Brauer karakters
Bachelorscriptie wiskunde (WISB 399)
7,5 ECTS

Universiteit Utrecht

Maarten van Dijk,
6514340,

onder begeleiding van Dr. Gunther Cornelissen.

26 januari 2022

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 1

Introductie

Representatietheorie geeft een mooie connectie tussen abstracte algebraïsche structuren, zoals groepen, en lineaire algebra. We kunnen namelijk elementen van groepen naar inverteerbare matrices sturen met reële of complexe coëfficiënten, zodanig dat de groepsstructuur behouden blijft. Hierdoor kunnen problemen uit de abstracte algebra vertaald worden in problemen in de lineaire algebra. De belangrijkste informatie over zo'n representatie is bevat in het karakter van een representatie. Hierdoor is het bestuderen van karakters ook fascinerend. Richard Brauer bestudeerde als een van de eerste wat er gebeurt als de matrix niet reële of complexe coëfficiënten zou hebben maar coëfficiënten van lichamen van positieve karakteristiek, een modulaire representatie. Brauer kwam erachter dat de theorie die was ontwikkeld niet één-op-één toepasbaar was voor modulaire representaties. Brauer ontwikkelde daarom zelf de zogenaamde modulaire representatietheorie. Een modulaire representatie heeft ook een eigen karakter, dit karakter noemen wij het Brauer karakter. Het doel van deze scriptie is om de theorie van karakters van modulaire representaties te begrijpen. Om dit te doen zullen we eerst in het kort de theorie van representaties over het lichaam $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$ en haar karakters bespreken. We zullen hier in het bijzonder een aantal eigenschappen van representaties en karakters geven. Vervolgens gaan we het over de karakters van modulaire representaties hebben, de zogenoemde Brauer karakters. We zullen eerst een motivatie geven waarom deze theorie op een andere manier geconstrueerd moet worden dan de theorie van normale karakters. Vervolgens zullen we de opzet definiëren om daarna de Brauer karakters formeel te definiëren. Daarna zullen we de connectie laten zien tussen de normale karakters en Brauer karakters. Met deze connectie gaan we blokken introduceren waarop we een orthogonaliteitsrelatie kunnen definiëren. In deze hoofdstukken zullen we ook een aantal voorbeelden geven bij definities, lemma's en stellingen zodat deze duidelijker worden. In de laatste twee hoofdstukken zullen we van een aantal groepen de Brauer karaktertabel maken en zullen we laten zien dat modulaire representaties voorkomen in de studie van hyperbolische variëteiten. Dan hebben we ook nog een appendix. Wij zullen een aantal resultaten gebruiken die we niet bewijzen maar wel essentieel zijn voor sommige bewijzen. Deze resultaten zullen in de appendix gegeven worden en we zullen in de tekst ook verwijzen als we zo'n resultaat gebruiken. Een belangrijke notatiekwestie is dat wij D_n gebruiken voor de dihedrale groep van orde $2n$. Ook zullen we de orde van een element g van een groep noteren met $o(g)$.

Hoofdstuk 2

Representaties en karakters

In dit hoofdstuk gaan we eerst in het kort de theorie van representaties en karakters bespreken. We beginnen met het introduceren van representaties en zullen een paar voorbeelden geven. Vervolgens zullen we definiëren wat een $F[G]$-module is en tevens zullen we hier de stelling van Maschke bespreken. De theorie die na deze stelling wordt besproken, komt voort uit deze stelling. Als laatst zullen we karakters definiëren en een aantal eigenschappen & relaties bespreken. In dit hoofdstuk worden er geen bewijzen gegeven omdat dit niet het hoofdonderwerp is van deze scriptie. Als men geïnteresseerd is in de bewijzen, wordt men doorverwezen naar het boek van Gordon James & Martin Liebeck [9].

2.1 Representatie van een groep

Definitie 2.1.1 ([9], 3.1)**.** Een *representatie* van een groep G over een lichaam F is een homomorfisme ρ van G naar $\mathrm{GL}(n, F)$ voor een positief geheel getal n. Dus er moet gelden $\rho(gh) = \rho(g)\rho(h)$ voor alle $g, h \in G$. De *graad* van ρ is gelijk aan n.

Doordat een representatie een homomorfisme is, moet gelden $\rho(e) = Id_n$, de $n \times n$ identiteitsmatrix waarbij n de graad is van ρ en e het identiteitselement is van de groep G. Om te bewijzen dat een functie een groepshomomorfisme is, is het genoeg om te bewijzen dat de groepsstructuur bewaard wordt onder de functie ρ.

Voorbeeld 2.1.2. *We geven hier drie voorbeelden van representaties.*

1. *Voor elke groep G en elk lichaam F hebben we de representatie $\rho : G \to \mathrm{GL}(n, F)$ gegeven door $\rho(g) = Id_n$ voor alle $g \in G$.*

2. *Beschouw de functie $\rho : G \to \mathrm{GL}(2, F)$ met $G = \mathbb{Z}_3$ en $F = \mathbb{R}$ gegeven door*

$$1 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

De groepsstructuur van $\mathbb{Z}_3$ is $1^3 = 0$. Dus we moeten controleren of $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Er geldt

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dus de functie ρ behoudt de groepsstructuur en is dus een homomorfisme en is dus een representatie.

3. *De quaternionen groep* $Q_8 = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ *heeft een 2-dimensionale representatie* ρ *gegeven door*

$$-1 \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \; i \mapsto \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \; j \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \; k \mapsto \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

   Er kan gecontroleerd worden dat ρ *aan de groepsstructuur voldoet d.w.z. de relaties tussen de voortbrengers van de groep behoudt. Dus dat* $\rho(-1)^2 = Id_2$, $\rho(i)^2 = \rho(j)^2 = \rho(k)^2 = \rho(i)\rho(j)\rho(k) = \rho(-1)$.

Definitie 2.1.3 ([9], 3.3)**.** Laat $\rho : G \to \mathrm{GL}(n, F)$ en $\sigma : G \to \mathrm{GL}(m, F)$ representaties zijn van G over F. We zeggen dat ρ *equivalent* is aan σ als $n = m$ en als er een inverteerbare $n \times n$ matrix T bestaat zodanig dat $\sigma(g) = T^{-1}\rho(g)T$ voor alle $g \in G$.

2.2 $F[G]$-modules

Nu we weten wat representaties zijn gaan we $F[G]$-modules en $F[G]$-submodules introduceren. Deze begrippen zijn belangrijk om de stelling van Maschke te begrijpen.
Laat ρ een representatie zijn van een groep G over een lichaam F. Schrijf $V = F^n$, de vectorruimte van alle kolomvectoren $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)^T$ met $\mu_i \in F$. Voor alle $v \in V$ en $g \in G$ geldt dat $\rho(g)v$ weer een kolomvector is met elementen in F. Dit motiveert de volgende definitie.

Definitie 2.2.1 ([9], 4.2)**.** Laat V een vectorruimte zijn over een lichaam F en laat G een groep zijn. Dan is V een $F[G]$*-module* als er een vermenigvuldiging gv $(g \in G, v \in V)$ is gedefinieerd zodanig dat er aan de volgende condities wordt voldaan voor alle $u, v \in V, \mu \in F$ en $g, h \in G$.

1. $gv \in V$;
2. $(gh)v = g(hv)$;
3. $1v = v$;
4. $g(\mu v) = \mu(gv)$;
5. $g(u + v) = gu + gv$.

De definitie die hier besproken wordt, is een specifiek geval van de definitie van een module [[6], p.337]. Er is een natuurlijke connectie tussen $F[G]$-modules en representaties.

Stelling 2.2.2 ([9], 4.4 (1))**.** *Als* $\rho : G \to \mathrm{GL}(n, F)$ *een representatie is van* G *over* F *en* $V = F^n$*, dan wordt* V *een* $F[G]$*-module als we* $gv = \rho(g)v$ *definiëren.*

Voorbeeld 2.2.3 ([9], 4.5)**.** *Laat* $G = D_4 = \langle r, s \mid r^4 = s^2 = e, s^{-1}rs = r^{-1} \rangle$ *en laat* $\rho : G \to \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ *gegeven door* $r \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ *en* $s \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$*. Dan is* ρ *een representatie. Laat nu* $V = \mathbb{R}^2$ *en definieer* $gv = \rho(g)v$ *voor alle* $g \in G$ *en* $v \in V$*. Met deze vermenigvuldiging wordt* V *een* $F[G]$*-module. Neem bijvoorbeeld* $v = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ *en* $g = r$ *dan geldt*

$$gv = \rho(r)\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix} \in V.$$

Tevens geldt stelling 2.2.2 ook de andere kant op [[9], 4.4 (2)].

Voorbeeld 2.2.4. *Er bestaat altijd een triviale $F[G]$-module. Dit is de 1-dimensionale vectorruimte V over F zodanig dat $gv = v$ voor alle $v \in V$ en $g \in G$. De representatie ρ die bij deze triviale $F[G]$-module hoort is $\rho : G \to \mathrm{GL}(1, F)$ waarbij $\rho(g) = (1)$ voor alle $g \in G$.*

Definitie 2.2.5 ([9], 5.1)**.** Laat V een $F[G]$-module zijn. Een deelverzameling W van V is een $F[G]$-*submodule* van V als W een deelruimte is en als $gw \in W$ voor alle $w \in W$ en $g \in G$.

Dus een $F[G]$-submodule van V is een deelruimte die zelf ook een $F[G]$-module is.

Voorbeeld 2.2.6 ([9],5.2 (1))**.** *Een aantal voorbeelden van submodules zijn als volgt.*

1. *Als V een $F[G]$-module is dan zijn $\{0\}$, de 0-module, en V altijd $F[G]$-submodules van V. De 0-module wordt ook wel de triviale module genoemd. De triviale module moet niet verwart worden met de triviale $F[G]$-module, 2.2.4.*

2. *Beschouw $G = \mathbb{Z}$ en $V = \mathbb{C}^2$. Definieer $nv = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v$ met $n \in \mathbb{Z}$ en $v \in V$. Laat $W = Span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$. Duidelijk is dat W een deelruimte is van $\mathbb{C}^2$. Tevens geldt voor alle $w \in W$ en $g \in G$ dat $gw = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \in W$. Dus W is een $F[G]$-submodule van V.*

We hebben nu bijna alles om de Stelling van Maschke te introduceren. Er is nog een belangrijke definitie die ontbreekt.

Definitie 2.2.7 ([9], 5.3)**.** Een $F[G]$-module V noemen we *irreducibel* als V niet de nulruimte is en als V geen andere $F[G]$-submodules bevat dan $\{0\}$ en V. Als V wel een $F[G]$-submodule heeft die ongelijk is aan $\{0\}$ of V dan noemen we V *reducibel*.
Evenzo noemen we een representatie $\rho : G \to \mathrm{GL}(n, F)$ irreducibel als de $F[G]$-module zoals in stelling 2.2.2 irreducibel is en als de $F[G]$-module reducibel is dan noemen we de bijbehorende representatie ook reducibel.

Stelling 2.2.8 (Stelling van Maschke, [9], 8.1)**.** *Laat G een eindige groep zijn en laat F het lichaam $\mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$ zijn. Neem V een $F[G]$-module. Als U een $F[G]$-submodule is van V dan bestaat er een $F[G]$-submodule W van V zodanig dat $V = U \oplus W$.*

Definitie 2.2.9 ([9], 8.6)**.** Een $F[G]$-module V is *compleet reducibel* als $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_r$, waarbij elke U_i een irreducibele $F[G]$-submodule is van V.

Stelling 2.2.10 ([9], 8.7)**.** *Als G een eindige groep is en $F = \mathbb{R}$ of $F = \mathbb{C}$, dan is elke niet-nul $F[G]$-module compleet reducibel.*

Voor eindige groepen en modules over het lichaam $\mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$ geldt dat we elke $F[G]$-module kunnen opsplitsen in haar irreducibele submodules. In dat opzicht zijn de irreducibele modules de bouwstenen voor $F[G]$-modules. Vanuit de irreducibele $F[G]$-modules kunnen we dus elke andere module maken en andersom. Maar men kan zich afvragen hoeveel irreducibele $F[G]$-modules er zijn. Het volgende lemma en de stelling erna vertellen precies wat we moeten weten.

Lemma 2.2.11 ([9], 10.7)**.** *Als G een eindige groep is dan bestaan er een eindig aantal niet isomorfe irreducibele $\mathbb{C}[G]$-modules.*

Stelling 2.2.12 ([9], 11.12)**.** *Laat $V_1, V_2, \dots, V_n$ alle irreducibele $\mathbb{C}[G]$-modules zijn op isomorfie na dan geldt*

$$\sum_{i=1}^{n} (\dim V_i)^2 = |G|.$$

Voorbeeld 2.2.13. *We zullen hier een aantal voorbeelden geven hoe we stelling 2.2.12 kunnen gebruiken.*

1. *Als we de groep $G = \mathbb{Z}_3$ nemen dan weten we $|G| = 3$ dus we zien dat er drie 1-dimensionale $F[G]$-modules zijn.*

2. *Als we de groep $G = D_4$ beschouwen dan weten we $|G| = 8$ en dat betekent dat er drie mogelijkheden zijn. Namelijk alle V_i zijn 1-dimensionaal en dus zijn er acht irreducibele $F[G]$-modules. De tweede mogelijkheid is dat er twee 2-dimensionale $F[G]$-modules zijn en de derde mogelijkheid is dat er één 2-dimensionale $F[G]$-module is en vier 1-dimensionale $F[G]$-module, immers $2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 8$.*

3. *Als we $G = A_4$ nemen dan weten we $|G| = 12$ en zijn er vijf mogelijkheden. Namelijk twaalf 1-dimensionale $F[G]$-modules, drie 2-dimensionale $F[G]$-modules, twee 2-dimensionale en vier 1-dimensionale modules $F[G]$-modules, één 2-dimensionale en acht 1-dimensionale $F[G]$-modules of drie 1-dimensionale en één 3-dimensionale $F[G]$-modules.*

Nu ontstaat natuurlijk de vraag hoe we kunnen weten welke optie goed is. Dit zal snel duidelijk worden. Maar voordat we die vraag gaan beantwoorden gaan we karakters introduceren.

2.3 Karakters

Definitie 2.3.1 ([9], 13.3 & 13.4)**.** Laat V een $\mathbb{C}[G]$-module zijn met basis $\mathscr{B}$. Dan is het *karakter* van V is gegeven door de functie $\chi : G \to \mathbb{C}$ gedefinieerd door $\chi(g) = \mathrm{tr}[g]_{\mathscr{B}}$, het spoor van g ten opzichte van de basis $\mathscr{B}$. We zeggen dat χ een karakter is van een groep G als χ het karakter is van een $\mathbb{C}[G]$-module. Bovendien is χ een *irreducibel karakter* van G als χ het karakter is van een irreducibel $\mathbb{C}[G]$-module. Analoog hier aan is χ is een reducibel karakter van G als χ het karakter is van een reducibel $\mathbb{C}[G]$-module.

