Universiteit Utrecht

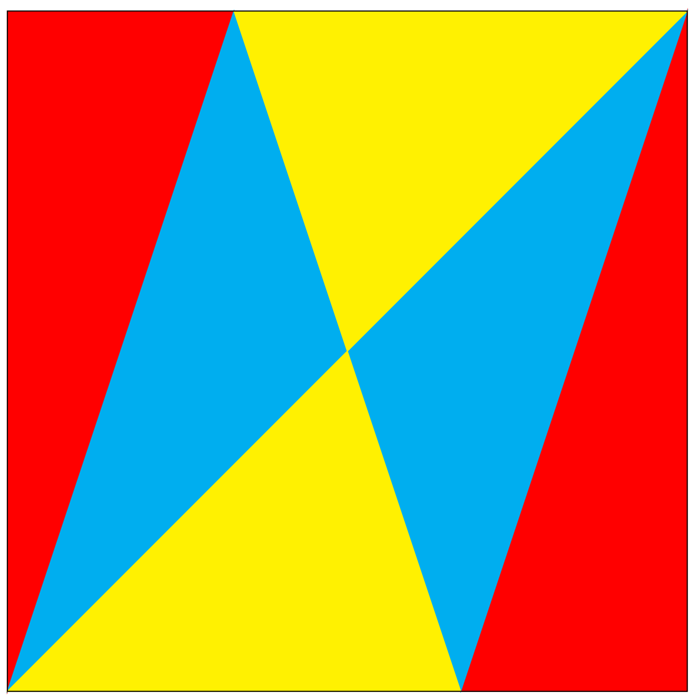
Faculteit Bètawetenschappen

Equidissecties van een vierkant

Bachelor Thesis Wiskunde

Thom Zwamborn

6056636



Begeleider:

Dr. Gunther Cornelissen
Mathematisch Instituut

28 januari 2022

Inhoudsopgave

Inleiding

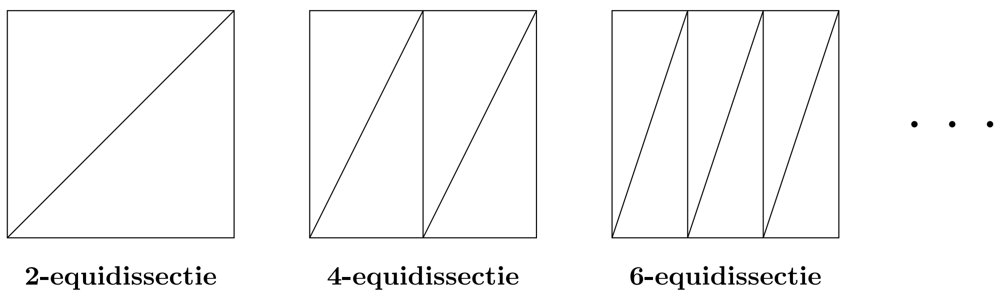
In deze bachelorthesis zullen we ons richten op de volgende stelling:

Stelling van Monsky. *Een vierkant kan niet onderverdeeld worden in een oneven aantal niet-overlappende driehoeken met allemaal dezelfde oppervlakte.*

Deze stelling is bewezen in 1970 door Paul Monsky[1]. Zo'n onderverdeling van een veelhoek in m niet-overlappende driehoeken met allemaal dezelfde oppervlakte wordt ook wel een m-equidissectie genoemd. Monsky heeft dus aangetoond dat er geen m-equidissectie bestaat van een vierkant waarbij m oneven is. In het algemeen spreken we voor een veelhoek P over het spectrum $S(P)$.

Definitie. *Definieer de verzameling* $S(P) = \{m \in \mathbb{N} : \text{er bestaat een } m\text{-equidissectie van } P\}$ *voor een veelhoek* P. *Dit noemen we het spectrum van* P.

De Stelling van Monsky zegt dus dat er geen oneven getallen in het spectrum van een vierkant zitten. Het is vrij gemakkelijk om in te zien dat elk even getal wel in het spectrum zit.



Figuur 1: Elk even getal zit in het spectrum van een vierkant.

We zullen uitgebreid het bewijs van de stelling behandelen. Ook zal ik een stukje van mijn eigen ideeën laten zien en wat er naast de stelling van Monsky nog verder ontdekt is.

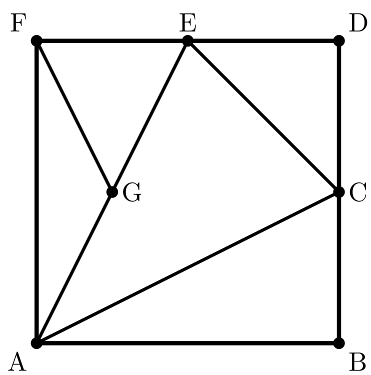
1 Sperner's Lemma

De hoofdstukken 1, 2 en 3 zijn aan de hand van het originele bewijs van Monsky[1]. Voor het bewijs zullen we een specifiek geval van Sperner's Lemma [2] gebruiken. Neem **P** het gebied dat omgeven wordt door een veelhoek. We delen dit gebied **P** op in m driehoeken T_i met $1 \leq i \leq m$. Deze T_i hebben *hoekpunten* en *zijdes* net zoals de rand van **P**. Dan hebben we de volgende twee definities.

Definitie 1.1. *Twee hoekpunten noemen we aangrenzend als ze op dezelfde zijde liggen (zijde van een T_i of van* ***P*** *zelf) en op het lijnstuk dat de hoekpunten verbindt liggen geen andere hoekpunten.*

Definitie 1.2. *Een fundamenteel lijnstuk is een lijnstuk dat twee aangrenzende hoekpunten verbindt.*

Voorbeeld 1.3. *Neem als veelhoek een vierkant onderverdeeld in driehoeken zoals in Figuur 2. De fundamentele lijnstukken zijn dan:* $AB, AC, AG, AF, BC, CE, CD, DE, EG, EF$ *en* FG*.*

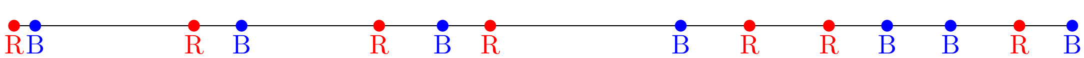


Figuur 2: Een dissectie van een vierkant in driehoeken.

Nu kleuren we de hoekpunten van alle T_i in **P** rood(R), blauw(B) of groen(G). We noemen een zijde of een fundamenteel lijnstuk roodblauw(RB) als het ene uiteinde een rood hoekpunt is en het andere uiteinde een blauw hoekpunt. We hebben dus 6 soorten zijdes en fundamentele lijnstukken, namelijk: RR, RB, RG, BB, BG en GG. Nu zijn we klaar om het specifieke geval van Sperner's Lemma te formuleren.

Lemma 1.4 (Sperner's Lemma)**.** *[1] Stel dat er geen zijde (van T_i of van* ***P****) bestaat met hoekpunten van alle drie de kleuren en dat de rand van* ***P*** *een oneven aantal RB zijdes heeft. Dan bestaat er een T_i die alle drie de kleuren als hoekpunten heeft.*

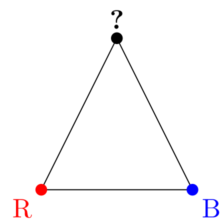
Bewijs. We zullen eerst aantonen dat uit de aannames volgt dat elke RB zijde een *oneven* aantal RB fundamentele lijnstukken bevat en dat elke zijde die niet RB is een *even* aantal RB fundamentele lijstukken bevat. Stel we hebben een RB zijde. Dan geldt dat er alleen R en B hoekpunten op deze zijde liggen. Als we nu vanaf het uiteinde met een R hoekpunt alle kleuren van de hoekpunten op volgorde noteren krijgen we een reeks van letters R en B. We weten dat de reeks begint in een R en dat het eindigt in een B. Dus moet er in de reeks een oneven aantal keer gewisseld zijn van R naar B, oftewel er zijn een oneven aantal RB fundamentele lijnstukken op de zijde.



Figuur 3: Een RB zijde met 11 RB fundamentele lijnstukken.

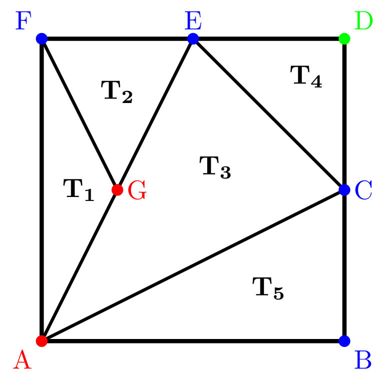
Stel nu dat we een niet RB zijde hebben. Als er een G hoekpunt op de zijde ligt weten we dat er 0 RB fundamentele lijnstukken zijn. Als er geen G hoekpunt op de zijde ligt hebben we te maken met een RR of een BB zijde. Omdat het begint en eindigt met dezelfde kleur weten we dat er een even aantal keer gewisseld is tussen R en B en dus bevat een niet RB zijde altijd een even aantal RB fundamentele lijnstukken.

