $p \nsubseteq q$, en dat er een injectie $g : S_p \to S_q$ bestaat. Zij $E \subseteq A$ een eindige drager van $g \in \mathcal{V}$. Neem $i \in p - q$ en ongelijke $n, m \in \mathbb{N}$, zodat $a_{i,n}, a_{i,m} \notin E$. Kies de permutatie $\pi \in \mathcal{G}$ die $a_{i,n}$ en $a_{i,m}$ wisselt,en elke andere $a \in A$ vasthoudt.

Definieer $a = g(a_{i,n})$. Omdat $i \notin q$ en $a \in S_q$, geldt dat $\pi(a) = a$. Ook merken we op dat

$$g(a_{i,m}) = g(\pi(a_{i,n})) = \pi(g)(\pi(a_{i,n})) = \pi(a) = a,$$

waarbij we gebruik maken van het feit dat $\pi(g) = g$, omdat $\pi \in \mathrm{stab}_{\mathcal{G}}(E)$. Dit is in tegenspraak met de injectiviteit van g.
We hebben nu een model $\mathcal{V}$ van ZFA geconstrueerd, wat voldoet aan de voorwaarde

$$p \preceq q \text{ precies als } |A_p| \leq |A_q|.$$

We passen nu stelling Stelling 7.18 toe, waarmee we het gezochte model $\mathcal{N}$ van ZF gevonden hebben. $\square$

8 Volledigheid met Betrekking tot Kardinaliteitsmodellen

In Stelling 6.9 hebben we laten zien dat CardComp volledig is met betrekking tot maatmodellen. We zullen nu de in hoofdstuk 6 ontwikkelde theorie gebruiken om te laten zien dat voor elk maatmodel een isomorf oerelement-kardinaliteitsmodel bestaat. Ook laten we zien dat voor elk oerelement-kardinaliteitsmodel een isomorf kardinaliteitsmodel bestaat. Hiermee zal de volledigheid van CardComp bewezen zijn.

8.1 Van Maatmodellen naar Oerelement-Kardinaliteitsmodellen

De volgende stelling zegt dat we voor elk maatmodel een oerelement-kardinaliteitsmodel kunnen vinden, zie ook stelling 6.1 van [1].

Stelling 8.1. *Zij $\mathcal{M} =< W, P, V >$ een oneindig maatmodel, waarbij we W en P eindig kiezen. Nu bestaat een oerelement-kardinaliteitsmodel $\mathcal{M}^*$ zodat $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}^*$. Bovendien kunnen we voor $\mathcal{M}^*$ een Dedekind-eindig oerelement-kardinaliteitsmodel kiezen, als $\mathcal{M}$ een eindig maatmodel is.*

Bewijs. Zij $\mathcal{M} =< W, P, V >$ een oneindig maatmodel. We zullen het volgende construeren:

- Een model $\mathcal{U}$ van ZFA,
- Een verzameling $X \in \mathcal{U}$,
- Een algebra van verzamelingen $< X, \mathcal{F} >$.

Onze constructie zal zodanig zijn, dat er een isomorfisme van Boole-algebra's $\Psi : \mathcal{P}(W) \to \mathcal{F}, E \mapsto E^*$ bestaat zodat voor alle $E, F \in \mathcal{P}(W)$ geldt dat

$$E \precsim F \text{ precies als } \mathcal{U} \models |E^*| \leq |F^*|.$$

Hierbij is $\precsim$ de waarschijnlijkheidsrelatie uit definitie 6.5. We definiëren eerst het model $\mathcal{U}$ van ZFA, op vergelijkbare wijze als bij het bewijs van Stelling 4.1. Zij $\mathcal{Y}$ een model van ZFA met het keuzeaxioma. Zij A een verzameling oerelementen zodat $|A| = |P| \cdot |\mathbb{N}|$, en zij $\mathcal{K}$ de kern van $\mathcal{Y}$. Neem de volgende relatie op P:

$$\mu \preceq \nu \text{ precies als voor alle } E \subseteq W \text{ geldt dat } \mu(E) \leq \nu(E).$$

We laten zien dat $(P, \preceq)$ een partiële ordening is. Neem $E \subseteq W$. Nu geldt voor alle $\mu \in P$ dat $\mu(E) \leq \mu(E)$, waarmee $\mu \preceq \mu$.
Ook geldt dat als $\mu \preceq \nu$ en $\nu \preceq \rho$, dan $\mu(E) \leq \nu(E) \leq \rho(E)$, waarmee $\mu \preceq \rho$.
Ten slotte merken we op dat als $\mu \preceq \nu$ en $\nu \preceq \mu$, dat $\mu(E) \leq \nu(E)$ en $\nu(E) \leq \mu(E)$, waarmee $\mu = \nu$. Omdat P eindig is, ligt $(P, \preceq)$ in $\mathcal{K}$.