Als V een $\mathbb{C}[G]$-module is, dan kunnen we vanuit stelling 2.2.10 concluderen dat $V = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i^{m_i}$ waarbij V_i een irreducibel $\mathbb{C}[G]$-module is en m_i een geheel getal die de multipliciteit aangeeft. Dan geldt dat het karakter χ van V gegeven wordt door $\sum_{i=1}^{n} m_i \chi_i$ waarbij χ_i het karakter is van de $\mathbb{C}[G]$-module V_i. Als we een karakter χ hebben kunnen we zelfs de bijbehorende module construeren[14]. Dus het karakter van een module bevat veel informatie over de module zelf.

Voorbeeld 2.3.2. *Als we terugkijken naar voorbeeld 2.1.2 dan krijgen we de volgende karakters.*

1. *Voor elke groep is er de representatie $\rho : G \to \mathrm{GL}(n, F)$ gegeven door $\rho(g) = Id_n$ voor alle $g \in G$. Dus voor deze representatie hebben we $\chi(g) = n$ voor alle $g \in G$.*

2. *Voor de representatie van $G = \mathbb{Z}_3$ geldt $\chi(0) = 2$, $\chi(1) = -1$ en $\chi(2) = -1$.*

3. *Voor de representatie van $G = Q_8$ geldt $\chi(1) = 2, \chi(-1) = -2$ en $\chi(i) = \chi(-i) = \chi(j) = \chi(-j) = \chi(k) = \chi(-k) = 0$.*

4. *Ook hebben we in voorbeeld 2.2.4 gezien dat er altijd een triviale $F[G]$-module is. Het karakter van deze module noemen we het triviale karakter en voor dit karakter geldt $\chi(g) = 1$ voor alle $g \in G$.*

Een aantal eigenschappen van karakters worden gegeven in de volgende propositie.

Propositie 2.3.3 ([9], 13.5 & 13.9)**.** *1. Isomorfe $\mathbb{C}[G]$-modules hebben hetzelfde karakter;*

2. *Als x en y geconjugeerde elementen zijn van de groep G dan geldt $\chi(x) = \chi(y)$ voor alle karakters χ van G.*

Als χ het karakter is van de $\mathbb{C}[G]$-module V en $g \in G$ heeft orde m dan

3. *$\chi(1) = \dim V$ en we noemen $\chi(1)$ de graad van het karakter;*
4. *$\chi(g)$ is een som van m-de eenheidswortels;*
5. *$\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$.*

Met eigenschap 3 kunnen we stelling 2.2.12 herformuleren.

Stelling 2.3.4. *Laat $V_1, V_2, \ldots, V_n$ alle irreducibele $\mathbb{C}[G]$-modules zijn op isomorfie na en laat $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$ de karakters voortgebracht door $V_1, V_2, \ldots, V_n$ dan geldt*

$$\sum_{i=1}^{n} (\chi(1))^2 = |G|.$$

Definitie 2.3.5 ([9], 14.3)**.** Laat θ en ϕ functies van een groep G naar $\mathbb{C}$. Definieer $[\theta, \phi] = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \theta(g)\overline{\phi(g)}$.

Er kan worden gecontroleerd worden dat $[\theta, \phi]$ voldoet aan alle eisen van een inproduct. Dus $[.,.]$ is een inproduct op de vectorruimte van functies van G naar $\mathbb{C}$.
Met dit inproduct en met het feit dat karakters constant zijn op conjugatieklassen kunnen we een aantal eigenschappen afleiden voor het inproduct tussen karakters.

Lemma 2.3.6 ([9], 14.5)**.** *Neem aan dat G precies l conjugatieklassen heeft met representanten $g_1, g_2, \ldots, g_l$. Laat χ en ψ karakters zijn van G. Dan geldt*

1. *$[\chi, \psi] = [\psi, \chi] = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)\psi(g^{-1})$;*
2. *$[\chi, \psi] = \sum_{i=1}^{l} \frac{\chi(g_i)\overline{\psi(g)}}{|\boldsymbol{C}(g_i)|}$,*

waarbij $\boldsymbol{C}(g_i)$ de centralisator is van het element g_i, dus $\boldsymbol{C}(g_i) = \{x \in G \mid xg_i = g_i x\}$.

Stelling 2.3.7 ([9], 15.3)**.** *Het aantal irreducibele karakters van een groep G is gelijk aan het aantal conjugatieklassen van G.*

Voorbeeld 2.3.8. *Als we nu terugkijken naar voorbeeld 2.2.13 dan kunnen we het volgende concluderen.*

1. *Als $G = D_4$ dan weten we dat G precies vijf conjugatieklassen bevat. Dus er zijn ook vijf irreducibele $F[G]$-modules. Namelijk vier modules van dimensie 1 en één module van dimensie 2. Evenzo weten we nu dus dat er vier karakters zijn van graad 1 en één karakter van graad 2.*

2. *In het geval dat $G = A_4$ weten we nu dat er precies vier irreducibele $F[G]$-modules en karakters zijn. Dus er zijn drie 1-dimensionale irreducibele $F[G]$-modules en één 3-dimensionale $F[G]$-module. Evenzo weten we nu dus dat er drie karakters zijn van graad 1 en één karakter van graad 3.*

Definitie 2.3.9. Laat $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_l$ de irreducibele karakters zijn van G en $g_1, g_2, \dots, g_l$ representanten van de conjugatieklassen van G. De $l \times l$ matrix met op de i-de rij en j-de kolom het element $\chi_i(g_j)$ noemen we de *karaktertabel.*

Dus elke kolom geeft de waarde aan van verschillende irreducibele karakters op één bepaalde conjugatieklasse en elke rij geeft alle waardes aan van één irreducibel karakter over alle conjugatieklassen van de groep G. We noemen de matrix een karaktertabel maar in de praktijk zullen we geen matrix geven maar daadwerkelijk ook een tabel.

Voorbeeld 2.3.10. *Hier zijn een aantal voorbeelden van karaktertabellen.*

1. *De groep $G = \mathbb{Z}_4$ heeft 4 conjugatieklassen want de groep is abels. Hierdoor weten we dat alle irreducibele karakters graad 1 hebben. De karaktertabel is als volgt:*

	0	1	2	3
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	i	-1	$-i$
χ_3	1	-1	1	-1
χ_4	1	$-i$	-1	i

Over het algemeen geldt dat de karakters van $\mathbb{Z}_n$ gegeven worden door $\chi_{j+1}(g^k) = \omega^{jk}$ met $0 \leq j, k \leq n-1$ en waarbij $g \in \mathbb{Z}_n$ een generator is van de groep en ω een n-de eenheidswortel.

2. *De groep $G = A_4$ heeft 4 conjugatieklassen. Zoals we hebben gezien in voorbeeld 2.3.8 zijn er drie karakters van graad 1 en één karakter van graad 3. De karaktertabel is als volgt:*

	e	(12)(34)	(123)	(132)
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	ω	ω^2
χ_3	1	1	ω^2	ω
χ_4	3	-1	0	0

waarbij $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

3. *Beschouw de groep D_4 dan hebben we vijf conjugatieklassen met representanten e, r, r^2, s, rs. De orde van de groep is 8 en hieruit kunnen we concluderen dat er vier karakters zijn van graad 1 en een karakter van graad 2. De karaktertabel hiervan is*

	e	r	r^2	s	rs
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	-1	1	1	-1
χ_4	1	-1	1	-1	1
χ_5	2	0	-2	0	0

Voor de rijen en kolommen van de karaktertabel bestaan er zogenaamde orthogonaliteitsrelaties.

Stelling 2.3.11. *Laat* $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_l$ *de irreducibele karakters zijn van* G *en* $g_1, g_2, \ldots, g_l$ *representanten van de conjugatieklassen van* G*. Dan gelden de volgende twee relaties voor elke* $r, s \in \{1, 2, \ldots, l\}$.

1. *De rij orthogonaliteit:*
$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\chi_r(g_i)\overline{\chi_s(g_i)}}{|\boldsymbol{C}(g_i)|} = \delta_{rs}.$$

2. *De kolom orthogonaliteit:*
$$\sum_{i=1}^{k} \chi_i(g_r)\overline{\chi_i(g_s)} = \delta_{rs}|\boldsymbol{C}(g_r)|.$$

Bij de rij orthogonaliteit sommeren we over de verschillende representanten van de conjugatieklassen en bij de kolom orthogonaliteit sommeren we over de verschillende karakters. De lezer wordt aangemoedigd om deze relaties te controleren bij de voorbeelden van 2.3.10.

Hoofdstuk 3

Brauer karakter

In dit hoofdstuk gaan we de theorie van Brauer karakters bespreken. Dit zijn karakters van representaties over een lichaam van karakteristiek p. We zullen eerst een korte motivatie geven waarom deze theorie anders is dan de theorie van karakters zoals in het vorige hoofdstuk. Vervolgens zullen we de algemene opzet en Brauer karakters definiëren en een aantal eigenschappen geven van Brauer karakters. Daarna zullen we laten zien dat er een connectie is tussen de karakters van het vorige hoofdstuk en Brauer karakters. Als laatst gaan we het hebben over de zogenaamde p-blokken van een groep en een over een orthogonaliteitsrelatie van een p-blok. Als referentie hebben we voornamelijk hoofdstuk 15 van Isaacs gebruikt [[8], p.262-p.277].

3.1 De motivatie van Brauer karakters

Definitie 3.1.1. We noemen een karakter χ *gewoon* als we het hebben over F-waardige karakters, i.e. het spoor van de representatie over het lichaam F.

In het vorige hoofdstuk hebben we een deel besproken van gewone karakters. Het fundament van die theorie is de stelling van Maschke, 2.2.8. Maar die stelling beperkt zich tot de lichamen $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$. Dat heeft natuurlijk een reden. De stelling is niet van toepassing voor willekeurige lichamen. Neem bijvoorbeeld de groep $\mathbb{Z}_3$. De functie $\rho : G \to \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ gegeven door $1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ is een representatie, waarbij $\mathbb{F}_3$ het lichaam is met drie elementen. Immers geldt

$$\rho^3(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dus neem $V = \mathbb{F}_3^2$ en definieer $gv = \rho(g)v$. Nu is V een $\mathbb{F}_3[G]$-module vanuit stelling 2.2.2. Laat $W = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Duidelijk is dat W een deelruimte is van $\mathbb{F}_3$. Alle elementen van W kunnen geschreven worden als $\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$ met $\lambda \in \mathbb{F}_3$. Voor alle $w \in W$ en $g \in G$ geldt dat $gw = \begin{pmatrix} 1 & g \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \in W$. Dus W is een $\mathbb{F}_3[G]$-submodule van V. Maar er is geen deelruimte U zodanig dat $V = W \oplus U$. Als zo'n deelruimte U bestaat moet U opgespannen worden door een vector $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ met $a, b \in \mathbb{F}_3$ en waarbij $b \neq 0$. Dan moet gelden $gu \in U$ voor alle $u \in U$ en $g \in \mathbb{Z}_3$. Dus

$$\begin{pmatrix} 1 & g \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + gb \\ b \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

met $\mu \in \mathbb{F}_3$. Dus hieruit volgt dat $a + gb = \mu a$ en $b = \mu b$. Uit de laatste vergelijking volgt $\mu = 1$ maar dan volgt $a + gb = a$ voor alle $g \in G$. Dus $b = 0$. Maar dit geeft een tegenspraak want als $b = 0$ dan hebben we precies de deelruimte W. Dus er bestaat geen deelruimte U zodanig dat $V = W \oplus U$.
Dit laat dus zien dat Maschkes stelling niet van toepassing is op willekeurige lichamen. Maar doordat Masckes stelling aan de basis staat van de gewone karaktertheorie moeten we een nieuwe theorie ontwikkelen. Deze theorie gaan we hier bespreken en wordt modulaire representatietheorie genoemd (de gewone karaktertheorie werkt namelijk over elk lichaam van karakteristiek 0). Wij gaan hier voornamelijk focussen op de karakters van modulaire representaties.

3.2 De opzet en definitie van Brauer karakters

In dit hoofdstuk gaan we het Brauer karakter definiëren maar voordat we dat doen moeten we eerst de opzet definiëren. Gedurende dit hoofdstuk zal R de ring zijn van alle algebraïsche gehele getallen in $\mathbb{C}$ en we laten p een priem zijn. We gaan eerst een lichaam construeren van karakteristiek p. Kies een maximaal ideaal $M \supseteq pR$ (merk op dat deze M niet uniek is) van R en definieer nu $F = R/M$. Nu is F een lichaam [[6], p.254]. Laat π de natuurlijke homomorfisme zijn van R naar F. Merk op dat $\pi(p1) = \pi(p)\pi(1) = \pi(p) = 0$ dus we kunnen concluderen dat de karakteristiek van F gelijk is aan p, notatie char(F)=p. Als we het hebben over het lichaam F dan bedoelen we dus het hierboven geconstrueerde lichaam F.

Lemma 3.2.1 ([8], 15.1)**.** *Laat $U = \{\omega \in \mathbb{C} \mid \omega^m = 1$ voor een $m \in \mathbb{Z}$ met $p \nmid m\}$. Laat R, F en π zoals hierboven gedefinieerd. Dan*

(a) $U \subseteq R$;

(b) π beeldt U injectief af op $F^\times$;

(c) F is algebraïsch gesloten en algebraïsch over zijn priem deellichaam.