Nu zullen we met behulp van een bewijs uit het ongerijmde het lemma bewijzen.
Stel dat er geen T_i in **P** bestaat met alle drie de kleuren als hoekpunten. Dan weten we dat elke T_i een even aantal RB zijdes bevat, namelijk 0 of 2. Dit komt omdat er natuurlijk niet drie RB zijdes in een driehoek passen en als een driehoek maar één RB zijde bevat dan moet het andere hoekpunt G zijn maar dat kan niet.



Figuur 4: Een driehoek kan alleen een even aantal RB zijdes bevatten.

Aangezien in een T_i de RB zijdes altijd in even aantallen voorkomen en de niet RB zijdes een even aantal RB fundamentele lijnstukken bevatten volgt dat elke T_i een even aantal RB fundamentele lijnstukken heeft. Neem nu t_i het aantal RB fundamentele lijnstukken in T_i en $S = t_1 + t_2 + ... + t_m$ de som. Dan weten we dat S een even getal moet zijn. Merk ook op dat hier elk RB fundamenteel lijnstuk dat niet op de rand van **P** ligt twee keer wordt geteld (omdat het onderdeel is van twee verschillende driehoeken) en op de rand worden ze maar één keer geteld.



Figuur 5: Voor deze dissectie van een vierkant geldt dus dat $S = 2 + 2 + 2 + 0 + 2 = 8$. Hier wordt dus bijvoorbeeld EG twee keer geteld maar AB maar één keer.

Echter hebben we aangenomen dat de rand van **P** een oneven aantal RB zijdes heeft en dus ook een oneven aantal RB fundamentele lijnstukken. Aangezien alle RB fundamentele lijnstukken die niet op de rand van **P** liggen dubbel geteld worden is dit een even getal. Maar dan geldt dat S een som is van een oneven getal (op de rand) en een even getal (niet op de rand). Maar S was even en dus krijgen we een tegenspraak. We concluderen dat er een T_i moet bestaan met alle drie de kleuren als hoekpunten. □

Naast Sperner's Lemma hebben we ook een niet-archimedische norm nodig.

2 Niet-archimedische norm

We beginnen met de definitie van een niet-archimedische norm.

Definitie 2.1. *Stel K een lichaam. Een niet-archimedische norm op K is een functie $||.|| : K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ met de volgende drie eigenschappen:*

1. $||x|| = 0 \iff x = 0$
2. $||x \cdot y|| = ||x|| \cdot ||y||$
3. $||x + y|| \leq max(||x||, ||y||)$

Een niet-archimedische norm is dus ook een norm in de algemene zin aangezien $max(||x||, ||y||) \leq ||x|| + ||y||$. Uit deze eigenschappen volgt dus ook dat $||1|| = ||-1|| = 1$ net zoals bij een normale norm. Ook hebben we:

Lemma 2.2. $||x|| \neq ||y|| \implies ||x + y|| = max(||x||, ||y||)$

Bewijs. Neem $x, y \in K$. Stel $||x|| \neq ||y||$ en neem zonder verlies van algemeenheid aan dat
$||x|| < ||y||$. Er geldt dat $||y|| = ||x + y - x|| \leq max(||x + y||, ||-x||) = max(||x + y||, ||x||)$.
Aangezien $||y|| > ||x||$ moet $||y|| \leq max(||x + y||, ||x||) = ||x + y||$. Maar we weten ook dat $||x + y|| \leq max(||x||, ||y||) = ||y||$. Hieruit volgt dus dat $||x + y|| = ||y|| = max(||x||, ||y||)$. □

Voor het bewijs van de stelling van Monsky hebben we een niet-archimedische norm nodig op $\mathbb{R}$ die de eigenschap heeft dat $||2|| < 1$. Om aan te tonen dat zo'n niet-archimedische norm überhaupt bestaat hebben we 2-adische getallen nodig hebben. Daarom zullen we pas na het bewijs van Monsky in Hoofdstuk 5 hier aandacht aan besteden. Voor nu zullen we met $||.||$ altijd een niet-archimedische norm op $\mathbb{R}$ bedoelen waarbij $||2|| < 1$. Uit deze extra eigenschap volgt hoe deze niet-archimedische norm werkt op de gehele getallen.

Lemma 2.3. *Neem $m \in \mathbb{Z}$. Als m even dan $||m|| < 1$. Als m oneven dan $||m|| = 1$.*

Bewijs. Er geldt dat $||2|| < 1$. Ook geldt dat $||2 + 2|| \leq max(||2||, ||2||) < 1$ en dus ook
$||2 + 2 + 2|| \leq max(||2||, ||2 + 2||) < 1$. Op deze manier volgt dat $||2x|| < 1$ voor alle $x \in \mathbb{Z}$.
We concluderen dat als m even dan $||m|| < 1$.
We weten dus dat $||2x|| < ||1||$ voor alle $x \in \mathbb{Z}$ en met Lemma 2.2 volgt dan dat:
$||2x + 1|| = max(||2x||, ||1||) = 1$ voor alle $x \in \mathbb{Z}$
We concluderen dat als m oneven dan $||m|| = 1$. □

Nu kunnen we eindelijk beginnen aan het bewijzen van de stelling van Monsky.

3 Het bewijs

Met behulp van de niet-archimedische norm geven we elk punt (x, y) in het vlak een unieke kleur op de volgende manier:

Rood: $||x|| < 1$ en $||y|| < 1$
Blauw: $||x|| \geq 1$ en $||x|| \geq ||y||$
Groen: $||y|| \geq 1$ en $||x|| < ||y||$

Deze manier van het inkleuren van het vlak heeft een bijzondere eigenschap.

Lemma 3.1. *Neem $A = (x, y)$ en $B = (x', y')$ punten in $\mathbb{R}^2$. Stel dat de translatie van A naar B, dus $B - A = (x' - x, y' - y)$, een rood punt is. Dan moeten A en B dezelfde kleur hebben.*

Bewijs. We weten dus dat $||x' - x|| < 1$ en $||y' - y|| < 1$. Voor het bewijs gaan we nu simpelweg alle mogelijkheden langs:
Stel A is een rood punt. Dan geldt $||x|| < 1$ en $||y|| < 1$ dus:
$||x'|| = ||x' - x + x|| \leq max(||x' - x||, ||x||) < 1$
$||y'|| = ||y' - y + y|| \leq max(||y' - y||, ||y||) < 1$
Dus is B ook een rood punt.

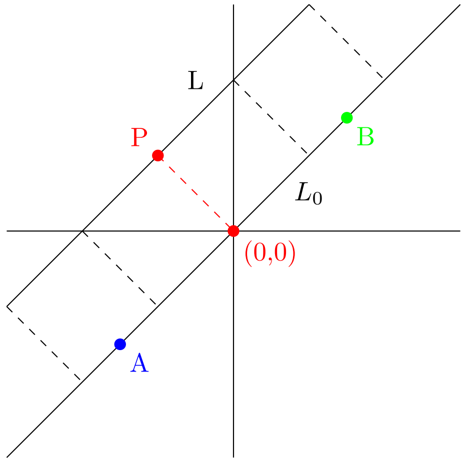
Stel A is een blauw punt. Dan geldt $||x|| \geq 1$ en $||x|| \geq ||y||$ dus:
$1 \leq ||x|| = ||x - x' + x'|| \leq max(||x - x'||, ||x'||) = max(||x' - x||, ||x'||) = ||x'||$
omdat $1 > ||x' - x||$.
Ook geldt er dat:
$||y'|| = ||y' - y + y|| \leq max(||y' - y||, ||y||) \leq ||x|| \leq ||x'||$
omdat $||y' - y|| < 1 \leq ||x||$.
Dus is B ook een blauw punt.

Stel A is een groen punt. Dan geldt $||y|| \geq 1$ en $||y|| > ||x||$ dus:
$1 \leq ||y|| = ||y - y' + y'|| \leq max(||y - y'||, ||y'||) = max(||y' - y||, ||y'||) = ||y'||$
omdat $1 > ||y' - y||$.
Ook geldt er dat:
$||x'|| = ||x' - x + x|| \leq max(||x' - x||, ||x||) < ||y|| \leq ||y'||$
omdat $||x' - x|| < 1 \leq ||y||$.
Dus is B ook een groen punt. $\square$

Met dit lemma kunnen we dus een verzameling van punten in het vlak transleren met een willekeurig rood punt en zo de kleuren van de punten behouden. Hieruit volgt direct de volgende eigenschap van dit ingekleurde vlak.

Lemma 3.2. *Er bestaat geen lijn in het vlak wat een rood, blauw en groen punt bevat.*

Bewijs. Stel er bestaat een lijn L in het vlak met een rood, blauw en groen punt. Construeer de lijn $L_0 = L - P = \{x - P | x \in L\}$ voor een willekeurig punt $P \in L$ die rood is (zie Figuur 6). Dan geldt dat $(0, 0) \in L_0$ en volgens Lemma 3.1 geldt voor elk punt $x \in L$ dat $x - P \in L_0$ dezelfde kleur heeft. Hieruit volgt dat L_0 ook een rood, blauw en groen punt bevat. Neem nu $A = (x, y)$ een blauw punt op L_0 en $B = (x', y')$ een groen punt op L_0 willekeurig.