Omdat we A zo hebben gekozen dat $|A| = |P| \cdot |\mathbb{N}|$, kunnen we de elementen van A over P en $\mathbb{N}$ opsommen:

$$A = \{a_{\mu,n} \mid \mu \in P, n \in \mathbb{N}\},$$

waarbij $a_{\mu,n} = a_{\nu,m}$ precies als $\mu = \nu, n = m$.
We definiëren nu voor elke $\mu \in P$ een verzameling

$$A_\mu = \{a_{\mu,n} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Zij $\mathcal{G}$ de groep die de permutaties van A bevat, welke de verzameling A_μ voor elke $\mu \in P$ vasthouden. Precies voor de permutaties $\pi \in \mathcal{G}$ geldt dat als $\pi(a_{\mu,n}) = \pi(a_{\nu,m})$, dan $\mu = \nu$. We merken op dat

$$I = \{B \mid B \text{ een eindige deelverzameling van } A\}$$

een normaal ideaal is. Ten eerste geldt dat $\varnothing \in I$, en dat $A \notin I$ omdat we A oneindig hebben gekozen. Ook merken we op dat als $X, Y \in I$, dat dan ook $X \cup Y \subseteq A$ eindig is en dat $X \cup Y \in I$.
Wanneer we $\pi \in \mathcal{G}$ en $X \in I$ nemen, dan geldt $\{\pi(x) \mid x \in X\} \in I$ omdat P eindig is en π elke A_μ vasthoudt. Ook geldt voor elke $a \in A$ dat $\{a\} \in I$. Ten slotte merken we op dat als $X \in I$, $Y \subseteq X$, dan $Y \subseteq A$ eindig en $Y \in I$.
We nemen nu het filter

$$F = \{\mathrm{stab}_{\mathcal{G}}(E) \mid E \in I\}.$$

In paragraaf 7.4 hebben we bewezen dat F een normaal filter is. We hebben nu een permutatiemodel

$$\mathcal{U} = \{x \mid \mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(x) \in \mathcal{F}, x \subseteq \mathcal{U}\}$$

geconstrueerd. We merken op dat uit de definitie van I volgt dat elke $x \in \mathcal{U}$ een eindige drager $S \subseteq A$ heeft, zodat $\mathrm{stab}_{\mathcal{G}}(S) \subseteq \mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(x)$.
Voordat we X en $\mathcal{F}$ definiëren, bewijzen we de volgende twee claims over A_μ.

Claim 1. De verzameling A_μ is amorf.

Bewijs. Stel A_μ is niet amorf, dan bestaan disjuncte verzamelingen B en C zodat $A_\mu = B \cup C$. We zien B als element in $\mathcal{U}$. Nu heeft B een drager S, zodat $\mathrm{stab}_{\mathcal{G}}(S) \subseteq \mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(B)$. We kiezen $b \in B$ en $c \in C$ zodat $b, c \notin S$. We definiëren een permutatie π zodat $\pi(b) = c, \pi(c) = b, \pi(a) = a$ voor alle $a \neq b, c$. We zien dat π elk element van S vasthoudt omdat $b, c \notin S$, waarmee $\pi(B) = B$. Dit is in strijd met $\pi(b) = c \notin B$. Hiermee is A_μ amorf. $\square$

Een gevolg hiervan is dat als f een afbeelding is met als domein dan wel bereik $A \subseteq A_\mu$, dat dan A hetzij eindig is, hetzij eindig complement in A_μ heeft.

Claim 2. Stel D is een oneindige deelverzameling van A_μ. Nu bestaat een injectie $g : D \to A_\nu$, precies als $\mu = \nu$.

Bewijs. Stel dat $\mu \neq \nu$, en dat een injectie $g : D \to A_\nu$ bestaat. We vatten het geordende paar g als element van $\mathcal{U}$ op, waarmee een eindige drager S van g bestaat.
Omdat D oneindig is, kunnen we $a, a' \in D$ nemen zodat $a, a' \notin S$. We definiëren een permutatie π die a en a' wisselt, en verder elk element vasthoudt. In het bijzonder wordt g vastgehouden door π omdat $a, a' \notin S$, waarmee

$$\pi(g(a)) = g(\pi(a)) = g(a').$$

We weten dat $\pi(g(a)) = g(a)$ omdat $g(a) \neq a, a'$, dus $g(a) = g(a')$ terwijl $a \neq a'$. Dit is in tegenspraak met de injectiviteit van g. Hiermee is met contrapositie bewezen dat als een injectie $g : D \to a_\nu$ bestaat, dat dan $\mu = \nu$.
Stel nu dat $\mu = \nu$. De identiteitsafbeelding $\mathrm{Id} : A_\mu \to A_\mu$ is nu een injectie met als drager de lege verzameling, waarmee Id inderdaad in $\mathcal{U}$ ligt. □

We gaan nu X en $\mathcal{F}$ definiëren. Voor alle paren $v, w \in W$ kunnen we disjuncte verzamelingen $f_\mu(\{v\})$ en $f_\mu(\{w\})$ vinden, zodat $|f_\mu(\{v\})| = \mu(\{v\})$ en $|f_\mu(\{w\})| = \mu(\{w\})$.
We kunnen elke verzameling $E \subseteq W$ schrijven als vereniging van verzamelingen met één element, W is immers eindig. We kunnen f_μ als volgt uitbreiden naar willekeurige verzamelingen $E \subseteq W$:

$$f_\mu(E) = \bigcup_{v \in E} \{v\}.$$

We merken op dat $|f_\mu(E)| = \sum_{v \in E} \mu(v) = \mu(E)$. We laten zien dat de afbeelding $E \mapsto f_\mu(E)$ een isomorfisme van Boole-algebra's is:

1. $f_\mu(\varnothing) = \varnothing,\ f_\mu(W) = \bigcup_{v \in W} \{v\} = W,$
2. $f_\mu(E \cup F) = \bigcup_{v \in E \cup F} \{v\} = (\bigcup_{v \in E} \{v\}) \cup (\bigcup_{v \in F} \{v\}) = f_\mu(E) \cup f_\mu(F),$
3. $f_\mu(E \cap F) = \bigcup_{v \in E \cap F} \{v\} = (\bigcup_{v \in E} \{v\}) \cap (\bigcup_{v \in F} \{v\}) = f_\mu(E) \cap f_\mu(F),$
4. $f_\mu(E)^c = \bigcup_{v \in E} \{v\}^c = \bigcup_{v \in E^c} \{v\} = f_\mu(E^c).$

Zij $E^* := \bigcup_{\mu \in P} f_\mu(E) \times A_\mu$. We definiëren de verzameling X en de algebra van verzamelingen $< X, \mathcal{F} >$ als volgt:

$$X := \bigcup_{E \subseteq W} E^*,$$

$$\mathcal{F} = \{E^* \mid E \subseteq W\}.$$

We zien op vergelijkbare manier als bij $E \to f_\mu(E)$, dat $E \mapsto E^*$ een isomorfisme van Boole-algebra's geeft.