Bewijs. Voor $\omega \in U$ geldt dat ω een oplossing is van het polynoom $x^m - 1 = 0$. Doordat dit een monisch polynoom is met coëfficiënten in $\mathbb{Z}$ geldt dus dat ω een algebraïsch geheel getal is. Dus we kunnen concluderen dat $\omega \in R$ en dus $U \subseteq R$.
We gaan nu de injectiviteit bewijzen door te laten zien dat als $\alpha \in U \setminus \{1\}$ en $\pi(\alpha) = 1$ dat dan geldt dat we een tegenspraak krijgen. Laat dus $\alpha \in U \setminus \{1\}$. Dan geldt per definitie van U dat α een n-de eenheidswortel is voor een $n > 1$ waarvoor geldt $p \nmid n$. Hieruit volgt ([6], p.553):

$$1 + x + \cdots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1} = \prod_{i=1}^{n-1} (x - \alpha^i). \tag{3.1}$$

Laat nu $x = 1$ dan krijgen we vanuit de vergelijking dat $1 - \alpha$ een deler is van n in R. Als nu geldt dat $\pi(\alpha) = 1$ dan volgt hieruit dat $\pi(1 - \alpha) = \pi(1) - \pi(\alpha) = 1 - 1 = 0$ en dus $\pi(n) = 0$. Doordat we weten dat $\pi(p) = 0$, p en n copriem zijn en dat $F = R/M$ waarbij $M \supseteq pR$ geldt dus dat $1 \in M$. Anders kan $\pi(n)$ niet gelijk zijn aan 0. Uit al het voorgaande kunnen we dus concluderen dat $\pi(1) = 0$. Dit is een tegenspraak en dus kunnen we concluderen dat π U injectief afbeeldt op $F^\times$.
We gaan nu eerst het tweede deel van (c) bewijzen. Laat $\alpha \in F$ dan bestaat er een $a \in R$ waarvoor geldt dat $\alpha = \pi(a)$. Deze $a \in R$ bestaat omdat π de natuurlijke homomorfisme is van $R \to R/M = F$, dus de functie is surjectief. Per definitie geldt dan dat er een monisch polynoom

$f \in \mathbb{Z}[x]$ bestaat waarvoor geldt $f(a) = 0$ en f niet identiek 0 is. Laat $K \subseteq F$ het priem deellichaam zijn. Dan geldt $0 \neq f^\pi \in K[x]$, waarbij f^π gelijk is aan de polynoom waar de coëfficiënten afgebeeld zijn door π en er geldt $f^\pi(\alpha) = \pi(f(a)) = 0$. De conclusie hier is dus dat F algebraïsch is over K. Om het eerste deel te bewijzen laten we E een algebraïsche extensie zijn van F. Dan geldt $\pi(U) \subseteq F^\times \subseteq E^\times$. Als we nu laten zien dat ook geldt $E^\times \subseteq \pi(U)$ dan kunnen we concluderen dat $\pi(U) = F^\times$ en dus $F^\times$ is algebraïsch gesloten. Laat nu $\beta \in E^\times$ dan geldt door constructie dat β algebraïsch is over F en dus ook over zijn priem deellichaam K. Doordat we weten dat K een priem deellichaam is, geldt dat K eindig is en dus $K(\beta)$ is eindig lichaam. Dus hieruit volgt dat $\beta^m = 1$ voor $m = |K(\beta)| - 1$. Merk op dat $|K(\beta)| = p^k$ voor een $k \in \mathbb{N}$. Dus we zien dat $p \nmid m$. Hieruit volgt dat $\pi(U)$ m nulpunten bevat van het polynoom $x^m - 1$. Dus $\beta \in \pi(U)$. Dus $E^\times \subseteq \pi(U)$. □

Een gevolg hiervan is dat U isomorf is aan $F^\times$ immers we hebben in het laatste bewijs gezien dat π injectief en surjectief is.
Voordat we verder gaan, introduceren we eerst een definitie die we nog vaak zullen gebruiken.

Definitie 3.2.2. Een *p-regulier element* van een groep G is een $a \in G$ waarvoor geldt dat $p \nmid o(a)$, dus p is geen deler van de orde van a. De *verzameling p-reguliere elementen* van een groep wordt aangeduid met $\mathscr{P}$.

Voorbeeld 3.2.3.

1. *In $\mathbb{Z}_p$ is het enige p-reguliere element 0. Dus $\mathscr{P} = \{0\}$.*
2. *De verzameling 3-reguliere elementen van de groep D_3 is als volgt: $\mathscr{P} = \{e, s, rs, r^2s\}$ terwijl de verzameling 2-reguliere elementen van D_3 gegeven worden door de verzameling $\mathscr{P} = \{e, r, r^2\}$.*
3. *In A_4 zijn de 2-reguliere elementen alle 3-cykels en het eenheidselement.*

Het volgende lemma zal ons verzekeren dat elk element van een groep geschreven kan worden als product van een p-regulier element en een element waarvan de orde een macht is van p.

Lemma 3.2.4 ([9], 22.18)**.** *Laat p een priemgetal en G een groep. Als $g \in G$ dan bestaat er $x, y \in G$ zodanig dat het volgende geldt:*

(a) $g = xy = yx$;

(b) de orde van x is een macht van p;

(c) de orde van y is copriem met p.

Bovendien geldt dat de elementen x en y die hieraan voldoen uniek zijn.

Bewijs. Laat $g \in G$ en $o(g) = up^v$ met $u, v \in \mathbb{Z}$ en waarvoor geldt dat ggd(u,p)=1. Als gevolg hiervan geldt ook ggd(u,p^v)=1. Vanuit de stelling van Bachet-Bézout geldt dat er $a, b \in \mathbb{Z}$ bestaan zodanig dat $au + bp^v = 1$ [2]. Laat nu $x = g^{au}$ en $y = g^{bp^v}$. Dan geldt

$$\begin{aligned} xy = yx = g^{au+bp^v} &= g; \\ x^{p^v} = g^{aup^v} &= 1; \\ y^u = g^{bup^v} &= 1. \end{aligned}$$

Dus de orde van x is een macht van p en de orde van y deelt u en is dus copriem met p. Dus x en y voldoen aan $(a), (b), (c)$.

We gaan nu de uniciteit laten zien. Veronderstel dat er $x', y' \in G$ bestaan die voldoen aan $(a), (b), (c)$. We willen laten zien dat dan geldt $x = x'$ en $y = y'$. Er geldt nu

$$x'g = x'y'x' = gx',$$

dus x' commuteert met g en dus ook met $g^{au} = x$. Doordat x en x' beide een orde hebben van een macht van p geldt dat $x^{-1}x'$ ook een orde van een macht van p heeft. Evenzo kunnen we tot de conclusie komen dat y met y' commuteert en dat $y(y')^{-1}$ een orde heeft die copriem is met p.
Nu weten we dat $xy = g = x'y'$ en dus

$$x^{-1}x' = y(y')^{-1}.$$

Laat nu $z = x^{-1}x' = y(y')^{-1}$ dan geldt dat z een orde heeft die copriem is aan p maar ook een macht is van p. Hieruit kunnen we concluderen dat $z = e$. Doordat $z = x^{-1}x'$ geldt $e = x^{-1}x'$ en dus $x = x'$ evenzo concluderen we dat $y = y'$. Dus x en y zijn uniek. ☐

We zijn nu klaar om te definiëren wat een Brauer karakter is.

Definitie 3.2.5 ([8], p.263)**.** Laat ρ een F-representatie zijn van een groep G. We definiëren de functie $\phi : \mathscr{P} \to \mathbb{C}$ als volgt. Laat $x \in \mathscr{P}$ en laat $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_k \in F^\times$ de eigenwaarden zijn van $\rho(x)$, waarbij we meervoudige eigenwaarden ook meerdere keren meetellen (dus $k = \deg(\rho)$). Dan geldt dat er voor alle i er een unieke $u_i \in U$ bestaat zodanig dat $\pi(u_i) = \epsilon_i$. Laat $\phi(x) = \sum u_i$. De functie $\phi : \mathscr{P} \to \mathbb{C}$ noemen wij het *Brauer karakter* van G van de representatie ρ.

Als ρ en λ equivalente F-representaties zijn dan brengen ze hetzelfde Brauer karakter voort en net zoals gewone karakters zijn Brauer karakters constant onder conjugatieklassen. Er geldt namelijk dat $T^{-1}\rho(x)T$ dezelfde eigenwaarden heeft als $\rho(x)$. Ook geldt dat $\phi(x^{-1}) = \overline{\phi(x)}$. Dit volgt uit het feit dat de eigenwaarden van $\rho(x^{-1})$ gelijk zijn aan de reciproque eigenwaarden van $\rho(x)$ en voor een $u \in U$ geldt $\pi(\overline{u}) = \pi(u^{-1}) = \pi(u)^{-1}$. Merk op dat deze eigenschappen analoog zijn aan een aantal eigenschappen van propositie 2.3.3.
Het volgende lemma zal duidelijk maken waarom we de p-reguliere elementen hebben gedefinieerd en waarom we het Brauer karakter alleen definiëren op de p-reguliere elementen.

Lemma 3.2.6 ([8], 15.2)**.** *Laat ρ een F-representatie zijn van G die het Brauer karakter ϕ voortbrengt en het F-karakter χ. Neem een $g \in G$ dan kunnen we g schrijven als $g = xy$ zoals in 3.2.4, waarbij $y \in \mathscr{P}$. Dan geldt $\pi(\phi(y)) = \chi(g)$. Dus het F-karakter van g is gelijk aan de som van de eigenwaarden van $\rho(y)$.*

Bewijs. We kunnen g dus schrijven als $g = xy$ met $o(x)$ een macht is van p en $p \nmid o(y)$. De representatie ρ is equivalent aan een representatie λ waarbij λ een bovendriehoeksmatrix is. Laat M de matrix zijn waarvoor geldt $\lambda(g) = M\rho(g)M^{-1}$. Door constructie van x, y in het bewijs van 3.2.4 geldt dat $x, y \in \langle g \rangle$. Dan geldt dat $\rho(x) = \rho(g^k)$ voor een $k \in \mathbb{Z}$ en dus

$$\lambda(x) = M\rho(x)M^{-1} = M\rho(g^k)M^{-1} = M\rho(g)M^{-1}M\rho(g)M^{-1} \ldots M^{-1}.$$

Dit kunnen we ook doen voor $\lambda(y)$ en merk nu op dat $\lambda(g) = \lambda(x)\lambda(y)$ en dat $\lambda(x)$ en $\lambda(y)$ ook bovendriehoeksmatrices zijn, immers $\lambda(x)$ en $\lambda(y)$ zijn producten van bovendriehoeksmatrices. Doordat alle drie de matrices bovendriehoeksmatrices zijn, geldt dat de eigenwaarden de diagonaalelementen zijn. Laat α_i de eigenwaarden zijn van $\lambda(g)$ dan geldt $\alpha_i = \delta_i\epsilon_i$ waarbij ϵ_i en δ_i de eigenwaarden zijn van respectievelijk $\lambda(y)$ en $\lambda(x)$. Tevens geldt dat $(\delta_i)^{o(x)} = 1$ want op de diagonaal van de matrix $\lambda(x)^{o(x)}$ staan alleen maar enen immers geldt $\lambda(x)^{o(x)} = \lambda\left(x^{o(x)}\right) = Id$.

We weten verder dat F een lichaam is van karakteristiek p en $o(x)$ een macht van p is, dus $o(x) = p^k$ voor een $k \in \mathbb{N}$. Dus $\delta_i^{o(x)} = \delta_i^{p^k} = 1$ en hieruit volgt $\delta_i^{p^k} - 1 = 0$ maar in karakteristiek p geldt ook $(a+b)^{p^l} = a^{p^l} + b^{p^l}$ voor alle $l \in \mathbb{N}$. Dus in dit geval krijgen we

$$\delta_i^{p^k} - 1 = \delta_i^{p^k} - 1^{p^k} = (\delta_i - 1)^{p^k} \overset{(1)}{=} 0.$$

Vanuit (1) kunnen we concluderen dat $\delta_i = 1$. Doordat we wisten dat $\alpha_i = \delta_i \epsilon_i$ geldt nu $\alpha_i = \epsilon_i$. Dus er geldt $\chi(g) = \chi(y)$. Nu geldt vanuit de definitie van het Brauer karakter dat $\chi(g) = \pi(\phi(y))$. $\square$

Dus vanuit het lemma kunnen we concluderen dat het genoeg is om de Brauer karakters op de p-reguliere elementen te definiëren.

Voorbeeld 3.2.7. *Beschouw $G = D_3$ met de volgende representatie, $\rho : D_3 \to \mathrm{GL}(2, F)$*

$$r \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad s \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

waarbij F een lichaam is van karakteristiek 3 zoals we in het begin van dit hoofdstuk hebben geconstrueerd. Laat χ het gewone karakter en ϕ het Brauer karakter zijn van deze representatie. We hebben al gezien dat de 3-reguliere elementen gegeven worden door de volgende verzameling $\mathscr{P} = \{e, s, rs, r^2s\}$. Merk verder op dat $r = er$ en $r^2 = er^2$. Doordat r en r^2 in dezelfde conjugatieklasse zitten geldt $\chi(r) = \chi(r^2)$. Het gewone karakter op r is $\chi(r) = 2$. Als we de eigenwaarden gaan berekenen van $\rho(e)$ dan krijgen we:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2.$$

Dus de eigenwaarden van $\rho(e)$ is $\lambda = 1$ met multipliciteit 2. Dus we zien dat $\chi(r) = \chi(r^2) = \pi(\phi(e))$. Verder geldt $\chi(e) = \pi(\phi(e))$ en $\chi(s) = \chi(rs) = \chi(r^2s) = 0$ want s, rs en r^2s zitten in dezelfde conjugatieklasse en er geldt dat de eigenwaarden van $\rho(s)$ gelijk zijn aan $\lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = -1$ dus de som van de eigenwaarden is gelijk aan 0. Dus we zien dat voor alle $g \in D_3$ geldt dat als we $g = xy$ schrijven met $x \in \mathscr{P}$ dan geldt dat het gewone karakter van g gelijk is aan de som van de eigenwaarden van $\rho(x)$.