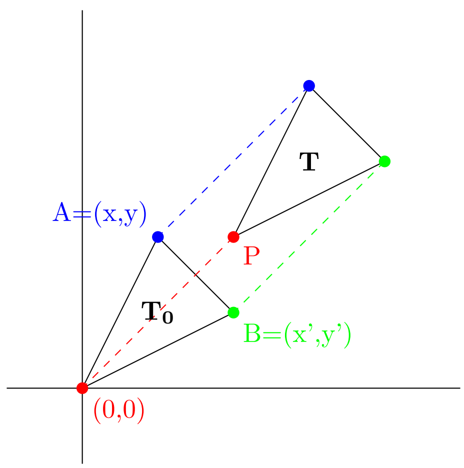
Figuur 6: Door de lijn L te transleren met het rode punt P krijgen we de nieuwe lijn L_0.

Aangezien A, B en $(0,0)$ allemaal op L_0 liggen volgt dat $(x,y) = (\lambda x', \lambda y')$ voor een $\lambda \in \mathbb{R}$. Er geldt dus dat:
$||x|| = ||\lambda x'|| = ||\lambda|| \cdot ||x'|| < ||\lambda|| \cdot ||y'|| = ||y||$
Hieruit volgt dat $||x|| < ||y||$ maar A is een blauw punt dus krijgen we een tegenspraak. We concluderen dat er geen lijn L bestaat wat een rood, blauw en groen punt bevat. $\square$

Het ingekleurde vlak vertelt ons ook iets over de oppervlakte van driehoeken met alle drie de kleuren als hoekpunten.

Lemma 3.3. *Als een driehoek T in het vlak alle drie de kleuren als hoekpunten heeft en T heeft oppervlakte O, dan geldt dat $||O|| > 1$.*

Bewijs. Stel T een driehoek in het vlak met alle drie de kleuren als hoekpunten en met oppervlakte O. Neem P het rode hoekpunt van T, dan geldt dat $T_0 = T - P = \{x - P | x \in T\}$ een driehoek is met alle drie de kleuren als hoekpunten en $(0,0)$ als rood hoekpunt. Noem van T_0 het blauwe hoekpunt $A = (x,y)$ en het groene hoekpunt $B = (x', y')$.



Figuur 7: Een driehoek met een rood hoekpunt kun je transleren naar een driehoek met een hoekpunt op de oorsprong.

Er geldt natuurlijk dat de oppervlakte van T_0 ook O is. Dan geldt dus dat $O = \frac{1}{2} \cdot h \cdot b$ met h de hoogte van de driehoek T_0 en b de basis van T_0. Na een korte berekening krijgen we:

$$h = \frac{xy' - x'y}{\sqrt{(y-y')^2 + (x-x')^2}}$$
$$b = \sqrt{(y-y')^2 + (x-x')^2}$$

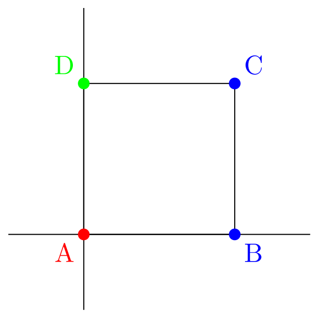
En dus $||O|| = ||\frac{1}{2} \cdot (xy' - x'y)|| = ||\frac{1}{2}|| \cdot ||xy' - x'y||$.

Er geldt dat $||xy' - x'y|| \leq max(||xy'||, ||x'y||)$. Aangezien A een blauw punt en B een groen punt volgt: $||xy'|| = ||x|| \cdot ||y'|| > ||x'|| \cdot ||y|| = ||x'y||$
Uit Lemma 2.2 volgt dat $||xy' - x'y|| = max(||xy'||, ||x'y||) = ||xy'|| = ||x|| \cdot ||y'|| \geq 1$. We weten dat $||2|| < 1$ en $||\frac{1}{2}|| \cdot ||2|| = 1$ dus $||\frac{1}{2}|| > 1$. We concluderen dat $||O|| = ||\frac{1}{2}|| \cdot ||xy' - x'y|| > 1$. □

Alle puzzelstukjes zijn nu verzameld. We moeten alleen nog alles in elkaar passen.

Stelling 3.4 (Stelling van Monsky)**.** *[1] Een vierkant kan niet onderverdeeld worden in een oneven aantal niet-overlappende driehoeken met allemaal dezelfde oppervlakte.*

Bewijs. Neem als vierkant $P = [0,1]^2$ en stel dat we een m-equidissectie van P hebben. Elke driehoek heeft dan als oppervlakte $\frac{1}{m}$. Benoem nu de hoekpunten $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (1,1)$ en $D = (1,0)$. Dan geldt dat A rood, B blauw, C blauw en D groen is. Dus heeft P maar één RB zijde.



Figuur 8: $P = [0,1] \times [0,1]$ heeft maar één RB zijde.

Uit Lemma 3.2 volgt ook dat geen enkele zijde (van P of van een driehoek) een rood, blauw en groen punt bevat. Dan voldoen we aan Sperner's Lemma en dus moet er een driehoek in onze m-equidissectie bestaan met alle drie de kleuren als hoekpunten. Lemma 3.3 vertelt ons dan dat $||\frac{1}{m}|| > 1$ oftewel $||m|| < 1$. Met Lemma 2.3 concluderen we dat m een even getal moet zijn. □

4 Zelf aan de slag

Voordat we het bewijs van het bestaan van een niet-archimedische norm op $\mathbb{R}$ met $||2|| < 1$ behandelen zullen we eerst kijken naar mijn eigen ideeën en vondsten na het bestuderen van het bewijs van de stelling van Monsky. In dit hoofdstuk zal ik dus ook aannemen dat er een niet-archimedische norm op $\mathbb{R}$ bestaat met $||2|| < 1$. Later zullen we zien dat er meer eigenschappen van deze norm zijn maar die zullen we dus in dit hoofdstuk niet gebruiken (aangezien ik daar toen nog niks van wist). Door te kijken naar alle eigenschappen van het vierkant die Monsky gebruikt voor het bewijs van de stelling ging ik kijken of er andere veelhoeken bestaan die ook voldoen aan die eigenschappen. Deze veelhoeken noem ik voor het gemak Monsky veelhoeken.

Definitie 4.1. *Noem een veelhoek P een Monsky veelhoek als het spectrum $S(P)$ geen oneven getallen bevat.*

Voor een bewijs van de stelling van Monsky heeft een veelhoek twee eigenschappen nodig:
1. Het moet een oneven aantal RB zijde hebben, in het geval van $[0,1]^2$ was dat dus 1.
2. De oppervlakte O van een veelhoek zorgt ervoor dat de oppervlaktes van de driehoeken gelijk zijn aan $\frac{O}{m}$. Voor deze O moet gelden dat als $||\frac{O}{m}|| > 1$ dan moet $||m|| < 1$. Dit betekent ookwel dat $||O|| \leq 1$. In het geval van $[0,1]^2$ hadden we een oppervlakte van 1 en $||1|| = 1$. Aan de hand hiervan hebben we de volgende stelling.

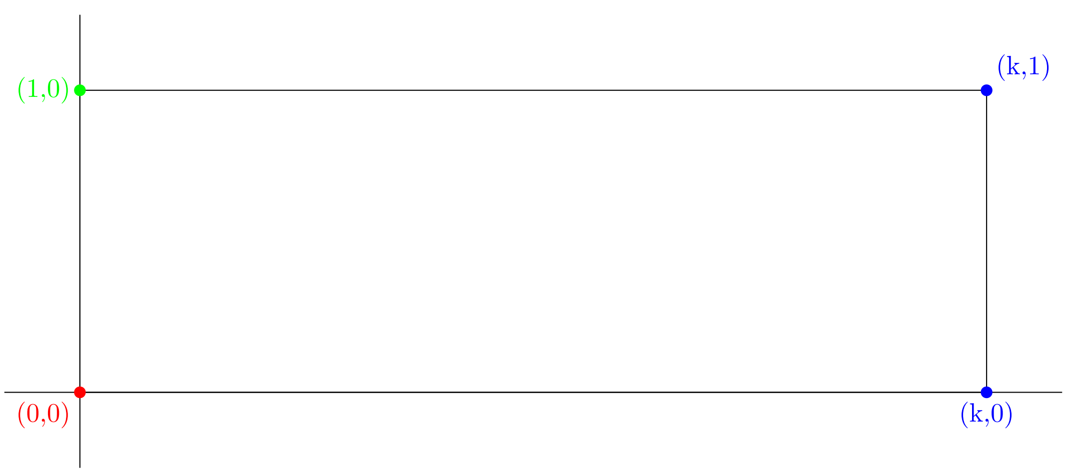
Stelling 4.2. *Neem P een veelhoek met oppervlakte O. Neem aan dat:*
1) $||O|| \leq 1$
2) *De rand van P heeft een oneven aantal RB zijdes*
Dan geldt dat P een Monsky veelhoek is.