Claim 3. $E \precsim F$ precies als $\mathcal{U} \models |E^*| \leq |F^*|$.

Bewijs. Stel $E \precsim F$. Er geldt voor elke $\mu \in P$ dat

$$\mu(E) = |f_\mu(E)| \leq |f_\mu(F)| = \mu(F).$$

Nu volgt dat

$$|E^*| = |\bigcup_{\mu \in P} f_\mu(E) \times A_\mu| \leq |\bigcup_{\mu \in P} f_\mu(F) \times A_\mu| = |F^*|.$$

Stel dat $\mathcal{U} \models |E^*| \leq |F^*|$. Nu bestaat een injectie $g : E^* \to F^*$ in $\mathcal{U}$. We zullen nu voor elke $\mu \in P$ een injectie $h_\mu : f_\mu(E) \to f_\mu(F)$ construeren.
Voor elke $x \in f_\mu(E)$ kunnen we $\{x\} \times A_\mu \subseteq E^*$ nemen. We laten zien dat er een $y \in f_\mu(F)$ bestaat zodat g op een eindig deel na $\{x\} \times A_\mu$ naar $\{y\} \times A_\mu$ stuurt. Neem een $y \in F$, en stel $\mu \neq \nu$. Nu is het teruggehaalde beeld in $\{x\} \times A_\mu$ van $\{y\} \times A_\nu$ onder g eindig, vanwege claim 2.
We nemen nu $\mu = \nu$. We merken op dat er eindig veel y en μ zijn, dus moet minstens één van de teruggehaalde beelden oneindig zijn. Kies $\{y\} \times A_\mu$ oneindig. Omdat A_μ amorf is, geldt $|(\{y\} \times A_\mu)^c| \leq \infty$. Hiermee wordt $\{x\} \times A_\mu$ op een eindig deel na door g naar $\{y\} \times A_\mu$ gestuurd, waarbij y uniek bepaald is.
Stel $h_\mu(x) = y$, en neem aan dat h_μ niet injectief is. Nu zijn er $x, x' \in f_\mu(E), x \neq x'$, zodat $h_\mu(x) = h_\mu(x')$. Nu stuurt h_μ een oneindig deel van $\{x\} \times A_\mu$, en een oneindig deel van $\{x'\} \times A_\mu$ naar $\{y\} \times A_\mu$. Nu zijn beelden van $g(\{x\} \times A_\mu)$ en $g(\{x'\} \times A_\mu)$ disjuncte, oneindige deelverzamelingen van $\{y\} \times A_\mu$. Hiermee is een tegenspraak met het amorf zijn van A_μ bereikt, h_μ is dus de gezochte injectie.
We hebben nu bewezen dat als $|E^*| \leq |F^*|$, dan voor elke $\mu \in P$ geldt dat $\mu(E) = |f_\mu(E)| \leq \mu(F) = |f_\mu(F)|$. Hieruit volgt $E \precsim F$. □

We definiëren een functie $V^* : \Phi \to \mathcal{F}$ door $V^*(s) = E^*$. We hebben nu een oerelement-kardinaliteitsmodel $\mathcal{M}^* =< \mathcal{U}, X, \mathcal{F}, V >$ geconstrueerd.
Het is bewezen dat $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}^*$, als de volgende twee claims gelden.

Claim 4. Als t een $\mathcal{L}-$term is en $V'(t) = E$, dan $V'^*(t) = E^*$.

Bewijs. De claim geldt voor $s, t \in \Phi$, en ook voor $s \cap t$ en s^c. Met inductie op termen volgt nu de claim. □

Claim 5. Zij ϕ een $\mathcal{L}-$zin. Nu geldt $\mathcal{M} \models \phi$ precies als $\mathcal{M}^* \models \phi$.

Bewijs. De vorige claim zegt dat deze claim geldt, wanneer ϕ een term is. Stel s en t zijn twee termen. Nu geldt dat $|s| \leq |t|$ danwel $|t| \leq |s|$, $\neg(s)$ en $s \wedge t$ volgen in $\mathcal{M}$, precies als ze volgen in $\mathcal{M}^*$. De claim volgt nu met inductie op $\mathcal{L}-$zinnen. □

Ten slotte laten we zien dat we $\mathcal{M}^*$ Dedekind-eindig kunnen kiezen, als $\mathcal{M}$ Dedekind-eindig is. Precies als elke $E^* \in \mathcal{F}$ Dedekind-eindig is, is $\mathcal{M}^*$ Dedekind-eindig. Neem willekeurig $E \subseteq W$, deze is door de aanname Dedekind-eindig. We weten dat A_μ voor elke $\mu \in P$ Dedekind-eindig is. Ook is $|f_\mu(E)| = \mu(E) < \infty$, dus $f_\mu(E) \times A_\mu$ is Dedekind-eindig. Ten slotte is P eindig, waarmee elke $E^* = \bigcup_{\mu \in P} f_\mu(E) \times A_\mu$ Dedekind-eindig is.