Lemma 3.2.8 ([8], 15.3)**.** *Laat ϕ een Brauer karakter zijn van G dan geldt dat $\overline{\phi}$, de complex geconjugeerde, ook een Brauer karakter is.*

Bewijs. Laat ρ de F-representatie zijn die ϕ voortbrengt, waarbij $F = R/M$. Laat $g \in G$ en definieer $\lambda(g) = \rho(g^{-1})^T$. Nu is λ een groepshomomorfisme. Er geldt namelijk voor $g, h \in G$

$$\lambda(gh) = \rho\left((gh)^{-1}\right)^T = \rho\left(h^{-1}g^{-1}\right)^T = \rho(g^{-1})^T \rho(h^{-1})^T = \lambda(g)\lambda(h).$$

Laat $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k$ de eigenwaarden van $\rho(g)$. Dan geldt dat $\epsilon_1^{-1}, \ldots, \epsilon_k^{-1}$ eigenwaarden zijn van $\rho(g)^{-1} = \rho(g^{-1})$ en dus ook van $\rho(g^{-1})^T = \lambda(g)$. $\square$

Voorbeeld 3.2.9. *Beschouw de groep A_4, de groep van even permutaties van 4-cykels. De hele groep A_4 is als volgt:*

$$A_4 = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23), (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)\}.$$

Er zijn vier conjugatieklassen in deze groep, met representanten $e, (12)(34), (123), (132)$*. Laat* F *nu een lichaam zijn van karakteristiek 2. Dan zijn de 2-reguliere elementen*

$$\mathscr{P} = \{e, (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)\}.$$

Laat nu $\rho : A_4 \to \mathrm{GL}(1, F)$ *als volgt:*

$$e \mapsto (1),\ (12)(34) \mapsto \omega,\ (123) \mapsto \omega^2,$$

waarbij $\omega = e^{\frac{2}{3}\pi i}$*. Laat* χ *het karakter zijn van deze representatie, dan geldt dat* $\chi((123)) = \omega$ *en* $\chi((132)) = \omega^2$*. Doordat dit een 1-dimensionale representatie is geldt dat de eigenwaarde van* $\rho((123))$ *gelijk is aan* ω *en van* $\rho((132))$ *gelijk is aan* ω^2*. Doordat* $\omega, \omega^2 \in U$ *betekent dit* $\pi(\omega) = \omega$ *en* $\pi(\omega^2) = \omega^2$*. Dus het Brauer karakter* ϕ *is gelijk aan de eigenwaarden van de representatie. Dus* $\phi((123)) = \omega$ *en* $\phi((132)) = \omega^2$*.*
Beschouw nu de representatie $\lambda : A_4 \to \mathrm{GL}(1, F)$ *waarbij*

$$e \mapsto (1), (12)(34) \mapsto \omega^2, (123) \mapsto \omega,$$

met wederom $\omega = e^{\frac{2}{3}\pi i}$*. Door dezelfde redenering als eerder zien we dat het Brauer karakter* ψ *van deze representatie ook gelijk is aan de eigenwaarden van de representatie. Dus* $\psi((123)) = \omega^2$ *en* $\psi((132)) = \omega$*. Ook geldt voor zowel* ρ *als* λ *dat* $\phi(e) = \psi(e) = 2$*. We hebben nu alle 2-reguliere elementen gehad en merk nu op dat* $\phi = \overline{\psi}$*.*

Definitie 3.2.10. Laat $\rho_1, \dots \rho_k$ op isomorfisme na de irreducibele F-representaties zijn van G en laat ϕ_i het Brauer karakter voortgebracht door ρ_i. Dan noemen we ϕ_i een *irreducibel Brauer karakter* en de *verzameling van alle irreducibele Brauer karakters* noteren we met $\mathrm{IBr}(G) = \{\phi_i\}$.

Er geldt dat alle Brauer karakters van de vorm $\sum n_i \phi_i$ zijn, waarbij n_i een niet negatief geheel getal is waarbij niet alle n_i gelijk zijn aan 0 en $\phi_i \in \mathrm{IBr}(G)$. Er geldt zelfs dat alle irreducibele Brauer karakters lineair onafhankelijk zijn over $\mathbb{C}$.

Stelling 3.2.11 ([8], 15.5)**.** *De irreducibele Brauer karakters* ϕ_i *zijn verschillend en lineair onafhankelijk over* $\mathbb{C}$*. Ook geldt dat als* $\sum \alpha_i \phi(x) \equiv 0 \mod M$ *voor alle* $x \in \mathscr{P}$ *met* $\alpha_i \in R$*, dan geldt dat alle* $\alpha_i \equiv 0 \mod M$*.*

Bewijs. We gaan eerst de tweede bewering bewijzen. Vanuit lemma 3.2.1 weten we dat F algebraïsch gesloten is en hieruit volgt dat de representaties ρ_i's absoluut irreducibel zijn. Vanuit stelling A.3.1 weten we dat $\rho_i(F[G]) = \mathrm{GL}(f_i, F)$ waarbij $f_i = \deg(\rho_i)$. Neem nu $b_i \in F[G]$ zodat $\chi_i(b_i) = 1$ waarbij χ_i het karakter die wordt voortgebracht door ρ_i. Door stelling A.3.2 kunnen we aannemen dat $\chi_i(b_j) = 0$ als $i \neq j$. We nemen nu aan dat $\sum \alpha_i \phi(x) \equiv 0 \mod M$ voor alle $x \in \mathscr{P}$. Als we de sommatie afbeelden door π en gebruik maken van lemma 3.2.6 krijgen we $\sum \pi(\alpha_i)\chi_i(g) = 0$ voor alle $g \in G$. Dus in het bijzonder geldt $\sum \pi(\alpha_i)\chi_i(b_j) = 0$ voor alle j. Doordat gewone karakters lineair onafhankelijk zijn geldt nu dus $\pi(\alpha_i) = 0$ voor alle i. Hiermee is de tweede bewering bewezen.
Laat nu E de algebraïsche afsluiting van $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{C}$ en veronderstel $\sum \alpha_i \phi_i = 0$ met $\alpha_i \in E$. Als niet alle $\alpha_i = 0$ dan gebruiken we lemma A.3.3 en kiezen we β waarvoor geldt $\beta\alpha_i \in R$ voor alle i maar waarvoor geldt dat er op zijn minst een i bestaat waarvoor geldt $\beta\alpha_i \notin M$. Dan geldt $\sum(\beta\alpha_i)\phi_i = 0$ maar dit geeft een tegenspraak met het eerste deel van het bewijs want er bestaat nu $\beta\alpha_i \not\equiv 0 \mod M$. Dus er geldt $\alpha_i = 0$ voor alle i en hieruit volgt dat ϕ_i lineair onafhankelijk is over E. Doordat E algebraïsch afgesloten is en $\mathbb{C}$ een lichaamsuitbreiding is, kunnen we concluderen dat de ϕ_i ook lineair onafhankelijk is over $\mathbb{C}$. $\square$

We hebben eerder gezien dat als ϕ een Brauer karakter is en χ een gewoon karakter van de F-representatie van G dat dan geldt voor alle $g \in G$ er een element $y \in \mathscr{P}$ bestaat waarvoor geldt $\pi(\phi(y)) = \chi(g)$. Hier zien we dus een connectie tussen de twee soorten karakters. Maar er bestaat ook nog een andere connectie tussen de twee.

Stelling 3.2.12 ([8], 15.6)**.** *Laat χ een gewoon karakter zijn van G en $\hat{\chi}$ de restrictie van χ tot $\mathscr{P}$, dus de p-reguliere elementen van G. Dan is $\hat{\chi}$ een Brauer karakter van een F-representatie onafhankelijk van F, d.w.z. van de keuze van het maximaal ideaal M.*

Om deze stelling te bewijzen, introduceren we eerst wat notatie en vervolgens gaan we Nakayama's lemma introduceren en bewijzen. Zodra we dat lemma bewezen hebben, kunnen we een algemenere stelling bewijzen die ook het specifieke geval van stelling 3.2.12 omvat.
Laat R nog steeds de ring van alle algebraïsche gehele getallen zijn en M een bepaald maximaal ideaal zijn waarvoor geldt $M \supseteq pR$ met p een priemgetal. Laat nu $\tilde{R} = \{a/b \mid \alpha \in R, \beta \in R - M\} \subseteq \mathbb{C}$. Er kan nagegaan worden dat verzameling $\tilde{R}$ een ring is en dat geldt $\tilde{R} \supseteq R$. De verzameling $\tilde{R}$ wordt ook wel een ring van lokale gehele getallen (*ring of local integers*) voor de priem p genoemd. Definieer nu $\tilde{M} = \{\alpha/\beta \mid \alpha \in M, \beta \in R - M\}$. Nu geldt dat $\tilde{M}$ een ideaal is van $\tilde{R}$ en elk element van $\tilde{R} - \tilde{M}$ heeft inverse in $\tilde{R}$. Het ideaal $\tilde{M}$ is zelfs het unieke maximaal ideaal. We gaan nu het homomorfisme $\pi : R \to F$ uitbreiden naar $\tilde{R}$. Dit doen we als volgt: $\pi(\alpha/\beta) = \pi(\alpha)/\pi(\beta)$. De functie π blijft in dit geval nog steeds een ringhomomorfisme en de kern is $\tilde{M}$ en er geldt $M = \tilde{M} \cap R$.

Lemma 3.2.13 ((Nakayama), [8], 15.7)**.** *Laat $\tilde{R}$ en $\tilde{M}$ zoals hierboven gedefinieerd en laat V een eindig voortgebrachte $\tilde{R}$-module. Veronderstel dat $V = V\tilde{M} + U$ voor een submodule $U \subseteq V$. Dan geldt $U = V$.*

Bewijs. Doordat we veronderstellen dat V eindig wordt voortgebracht kiezen we $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ zodanig dat $V = \sum v_i\tilde{M} + U$. Kies n zo klein mogelijk waarvoor dit waar is. Als $n = 0$ dan krijgen we $V = U$ en dan zijn we klaar. Laat $n \geq 1$ dan geldt

$$v_n = \sum_{i=1}^{n} v_i m_i + u, \tag{3.2}$$

met $m_i \in \tilde{M}$ en $u \in U$. Als we formule 3.2 omschrijven krijgen we

$$v_n(1 - m_n) = \sum_{i=1}^{n-1} v_i m_i + u.$$

Dus we kunnen concluderen dat

$$v_n(1 - m_n) \in \sum_{i=1}^{n-1} v_i\tilde{M} + U.$$

We weten dat $m_n \in \tilde{M}$ en er geldt $1 \notin \tilde{M}$ dus $1 - m_n \in \tilde{R} - \tilde{M}$. Dus er geldt dat $1 - m_n$ inverteerbaar is in $\tilde{R}$. Doordat $\tilde{M}$ een ideaal is en U een submodule van V wat weer een $\tilde{R}$-module is, geldt dus dat als we beide kanten vermenigvuldigen met de inverse van $1 - m_n$ krijgen $v_n \in \sum_{i=1}^{n-1} v_i\tilde{M} + U$. Dus we zien $V = \sum_{i=1}^{n-1} v_i\tilde{M} + U$, als we dit nog $n - 1$ keer itereren dan komen we er op uit dat $V = U$. □

Veronderstel dat ρ een $\mathbb{C}$-representatie is van G met de eigenschap dat alle elementen van de matrix $\rho(g)$ voor alle $g \in G$ in $\tilde{R}$. Dan kunnen we een F-representatie ρ^π construeren van G door het als volgt te definiëren: $\rho^\pi(g) = \pi(\rho(g))$, dus elk element van de matrix beelden we af via π.

Stelling 3.2.14 ([8], 15.8)**.** *Laat ρ een $\mathbb{C}$-representatie zijn van G. Dan bestaat er een $\mathbb{C}$-representatie λ die equivalent is aan ρ waarvoor geldt dat alle elementen van de matrix $\lambda(g)$ in $\tilde{R}$ bevat zijn voor alle $g \in G$. Als λ zo'n representatie is dan geldt dat de F-representatie λ^π het Brauer karakter $\hat{\chi}$ voortbrengt waarbij χ het gewone karakter is voortgebracht door ρ.*

Bewijs. Laat E een algebraïsche afsluiting zijn van $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{C}$. In hoofdstuk 9 van Isaacs [8] wordt bewezen dat een $\mathbb{C}$-representatie equivalent is aan een $\tau^{\mathbb{C}}$ voor een E-representatie τ, waarbij $\tau^{\mathbb{C}}$ een $\mathbb{C}$-representatie is met matrix elementen van E immers $E \subseteq \mathbb{C}$. Dus het is genoeg om aan te nemen dat ρ een E-representatie is en om een equivalente E-representatie te maken met elementen in $\tilde{R}$.
Laat V een $E[G]$-module die ρ voortbrengt en laat $v_1, \ldots, v_n$ een E-basis zijn voor V. Neem nu de verzameling $\{v_i g \mid 1 \leq i \leq n, g \in G\}$ en noem zijn $\tilde{R}$-spansel W. Merk op dat door constructie W invariant is over G. Beschouw nu

$$\tau : W \to W/W\tilde{M}$$

waarbij τ het natuurlijke homomorfisme is en beschouw $W/W\tilde{M}$ als F-vectorruimte gedefinieerd door $\pi(\alpha)\tau(w) = \tau(\alpha w)$ voor $\alpha \in \tilde{R}$. Laat nu $\{\tau(w_i)\}$ een basis zijn voor de F-vectorruimte $W/W\tilde{M}$ zodat $\tau\left(\sum w_i \tilde{R}\right) = W/W\tilde{M}$ en $W = W\tilde{M} + \sum w_i \tilde{R}$. Vanuit Nakayama's lemma weten we nu dus $W = \sum w_i \tilde{R}$. Hieruit kunnen we concluderen dat $\{w_i\}$ V opspannen over E want W bevat een E-basis voor V. We gaan nu bewijzen dat w_i lineair onafhankelijk zijn over E. Dus veronderstel dat $\sum \alpha_i w_i$ met $\alpha_i \in E$. Neem aan dat α_i niet allemaal gelijk zijn aan 0. Dan geldt vanuit lemma A.3.3 dat we een $\beta \in E$ kunnen vinden zodanig dat als $\beta\alpha_i \in R \subseteq \tilde{R}$ maar niet allemaal in M dus er bestaat een i $1 \leq i \leq n$ zodanig dat $\pi(a_i) \neq 0$. Dan geldt $\tau\left(\sum \alpha_i w_i\right) = \sum \pi(\alpha_i)\tau(w_i) = 0$. Doordat we weten dat $\{\tau(w_i)\}$ lineair onafhankelijk zijn, hebben we hier dus een tegenspraak. Dus w_i is lineair onafhankelijk over E.
Laat nu λ de E-representatie van G die bij V hoort met respect tot de basis $\{w_i\}$ zodat de matrix elementen gegeven worden door $\lambda(g) = (a_{ij})$ als $w_g = \sum w_j a_{ij}$. We weten dat $gw_j \in W = \sum w_j \tilde{R}$ dus $a_{ij} \in \tilde{R}$. Dus we hebben een representatie λ geconstrueerd waarvoor geldt dat alle elementen van de matrix $\lambda(g)$ bevat zijn in $\tilde{R}$. Dus hiermee is het eerste deel van onze stelling bewezen.
Laat nu g een p-regulier element van G. We zullen de eigenwaarden van $\lambda^\pi(g) = \pi(\lambda(g))$ bepalen. Laat f het karakteristiek polynoom zijn van $\lambda(g)$, dus $f = \det(xI - \lambda(g))$ dan $f \in \tilde{R}[x]$ en als een gevolg geldt $f^\pi \in F[x]$ en dat is het karakteristiek polynoom van $\lambda^\pi(g)$, waarbij f^π de polynoom is waarbij de coëfficiënten gestuurd worden onder de afbeelding π. Laat $f(x) = \prod(x - \lambda_i)$ en merk op dat de eigenwaarde λ_i in R bevat zijn. Dus $f^\pi(x) = \prod(x - \pi(\lambda_i))$ en dus de eigenwaarden van $\pi(\lambda(g))$ zijn precies de $\pi(\lambda_i)$. Dus er geldt dat $\hat{\chi}(g) = \sum \lambda_i$ het Brauer karakter is voortgebracht door de representatie $\pi(\lambda)$ voor het element g. $\square$

Voorbeeld 3.2.15. *We gaan nu een aantal voorbeelden geven waarin we stelling 3.2.12 in werking zullen zien.*

1. *De karaktertabel van de groep D_3 is als volgt:*

	e	r	s
χ_1	1	1	1
χ_2	1	1	-1
χ_3	2	-1	0

We hebben ook gezien dat de 3-reguliere elementen van D_3 gegeven worden door de verzameling $\mathscr{P} = \{e, s, rs, r^2 s\}$. Als we de restrictie nemen op de 3-reguliere elementen dan krijgen we:

	e	s
$\hat{\chi_1}$	*1*	*1*
$\hat{\chi_2}$	*1*	*-1*
$\hat{\chi_3}$	*2*	*0*

.