Bewijs. Volgt uit het bewijs van de stelling van Monsky. Aangezien P een oneven aantal RB zijdes heeft krijgen we dat $||\frac{O}{m}|| > 1$. Er geldt dat $||\frac{O}{m}|| \cdot ||m|| = ||O|| \leq 1$ en dus moet $||m|| < 1$. We concluderen dat m even moet zijn. □

Met deze stelling ging ik veelhoeken zoeken die voldoen aan deze eigenschappen. Later zullen we zien dat veel van de resultaten die ik hier heb aangetoond door anderen al eerder en op een meer algemene manier bewezen zijn. Toch denk ik dat het interessant is om te laten zien hoe ik op de resultaten gekomen ben en hoe dat proces verliep. Ik begon met de simpelste uitbreiding ten opzichte van een vierkant, namelijk een rechthoek.

Gevolg 4.3. *Elke rechthoek met als ratio tussen de zijdes een oneven getal is een Monsky veelhoek.*

Bewijs. Neem $P = [0,1] \times [0,k]$ met k een willekeurig oneven getal, oftwel $||k|| = 1$. Hieruit volgt dat de oppervlakte A van P voldoet aan $||A|| = ||k|| = 1$. Ook volgt dat $(k,0)$ en $(k,1)$ blauwe punten zijn.



Figuur 9: Een rechthoek met een oneven ratio heeft een oneven aantal RB zijdes.

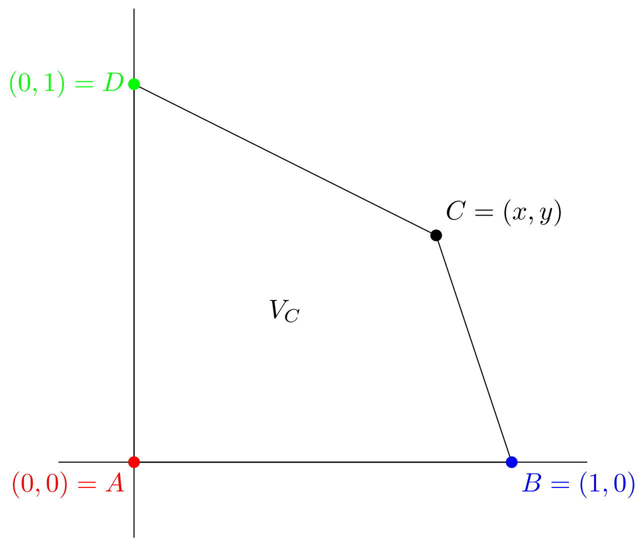
We weten dus dat P een oneven aantal RB zijdes heeft en dat $||A|| = 1$. Uit Stelling 4.2 volgt dat P een Monsky veelhoek is voor elke k. We concluderen dat elke rechthoek met een oneven ratio tussen de zijdes een Monsky veelhoek is. □

Na het bewijzen van deze stelling gebruikmakend van de manier waarop Monsky het had bewezen voor het vierkant kwam ik erachter dat dit eigenlijk veel beter kan.

Gevolg 4.4. *Elke rechthoek met als ratio tussen de zijdes een geheel getal is een Monsky veelhoek.*

Bewijs. Stel we hebben een rechthoek P met als ratio k. Dan geldt dat we een vierkant kunnen vormen door k van deze rechthoeken op elkaar te stapelen. Dus als er een m-equidissectie van P met m even zou bestaan dan zou er een mk-equidissectie van het vierkant bestaan. Maar mk is even en dus krijgen we een tegenspraak. We concluderen dat elke rechthoek met als ratio een geheel getal een Monsky veelhoek is. □

Nu ging ik andere vierhoeken bestuderen. Om het te versimpelen keek ik naar vierhoeken met de hoekpunten $A = (0,0)$, $D = (0,1)$, $B = (1,0)$ en het hoekpunt $C = (x,y)$ waarbij $x \geq 0$ en $y \geq 0$. Voor elk zo'n punt C hebben we dan de unieke vierhoek V_C.



Figuur 10: Voor elke C bestaat er een unieke vierhoek V_C.

Voor de oppervlakte van deze vierhoeken geldt het volgende.

Lemma 4.5. *Stel V_C heeft oppervlakte O. Dan geldt dat $O = \frac{1}{2}(x+y)$.*

Bewijs. V_C bestaat uit twee driehoeken, namelijk de driehoek ΔACD en ΔACB. We weten dat de oppervlakte van ΔACD is $\frac{1}{2}x$ en van ΔACB is het $\frac{1}{2}y$. Dus $A = \frac{1}{2}(x+y)$. □

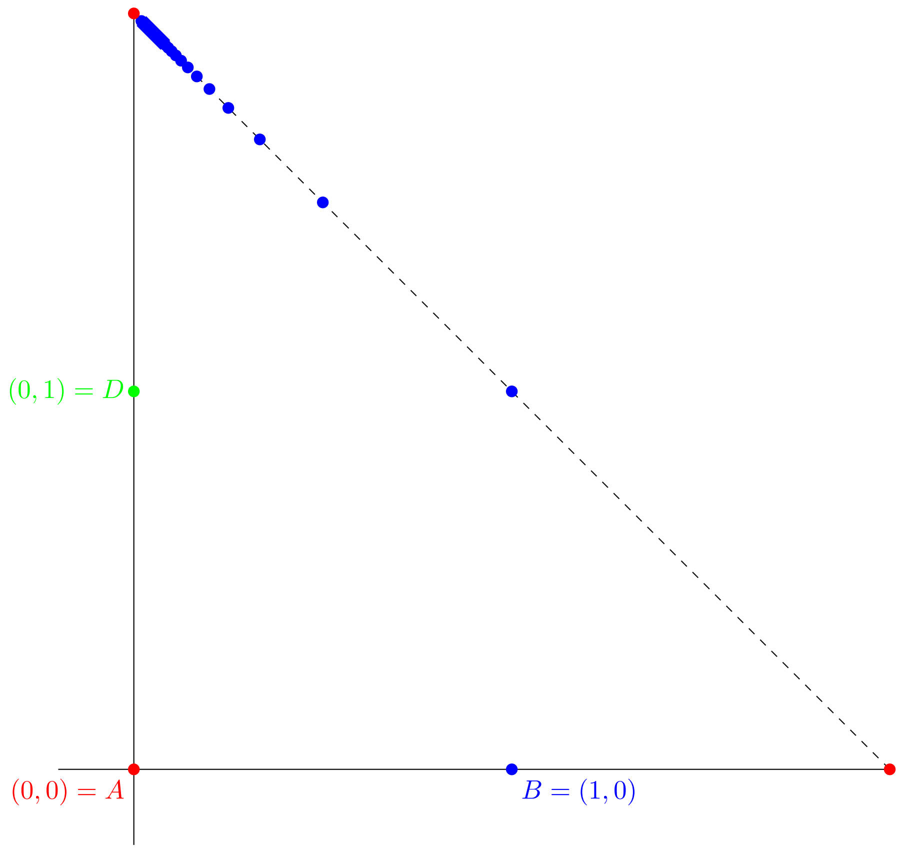
Om te voldoen aan Stelling 4.2 moet er gelden dat $||A|| = ||\frac{1}{2}|| \cdot ||x+y|| \leq 1$. Dit geeft het volgende resultaat.

Stelling 4.6. *Neem $C = (x,y)$ een niet rood punt. Stel dat $x \geq 0$ en $y \geq 0$ waarbij $x+y$ een even getal is. Dan is V_C een Monsky veelhoek.*

Bewijs. We weten dat V_C maar één RB zijde heeft en er geldt dat $||A|| = ||\frac{1}{2}|| \cdot ||x+y|| = ||\frac{1}{2}|| \cdot ||2k|| = ||k|| \leq 1$ want $k \in \mathbb{Z}$. Uit Stelling 4.2 volgt dat V_C een Monsky veelhoek is. □

Ik was benieuwd naar welke vierhoeken hieraan voldeden en hoe ze eruit zouden zien. Eerst kunnen we nog iets zeggen over hoe de norm werkt op elementen van $\mathbb{Q}$. Neem $\frac{p'}{q'}$ de gereduceerde breuk van $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. We weten dat $||\frac{p'}{q'}|| \cdot ||q'|| = ||p'||$ en als p' oneven dan $||p'|| = 1$ en $||q'|| \leq 1$ dus volgt dat $||\frac{p'}{q'}|| \leq 1$. Als p' even dan q' oneven dus $||p'|| < 1$ en $||q'|| = 1$. Er volgt dat $||\frac{p'}{q'}|| < 1$.

Neem de punten $C_{p,q} = (\frac{p}{q}, 2 - \frac{p}{q})$ met $p, q \in \mathbb{Z}$. We concluderen dat:
$C_{p,q}$ rood is als p' even en dat $C_{p,q}$ blauw is als p' oneven
We hebben voor een Monsky veelhoek nodig dat het punt $C_{p,q}$ blauw is. En omdat $x + y$ even is voor elke $C_{p,q}$ volgt dat $V_{C_{p,q}}$ een Monsky veelhoek is voor elke p en q waarvoor geldt dat $\frac{p'}{q'}$ de gereduceerde breuk van $\frac{p}{q}$ is en p' oneven is. Een simpel voorbeeld zijn alle punten $(\frac{1}{k}, 2 - \frac{1}{k})$ voor $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Al deze blauwe punten vormen in combinatie met de punten A,B en D dus een vierhoek die een Monsky veelhoek is (zie Figuur 11).