□

8.2 Van Oerelement-Kardinaliteitsmodellen naar Kardinaliteitsmodellen

We laten zien dat we voor elk oerelement-kardinaliteitsmodel een isomorf kardinaliteitsmodel kunnen vinden, zie ook stelling 5.4 van [1].

Stelling 8.2. *Voor elk permutatie-oerelement-kardinaliteitsmodel $\mathcal{M}$ bestaat een symmetrisch kardinaliteitsmodel $\mathcal{N}$ zodat $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$. Bovendien kunnen we $\mathcal{N}$ Dedekind-eindig kiezen, als $\mathcal{M}$ Dedekind-eindig is.*

Bewijs. Zij $\mathcal{M} =< \mathcal{U}, X, \mathcal{F}, V >$ een permutatie-oerelement-kardinaliteitsmodel, A de verzameling oerelementen van het permutatiemodel $\mathcal{U}$ van ZFA, en $\mathcal{K}$ de kern van $\mathcal{U}$. We zullen nu het volgende construeren:

- Een model $\mathcal{U}^*$ van ZF,
- Een verzameling $X^* \in \mathcal{U}^*$ zodat X en X^* in bijectief verband staan,
- Een algebra van verzamelingen $< X^*, \mathcal{F}^* >$ met een Boole-algebra-isomorfisme $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^*$, $Y \mapsto Y^*$.

Onze constructie zal zodanig zijn, dat voor alle $E, F \in \mathcal{F}$ geldt dat

$$\mathcal{U} \models |E| \leq |F| \text{ precies als } \mathcal{U}^* \models |E^*| \leq |F^*|.$$

We beginnen met het model $\mathcal{U}$ van ZF. Neem een ordinaalgetal $\beta \in \mathcal{U}$, groot genoeg zodat $X, \mathcal{F}, \mathbb{N} \in (\mathcal{P}^\beta(A)) \subseteq \mathcal{U}$. We nemen een nog groter ordinaalgetal $\alpha = \beta + 3$, en zien dat voor alle $E, F \subseteq X$ en voor elke injectie $f : E \to F$ geldt dat

$$f = \{(x, f(x)) \mid x \in E\} \in \mathcal{P}^\alpha(A).$$

De inbeddingsstelling van Jech-Sochor zegt dat er een symmetrisch extensiemodel $\mathcal{U}^* \supseteq \mathcal{K}$ van ZF bestaat, en een verzameling $\tilde{A} \in \mathcal{U}^*$ is, zodat er een $\in -$isomorfisme

$$\Psi : \mathcal{U} \supseteq \mathcal{P}^\alpha(A) \to \mathcal{P}^\alpha(\tilde{A}) \subseteq \mathcal{U}^*$$

bestaat.
Voor Ψ geldt dat $\Psi(S) = \{\Psi(x) \mid x \in S\}$ voor elke verzameling S; dit geldt overigens niet als $S \in A$. Ook merken we op dat als γ een ordinaalgetal kleiner dan α is, we een $\in -$isomorfisme $\Psi : \mathcal{P}^\gamma(A) \to \mathcal{P}^\gamma(\tilde{A})$ vinden. We zeggen dat Ψ per niveau werkt.
Vervolgens construeren we $X^* \in \mathcal{U}^*$. We definiëren $x^* := \Psi(x) \in \mathcal{U}^*$ voor elke $x \in X$. Nu definiëren we, waarbij we opmerken dat X en elke $Y \in \mathcal{F}$ verzamelingen zijn, het volgende:

$$X^* := \{x^* \mid x \in X\},$$

en

$$\mathcal{F}^* := \{Y^* \mid Y \in \mathcal{F}\},$$

met

$$Y^* = \{y^* \mid y \in Y\} \subseteq X^*.$$

We weten dat $< X, \mathcal{F} >$ een algebra van verzamelingen is. Omdat Ψ een $\in -$isomorfisme is, is ook $< X^*, \mathcal{F}^* >$ een algebra van verzamelingen.

Neem $Y, Z \subseteq X$. We zien dat Ψ een isomorfisme van Boole-algebra's geeft tussen $< X, \mathcal{F} >$ en $< X^*, \mathcal{F}^* >$:

1. $\Psi(\varnothing) = \varnothing, \Psi(X) = X^*$,
2. $\Psi(Y \cup Z) = \{x^* \mid x \in Y \cup Z\} = \{x^* \mid x \in Y\} \cup \{x^* \mid x \in Z\} = \Psi(Y) \cup \Psi(Z)$,
3. $\Psi(Y \cap Z) = \{x^* \mid x \in Y \cap Z\} = \{x^* \mid x \in Y\} \cap \{x^* \mid x \in Z\} = \Psi(Y) \cap \Psi(Z)$,
4. $\Psi(Y^c) = \{x^* \mid x \in Y^c\} = \{x^* \mid x \in Y\}^c = \Psi(Y)^c$.