In voorbeeld 3.2.7 hebben we gezien dat $\hat{\chi_3}$ een Brauer karakter is. We zien dat $\hat{\chi_1}$ het Brauer karakter is van de triviale representatie en $\hat{\chi_2}$ is het Brauer karakter van de representatie $\rho : D_3 \to \mathrm{GL}(1, F)$ gegeven door $r \mapsto (1)$ en $s \mapsto (-1)$. Merk trouwens ook op dat $\hat{\chi_3} = \hat{\chi_1} + \hat{\chi_2}$. Dus $\hat{\chi_3}$ is geen irreducibel Brauer karakter terwijl χ_3 zelf wel *irreducibel is.*

2. *De karaktertabel van de groep A_4 is als volgt:*

	e	(12)(34)	(123)	(132)
χ_1	*1*	*1*	*1*	*1*
χ_2	*1*	*1*	ω	ω^2
χ_3	*1*	*1*	ω^2	ω
χ_4	*3*	*-1*	*0*	*0*

waarbij $\omega = e^{\frac{2}{3}\pi i}$. De 2-reguliere elementen zijn de 3-cykels en het eenheidselement. Dus als we de restrictie op de 2-reguliere elementen nemen van de karaktertabel dan krijgen we de volgende tabel:

	e	(123)	(132)
$\hat{\chi_1}$	*1*	*1*	*1*
$\hat{\chi_2}$	*1*	ω	ω^2
$\hat{\chi_3}$	*1*	ω^2	ω
$\hat{\chi_4}$	*3*	*0*	*0*

.

We zien dat $\hat{\chi_1}$ het Brauer karakter is van de triviale representatie. In voorbeeld 3.2.9 hebben we ook gezien dat $\hat{\chi_2}, \hat{\chi_3}$ Brauer karakters zijn en dat zelfs geldt $\hat{\chi_2} = \overline{\hat{\chi_3}}$. Als laatste merken we op dat $\hat{\chi_4} = \hat{\chi_1} + \hat{\chi_2} + \hat{\chi_3}$ en dat een som van Brauer karakters ook weer een Brauer karakter is en net zoals het vorige voorbeeld kunnen we concluderen dat $\hat{\chi_4}$ geen irreducibel Brauer karakter is.

3. *Beschouw nu $\mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. De karaktertabel is als volgt:*

	0	1	2	3	4	5
χ_1	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
χ_2	*1*	ω	ω^2	*-1*	ω^4	ω^5
χ_3	*1*	ω^2	ω^4	*1*	ω^2	ω^4
χ_4	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*
χ_5	*1*	ω^4	ω^2	*1*	ω^4	ω^2
χ_6	*1*	ω^5	ω^4	*-1*	ω^2	ω

.

De 2-reguliere elementen van $\mathbb{Z}_6$ zijn $\mathscr{P} = \{0, 2, 4\}$. Dus als we de de restrictie op de 2-reguliere elementen nemen dan krijgen we de volgende tabel:

	0	2	4
$\hat{\chi}_1$	*1*	*1*	*1*
$\hat{\chi}_2$	*1*	ω^2	ω^4
$\hat{\chi}_3$	*1*	ω^4	ω^2
$\hat{\chi}_4$	*1*	*1*	*1*
$\hat{\chi}_5$	*1*	ω^2	ω^4
$\hat{\chi}_6$	*1*	ω^4	ω^2

.

Er geldt dat $U = \{\omega \in \mathbb{C} \mid \omega^m = 1$ voor een $m \in \mathbb{Z}$ met $p \nmid m\}$ en doordat we $p = 2$ nemen en doordat $(\omega^2)^3 = (\omega^4)^3 = 1$ geldt dat $\omega^2, \omega^4 \in U$ en dus $\pi(\omega^2) = \omega^2$ en $\pi(\omega^4) = \omega^4$. Dus we zien dat alle karakters ook Brauer karakters zijn voor het lichaam F van karakteristiek 2.

3.3 De decompositiematrix

In het laatste voorbeeld hebben we gezien dat $\hat{\chi}_1 = \hat{\chi}_4$, $\hat{\chi}_2 = \hat{\chi}_5$ en $\hat{\chi}_3 = \hat{\chi}_6$. We zullen later zien dat het aantal verschillende Brauer karakters gelijk is aan het aantal conjugatieklassen van de p-reguliere elementen. In het tweede voorbeeld van hierboven zagen we dat $\hat{\chi}_4 = \hat{\chi}_1 + \hat{\chi}_2 + \hat{\chi}_3$ en doordat $\hat{\chi}_1$, $\hat{\chi}_2$ en $\hat{\chi}_3$ 1-dimensionale Brauer karakters zijn, zijn dit ook irreducibele Brauer karakters. Dit motiveert de volgende definitie.

Definitie 3.3.1 ([8], 15.9)**.** Laat $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, waarbij $\mathrm{Irr}(G)$ de verzameling is van alle irreducibele karakters van G. Laat nu $\hat{\chi}$ de restrictie zijn van χ op de p-reguliere elementen van G. We kunnen $\hat{\chi}$ schrijven als

$$\hat{\chi} = \sum_{\phi \in \mathrm{IBr}(G)} d_{\chi\phi}\phi.$$

We noemen de unieke niet negatieve gehele getallen $d_{\chi\phi}$ de *decompositie getallen* van G voor de priem p.

In voorbeeld 3.2.15 hebben we hier al twee voorbeelden van gezien. In het eerste voorbeeld van 3.2.15 zagen we dat $\hat{\chi}_3 = \hat{\chi}_1 + \hat{\chi}_2$ en we zien dus dat de decompositie getallen voor dit geval $d_{\chi_3\hat{\chi}_1} = d_{\chi_3\hat{\chi}_2} = 1$ en evenzo zien we dat voor het tweede voorbeeld geldt dat $d_{\chi_4\hat{\chi}_1} = d_{\chi_4\hat{\chi}_2} = d_{\chi_4\hat{\chi}_3} = 1$.

Definitie 3.3.2 ([8], p.267)**.** Veronderstel dat we een groep G hebben. Als we de decompositiegetallen van G bepalen dan kunnen we een $n \times m$ matrix opstellen waarbij $n = |\mathrm{Irr}(G)|$ en $m = |\mathrm{IBr}(G)|$. De matrix die hierbij wordt gevormd noemen we de *decompositiematrix* notatie $(d_{\chi\phi})$.

Merk op dat de decompositiematrix niet uniek is omdat we de (Brauer) karakters zelf moeten ordenen maar er geldt wel dat de decompositiematrix uniek is op permutaties van rijen en kolommen na.

Stelling 3.3.3 ([8], 15.10)**.** *De decompositiematrix $(d_{\chi\phi})$ heeft lineair onafhankelijke kolommen. Bovendien vormt de verzameling IBr(G) een basis voor de ruimte van functies van $\mathscr{P}$, de p-reguliere elementen van G, naar $\mathbb{C}$ die constant zijn op de conjugatieklassen.*

Bewijs. Laat V de ruimte zijn van functies van de p-reguliere elementen naar $\mathbb{C}$ die constant zijn op de conjugatieklassen. Laat verder $W \subseteq V$ het opspansel zijn van $\mathrm{IBr}(G)$. Definieer U als het opspansel van de kolommen van $(d_{\chi\psi})$ zodat

$$\dim U \leq |\mathrm{IBr}(G)| \overset{(1)}{=} \dim W \leq \dim V, \tag{3.3}$$

waarbij (1) het gevolg is van stelling 3.2.11. Om de stelling te bewijzen gaan we aantonen dat $\dim V \leq \dim U$. Dit gaan we bewijzen door een injectieve afbeelding te construeren van $\tilde{V}$, de duale ruimte van V, naar U. Als we dit doen weten we $\dim \tilde{V} \leq \dim U$. Doordat $\dim V = \dim \tilde{V}$[3] geldt dan $\dim V \leq \dim U$ en dat is wat we willen bewijzen. Laat $\psi : \tilde{V} \to U$ zodanig dat $\forall a \in \tilde{V}$ geldt $a \mapsto \mathrm{col}(a(\hat{\chi})) = u$ waarbij $\mathrm{col}(a(\hat{\chi}))$ de kolomvector is van een irreducibel Brauer karakter in $(d_{\chi\phi})$. Er geldt dat $u \in U$ want $a(\hat{\chi}) = a\left(\sum_{\phi \in \mathrm{IBr}(G)} d_{\chi\phi}\phi\right) = \sum_{\phi \in \mathrm{IBr}(G)} d_{\chi\phi} a(\phi)$. Dus u is te schrijven als

$$u = \left(\sum_{\phi} d_{\chi_1\phi} a(\phi), \sum_{\phi} d_{\chi_2\phi} a(\phi), \ldots, \sum_{\phi} d_{\chi_n\phi} a(\phi)\right),$$

waarbij $n = |\mathrm{Irr}(G)|$. Dit kunnen we als volgt omschrijven

$$u = a(\phi_1)(d_{\chi_1\phi_1}, d_{\chi_2\phi_1}, \ldots, d_{\chi_n\phi_1}) + a(\phi_2)(d_{\chi_1\phi_2}, d_{\chi_2\phi_2}, \ldots, d_{\chi_n\phi_2}) +$$

$$\cdots + a(\phi_k)(d_{\chi_1\phi_k}, d_{\chi_2\phi_k}, \ldots, d_{\chi_n\phi_k}),$$

waarbij $k = |\mathrm{IBr}(G)|$. Nu zien we dat u een lineaire combinatie is van kolommen die bevat zijn in U. Dus de functie ψ beeldt inderdaad af op U.
We gaan aantonen dat ψ injectief is, dit doen we door te laten zien dat de kern van de afbeelding gelijk is aan het 0 element, dus $\ker(\psi) = \{0\}$. Deze conditie is namelijk equivalent met injectiviteit voor afbeeldingen tussen verschillende ruimtes [1]. Laat $a(\hat{\chi}) = 0$ voor alle $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Laat $\theta \in V$ en breidt θ uit tot G zodanig dat de functie θ constant is op conjugatieklassen en noem deze functie θ'. Er geldt nu $\theta' = \sum_i b_i \chi_i$ en dus $\theta = \sum_i b_i \hat{\chi}_i$ dus $a(\theta) = 0$. Dus $\ker \psi = \{0\}$ en dus de afbeelding is injectief. □

Gevolg 3.3.4 ([8], 15.11)**.** *Het aantal conjugatieklassen van de p-reguliere elementen van G is gelijk aan |IBr(G)|.*

Bewijs. Vanuit de vorige stelling weten we dat de decompositiematrix lineair onafhankelijke kolommen heeft. Daarnaast weten we dat er $|\mathrm{IBr}(G)|$ kolommen zijn en doordat het Brauer karakter constant is op conjugatieklassen en gedefinieerd is op de p-reguliere elementen volgt het resultaat. □

Voorbeeld 3.3.5. *In voorbeeld 3.2.15 hebben we drie voorbeelden gegeven van verschillende Brauer karakters. We gaan hier de decompositiematrix geven van deze voorbeelden. De ordening is hetzelfde als 3.2.15. Dus de eerste rij zal corresponderen met het triviale karakter, de tweede rij zal corresponderen met χ_2.*

1. *De decompositiematrix voor de groep D_3 en met priem $p = 3$ ziet er als volgt uit:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. *De decompositiematrix voor de groep A_4 en met priem $p = 2$ ziet er als volgt uit:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. *De decompositiematrix voor de groep $\mathbb{Z}_6$ en met priem $p = 2$ ziet er als volgt uit:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

We kunnen nu opmerken dat er in elke kolom en in elke rij een niet nul matrix element voorkomt. Dat is geen toeval.

Gevolg 3.3.6 ([8], 15.12)**.** *Als $\phi \in IBr(G)$ dan bestaat er een $\chi \in Irr(G)$ waarvoor geldt $d_{\chi\phi} \neq 0$. Ook geldt als $\chi \in Irr(G)$ dan bestaat er een $\phi \in IBr(G)$ waarvoor geldt $d_{\chi\phi} \neq 0$.*

Bewijs. Als er een $\phi \in \mathrm{IBr}(G)$ bestaat waarvoor geldt dat voor alle $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, $d_{\chi\phi} = 0$ dan hebben we in onze decompositiematrix een 0-kolom (een kolom met alleen maar nullen). Dit geeft een tegenspraak met de vorige stelling, namelijk dat de kolommen lineair onafhankelijk zijn.
Er geldt $\chi(1) = \sum d_{\chi\phi}\phi(1)$. Doordat $\chi(1) \neq 0$ kunnen we concluderen dat er tenminste één $d_{\chi\phi} \neq 0$ is. $\square$

Brauer karakters worden pas echt interessant als $p||G|$. De volgende stelling zal duidelijk maken waarom het dan interessanter is.