Figuur 11: De blauwe punten op de diagonaal corresponderen met $(\frac{1}{k}, 2 - \frac{1}{k})$ voor $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

Dit is hoe ver ik kwam door zelf te kijken wat er allemaal nog uit Monsky's stelling volgden. In Hoofdstuk 6 zal ik dieper ingaan op de gevolgen van de stelling van Monsky en wat er nog allemaal aan onderzoek gedaan is na het bewijs van deze stelling. Nu eerst gaan we het bewijs van de niet-archimedische norm behandelen.

5 2-Adische norm op $\mathbb{R}$

Bijna heel Hoofdstuk 5 is gebaseerd op het boek "p-adic Numbers, p-adic Analysis and Zeta-Functions" door Neal Koblitz [3]. Voor het bewijs van de stelling van Monsky hadden we aangenomen dat er een niet-archimedische norm bestaat op $\mathbb{R}$ met de eigenschap dat $||2|| < 1$. Hiervoor zullen we de 2-adische norm definiëren en hiermee de 2-adische getallen construeren. Daarna zullen we bewijzen dat deze 2-adische norm op $\mathbb{R}$ kan worden gedefinieerd. In het algemeen bestaan er voor elk priemgetal p de zogenaamde p-adische getallen, maar in ons geval hebben we alleen 2-adische getallen nodig. Voor de definitie van de 2-adische norm hebben we eerst een functie nodig die ons vertelt 'hoe deelbaar door 2' een getal is.

Definitie 5.1. *Definieer $ord_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ met $ord_2(x) = k$ als $x = 2^k \cdot x'$ met x' oneven, oftewel 2^k is de hoogste macht van 2 die x deelt.*

Een handige eigenschap van deze functie is dat $ord_2(x) + ord_2(y) = ord_2(xy)$. Dit geldt omdat $2^{ord_2(x)}x' = x$ en $2^{ord_2(y)}y' = y$ met x' en y' oneven. Dus krijgen we dat $2^{ord_2(x)+ord_2(y)}x'y' = xy$ met $x'y'$ oneven en dus $ord_2(x) + ord_2(y) = ord_2(xy)$. We kunnen deze functie nu uitbreiden naar $\mathbb{Q}$.

Definitie 5.2. *Definieer $ord_2 : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ waarbij $ord_2(\frac{a}{b}) = ord_2(a) - ord_2(b)$. Dit is dus een extensie van de functie in definitie 5.1.*

De functie is goed gedefinieerd aangezien $ord_2(\frac{ac}{bc}) = ord_2(ac) - ord_2(bc) = ord_2(a) - ord_2(b) = ord_2(\frac{a}{b})$ voor elke c. Met deze functie kunnen we nu de 2-adische norm op $\mathbb{Q}$ definiëren.

Definitie 5.3. *Definieer $|| \cdot ||_2 : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ met:*

$$||x||_2 = \begin{cases} (\frac{1}{2})^{ord_2(x)} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Dit noemen we de 2-adische norm op $\mathbb{Q}$.

Intuïtief kunnen we dit zien als hoe meer een getal deelbaar is door 2, hoe kleiner onder de norm. Voordat we het een norm mogen noemen moeten we eerst aantonen dat het ook echt een norm is. Echter is het niet zomaar een norm, maar een niet-archimedische norm.

Stelling 5.4. *De 2-adische norm op $\mathbb{Q}$ is een niet-archimedische norm.*

Bewijs. 1) Uit de definitie volgt dat $||0||_2 = 0$. Stel nu dat $||x||_2 = 0$. Dan zou gelden dat $(\frac{1}{2})^{ord_2(x)} = 0$ of $x = 0$. We concluderen dat $x = 0$.
2) Er geldt:
$||x||_2 \cdot ||y||_2 = (\frac{1}{2})^{ord_2(x)} \cdot (\frac{1}{2})^{ord_2(y)} = (\frac{1}{2})^{ord_2(x)+ord_2(y)} = (\frac{1}{2})^{ord_2(xy)} = ||xy||_2$
3) Neem $x = \frac{a}{b}$ en $y = \frac{c}{d}$. We weten dat $||x + y||_2 = (\frac{1}{2})^{ord_2(x+y)}$. Er geldt dat $ord_2(x + y) = ord_2(\frac{ad+bc}{bd}) = ord_2(ad + bc) - ord_2(bd) = ord_2(ad + bc) - ord_2(b) - ord_2(d)$. Ook weten we dat als $2^k|ad$ en $2^l|bc$, dan $2^{min(k,l)}|ad+bc$. Hieruit volgt dat $ord_2(ad+bc) \geq min(ord_2(ad), ord_2(bc))$. Als we nu alles bij elkaar voegen krijgen we:
$ord_2(x + y) \geq min(ord_2(ad), ord_2(bc)) - ord_2(b) - ord_2(d) = min(ord_2(a) + ord_2(d), ord_2(b) + ord_2(c)) - ord_2(b) - ord_2(d) = min(ord_2(a) - ord_2(b), ord_2(c) - ord_2(d)) = min(ord_2(x), ord_2(y))$
We concluderen dat:
$||x + y||_2 = (\frac{1}{2})^{ord_2(x+y)} \leq (\frac{1}{2})^{min(ord_2(x),ord_2(y))} = max((\frac{1}{2})^{ord_2(x)}, (\frac{1}{2})^{ord_2(y)}) = max(||x||_2, ||y||_2)$. □

We hebben nu dus een niet-archimedische norm met de eigenschap $||2||_2 = (\frac{1}{2})^{ord_2(2)} = \frac{1}{2} < 1$. Maar de norm is alleen nog gedefinieerd op $\mathbb{Q}$ en niet op heel $\mathbb{R}$. Om te bewijzen dat zo'n extensie bestaat gaan we 2-adische getallen gebruiken.

Definitie 5.5. *Neem V de verzameling van Cauchyrijen met betrekking tot de 2-adische norm op $\mathbb{Q}$. Oftewel neem rijen van rationale getallen $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ waarbij: $\forall \epsilon > 0\ \exists N$ zodat $\forall i, j \geq N$ geldt dat $||a_i - a_j||_2 < \epsilon$. Noem $\{a_i\}, \{b_i\} \in V$ equivalent ($\{a_i\} \sim \{b_i\}$) als $\lim_{i\to\infty} ||a_i - b_i||_2 = 0$. Dit definieert een equivalentierelatie op V. Definieer $\mathbb{Q}_2$ als de verzameling equivalentieklassen van V. Dit noemen we ook wel de 2-adische getallen.*

Op dezelfde manier kun je ook $\mathbb{R}$ construeren. Als je de verzameling van Cauchyrijen in $\mathbb{Q}$ met betrekking tot de euclidische norm neemt dan is de verzameling van equivalentieklasse met de euclidische norm equivalent aan $\mathbb{R}$. Maar met de 2-adische norm krijgen we dus de 2-adische getallen. Nu zullen we gaan aantonen dat de 2-adische getallen een lichaam vormen. Hiervoor hebben we eerst een kort lemma nodig.

Lemma 5.6. *Neem $\{a_i\} \in V$. Dan geldt dat $\lim_{i\to\infty} ||a_i||_2$ altijd bestaat.*

Bewijs. Stel $\{a_i\}$ is equivalent met de constante rij $\{0\}$. Dan $\lim_{i\to\infty} ||a_i||_2 = 0$. Neem dus aan dat $\{a_i\}$ niet equivalent is met $\{0\}$. Dan bestaat er een $\epsilon > 0$ zodat voor elke N een $i_N > N$ bestaat met $||a_{i_N}||_2 > \epsilon$. Neem nu N groot genoeg zodat $\forall i, j > N$ geldt dat $||a_i - a_j||_2 < \epsilon$ en dus ook $||a_i - a_{i_N}||_2 < \epsilon$. We krijgen:
$||a_i - a_{i_N}||_2 \leq max(||a_i||_2, ||a_{i_N}||_2) > \epsilon$ (omdat $||a_{i_N}||_2 > \epsilon$)
Dus moet er gelden dat $||a_i - a_{i_N}||_2 < max(||a_i||_2, ||a_{i_N}||_2)$ en Lemma 2.2 vertelt ons dan dat $||a_i||_2 = ||a_{i_N}||_2$. Dit geldt dus voor alle $i > N$. Dus $\lim_{i\to\infty} ||a_i||_2 = ||a_{i_N}||_2$. □

Nu gaan we optelling en vermenigvuldiging op $\mathbb{Q}_2$ definiëren. Neem twee 2-adische getallen $a, b \in \mathbb{Q}_2$. Kies twee representanten $\{a_i\}, \{b_i\}$. We definiëren dan $a + b$ als de equivalentieklasse van de rij $\{a_i + b_i\}$. We moeten nog aantonen dat $a + b$ niet afhangt van de keuze van representanten. Dus neem de representanten $\{a'_i\}$ en $\{b'_i\}$. Dan geldt dat $\lim_{i\to\infty} ||(a_i + b_i) - (a'_i + b'_i)||_2 \leq \lim_{i\to\infty} max(||a_i - a'_i||_2, ||b_i - b'_i||_2) = 0$. En dus volgt dat $\{a_i + b_i\} \sim \{a'_i + b'_i\}$.
Definieer ook $a \cdot b$ als de equivalentieklasse van de rij $\{a_i \cdot b_i\}$. Neem $\{a'_i\}$ en $\{b'_i\}$ andere representanten. Dan geldt dat:
$\lim_{i\to\infty} ||(a_i b_i) - (a'_i b'_i)||_2 = \lim_{i\to\infty} ||(a_i b_i) - a_i b'_i + a_i b'_i - (a'_i b'_i)||_2 = \lim_{i\to\infty} ||a_i(b_i - b'_i) + b'_i(a_i - a'_i)||_2 \leq$
$\lim_{i\to\infty} max(||a_i||_2 ||b_i - b'_i||_2, ||b'_i||_2 ||a_i - a'_i||_2) = 0$
Dit laatste volgt uit Lemma 5.6 aangezien $\lim_{i\to\infty} ||a_i||_2$ altijd bestaat en $\lim_{i\to\infty} ||a_i - a'_i||_2 = 0$. Hetzelfde geldt voor b_i. We concluderen dus dat vermenigvuldiging ook niet afhangt van de keuze van de representanten. Deze optelling en vermenigvuldiging voldoen aan de eigenschappen van een lichaam.