We laten zien dat $|E| \leq |F|$ precies als $|E^*| \leq |F^*|$. Stel $|E| \leq |F|$, dan bestaat een injectie $g : E \to F$. We vatten g als een geordend paar in $\mathcal{U}$ op. We hebben α groot genoeg gekozen dat g in het domein van Ψ ligt, waarmee we Ψ op g kunnen toepassen. We krijgen nu een functie $\Psi(g) : E^* \to F^*$ waarvoor geldt dat $g(a) = b$ precies als $\Psi(g)(\Psi(a)) = \Psi(b)$. Hiermee is $\Psi(g)$ een injectie en geldt $|E^*| \leq |F^*|$.
Stel dat een injectie $g^* : E^* \to F^*$ bestaat. We merken op dat $E^*, F^* \in \mathcal{P}^\beta(\tilde{A}) \subseteq \mathcal{U}^*$, omdat Ψ per niveau werkt. Nu volgt dat $g^* \in \mathcal{P}^\alpha(\tilde{A}) \subseteq \mathcal{U}^*$. Zij g het teruggehaalde beeld van g^* onder Ψ. Nu is g, gezien dat Ψ een $\in -$isomorfisme is, een injectie. Hiermee geldt $|E| \leq |F|$.
We definiëren een functie $V^* : \Phi \to \mathcal{F}$, met Φ de verzameling constanten van de taal $\mathcal{L}$, als

$$V^*(s) := (V(s))^*.$$

Hiermee hebben we een kardinaliteitsmodel $\mathcal{N} =< \mathcal{U}^*, X^*, \mathcal{F}^*, V^* >$ geconstrueerd waarvoor geldt dat $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$.
Ten slotte laten we met contrapositie zien dat we $\mathcal{N}$ Dedekind-eindig kunnen kiezen, als $\mathcal{M}$ Dedekind-eindig is. Stel Y^* is Dedekind-oneindig, dan bestaat een rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Y^*. We hebben α zo gekozen dat $\mathbb{N} \in \mathcal{P}^\alpha(\tilde{A})$ en dus $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{P}^\alpha(\tilde{A})) \subseteq \mathcal{U}^*$, waarmee de rij in het bereik van Ψ ligt. Er bestaat nu een rij $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Y zodat $\Psi((b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Hiermee is Y Dedekind-oneindig. We hebben hiermee bewezen dat als alle $Y \in \mathcal{F}$ Dedekind-eindig zijn, we dan alle $Y^* \in \mathcal{F}^*$ Dedekind-eindig kunnen kiezen. $\square$

8.3 De Volledigheid van CardComp

We zijn nu in staat de volledigheid van CardComp en DedCardComp met betrekking tot kardinaliteitsmodellen te bewijzen.

Stelling 8.3. CardComp *is volledig met betrekking tot kardinaliteitsmodellen.*

Bewijs. Stelling 6.9 zegt dat CardComp volledig is met betrekking tot oneindige maatmodellen. Stelling 8.1 zegt dat voor elk oneindig maatmodel een isomorf oerelement-kardinaliteitsmodel bestaat, waarmee CardComp volledig is met betrekking tot oerelement-kardinaliteitsmodellen. Ten slotte kunnen we voor elk oerelement-kardinaliteitsmodel met Stelling 8.2 een isomorf kardinaliteitsmodel vinden, waarmee CardComp volledig is met betrekking tot kardinaliteitsmodellen. □

Stelling 8.4. DedCardComp *is volledig met betrekking tot Dedekind-eindige kardinaliteitsmodellen.*

Bewijs. Stelling 6.10 zegt dat DedCardComp volledig is met betrekking tot eindige maatmodellen. Stelling 8.1 zegt dat DedCardComp dan ook volledig is met betrekking tot Dedekind-eindige oerelement-kardinaliteitsmodellen. Met Stelling 8.2 is DedCardComp nu volledig met betrekking tot Dedekind-eindige kardinaliteitsmodellen. □

We hebben in Stelling 5.9 bewezen dat CardComp correct is met betrekking tot kardinaliteitsmodellen, in Stelling 8.3 hebben we bewezen dat CardComp volledig is met betrekking tot kardinaliteitsmodellen. Deze twee stellingen samengenomen geeft een bewijs voor Stelling 4.2.

Stelling 4.2 *Laat B een eindige Boole-algebra met ordening $\leq$ zijn, en laat $\preceq$ een binaire relatie op B zijn. De volgende uitspraken zijn equivalent:*

1. *Er bestaat een model $\mathcal{N}$ van ZF, een verzameling $X \in \mathcal{N}$, en een algebra van verzamelingen $< X, \mathcal{F} >$, $\mathcal{F} = (A_b)_{b \in B}$, die isomorf is met B als Boole-algebra, zodat voor alle $p, q \in B$ geldt:*
$$p \preceq q \text{ precies als } |A_p| \leq |A_q|.$$
2. *$(B, \preceq)$ voldoet aan de volgende voorwaarden:*
   (a) *niet $\top \preceq \bot$,*
   (b) *voor alle $b \in B$ geldt $\bot \preceq b$,*
   (c) *$\preceq$ is reflexief,*
   (d) *$\preceq$ is transitief,*
   (e) *Er geldt dat $e \preceq f$, als voor twee rijen $(a_1, ..., a_n, e, ..., e)$, $(b_1, ..., b_n, f, ..., f)$ van gelijke lengte in B aan de volgende drie voorwaarden voldaan is:*
      (i) *Voor elk atoom a van B zijn er precies evenveel a_i en e als b_i en f die groter zijn onder $\leq$ dan a,*
      (ii) *$b_i \preceq a_i$ voor alle $i \in \{1, ..., n\}$,*
      (iii) *Elke a_i ligt in het kleinste ideaal van de Boole-algebra B dat f bevat; dit ideaal is naar beneden toe gesloten onder $\preceq$.*

A De Axioma's van ZF

ZF is een theorie in de eerste-orde taal $\mathcal{Z}$ bestaande uit de binaire relatiesymbolen $\{\in, =\}$. Voor meer informatie over eerste-orde talen verwijzen we naar [4]. Hieronder geven we voor elk axioma van ZF een beschrijving en een $\mathcal{Z}-$zin.