Stelling 3.3.7 ([8], 15.13)**.** *Als $p \nmid |G|$ dan $IBr(G) = Irr(G)$.*

Bewijs. Doordat $p \nmid |G|$ weten we dat $F[G]$ compleet reducibel is en dus geldt er dat $|G| = \dim F[G] = \sum (\rho_i)^2$ waarbij ρ_i de verzameling is van representanten van equivalentieklassen van irreducibele F-representaties van G ([6], p.851). Als ϕ_i het irreducibele Brauer karakter is van ρ_i dan geldt $\deg \rho_i = \phi_i(1)$. Dus hieruit krijgen we

$$\sum_{\phi \in \mathrm{IBr}(G)} \phi(1)^2 = |G| = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(1)^2. \tag{3.4}$$

Nu kunnen we gebruik maken van gevolg 3.3.6 want $\chi(1) = \sum_{\phi \in \mathrm{IBr}(G)} d_{\chi\phi}\phi(1)$. Als we dit substitueren in 3.4 dan krijgen we:

$$\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(1)^2 = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \left(\sum_{\phi \in \mathrm{IBr}(G)} d_{\chi\phi}\phi(1) \right)^2 \tag{3.5}$$

$$= \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \left(\sum_{\phi \in \mathrm{IBr}(G)} d_{\chi\phi}\phi(1) \right) \left(\sum_{\mu \in \mathrm{IBr}(G)} d_{\chi\mu}\mu(1) \right) \tag{3.6}$$

$$= \sum_{\phi,\mu \in \mathrm{IBr}(G)} \phi(1)\mu(1) \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} d_{\chi\phi}d_{\chi\mu}. \tag{3.7}$$

We kunnen de eerste sommatie splitsen in $\sum_{\phi \neq \mu} \phi(1)\mu(1) + \sum_{\phi = \mu} \phi(1)\mu(1) = \sum_{\phi \neq \mu} \phi(1)\mu(1) + \sum_{\phi} \phi(1)^2$. Dus als we dit substitueren in 3.7 en gebruik maken van alle gelijkheden krijgen we

$$\sum_{\phi \in \mathrm{IBr}(G)} \phi(1)^2 = \sum_{\phi \neq \mu} \phi(1)\mu(1) \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} d_{\chi\phi}d_{\chi\mu} + \sum_{\phi \in \mathrm{IBr}(G)} \phi(1)^2 \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} d_{\chi\phi}^2. \tag{3.8}$$

Vanuit gevolg 3.3.6 weten we dat als $\phi = \mu$ dan $d_{\chi\phi} \geq 1$ en als $\phi \neq \mu$ dan $d_{\chi\phi}d_{\chi\mu} \geq 0$. Doordat we gelijkheid hebben in vergelijking 3.8, moet gelden dat in dit geval $\sum d_{\chi\phi}^2 = 1$ en $\sum d_{\chi\phi}d_{\chi\mu} = 0$. Dus er bestaat voor elke ϕ een unieke χ zodanig dat $d_{\chi\phi} \neq 0$ en zelfs $d_{\chi\phi} = 1$. Er geldt ook $\sum_{\phi\neq\mu} d_{\chi\phi}d_{\chi\mu} = 0$. Dus voor elke $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ bestaat er een unieke ϕ waarvoor geldt $d_{\chi\phi} \neq 0$. Uit dit alles kunnen we dus concluderen dat $\chi = \hat{\chi} = \phi$ voor alle $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ en alle $\phi \in \mathrm{IBr}(G)$. □

Voorbeeld 3.3.8. *Neem $p = 3$ en $\mathbb{Z}_4$ dan weten we dat de 3-reguliere elementen alle elementen zijn van $\mathbb{Z}_4$, dus $\mathscr{P} = \mathbb{Z}_4$. De karaktertabel voor $\mathbb{Z}_4$ is als volgt:*

	0	1	2	3
χ_1	*1*	*1*	*1*	*1*
χ_2	*1*	i	*-1*	$-i$
χ_3	*1*	*-1*	*1*	*-1*
χ_4	*1*	$-i$	*1*	i

Doordat alle elementen ook 3-reguliere elementen zijn, geldt er dat er vier irreducibele Brauer karakters zijn en dat $\hat{\chi}_i = \chi_i$ $1 \leq i \leq 4$. Bovendien geldt er dat alle $\hat{\chi}_i$ $1 \leq i \leq 4$ 1-dimensionale Brauer karakters zijn, en dit zijn altijd irreducibele Brauer karakters. Dus we hebben nu vier irreducibele Brauer karakters gevonden en die zijn precies gelijk aan de gewone karakters.

Stelling 3.3.9 ([8], 15.14)**.** *Laat $\phi \in IBr(G)$. Dan is ϕ een $\mathbb{Z}$-lineaire combinatie van $\{\hat{\chi} \mid \chi \in Irr(G)\}$.*

Voordat we het bewijs geven introduceren we een definitie.

Definitie 3.3.10. Een groep E heet *p-elementair* (met p priem) als E een direct product is van een cyclische groep en een p-groep, een groep waarvan de orde een macht is van p. Als E p-elementair is voor een priem p dan noemen we E *elementair*.

Bewijs van 3.3.9. We gaan het domein van functie ϕ uitbreiden tot G, ϕ is namelijk een Brauer karakter en heeft dus als domein $\mathscr{P} \subset G$. Laat θ een functie zijn die constant is op conjugatieklassen en definieer $\theta(g) = \phi(y)$ waarbij $y \in \mathscr{P}$. Dit kunnen we doen vanwege lemma 3.2.4. We gaan nu stelling A.2.1 gebruiken.
Laat $E \subseteq G$ elementair zijn en schrijf $E = P \times Q$, waarbij P een p-groep is en $p \nmid |Q|$. Vanwege het feit dat E elementair is, kunnen we elk element $g \in E$ schrijven als product van $x \in P$ en $y \in Q$. Dus schrijf $g = xy$ dan geldt $\theta(g) = \phi(y)$, immers y is een element met orde copriem aan p. Dus er geldt dat $\theta_E = 1_P \times \phi_Q$. Merk op dat ϕ_Q een Brauer karakter is en dat we vanuit stelling 3.3.7 kunnen concluderen dat ϕ_Q een karakter is van Q want $p \nmid |Q|$. Nu volgt ook dat θ_E een karakter is want het is een product van karakters. Dus vanuit hier kunnen we A.2.1 gebruiken en concluderen dat θ een gegeneraliseerd karakter is van G. □

3.4 Blokken van een groep

We gaan nu het concept van blokken introduceren. Laat G een groep en $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. We kunnen een functie ω definiëren van $\mathbf{Z}(\mathbb{C}[G]) \to \mathbb{C}$ waarbij $\mathbf{Z}(\mathbb{C}[G]) = \{z \in \mathbb{C}[G] \mid zr = rz \text{ voor alle } r \in \mathbb{C}[G]\}$, dus $\mathbf{Z}(\mathbb{C}[G])$ is het centrum van de groepsalgebra. Laat ρ de representatie zijn die χ voortbrengt. Neem dan $z \in \mathbf{Z}(\mathbb{C}[G])$ dan geldt vanuit lemma A.1.2 dat $\rho(z) = \epsilon I$ waarbij $\epsilon \in \mathbb{C}$ en I de identiteitsmatrix is. We definiëren $\omega(z) = \epsilon$. Dus $\rho(z) = \omega(z)I$ voor alle $z \in \mathbf{Z}(\mathbb{C}[G])$. We zullen soms de notatie $\omega = \omega_\chi$ gebruiken om te benadrukken dat ω afhangt van χ. Laat $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de verzamelingen van conjugatieklassen zijn van G. Dan definiëren we $K_i = \sum_{g\in A_i} g$, dus K_i is de som over de conjugatieklasse A_i. Er geldt dat $K_1, K_2, \ldots, K_n$ een basis vormen van $\mathbf{Z}(\mathbb{C}[G])$ [[9], p.114]. Dus de functie ω_χ is volledig bepaald door zijn waarde op K_i, de som van een conjugatieklasse. Er geldt zelfs dat de waarde van $\omega_\chi(K_i)$ bevat is in R, de ring van algebraïsche gehele getallen. We gaan nu een equivalentierelatie $\sim$ definiëren op $\mathrm{Irr}(G)$. Laat $\chi, \psi \in \mathrm{Irr}(G)$ dan geldt $\chi \sim \psi$ dan en slechts dan als $\pi\left(\omega_\chi(K_i)\right) = \pi\left(\omega_\psi(K_i)\right)$ voor alle i.

Lemma 3.4.1. *De hierboven gedefinieerde relatie is een equivalentierelatie.*

Bewijs. Om een equivalentierelatie aan te tonen moeten we bewijzen dat de relatie reflexief, symmetrisch en transitief is. Neem een $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ dan geldt $\pi\left(\omega_\chi(K_i)\right) = \pi\left(\omega_\chi(K_i)\right)$ dus de relatie is reflexief. Neem nu $\chi, \psi \in \mathrm{Irr}(G)$ en neem aan dat $\chi \sim \psi$ dan $\pi\left(\omega_\chi(K_i)\right) = \pi\left(\omega_\psi(K_i)\right)$ en dus ook $\pi\left(\omega_\psi(K_i)\right) = \pi\left(\omega_\chi(K_i)\right)$ dus $\psi \sim \chi$. Dus de relatie is symmetrisch. Neem nu $\chi, \psi, \gamma \in \mathrm{Irr}(G)$ zodanig dat $\chi \sim \psi$ en $\psi \sim \gamma$ dan geldt ook $\pi\left(\omega_\chi(K_i)\right) = \pi\left(\omega_\gamma(K_i)\right)$ en dus $\chi \sim \gamma$. Dus de relatie is transitief. Doordat de relatie reflexief, symmetrisch en transitief is, is de relatie een equivalentierelatie. $\square$

Met deze equivalentierelatie kunnen we gaan definiëren wat een p-blok is van een groep G.

Definitie 3.4.2 ([8], 15.17)**.** Een *p-blok* van een groep G is een deelverzameling $B \subseteq \mathrm{Irr}(G) \cup \mathrm{IBr}(G)$ zodanig dat

(a) $B \cap \mathrm{Irr}(G)$ een equivalentieklasse is onder de relatie $\sim$ zoals eerder gedefinieerd.

(b) $B \cap \mathrm{IBr}(G) = \{\phi \in \mathrm{IBr}(G) \mid d_{\chi\phi} \neq 0 \text{ voor een } \chi \in B \cap \mathrm{Irr}(G)\}$

Vanuit de definitie van $\sim$ kan er gedacht worden dat de relatie afhangt van het maximaal ideaal M, immers $\pi : R \to F$ waarbij $F = R/M$.

Stelling 3.4.3. *Laat $\chi, \psi \in Irr(G)$. Dan liggen χ en ψ in hetzelfde p-blok dan en slechts dan als $\omega_\chi(K) - \omega_\psi(K)$ bevat is in elk maximaal ideaal van R wat pR bevat voor elke conjugatieklasse som K.*

Bewijs. We gaan eerst de implicatie van rechts naar links bewijzen. Dus laat $\omega_\chi(K) - \omega_\psi(K)$ bevat zijn in elk maximaal ideaal M van R wat pR bevat voor elke conjugatieklasse som K. Dan geldt in het bijzonder dat $\omega_\chi(K) - \omega_\psi(K) \equiv 0 \bmod M$. Dus er geldt $\pi\left(\omega_\chi(K) - \omega_\psi(K)\right) = 0$ en doordat π een homomorfisme is geldt $\pi\left(\omega_\chi(K) - \omega_\psi(K)\right) = \pi\left(\omega_\chi(K)\right) - \pi\left(\omega_\psi(K)\right)$. Dus er geldt

$$\pi\left(\omega_\chi(K)\right) - \pi\left(\omega_\psi(K)\right) = 0.$$

Hieruit kunnen we concluderen dat $\pi(\omega_\chi(K)) = \pi(\omega_\psi(K))$. Dus per definitie van $\sim$ geldt $\chi \sim \psi$. Voor de implicatie van links naar rechts gaan we gebruik maken van Galois theorie. Definieer eerst $\alpha = \omega_\chi(K) - \omega_\psi(K)$. We gaan aantonen dat $\alpha^n \in pR$ voor een geheel getal n. Als dit namelijk zo is dan geldt $\alpha^n \in pR \subseteq M$ met M een maximaal ideaal. Doordat M een maximaal ideaal en $\alpha^n \in M$ geldt dat $\alpha \in M$. Dat is precies wat we willen laten zien. Dus laat $\mathscr{G} = \mathscr{G}\left(\mathbb{Q}_{|G|}/\mathbb{Q}\right)$, waarbij $\mathbb{Q}_{|G|}/\mathbb{Q}$ de lichaamsuitbreiding is van $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}_{|G|} = \mathbb{Q}\left(e^{\frac{2\pi i}{|G|}}\right)$. Vanuit de Galois theorie weten we dat $\mathscr{G} \cong (\mathbb{Z}/|G|\mathbb{Z})^\times$. Laat ζ een primitieve $|G|$-de eenheidswortel zijn zodanig dat $\sigma(\zeta) = \zeta^m$ voor een m waarvoor geldt $\mathrm{ggd}(m, |G|) = 1$ en $\sigma \in \mathscr{G}$. Laat $g \in G$ zodanig dat g bevat is in de conjugatiesom K en laat L de conjugatiesom waar g^m bevat is. Laat ρ de representatie die het karakter χ voortbrengt. Dan geldt $\sigma(\chi(g)) = \sigma(\sum \lambda_i)$ met $1 \leq i \leq |G|$ waarbij λ_i de eigenwaarden zijn van ρ en in het bijzonder zijn dit $|G|$-de eenheidswortels [[9][p.83]]. Dus $\sigma(\sum(\lambda_i)) = \sigma(\sum \zeta_{|G|}^i)$. We kunnen de sommatie naar buiten halen en dan krijgen we

$$\sum \sigma\left(\zeta_{|G|}\right)^i = \sum \left(\zeta_{|G|}^m\right)^i.$$

Dit zijn precies de eigenwaarden van $\rho(g^m)$ en dus krijgen we $\chi(g) = \chi(g^m)$. Doordat $\mathrm{ggd}(m, \mathrm{ord}(g)) = 1$ weten we dat $\langle g \rangle = \langle g^m \rangle$. Hieruit volgt $|\mathbf{C}(g)| = |\mathbf{C}(g^m)|$ waarbij $\mathbf{C}(g)$ de centralisator is van het element g, dus $\mathbf{C}(g) = \{x \in G \mid xg = gx\}$ en evenzo $\mathbf{C}(g^m)$. Verder weten we vanuit [[8],p.35] dat $\omega_\chi(K) = \frac{1}{\chi(1)} \sum_{g \in H} \chi(g)$, waarbij H de conjugatieklasse is die de conjugatiesom K voortbrengt. Dan geldt

$$\begin{aligned}
\sigma(\omega_\chi(K)) &= \sigma\left(\sum_{g\in H} \frac{1}{\chi(1)}\chi(g)\right) \\
&= \sum_{g\in H} \frac{1}{\chi(1)}\sigma\left(\chi(g)\right) \\
&= \sum_{g\in H} \frac{1}{\chi(1)}\chi(g^m) \\
&= \omega_\chi(L).
\end{aligned}$$