Stelling 5.7. *$\mathbb{Q}_2$ is een lichaam.*

Bewijs. Definieer het 0 element als de constante rij $\{0\}$ en het 1 element als de constante rij $\{1\}$. Het is dan duidelijk dat $\mathbb{Q}_2$ met optelling een abelse groep vormt. De additieve inverse van a is gewoon $-a$ waarbij als $\{a_i\}$ een representant is van a dan is $-a$ de equivalentieklasse van de rij $\{-a_i\}$. Natuurlijk als $\{a_i\} \sim \{a'_i\}$ dan $\{-a_i\} \sim \{-a'_i\}$. We krijgen ook dat $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ voor elke $a \in \mathbb{Q}_2$. Ook associativiteit, commutativiteit en distributiviteit volgen direct uit de eigenschappen van $\mathbb{Q}$ en het feit dat we al bewezen hebben dat optelling en vermenigvuldiging in $\mathbb{Q}_2$ niet afhangen van de keuze van representanten.

Voor de multiplicatieve inverse moeten we uitkijken aangezien een $a \in \mathbb{Q}_2$ met $a \neq 0$ een representant $\{a_i\}$ kan hebben waarbij $a_j = 0$ voor een j. Dit zorgt ervoor dat de rij $\{\frac{1}{a_i}\}$ niet gedefinieerd is. Om dit op te lossen vervangen we alle termen $a_j = 0$ met 2^j en noemen deze nieuwe rij $\{b_i\}$. We krijgen dan dat $\lim_{i\to\infty} ||a_i - b_i||_2 = 0$ en dus dat $\{a_i\} \sim \{b_i\}$ waarbij $\{b_i\}$ geen termen heeft die 0 zijn. Dit komt omdat $\lim_{j\to\infty} ||0 - 2^j||_2 = \lim_{j\to\infty} (\frac{1}{2})^j = 0$ en de rest van de termen zijn identiek dus gaat de limiet naar 0. Dus voor elke $a \in \mathbb{Q}_2$ met $a \neq 0$ bestaat er een representant $\{a_i\}$ die geen termen heeft die 0 zijn. Dus is a^{-1} de equivalentieklasse van $\{\frac{1}{a_i}\}$. Nu moeten we nog bewijzen dat dit niet afhangt van de keuze van $\{a_i\}$. Dus stel $\{a_i\} \sim \{a'_i\}$ en ze hebben beide geen termen die 0 zijn. Neem nu de rijen $\{\frac{1}{a_i}\}$ en $\{\frac{1}{a'_i}\}$. Dan geldt dat:

$$\lim_{i\to\infty} ||\frac{1}{a_i} - \frac{1}{a'_i}||_2 = \lim_{i\to\infty} ||\frac{a'_i - a_i}{a_i a'_i}||_2 = \lim_{i\to\infty} \frac{||a'_i - a_i||_2}{||a_i a'_i||_2} = 0$$

Dit volgt aangezien $\{a_i\}$ en $\{a'_i\}$ beide niet equivalent zijn met $\{0\}$ en dus is $\lim_{i\to\infty} ||a_i a'_i||_2 \neq 0$. We concluderen dat elke $a \in \mathbb{Q}_2$ een multiplicatieve inverse heeft en dus is $\mathbb{Q}_2$ een lichaam. □

We kunnen nu $\mathbb{Q}$ identificeren als een deellichaam van $\mathbb{Q}_2$ door de equivalentieklassen van constante Cauchyrijen te nemen. We kunnen de 2-adische norm nu uitbreiden naar de 2-adische getallen met de volgende definitie.

Definitie 5.8. *Definieer $||\cdot||_2 : \mathbb{Q}_2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ als $||a||_2 = \lim_{i\to\infty} ||a_i||_2$ waarbij $\{a_i\}$ een willekeurige representant is van a. Dit noemen we de 2-adische norm op $\mathbb{Q}_2$.*

Uit Lemma 5.6 volgt dat deze limiet altijd bestaat en de keuze van representant maakt wederom niet uit. Ook dat het nog steeds een niet-archimedische norm is volgt uit de al eerder bewezen eigenschappen van de 2-adische norm op $\mathbb{Q}$ en Lemma 5.6. Ook werkt deze norm hetzelfde op het deellichaam met alle constante Cauchyrijen als op $\mathbb{Q}$, daarom zien we het als een uitbreiding van de 2-adische norm. De volgende stap is om $\mathbb{Q}_2$ verder uit te breiden naar een nog groter lichaam en de 2-adische norm daarop te definiëren.

Neem K een eindige algebraïsche uitbreiding van een lichaam F. Dan is K een F-vectorruimte en kunnen we een basis kiezen voor K. Voor een $\alpha \in K$ nemen we de matrix A_α die de vermenigvuldiging met α definieert in het lichaam K ten opzichte van deze basis. Dan hebben we de volgende definitie.

Definitie 5.9. *Definieer de functie $\mathbb{N}_{K/F} : K \to F$ met $(\mathbb{N}_{K/F})(\alpha) = det(A_\alpha)$ waarbij A_α de vermenigvuldiging van α in K.*

Opmerking 5.10. *Stel $[K : F] = n$. Dan hebben we de volgende eigenschappen:*
1. Stel dat $\alpha \in F$. Dan geldt dat $(\mathbb{N}_{K/F})(\alpha) = det(A_\alpha) = \alpha^n$ aangezien
$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & .. & 0 \\ 0 & \alpha & .. & 0 \\ : & : & & : \\ 0 & 0 & .. & \alpha \end{pmatrix}$ *de $n \times n$ matrix is die de vermenigvuldiging met α in het lichaam K definieert.*
2. Neem $\alpha, \beta \in K$. Dan geldt dat:
$(\mathbb{N}_{K/F})(\alpha\beta) = det(A_{\alpha\beta}) = det(A_\alpha \cdot A_\beta) = det(A_\alpha)det(A_\beta) = (\mathbb{N}_{K/F})(\alpha)(\mathbb{N}_{K/F})(\beta)$
Oftewel de functie is multiplicatief.
3. Neem $\alpha \in K$. Dan geldt dat $\mathbb{N}_{K/F}(\alpha) = (\mathbb{N}_{F(\alpha)/F}(\alpha))^{[K:F(\alpha)]}$. Ten eerste weten we natuurlijk dat $F(\alpha) \subset K$. Noem dan A_α de matrix voor vermenigvuldiging van α in K en B_α de vermenigvuldiging van α in $F(\alpha)$. Dan krijgen we de blokmatrix:
$A_\alpha = \begin{pmatrix} B_\alpha & 0 & .. & 0 \\ 0 & B_\alpha & .. & 0 \\ : & : & & : \\ 0 & 0 & .. & B_\alpha \end{pmatrix}$ *waarbij de orde van de blokmatrix gelijk is aan $[K : F(\alpha)]$*
Hieruit volgt dat $\mathbb{N}_{K/F}(\alpha) = det(A_\alpha) = det(B_\alpha)^{[K:F(\alpha)]} = (\mathbb{N}_{F(\alpha)/F}(\alpha))^{[K:F(\alpha)]}$

Met deze functie kunnen we de 2-adische norm op elke eindige algebraïsche uitbreiding van $\mathbb{Q}_2$ definiëren.

Definitie 5.11. *Neem K een eindige algebraïsche uitbreiding van $\mathbb{Q}_2$ en stel $[K : \mathbb{Q}_2] = n$. Definieer dan de extensie van de 2-adische norm naar K als $||.||_2 : K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ met:*
$||\alpha||_2 = (||(\mathbb{N}_{K/\mathbb{Q}_2})(\alpha)||_2)^{\frac{1}{n}}$
waarbij we rechts van de vergelijking met $||.||_2$ de 2-adische norm op $\mathbb{Q}_2$ bedoelen.

Hier is $(\mathbb{N}_{K/\mathbb{Q}_2})(\alpha) \in \mathbb{Q}_2$ dus is dit goed gedefinieerd. Ook is het een extensie aangezien uit Opmerking 5.10 volgt dat voor $\alpha \in \mathbb{Q}_2$ geldt $||\alpha||_2 = (||\alpha^n||_2)^{\frac{1}{n}} = ||\alpha||_2$. Nu willen we aantonen dat dit nog steeds een niet-archimedische norm is.