A1. *(Extensionaliteit) Als X en Y dezelfde elementen hebben, dan geldt $X{=}Y$.*
$\forall X \forall Y (\forall Z (Z \in X \leftrightarrow Z \in Y) \rightarrow X = Y)$

A2. *(Paarvorming) Voor alle X, Y bestaat een verzameling $\{X, Y\}$ die precies X en Y bevat.*
$\forall X \forall Y \exists Z \forall W (W \in Z \leftrightarrow (W = X) \vee W = Y)$

A3. *(Scheiding) Voor elke eigenschap ϕ, kunnen we voor elke verzameling X de verzameling van elementen in X die aan ϕ voldoen vinden.*
$\forall X \exists Y \forall Z (Z \in Y \leftrightarrow (Z \in X \wedge \phi(Z)),$
hierbij komt Y niet vrij in ϕ voor.

A4. *(Vereniging) Voor elke verzameling X bestaat de vereniging van zijn elementen.*
$\forall X \exists Y \forall Z (Z \in Y \leftrightarrow \exists W \in X (Z \in W))$

A5. *(Machtsverzameling) Voor elke verzameling bestaat de machtsverzameling.*
$\forall X \exists Y \forall Z (Z \in Y \leftrightarrow \forall W \in Z (W \in X))$

A6. *(Oneindigheid) Er bestaat een oneindige verzameling.*
$\exists X (\varnothing \in X \wedge \forall Y \in X \exists Z \in X (Y \in Z))$

A7. *(Vervanging) Het beeld van een verzameling onder een afbeelding is een verzameling.*
$\forall V (\forall X \in V (\exists Y \phi(X, Y) \rightarrow \exists W \forall X \in V \exists Y \in W (\phi(X, Y)))),$
waarbij W niet vrij voorkomt in ϕ.

A8. *(Regulariteit) Elke verzameling heeft voor $\in$ een minimaal element.*
$\forall X (X \neq \varnothing \rightarrow \exists Y \in X (X \cap Y = \varnothing))$

B Modellen van Verzamelingenleer

In hoofdstuk 7 hebben we permutatiemodellen, generieke extensies, en symmetrische modellen geconstrueerd. We zullen nu bewijzen dat deze klassen daadwerkelijk modellen van verzamelingenleer zijn.
We herinneren ons dat een klasse $\mathcal{M}$ transitief is, wanneer voor $\mathcal{M}$ geldt dat als $X \in \mathcal{M}$, dan $X \subseteq \mathcal{M}$.

Definitie B.1 (Vrijwel universele klasse)**.** We noemen een klasse $\mathcal{M}$ vrijwel universeel als voor elke $X \subset \mathcal{M}$ een $Y \in \mathcal{M}$ bestaat zodat $X \subseteq Y$.

Definitie B.2 (Gödel-operaties)**.** Zij $\mathcal{M}$ een klasse, en $X, Y \in \mathcal{M}$. We definiëren de volgende acht Gödel-operaties:

$$\mathcal{G}_1(X,Y) = \{X,Y\}, \qquad \mathcal{G}_5(X) = \{(u,v) \in X^2 \mid u \in v\},$$

$$\mathcal{G}_2(X,Y) = X - Y, \qquad \mathcal{G}_6(X) = \{(a,b,c) \mid (b,c,a) \in X\},$$

$$\mathcal{G}_3(X,Y) = X \times Y, \qquad \mathcal{G}_7(X) = \{(a,b,c) \mid (c,b,a) \in X\},$$

$$\mathcal{G}_4(X) = \mathrm{dom}(X), \qquad \mathcal{G}_8(X) = \{(a,b,c) \mid (a,c,b) \in X\}.$$

Als voor alle $X, Y \in \mathcal{M}$ geldt dat $\mathcal{G}_i(X,Y) \in \mathcal{M}$ en $\mathcal{G}_j(X) \in \mathcal{M}$, $1 \leq i \leq 3$, $4 \leq j \leq 8$, dan is $\mathcal{M}$ gesloten onder de Gödel-operaties.

Stelling B.3. *Als een klasse $\mathcal{M}$ transitief en vrijwel universeel is, en bovendien gesloten is onder de Gödel-operaties, dan is $\mathcal{M}$ een model van ZF.*

Voor het bewijs van deze stelling, wat neerkomt op het controleren van elk axioma van ZF voor $\mathcal{M}$, verwijzen we naar [3], pagina 35-38.
Met dit criterium voor het zijn van een model van ZF, kunnen we aantonen dat een permutatiemodel daadwerkelijk een model van ZFA is.

Stelling B.4. *Een permutatiemodel*

$$\mathcal{V} = \{x \mid x \textit{ is symmetrisch en } x \subseteq \mathcal{V}\},$$

zoals in Definitie 7.12, is een transitief model van ZFA.

Bewijs. Zij $\mathcal{G}$ de permutiegroep en $\mathcal{F}$ het normaal filter in de constructie van het permutatiemodel. We noemen de verzameling oerelementen zoals gebruikelijk A. Per definitie is $\mathcal{V}$ transitief. Neem $X, Y \in \mathcal{V}$. Wanneer $\mathcal{V}$ gesloten is onder de Gödel-operaties, geldt voor $1 \leq i \leq 3$ dat

$$\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(X) \cap \mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(Y) \subseteq \mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\mathcal{G}_i(X,Y)),$$

en voor $4 \leq j \leq 8$ dat

$$\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(X) \subseteq \mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\mathcal{G}_j(X)).$$