Dus $\sigma(\omega_\chi(K)) = \omega_\chi(L)$ Evenzo kunnen we concluderen dat $\sigma(\omega_\psi(K)) = \omega_\psi(L)$. Hieruit volgt dat $\sigma(\alpha) = \omega_\chi(L) - \omega_\psi(L) \in M$ omdat we aannemen dat $\chi \sim \psi$.
Laat nu $f(x) = \prod_{\sigma \in \mathscr{G}}(x - \sigma(\alpha))$. Dan weten we dat $f \in (\mathbb{Q} \cap R)[x] = \mathbb{Z}[x]$. Er geldt $\mathbb{Q} \cap R[x] = \mathbb{Z}[x]$ want de gehele getallen zijn precies de algebraïsche gehele getallen in $\mathbb{Q}$. We weten dat $\sigma(\alpha) \in M$ voor alle $\sigma \in \mathscr{G}$, dus hieruit kunnen we concluderen dat alle coëfficiënten behalve de coëfficiënt van de term $x^{|\mathscr{G}|}$, van het polynoom f bevat zijn in de verzameling $M \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$. Er geldt dat $f(\alpha) = 0$ maar er geldt ook dat $f(\alpha) \equiv \alpha^{|\mathscr{G}|} \bmod pR$. Dus hieruit volgt dat $\alpha^{|\mathscr{G}|} \equiv 0 \bmod pR$. Dus we hebben bewezen dat $\alpha^n \in pR$ voor een n namelijk $n = |\mathscr{G}|$. □

Vanuit de definitie van een p-blok kunnen we zien dat elke $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ bevat is in een unieke p-blok, immers de relatie $\sim$ is een equivalentierelatie en in een p-blok zit precies één equivalentieklasse en de verschillende klassen vormen een partitie van $\mathrm{Irr}(G)$. Maar er geldt ook dat elk irreducibel Brauer karakter bevat is in een unieke p-blok. Om dit te bewijzen gaan we de p-blokken van een groep G relateren aan de F-algebra, $\mathbf{Z}(F[G])$.
We gaan de functie $\pi : \tilde{R} \to F$ uitbreiden naar een ring homomorfisme $\pi : \tilde{R}[G] \to F[G]$ door te definiëren $\pi(g) = g$ voor alle $g \in G$. Doordat de conjugatiesommen K_i een basis vormen voor $\mathbf{Z}(\mathbb{C}[G])$ en doordat $\pi(K_i) \in F[G]$ een basis vormen voor $\mathbf{Z}(F[G])$ kunnen we zien dat de functie π een surjectie geeft van $\mathbf{Z}(\tilde{R}[G]) = \tilde{R}[G] \cap \mathbf{Z}(\mathbb{C}[G])$ naar $\mathbf{Z}([F[G])$.
Laat nu $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Onder ω_χ worden elementen van $\mathbf{Z}(\tilde{R}[G])$ afgebeeld naar elementen van $\tilde{R}$. Dus we kunnen de afbeelding $\pi_{\omega_\chi} : \mathbf{Z}(F[G]) \to F$ definiëren door

$$\pi_{\omega_\chi}(u) := \pi\left(\omega_\chi(z)\right) \tag{3.9}$$

voor $z \in \mathbf{Z}(\tilde{R}[G])$ waarvoor geldt $\pi(z) = u$. We hebben eerder opgemerkt dat π een surjectie geeft van $\mathbf{Z}(\tilde{R}[G])$ naar $\mathbf{Z}([F[G])$. dus zo'n z bestaat altijd. Er geldt ook dat de functie π_{ω_χ} onafhankelijk is van de keuze van z. Als $x, y \in \mathbf{Z}(\tilde{R}[G])$ met $\pi(x) = \pi(y)$ dan geldt $\pi(x) - \pi(y) = 0 = \pi(x - y)$. Dus dit betekent dat $x - y \in \tilde{M}$ en dat op zijn beurt betekent dat $\pi(\omega_\chi(x - y)) = 0$.
Laat $\mathrm{Bl}(G)$ de verzameling van p-blokken zijn van G. Als $B \in \mathrm{Bl}(G)$, definieer $\lambda_B = \pi_{\omega_\chi}$ voor

$\chi \in B \cap \mathrm{Irr}(G)$. Dan geldt dat $B \mapsto \lambda_B$ een injectieve afbeelding is van $\mathrm{Bl}(G)$ naar de verzameling van algebra homomorfisme $\mathbf{Z}(F[G]) \to F$.

Stelling 3.4.4 ([8], 15.19)**.** *Laat $\phi \in IBr(G)$. Als ρ een irreducibele F-representatie is die ϕ voortbrengt dan $\rho(u) = \lambda_B(u)I$ voor alle $u \in \mathbf{Z}(F[G])$. Bovendien geldt dan dat ϕ in een uniek p-blok bevat is.*

Bewijs. Vanuit gevolg 3.3.6 weten we dat $d_{\chi\phi} \neq 0$ voor een $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Laat $B \in \mathrm{Bl}(G)$ waarvoor geldt $\chi \in \mathrm{Bl}(G)$ en dus geldt ook $\chi \in \mathrm{Bl}(G)$. Laat ρ de irreducibele F-representatie zijn van ϕ en laat μ een $\mathbb{C}$-representatie zijn die het karakter χ voortbrengt en matrix elementen in $\tilde{R}$ heeft. De representatie μ bestaat vanwege stelling 3.2.14. Vanuit die stelling kunnen we ook concluderen dat de representatie $\pi(\mu)$ het Brauer karakter $\hat{\chi}$ voortbrengt. Vanuit stelling 3.2.11 weten we dat de irreducibele Brauer karakters lineair onafhankelijk zijn en hieruit volgt dat ρ een constituent is van $\pi(\mu)$ met multipliciteit $d_{\chi\phi} > 0$. Laat nu $u \in \mathbf{Z}(F[G])$ waarvoor geldt $u = \pi(z)$ voor een $z \in \mathbf{Z}([\tilde{R}[G])$, dit kunnen we doen omdat de functie π surjectief is. Nu geldt:

$$\mu^{\pi}(u) = \pi(\mu(z)) = \pi(\omega_{\chi}(z)I) = \pi(\omega_{\chi}(z))I = \pi_{\omega_{\chi}}(u)I = \lambda_B(u)I,$$

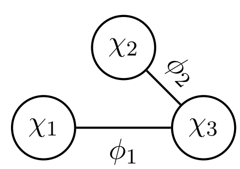
waarbij de een na laatste gelijkheid volgt uit 3.9. Dus de eerste bewering is bewezen. Doordat ρ een constituent is van $\pi(\mu)$ en doordat $B \to \lambda_B$ een injectieve afbeelding is kunnen we in het bijzonder concluderen dat ϕ in een unieke p-blok bevat is. $\square$

We kunnen een graaf maken door de verzameling van irreducibele karakters als knopen te zien waarbij $\chi, \psi \in \mathrm{Irr}(G)$ verbonden zijn dan en slechts dan als er een $\phi \in \mathrm{IBr}(G)$ bestaat waarvoor geldt dat zowel $d_{\chi\phi}$ als $d_{\psi\phi}$ ongelijk zijn aan 0. De graaf die hieruit voortkomt noemen we de Brauer graaf. Als χ en ψ verbonden zijn dan zijn ze bevat in hetzelfde p-blok, namelijk het unieke p-blok waar ϕ in bevat is. Dit bewijst het volgende gevolg.

Gevolg 3.4.5 ([8], 15.20)**.** *Laat B een p-blok zijn van G dan $B \cap Irr(G)$ is de vereniging van samenhangingscomponenten van de Brauer graaf.*

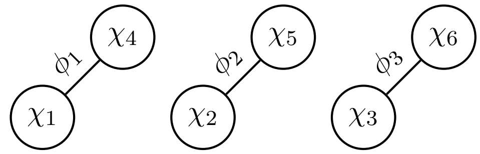
Voorbeeld 3.4.6. *We zullen een aantal voorbeelden van Brauer grafen en blokken laten zien en zullen een eigenschap opmerken die we later zullen bewijzen.*

1. *Zoals in voorbeeld 3.3.5-1 beschouwen we de groep D_3 met priem $p = 3$. De decompositiematrix is gegeven in 3.3.5-1. De graaf ziet er als volgt uit:*



   waarbij $\phi_1 = \hat{\chi}_1$, i.e. het triviale Brauer karakter en $\phi_2 = \hat{\chi}_2$, i.e. 1 op elementen van orde niet deelbaar door twee en -1 op elementen van orde deelbaar door twee. Er geldt dat χ_3 de twee-dimensionale representatie is van D_3 en zoals we in voorbeeld 3.2.15 hebben gezien geldt $\hat{\chi}_3 = \phi_1 + \phi_2$ dus voor χ_1 en χ_3 geldt $d_{\chi_1,\phi_1} = d_{\chi_3,\phi_1} = 1$. Dus zijn ze verbonden. Evenzo geldt $d_{\chi_2,\phi_2} = d_{\chi_3,\phi_2} = 1$. Dus χ_2 en χ_3 zijn ook verbonden. Dus als we de groep D_3 beschouwen met $p = 3$ dan hebben we precies één p-blok, namelijk $B = \{\chi_1, \chi_2, \chi_3, \phi_1, \phi_2\}$.

2. *Beschouw nu $\mathbb{Z}_6$ met priem $p = 2$. Dan geldt de volgende graaf:*



> *hierbij is $\phi_1 = \hat{\chi}_1, \phi_2 = \hat{\chi}_2, \phi_3 = \hat{\chi}_3$ zoals in voorbeeld 3.2.15. Dus als we de groep $\mathbb{Z}_6$ en de priem $p = 2$ nemen, dan hebben we drie blokken namelijk $B_1 = \{\chi_1, \chi_4, \phi_1\}, B_2 = \{\chi_2, \chi_5, \phi_2\}$ en $B_3 = \{\chi_3, \chi_6, \phi_3\}$.*

In het tweede voorbeeld kan men zich afvragen of bijvoorbeeld $B_1 \cup B_2$ geen p-blok is. Dit is niet het geval want we zullen later zien dat $B \cap Irr(G)$ precies één samenhangingscomponent is van de Brauer graaf.

Bij de gewone karakters hadden we de orthogonaliteitsrelatie

$$\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(x)\overline{\chi(y)} = 0 \tag{3.10}$$

als x en y niet geconjugeerd zijn, stelling 2.3.11. Een voordeel van p-blokken is dat we hier ook een orthogonaliteitsrelatie op hebben namelijk

$$\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G) \cap B} \chi(x)\overline{\chi(y)} = 0$$

waarbij B een p-blok. Wij zullen hier deze zogenaamde zwakke blok orthogonaliteitsrelatie bewijzen. Voordat we dat doen gaan we een projectieve karakter van G definiëren.

Definitie 3.4.7 ([8], p.272-273)**.** Voor $\phi \in \mathrm{IBr}(G)$ definiëren we

$$\Phi_\phi = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} d_{\chi\phi}\chi.$$

We noemen Φ_ϕ het *projectieve karakter* van G geassocieerd aan ϕ.

We kunnen Φ_ϕ ook uitdrukken als som van Brauer karakters.

Definitie 3.4.8. Als D de decompositiematrix is van een groep G dan noemen we $C = D^T D$ de *Cartan matrix.*

De matrix C is een $|\mathrm{IBr}(G)| \times |\mathrm{IBr}(G)|$ matrix en is in het bijzonder symmetrisch. Als $n = |\mathrm{IBr}(G)|$ en $c_i = (c_{i1}\ c_{i2}\ \dots\ c_{in})$ een rijvector is van C dan geldt $\Phi_{\phi_i} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\phi_j$.

Lemma 3.4.9 ([8], 15.21)**.** *Laat $\mathscr{A} \subset Irr(G)$ een vereniging zijn van samenhangingscomponenten van de Brauer graaf en laat $\mathscr{B} = \{\phi \in IBr(G) \mid d_{\chi\phi} \neq 0$ voor een $\chi \in \mathscr{A}\}$. Laat verder $x, y \in G$ met $p \nmid o(x)$ dan geldt*

$$\sum_{\chi \in \mathscr{A}} \chi(x)\overline{\chi(y)} = \sum_{\phi \in \mathscr{B}} \phi(x)\overline{\Phi_\phi(y)}.$$

Bewijs. Voor een $\chi \in \mathscr{A}$ geldt

$$\chi(x) = \sum_{\phi \in \mathscr{B}} d_{\chi\phi}\phi(x)$$

immers voor $\mu \in \mathrm{IBr}(G) - \mathscr{B}$ geldt $d_{\chi\mu} = 0$ vanwege de definitie van $\mathscr{B}$. Ook geldt als $\phi \in \mathscr{B}$ dan

$$\Phi_\phi(y) = \sum_{\chi \in \mathscr{A}} d_{\chi\phi}\chi(y)$$

want als $\zeta \in \mathrm{Irr}(G) - \mathscr{A}$ dan $d_{\zeta\phi} = 0$. Dit komt voort uit het feit dat $\mathscr{A}$ een vereniging van samenhangingscomponenten is. Als namelijk geldt dat $d_{\zeta\phi} \neq 0$ voor $\zeta \in \mathrm{Irr}(G) - \mathscr{A}$ dan geldt dat ζ en een $\chi \in \mathscr{A}$ dat $d_{\chi\phi}$ en $d_{\zeta\phi}$ niet gelijk aan 0 en dus hieruit zou volgen dat $\zeta \in \mathscr{A}$. Dus als $\zeta \in \mathrm{Irr}(G) - \mathscr{A}$ dan $d_{\zeta\phi} = 0$. Nu geldt

$$\sum_{\chi \in \mathscr{A}} \chi(x)\overline{\chi(y)} = \sum_{\chi \in \mathscr{A}, \phi \in \mathscr{B}} d_{\chi\phi}\phi(x)\overline{\chi(y)} = \sum_{\chi \in \mathscr{A}, \phi \in \mathscr{B}} \phi(x)(d_{\chi\phi}\overline{\chi(y)}) = \sum_{\phi \in \mathscr{B}} \phi(x)\overline{\Phi_\phi(y)}.$$

□

Gevolg 3.4.10 ([8], 15.22)**.** *Voor elke $\phi \in IBr(G)$ geldt $\Phi_\phi(y) = 0$ als $p|o(y)$. Bovendien geldt er dat $|P|$ een deler is van $\Phi_\phi(1)$ waarbij $P \in Syl_p(G)$, een Sylow p-groep.*

Bewijs. Laat G een groep en $\mathscr{P}$ de p-reguliere elementen van G. Neem $x \in \mathscr{P}$ en $y \in G$ waarvoor geldt $p|o(y)$. Nu geldt vanuit 3.10 dat

$$\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(x)\overline{\chi(y)} = 0.$$