Stelling 5.12. *De functie $||.||_2$ op K zoals in Definitie 5.11 is een niet-archimedische norm.*

Voor het bewijs zijn drie punten die bewezen moeten worden:
1. $||\alpha||_2 = 0 \iff \alpha = 0$
2. $||\alpha\beta||_2 = ||\alpha||_2||\beta||_2$
3. $||\alpha + \beta||_2 \leq max(||\alpha||_2, ||\beta||_2)$
Punt 3 is het lastigst en zullen wij niet behandelen. Het bewijs staat wel in het boek van Neal Koblitz [3]. De rest is vrij simpel:
1. $||\alpha||_2 = 0$ impliceert dat $(\mathbb{N}_{K/\mathbb{Q}_2})(\alpha) = det(A_\alpha) = 0$. Dit betekent dat α geen inverse heeft en dus moet $\alpha = 0$. En natuurlijk $||0||_2 = 0$.
2. $||\alpha\beta||_2 = (||(\mathbb{N}_{K/\mathbb{Q}_2})(\alpha\beta)||_2)^{\frac{1}{n}} = (||(\mathbb{N}_{K/\mathbb{Q}_2})(\alpha)||_2||(\mathbb{N}_{K/\mathbb{Q}_2})(\beta)||_2)^{\frac{1}{n}} = ||\alpha||_2||\beta||_2$

Aangezien de algebraïsche afsluiting $\overline{\mathbb{Q}_2}$ van $\mathbb{Q}_2$ de vereniging is van alle eindige algebraïsche uitbreidingen volgt dat er een extensie van de 2-adische norm bestaat op $\overline{\mathbb{Q}_2}$. We kunnen namelijk voor elk algebraïsch element α van $\mathbb{Q}_2$ een uitbreiding K kiezen met $\alpha \in K$ en dus is de norm gedefinieerd voor α. We moeten alleen nog wel aantonen dat de norm niet afhangt van de keuze van K.

Lemma 5.13. *Neem α een algebraïsch element van $\mathbb{Q}_2$ en K een uitbreiding met $[K : \mathbb{Q}_2] = n$ waarbij $\alpha \in K$. Dan is $||\alpha||_2 = (||(\mathbb{N}_{K/\mathbb{Q}_2})(\alpha)||_2)^{\frac{1}{n}}$ onafhankelijk van K.*

Bewijs. Neem K een willekeurige uitbreiding met $\alpha \in K$ en stel $[K : \mathbb{Q}_2] = n$. Dan volgt uit Opmerking 5.10 dat:

$$(||(\mathbb{N}_{K/\mathbb{Q}_2})(\alpha)||_2)^{\frac{1}{n}} = ||(\mathbb{N}_{\mathbb{Q}_2(\alpha)/\mathbb{Q}_2})(\alpha)||_2^{\frac{[K:\mathbb{Q}_2(\alpha)]}{[K:\mathbb{Q}_2]}} = (||(\mathbb{N}_{\mathbb{Q}_2(\alpha)/\mathbb{Q}_2})(\alpha)||_2)^{\frac{1}{[\mathbb{Q}_2(\alpha):\mathbb{Q}_2]}}$$

We concluderen dat het onafhankelijk is van K. □

Aangezien elk algebraïsch element van $\mathbb{Q}_2$ een unieke definitie onder de norm heeft concluderen we dat de norm ook op de algebraïsche afsluiting gedefinieerd kan worden. Nu zullen we met Zorn's Lemma gaan bewijzen dat $\overline{\mathbb{Q}_2}$ isomorf is met $\mathbb{C}$. Uit Zorn's Lemma volgt namelijk dat:

Stelling 5.14. *[4] Twee overaftelbare algebraïsch afgesloten lichamen F en F' zijn isomorf dan en slechts dan als $char(F) = char(F')$ en $|F| = |F'|$.*

Eerst moeten we bewijzen dat ze dezelfde kardinaliteit hebben.

Lemma 5.15. $|\mathbb{C}| = |\overline{\mathbb{Q}_2}|$

Bewijs. Een algebraïsche afsluiting van een oneindig lichaam heeft dezelfde kardinaliteit als het lichaam zelf. Dus $|\overline{\mathbb{Q}_2}| = |\mathbb{Q}_2|$. Neem V de verzameling Cauchyrijen in $\mathbb{Q}$ met betrekking tot de 2-adische norm. Dan is $\mathbb{Q}_2$ de verzameling van equivalentieklassen van V. Dus krijgen we $|\mathbb{Q}_2| \leq |V| \leq |\mathbb{Q}|^{\mathbb{N}} = |\mathbb{C}|$.
Nu zullen we bewijzen dat ook $|\mathbb{Q}_2| \geq |\mathbb{C}|$. Neem de verzameling F van functies $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$. Definieer dan voor elke $f \in F$ de Cauchyrij $\{a(f)_n\} \in V$ met:

$$a(f)_n = \sum_{i=1}^{n} f(i) \cdot 2^i$$

Dit zijn Cauchyrijen:
Kies een $N \in \mathbb{N}$ en stel $k, l > N$ met $k > l$. Dan geldt:

$$||a(f)_k - a(f)_l||2 = ||\sum_{i=l+1}^{k} f(i)2^i||_2 \leq ||2^{l+1}|| = (\tfrac{1}{2})^{l+1}$$

Dit volgt aangezien $ord_2(\sum_{i=l+1}^{k} 2^i) = 2^{l+1}$ en $||2^m||_2 > ||2^{m+1}||_2$ voor elke m. Voor een $\epsilon > 0$ kunnen we altijd N groot genoeg kiezen zodat $(\frac{1}{2})^{l+1} < \epsilon$ en dus is het een Cauchyrij.

Ook geldt er dat als $f \neq g$ voor $f, g \in F$ dan is $\{a(f)\}$ niet equivalent met $\{a(g)\}$. Neem n_0 de kleinste n waarvoor f en g niet hetzelfde zijn. Dan geldt :

$$\lim_{n\to\infty} ||a(f)_i - a(g)_i||_2 = \lim_{n\to\infty} ||\sum_{i=1}^{n}(f(i) - g(i))2^i||_2 = \lim_{n\to\infty} ||2^{n_0} + \sum_{i=n_0+1}^{n}(f(i) - g(i))2^i||_2 = \lim_{n\to\infty} (\tfrac{1}{2})^{n_0} \neq 0$$

Dus bestaat er voor elk element in F een unieke equivalentieklassen in $\mathbb{Q}_2$. We concluderen dat
$|\mathbb{Q}_2| \geq |F| = |\{0, 1\}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{C}|$. Het lemma is bewezen. □

Nu kunnen we dus bewijzen dat:

Stelling 5.16. $\overline{\mathbb{Q}_2}$ *is als lichaam isomorf met* $\mathbb{C}$.

Bewijs. We weten dat net zoals voor $\mathbb{C}$ geldt dat $\overline{\mathbb{Q}_2}$ algebraïsch afgesloten zijn en $char(\overline{\mathbb{Q}_2}) = 0$. Ook de kardinaliteit is hetzelfde. Dus volgt uit Stelling 5.14 dat $\overline{\mathbb{Q}_2}$ als lichaam isomorf is met $\mathbb{C}$. $\square$

We zijn eindelijk klaar voor de stelling waar het allemaal om draait.

Stelling 5.17. *Er bestaat een niet-archimedische norm* $||.||$ *op* $\mathbb{R}$ *met* $||2|| < 1$.

Bewijs. We weten dat er een ringisomorfisme $\phi : \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{Q}_2}$ bestaat. Ook geldt dat er de functie $||.||_2 : \overline{\mathbb{Q}_2} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ bestaat die een niet-archimedische norm op $\mathbb{Q}_2$ is. Definieer dan $||.|| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ met $||z|| = ||\phi(z)||_2$. Omdat ϕ een ringisomorfisme is volgt dat dit een niet-archimedische norm op $\mathbb{C}$ definieert aangezien:
1. Als $||z|| = 0$ dan moet $\phi(z) = 0$ en dus $z = 0$.
2. Er geldt dat $||zw|| = ||\phi(zw)||_2 = ||\phi(z)\phi(w)||_2 = ||z||||w||$.
3. $||z + w|| = ||\phi(z + w)||_2 = ||\phi(z) + \phi(w)||_2 \leq max(||z||, ||w||)$.
Ook geldt dat $||2|| = ||\phi(2)||_2 = ||\phi(1) + \phi(1)||_2 = ||2||_2 < 1$. Als we de restrictie tot $\mathbb{R}$ van deze functie nemen is de stelling bewezen. $\square$

6 Andere veelhoeken

Nu zullen we kijken wat de gevolgen zijn van de stelling van Monsky en ook kijken naar de spectra van andere veelhoeken. Als er in dit hoofdstuk geen referentie wordt gegeven dan zijn de resultaten algemeen bekend en dus is er niet een directe bron om naar te verwijzen. Met de stelling van Monsky en affine transformaties in het vlak kunnen we het spectrum van veel vierhoeken al bepalen. Eerst nog even de definitie van een affine transformatie in het vlak.