We zien dat

$$\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(X) \cap \mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(Y) = \{\pi \in \mathcal{G} \mid \pi(X) = X\} \cap \{\pi \in \mathcal{G} \mid \pi(Y) = Y\}$$

$$\subseteq \mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\mathcal{G}_1(X,Y)) = \{\pi \in \mathcal{G} \mid \pi(\{X,Y\}) = \{X,Y\}\}$$

en

$$\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(X) = \{\pi \in \mathcal{G} \mid \pi(X) = X\} \subseteq \mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\mathcal{G}_6(X))$$
$$= \{\pi \in \mathcal{G} \mid \pi(\{(a,b,c) \mid (b,c,a) \in X\}) = \{(a,b,c) \mid (b,c,a) \in X\}\}$$

Op vergelijkbare wijze controleren we dat $\mathcal{V}$ gesloten is onder de andere Gödel-operaties.
We bewijzen dat $\mathcal{V}$ vrijwel universeel is. Neem $\pi \in \mathcal{G}$. We merken op dat voor alle x geldt dat $\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\pi(x)) = \pi \mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(x)\pi^{-1}$, dus $\pi(x)$ is symmetrisch als x symmetrisch is. Nu volgt dat als $x \in \mathcal{V}$, dan ook $\pi(x) \in \mathcal{V}$. We merken op dat voor alle $\alpha \in \mathrm{On}$ en $\pi \in \mathcal{G}$ geldt

$$\pi(\mathcal{P}^\alpha(A) \cap \mathcal{V}) = \mathcal{P}^\alpha(A) \cap \mathcal{V},$$

omdat $\pi(x)$ en x dezelfde rang hebben. We concluderen dat $\mathrm{sym}(\mathcal{P}^\alpha(A) \cap \mathcal{V}) = \mathcal{G} \in \mathcal{F}$.
Gezien dat $\mathrm{sym}(x) = \mathcal{G}$ voor alle $x \in \mathcal{P}^\infty(0)$ geldt $\mathcal{P}^\infty(0) \subseteq V$. Ook geldt dat $A \in \mathcal{V}$, omdat $\mathrm{sym}(A) = \mathcal{G}$ en $\mathrm{sym}(a) \in \mathcal{F}$ voor elke $a \in A$. We hebben bewezen dat $\mathcal{V}$ een transitieve en vrijwel universele klasse is, die de kern en de verzameling oerelementen van ZFA bevat. Hiermee is $\mathcal{V}$ een transitief model van ZFA. □

Om te bewijzen dat het Boole-waardig model $\mathcal{M}^B$ een model van ZFC is, kunnen we laten zien dat de Boole-waarde die aan elk axioma van ZFC toegekend wordt, gelijk is aan $\top$. We verwijzen hiervoor naar [2], pagina 212-214.
We richten ons nu op het model zijn van een generieke extensie.

Lemma B.5. *Zij $\mathcal{M}$ een model van ZFC, en G een $\mathcal{M}$-generiek ultrafilter. Nu geldt dat $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}[G]$.*

Bewijs. We zien met $\in$ −inductie dat voor elke $x \in \mathcal{M}$ geldt dat $i_G(\breve{x}) = x$:

$$i_G(\breve{\varnothing}) = \varnothing,$$

$$i_G(\breve{x}) = \{i_G(\breve{y}) \mid \breve{x}(\breve{y}) \in G\} = x.$$

□

Lemma B.6. *Zij $\mathcal{M}[G]$ een generieke extensie, waarbij B de Boole-algebra in de constructie is. Nu geldt $G \in \mathcal{M}[G]$.*

Bewijs. We definiëren eerst $\underline{G} \in \mathcal{M}^B$ als volgt:

$$\mathrm{dom}(\underline{G}) = \{\breve{u} \mid u \in B\},$$
$$\underline{G}(\breve{u}) = u \text{ voor alle } u \in B,$$

zie ook paragraaf 7.5. We zien nu dat

$$i(\underline{G}) = \{i(x) \mid \underline{G}(x) \in G\} = \{i(u) \mid u \in G\} = G.$$

□

Stelling B.7. *Zij G een $\mathcal{M}-$generiek ultrafilter op een Boole-algebra B, en $\mathcal{M}$ een model van ZFC. Nu is $\mathcal{M}[G]$ een model van ZFC. Bovendien is $\mathcal{M}[G]$ het kleinste model $\mathcal{N}$ van ZF zodat $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ en $G \in \mathcal{N}$.*

Bewijs. Dat $\mathcal{M}[G]$ een model van ZFC is, volgt direct uit Stelling 7.17. Ook zegt lemma B.5 dat $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}[G]$, en lemma B.6 dat $G \in \mathcal{M}[G]$.
Zij $\mathcal{N} \supseteq \mathcal{M}$ een model van ZF, en $G \in \mathcal{N}$. Nu geldt voor alle ordinaalgetallen $\alpha \in \mathcal{M}$ dat

$$\mathcal{M}_\alpha^B \in \mathcal{N},$$

en dat de restrictie van i_G tot $\mathcal{M}_\alpha^B$ in $\mathcal{N}$ ligt. Nu volgt dat

$$\mathcal{M}[G] = \{i_G(x) \mid x \in \mathcal{M}^B\} \subseteq \mathcal{N}.$$

□

Ten slotte laten we zien dat een symmetrische extensie een model van ZF is.