Definitie 6.1. *Een affine transformatie in het vlak is een functie* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *met:*
$f(x) = Mx + b$
waarbij M *een inverteerbare* 2×2 *matrix en* $b \in \mathbb{R}^2$*.*

Een van de hoofdeigenschappen van affine transformaties is dat het twee parallelle lijnen afbeeld naar twee parallelle lijnen. Dit betekent dus ook dat als twee lijnen elkaar snijden, een affine transformatie deze lijnen afbeeld naar twee lijnen die elkaar snijden. Als we dus een veelhoek hebben met n hoekpunten die onderverdeeld is in m driehoeken, dan zal een affine transformatie dit sturen naar een veelhoek met n hoekpunten die onderverdeeld is in m driehoeken. Hier bovenop geldt ook dat verhoudingen tussen oppervlaktes behouden worden onder affine transformaties.

Lemma 6.2. *Neem een affine transformatie* f*. Dan bestaat er een* $\lambda \in \mathbb{R}$ *waarbij voor elke driehoek* ΔABC *met oppervlakte* O *geldt dat de driehoek* $\Delta f(A)f(B)f(C)$ *een oppervlakte heeft van* $\lambda \cdot O$*.*

Bewijs. We weten dat een translatie geen effect heeft op de oppervlakte van een driehoek. Dus neem $f = Mx$ met $M = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}$ en $c_1c_4 - c_2c_3 \neq 0$. Neem $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2)$ en $C = (x_3, y_3)$. Er geldt dan dat $O = \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$. We krijgen dat $f(A) = (c_1x_1 + c_2y_1, c_3x_1 + c_4y_1)$, $f(B) = (c_1x_2 + c_2y_2, c_3x_2 + c_4y_2)$ en $f(C) = (c_1x_3 + c_2y_3, c_3x_3 + c_4y_3)$. De oppervlakte van deze driehoek wordt dan:
$\frac{1}{2}|(c_1x_1+c_2y_1)((c_3x_2+c_4y_2)-(c_3x_3+c_4y_3))+(c_1x_2+c_2y_2)((c_3x_3+c_4y_3)-(c_3x_1+c_4y_1))+(c_1x_3+c_2y_3)((c_3x_1+c_4y_1)-(c_3x_2+c_4y_2))| =$
$\frac{1}{2}|c_1c_4(x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2))+c_2c_3(x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2))| = |c_1c_4-c_2c_3|\cdot O = det(M) \cdot O$.
Dit is dus onafhankelijk van de keuze van ΔABC en dus $\lambda = det(M)$ voor elke driehoek. □

Als we nu dus een veelhoek nemen met een m-equidissectie, dan zal een affine transformatie dit afbeelden naar een veelhoek met een m-equidissectie!

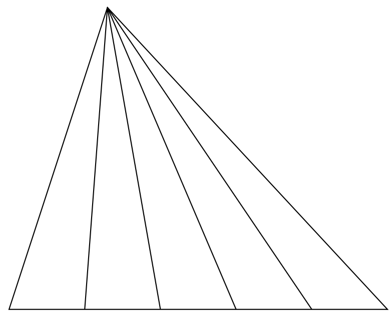
Stelling 6.3. *Neem* P *en* P' *twee veelhoeken en stel dat er een affine transformatie* ϕ *bestaat met* $\phi(P) = P'$*. Dan zijn de spectra van beide veelhoeken hetzelfde, oftewel* $S(P) = S(P')$*.*

Bewijs. Stel dat P een m-equidissectie heeft. Door ϕ toe te passen op de equidissectie krijgen we een m-equidissectie van P'. Aangezien elke affine transformatie een inverse heeft geldt dus ook dat als P' een m-equidissectie heeft dat P dat ook heeft. We concluderen dat $S(P) = S(P')$. □

Dus geldt er dat alle veelhoeken die gelijk zijn aan het beeld van het vierkant onder een affine transformatie als spectrum de even getallen hebben. Dit geldt dus bijvoorbeeld voor alle rechthoeken en parallellogrammen! Hoe zit het met driehoeken zelf?

Stelling 6.4. *Voor elke driehoek* T *geldt dat* $S(T) = \mathbb{Z}_{\geq 1}$*.*

Bewijs. Neem een driehoek T. Dan bestaat er een affine transformatie ϕ zodat voor $\phi(T)$ geldt dat de hoekpunten gelijk zijn aan $(0, 0)$, $(1, 0)$ en (x, h) voor een $x \in \mathbb{Z}$ en $h \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. We krijgen dan dat de oppervlakte gelijk is aan $\frac{h}{2}$. Voor een m-equidissectie van $\phi(T)$ neem de lijnstukken tussen de punten (x, h) en $(\frac{k}{m}, 0)$ voor elke $1 \leq k \leq m$ (zie Figuur 12 voor $m = 5$). Dan hebben we T opgedeeld in m driehoeken met oppervlakte $\frac{h}{2} \cdot \frac{1}{m} = \frac{h}{2m}$. We concluderen dat er voor elke m een m-equidissectie van T bestaat. □



Figuur 12: Een 5-equidissectie van een driehoek.

Driehoeken zijn dus niet erg interessant. Wel heeft Stelling 6.4 een interessant gevolg.

Gevolg 6.5. *Neem P een veelhoek. Als $m \in S(P)$ dan $km \in S(P)$ voor elke $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.*

Bewijs. Stel we hebben een m-equidissectie van P. Voor elke driehoek in deze equidissectie geldt dat er een k-equidissectie van de driehoek bestaat. Al deze equidissecties van de driehoeken hebben driehoeken erin met dezelfde oppervlakte. We concluderen dat er een km-equidissectie van P bestaat. □

Voor veelhoeken met meer dan 5 hoeken kwam Elaine Kasimatis in 1989 met een belangrijke stelling.

Stelling 6.6. *[5] Neem $n \geq 5$. Een regelmatige n-hoek heeft een m-equidissectie dan en slechts dan als m een veelvoud is van n.*

Dit geldt dus niet alleen voor de regelmatige n-hoeken maar alles wat daar affien equivalent aan is. Het bewijs voor deze stelling heeft dezelfde structuur als dat van Monsky, alleen dan een stuk uitgebreider en toegepast op andere veelhoeken. Eerst een combinatorisch argument met versies van Sperner's Lemma, dan het vlak opdelen met behulp van een p-adische norm en een combinatie van alle eigenschappen geeft het resultaat van de stelling.

Een ander groot resultaat komt van dezelfde persoon waar we mee waren begonnen, Paul Monsky.

Stelling 6.7. *[6] Neem P een puntsymmetrische veelhoek. Dan bevat $S(P)$ geen oneven getallen. (Monsky veelhoek)*

Het bewijs voor deze stelling neemt een heel andere invalshoek. Vooral algebraïsche en topologische argumenten waar ik eerlijk gezegd vrij weinig van volg, maar ik kon het niet uit de thesis halen aangezien het zo'n groot resultaat is.
Tenslotte wil ik eindigen met mijn favoriete onbeantwoorde vraag:

Neem het trapezium met hoekpunten $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ en $(\sqrt{2}, 1)$. Is het spectrum van T leeg?

Er zijn namelijk veelhoeken waarvoor bewezen is dat er geen enkele equidissectie van bestaat! Alleen over deze veelhoek weten we dus eigenlijk nog helemaal niks. Ik hoop dat ik ooit het antwoord zal weten.

Referenties

[1] Paul Monsky. „On dividing a square into triangles". In: *Amer. Math. Monthly* 77 (1970), p. 161–164. ISSN: 0002-9890. DOI: 10.2307/2317329. URL: https://doi.org/10.2307/2317329.

[2] Jesus A. De Loera, Elisha Peterson en Francis Edward Su. „A polytopal generalization of Sperner's lemma". In: *J. Combin. Theory Ser. A* 100.1 (2002), p. 1–26. ISSN: 0097-3165. DOI: 10.1006/jcta.2002.3274. URL: https://doi.org/10.1006/jcta.2002.3274.

[3] Neal Koblitz. *p-adic Numbers, p-adic Analysis, and Zeta-Functions*. 2de ed. Graduate Texts in Mathematics. New York NY: Springer, 1984. ISBN: 978-0-387-96017-3. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1112-9.

[4] Keith Conrad. „ZORN'S LEMMA AND SOME APPLICATIONS, II". In: 2007. URL: https://www.semanticscholar.org/paper/ZORN%E2%80%99S-LEMMA-AND-SOME-APPLICATIONS%2C-II-Conrad/a1206f2f2c52b1ab6312fa89f538c3f25f814275#paper-header.

[5] E. A. Kasimatis. „Dissections of regular polygons into triangles of equal areas". In: *Discrete Comput. Geom.* 4.4 (1989), p. 375–381. ISSN: 0179-5376. DOI: 10.1007/BF02187738. URL: https://doi.org/10.1007/BF02187738.

[6] Paul Monsky. „A conjecture of Stein on plane dissections". In: *Math. Z.* 205.4 (1990), p. 583–592. ISSN: 0025-5874. DOI: 10.1007/BF02571264. URL: https://doi.org/10.1007/BF02571264.