Stelling B.8. *Zij $\mathcal{N}$ de symmetrisch extensie, geconstrueerd met een Boole-algebra B, een model $\mathcal{M}$ van ZFC, een $\mathcal{M}-$generiek ultrafilter G op B, een groep $\mathcal{G}$ met automorfismen van B, en een interpretatie i_G van het Boole-waardig model $\mathcal{M}^B$ door G. Nu is $\mathcal{N}$ een model van ZF.*

Bewijs. Merk op dat als $x \in \text{ES}$, dan $\text{dom}(x) \subseteq \text{ES}$. Hieruit volgt dat als $y = i_G(x) \in \mathcal{N}$, dan $y \subseteq \mathcal{N}$; $\mathcal{N}$ is transitief.
Nu laten we zien dat $\mathcal{N}$ vrijwel universeel is. Neem een $X \subseteq \mathcal{N}$, dan geldt ook dat

$$X \subseteq \{i_G(x) \mid x \in \text{ES} \cap \mathcal{M}_\alpha^B\} = i_G(\text{ES} \cap \mathcal{M}_\alpha^B)$$

voor een $\alpha \in \text{On}$. We laten zien dat voor elke $\alpha \in \text{On}$ geldt dat $X_\alpha := i_G(\text{ES} \cap \mathcal{M}_\alpha^B) \in \mathcal{N}$.
Kies $\underline{X}_\alpha \in \mathcal{M}^B$ zodat $\text{dom}(\underline{X}_\alpha) = \text{ES} \cap \mathcal{M}_\alpha^B$, en zodat $\underline{X}_\alpha(x) = \top$ voor alle $x \in \text{dom}(\underline{X}_\alpha)$.
Nu is $\underline{X}_\alpha \in \mathcal{M}^B$ de naam van $X_\alpha \in \mathcal{M}[G]$, en $\text{dom}(\underline{X}_\alpha) \subseteq ES$. Wanneer $\underline{X}_\alpha$ bovendien symmetrisch is voor elke $\alpha \in \text{On}$, geldt dat $i_G(\text{ES} \cap \mathcal{M}_\alpha^B) \in \mathcal{N}$.
Als $x \in \mathcal{M}^B$ en $\pi \in \mathcal{G}$, dan geldt voor elke $\pi \in \mathcal{G}$ dat $\text{sym}(\pi(x)) = \pi \text{sym}_\mathcal{G}(x)\pi^{-1}$, en dus dat $\pi(x) \in \text{ES}$ als $x \in \text{ES}$. Ook geldt voor elke $\pi \in \mathcal{G}$ dat als $x \in \mathcal{M}_\alpha^B$, dan $\pi(x) \in \mathcal{M}_\alpha^B$. Nu volgt dat $\pi(\text{ES} \cap \mathcal{M}_\alpha^B) = \text{ES} \cap \mathcal{M}_\alpha^B$ voor elke $\pi \in \mathcal{G}$, en dus $\pi(\underline{X}_\alpha) = \underline{X}_\alpha$. Hiermee is bewezen dat $\text{sym}(\underline{X}_\alpha) = \mathcal{G}$; nu volgt dat voor elke $X \in \mathcal{N}$ een $X_\alpha \in \mathcal{N}$ bestaat zodat $X \subseteq X_\alpha$. We concluderen dat $\mathcal{N}$ vrijwel universeel is.
Ten slotte laten we zien dat $\mathcal{N}$ gesloten is onder de Gödel-operaties. We merken op dat we voor alle $x, y \in \mathcal{M}^B$ elementen $z_1, ..., z_8 \in \mathcal{M}^B$ kunnen vinden zodat $\mathcal{G}_i(x, y) = z_i$, en $[\![z_i]\!] = \top$ voor alle $i = 1, ..., 8$. We merken op dat voor alle Gödel-operaties geldt dat $\text{sym}(z_i) \supseteq \text{sym}(x) \cap \text{sym}(y)$, en dus dat als $x, y \in \text{ES}$, dan $z_i \in \text{ES}$. Hiermee is $\mathcal{N}$ transitief, vrijwel universeel en gesloten onder de Gödel-operaties. Met Stelling B.3 is $\mathcal{N}$ een model van ZF. □

Bronvermelding

[1] Matthew Harrison-Trainor en Dhruv Kulshreshtha. *The Logic of Cardinality Comparison Without the Axiom of Choice*. 2022. arXiv: `2211.03976 [math.LO]`.

[2] Thomas J. Jech. *Set Theory*. 3de ed. Springer-Verlag, 2006. ISBN: 3540440852.

[3] Thomas J. Jech. *The Axiom of Choice*. North-Holland publishing company, 1993. ISBN: 0720422752.

[4] Ieke Moerdijk en Jaap van Oosten. *Sets, Models and Proofs*. Springer, 2018. ISBN: 3319924133.

[5] Paul R. Halmos. *Naive Set Theory*. 4de ed. D. van Nostrand Company, inc., 1967. ISBN: 3257227892.

[6] Peter G. Doyle en John Horton Conway. *Division by three*. 2006. arXiv: `math/0605779 [math.LO]`.

[7] Matthew Harrison-Trainor en Wesley H. Holliday en Thomas F. Icard. *Preferential Structures for Comparative Probabilistic Reasoning*. 2021. arXiv: `2104.02287 [cs.AI]`.

[8] Fred Landman. *Structures for Semantics*. Kluwer Academic Publishers, 1991. ISBN: 0792312392.

[9] Charles H. Kraft en John W. Pratt en A. Seidenberg. „Intuitive Probability on Finite Sets". In: *The Annals of Mathematical Statistics* 30.2 (1959), p. 408 –419. DOI: `10.1214/aoms/1177706260`. URL: `https://doi.org/10.1214/aoms/1177706260`.

[10] Shiri Alon en Aviad Heifetz. „The Logic of Knightian Games". In: *SSRN Electronic Journal* 2 (jan 2013). DOI: `10.2139/ssrn.2283772`.

[11] John L. Bell. *Boolean-Valued Models and Independence Proofs in Set Theory*. Clarendon Press, 1977. ISBN: 0198531680.

Index