Als we nu gebruik maken van lemma 3.4.9 met $\mathscr{A} = \mathrm{Irr}(G)$ en $\mathscr{B} = \mathrm{IBr}(G)$ dan krijgen we

$$\sum_{\phi \in \mathrm{IBr}(G)} \phi(x)\overline{\Phi_\phi(y)} = 0.$$

Doordat dit geldt voor alle $x \in \mathscr{P}$ en doordat Brauer karakters lineair onafhankelijk zijn, kunnen we concluderen dat $\Phi_\phi(y) = 0$ voor alle ϕ.
Laat nu $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ dan geldt dat het inproduct $[(\Phi_\phi)_P, 1_P] = \frac{1}{|P|}\sum_{p \in P} \Phi_\phi(p) \cdot 1$. Doordat we hebben bewezen dat $\Phi_\phi(y) = 0$ voor alle y waarvoor geldt $p|o(y)$ en doordat voor alle $x \in P$ waarbij $x \neq 1$ geldt $p|o(x)$ geldt dus dat $[(\Phi_\phi)_P, 1_P] = \frac{\Phi_\phi(1)}{|P|}$. Dus $|P|[(\Phi_\phi)_P, 1_P] = \Phi_\phi(1)$, doordat het inproduct een niet negatief geheel getal is, geldt nu dat $|P|$ een deler is van $\Phi_\phi(1)$. □

Gevolg 3.4.11 (zwakke blok orthogonaliteitsrelatie, [8], 15.23)**.** *Laat $x, y \in G$ met $p \nmid o(x)$ en $p|o(y)$. Laat B een p-blok zijn van G. Dan geldt*

$$\sum_{\chi \in B \cap Irr(G)} \chi(x)\overline{\chi(y)} = 0.$$

Bewijs. Als we lemma 3.4.9 gebruiken met $\mathscr{A} = B \cap \mathrm{Irr}(G)$ en $\mathscr{B} = B \cap \mathrm{IBr}(G)$ dan krijgen we

$$\sum_{\chi \in B \cap \mathrm{Irr}(G)} \chi(x)\overline{\chi(y)} = \sum_{\phi \in B \cap \mathrm{IBr}(G)} \phi(x)\overline{\Phi_\phi(y)}. \tag{3.11}$$

Doordat we in gevolg 3.4.10 hadden geconcludeerd dat $\Phi_\phi(y) = 0$ voor alle $\phi \in \mathrm{IBr}(G)$ als $p|o(y)$ is de rechterkant van 3.11 gelijk aan 0 en hieruit volgt het resultaat. □

We zullen nu eerst de definitie geven van een idempotent geven. Deze zullen we nodig hebben voor een aantal stellingen die we zo gaan bespreken.

Definitie 3.4.12. Een element x in de verzameling S waarop een binaire operatie $\cdot$ is gedefinieerd noemen we *idempotent* onder $\cdot$ als $x \cdot x = x$.

In de groepsalgebra $\mathbb{C}[G]$ zijn er ook idempotenten, zo is $e \in \mathbb{C}[G]$ een idempotent, immers $e^2 = e$. Maar er zijn ook idempotenten in $\mathbb{C}[G]$ die we kunnen construeren uit irreducibele karakters.

Lemma 3.4.13. *Voor $\chi \in Irr(G)$ definieert*

$$e_\chi = \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi(g)} g. \tag{3.12}$$

een idempotent in Z(C[G]); we noemen dit de idempotent die correspondeert met χ.

Bewijs. We willen bewijzen dat $e_\chi^2 = e_\chi$. Er geldt $e_\chi^2 = \frac{\chi(1)^2}{|G|^2} \sum_{g \in G} \overline{\chi(g)} g \sum_{h \in G} \overline{\chi(h)} h$. Neem $h = g^{-1}h$ dan krijgen we

$$\begin{aligned}
\frac{\chi(1)^2}{|G|^2} \sum_{g \in G} \overline{\chi(g)} g \sum_{h \in G} \overline{\chi(g^{-1}h)} g^{-1}h &= \frac{\chi(1)^2}{|G|^2} \sum_{g,h \in G} \overline{\chi(g)} g \overline{\chi(g^{-1}h)} g^{-1}h \\
&= \frac{\chi(1)^2}{|G|^2} \sum_{g,h \in G} \overline{\chi(g)\chi(g^{-1}h)} g g^{-1}h \\
&= \frac{\chi(1)^2}{|G|^2} \sum_{g,h \in G} \chi(g^{-1})\chi((g^{-1}h)^{-1})h \\
&= \frac{\chi(1)^2}{|G|^2} \sum_{g,h \in G} \chi(g^{-1})\chi(h^{-1}g)h.
\end{aligned}$$

Merk verder op dat $h^{-1}g$ in dezelfde conjugatieklasse zit als gh^{-1} want $gh^{-1} = h(h^{-1}g)h^{-1}$. Dus er geldt $\chi(h^{-1}g) = \chi(gh^{-1})$. Dus dan krijgen we

$$\frac{\chi(1)^2}{|G|^2} \sum_{g,h \in G} \chi(g^{-1})\chi(gh^{-1})h,$$

en vanuit A.1.1 geldt nu

$$\frac{\chi(1)^2}{|G|^2} \sum_{g,h \in G} \chi(g^{-1})\chi(gh^{-1})h = \frac{\chi(1)^2}{|G|^2} \sum_{h \in G} |G| \frac{\chi(h^{-1})}{\chi(1)} h = \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{h \in G} \chi(h^{-1})h = \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{h \in G} \overline{\chi(h)} h = e_\chi.$$

Dus we zien $e_\chi^2 = e_\chi$ dus we kunnen concluderen dat e_χ een idempotent is. ☐

Merk op dat over het algemeen $e_\chi \notin \tilde{R}[G]$, waarbij $\tilde{R}$ de ring van lokale gehele getallen zijn voor de priem p. Een gevolg hiervan is dat we geen idempotenten kunnen vinden van $F[G]$ door $\pi(e_\chi)$ toe te passen. We weten wel dat $e_\chi e_\psi = 0$ als $\chi \neq \psi$ dus de som van verschillende e_χ's zijn ook idempotenten. Merk op dat als $\mathscr{A} \subseteq \mathrm{Irr}(G)$ dan kunnen we achterhalen waar de verzameling $\mathscr{A}$ uit bestaat. Definieer namelijk $s = \sum_{\chi \in \mathscr{A}} e_\chi$ dan geldt $\mathscr{A} = \{\chi \in \mathrm{Irr}(G) \mid s e_\chi \neq 0\}$.

Stelling 3.4.14 (Osima, [8], 15.26)**.** *Laat $\mathscr{A}$ een samenhangingscomponent zijn van de Brauer graaf en laat $f = \sum_{\chi \in \mathscr{A}} e_\chi$. Schrijf $f = \sum a_g g$. Dan geldt*

(a) $a_g = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \mathscr{A}} \chi(1)\overline{\chi(g)}$*;*

(b) $a_g = 0$ *als* $p|o(g)$*;*

(c) $a_g \in \tilde{R}$ *voor alle* $g \in G$*.*

Bewijs. Bewering *(a)* volgt direct uit de definitie van f en formule 3.12.
Voor bewering *(b)* gaan we gebruik maken van *(a)* en van lemma 3.4.9. Vanuit *(a)* weten we $a_g = \frac{1}{|G|}\sum_{\chi\in\mathscr{A}}\chi(1)\overline{\chi(g)}$ en als we lemma 3.4.9 toepassen met $x = 1$ dan krijgen we

$$a_g = \frac{1}{|G|}\sum_{\phi\in\mathscr{B}}\phi(1)\overline{\Phi_\phi(g)}$$

waarbij $\mathscr{B} = \{\phi \in \mathrm{IBr}(G) \mid d_{\chi\phi} \neq 0 \text{ voor een } \chi \in \mathscr{A}\}$. Als $p|o(g)$ dan weten we uit gevolg 3.4.10 dat $\Phi_\phi(g) = 0$ voor alle $\phi \in \mathscr{B}$. Het resultaat volgt nu. Tevens geldt nu $a_g = 0 \in \tilde{R}$.
Voor bewering *(c)*, neem $p \nmid o(g)$, immers voor $p|o(x)$ hebben we al bewezen dat $a_g \in \tilde{R}$. Neem nu $x = g$ en $y = 1$ in lemma 3.4.9 dan krijgen we

$$a_g = \frac{1}{|G|}\sum_{\phi\in\mathscr{B}}\Phi_\phi(1)\overline{\phi(g)},$$

merk op dat we de geconjugeerde nemen over $\phi(g)$ want er geldt ook

$$\sum_{\chi\in\mathscr{A}}\overline{\chi(x)}\chi(y) = \sum_{\phi\in\mathscr{B}}\overline{\phi(x)}\Phi_\phi(y)$$

het bewijs hieraan is analoog aan het bewijs van lemma 3.4.9. Vanuit gevolg 3.4.10 weten we dat $|P|$ een deler is van Φ_ϕ voor alle $\phi \in \mathrm{IBr}(G)$ waarbij $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Verder weten we dat $|G| = |P|n$ voor een $n \in \mathbb{N}$ dus hieruit volgt $\Phi_\phi(1)/|G| \in \tilde{R}$ want $\Phi_\phi(1)/|G|$ bevat in haar priemfactorisatie geen macht meer van p. Verder weten we dat $\overline{\phi(g)} \in \tilde{R}$ en doordat $\tilde{R}$ een ring is geldt $a_g \in \tilde{R}$. □

Stelling 3.4.15 ([8], 15.27)**.** *Elke verzameling* $\mathscr{A} \subseteq$ *Irr*(G) *zodanig dat* $\sum_{\chi\in\mathscr{A}} e_\chi \in \tilde{R}[G]$ *is een vereniging van verzamelingen van Irr*$(G) \cap B$*. Bovendien geldt dat de samenhangingscomponenten van de Brauer graaf precies de verzameling* $B \cap$ *Irr*(G) *is van een* p*-blok.*

Bewijs. Laat $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ en laat ρ de representatie zijn die χ voortbrengt. In het boek van Isaacs wordt in hoofdstuk 2 bewezen dat $\rho(e_\chi) = Id$ als ρ χ voortbrengt en $\rho(e_\phi) = 0$ als ρ ϕ niet voortbrengt [[8], p.16-19]. Dus per definitie van onze functie ω_χ geldt er dat $\omega_\chi(e_\chi) = 1$ en $\omega_\chi(e_\phi) = 0$ als $\phi \neq \chi$. Definieer $f = \sum_{\chi\in\mathscr{A}} e_\chi$. Dan geldt dat $\chi \in \mathscr{A}$ dan en slechts dan als $\omega_\chi(f) = 1$. Ook geldt er dat $\chi \notin \mathscr{A}$ dan en slechts dan als $\omega_\chi(f) = 0$. Dus dan hieruit volgt dat $\chi \in \mathscr{A}$ dan en slechts dan als $\pi(\omega_\chi(f)) \neq 0$. Neem nu aan dat $f \in \tilde{R}[G]$. Dan geldt dat $\pi(\omega_\chi(f))$ allemaal gelijk zijn voor verschillende $\chi \in \mathscr{A}$, immers we hebben net gezien dat $\pi(\omega_\chi(f)) = 1$ als $\chi \in \mathscr{A}$. Doordat $e_\chi \in \mathbf{Z}(\mathbb{C}[G])$ weten we dat e_χ een lineaire combinatie is van de conjugatiesommen K_i kunnen we concluderen dat alle $\chi \in \mathscr{A}$ bevat zijn in een verzameling van de vorm $\mathrm{Irr}(G) \cap B$, immers het kan zijn dat $\pi(\omega_\chi(K_1)) = 1$, $\pi(\omega_\chi(K_i)) = 0$ voor $i \neq 1$ en $\pi(\omega_\chi(K_2)) = 1$ en $\pi(\omega_\phi(K_i)) = 0$ voor $i \neq 2$. Dan geldt nog steeds $\pi(\omega_\chi(f)) = \pi(\omega_\phi(f))$ maar ze zijn niet in hetzelfde blok bevat. Hiermee is het eerste deel van onze stelling bewezen.
Laat $\mathscr{A}$ een samenhangingscomponent zijn van de Brauer graaf. Dan geldt vanuit stelling 3.4.14 dat $\sum_{\chi\in\mathscr{A}} e_\chi \in \tilde{R}[G]$. Vanuit ons eerste bewijs van net kunnen we concluderen dat $\mathscr{A}$ een vereniging is van verzamelingen van $\mathrm{Irr}(G) \cap B$. Maar we hebben ook gezien in gevolg 3.4.5 dat $\mathrm{Irr}(G) \cap B$ een vereniging is van samenhangingscomponenten van de Brauer graaf. Doordat zowel $\mathscr{A}$ een vereniging is van $\mathrm{Irr}(G) \cap B$ en andersom moet gelden dat de samenhangingscomponenten precies de verzamelingen zijn van de vorm $\mathrm{Irr}(G) \cap B$ voor een p-blok B. □

We hebben nu dus drie verschillende karakterisaties gevonden van de verzamelingen $B \cap \mathrm{Irr}(G)$. De eerste karakterisatie was onze definitie ervan, namelijk $B \cap \mathrm{Irr}(G)$ zijn precies de equivalentieklassen onder de relatie $\sim$. Vanuit stelling 3.4.15 weten we nu ook dat de verzameling precies de minimale niet lege deelverzameling $\mathscr{A} \subseteq \mathrm{Irr}(G)$ is zodanig dat $\sum_{\chi \in \mathscr{A}} e_\chi \in \tilde{R}[G]$ en ook dat de verzameling precies de samenhangingscomponenten zijn van de Brauer graaf.
Het volgende lemma is een iets sterkere bewering dan stelling 3.3.9.

Lemma 3.4.16 ([8], 15.28)**.** *Laat B een blok van G zijn en laat $\phi \in IBr(G) \cap B$. Dan is ϕ een $\mathbb{Z}$ lineaire combinatie van Brauer karakters van de vorm $\hat{\chi}$ met $\chi \in Irr(G) \cap B$.*

Bewijs. Vanuit stelling 3.3.9 weten we dat $b_\chi \in \mathbb{Z}$ bestaan zodanig dat $\phi = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} b_\chi \hat{\chi}$. Nu kunnen we ϕ schrijven als $\phi = \theta_B + \theta_0$ waarbij

$$\theta_B = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G) \cap B} b_\chi \hat{\chi} \text{ en } \theta_0 = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G) - B} b_\chi \hat{\chi}.$$

We kunnen θ_B en θ_0 uitdrukken in termen van $\mathrm{IBr}(G)$ als we gebruik maken van de decompositie getallen $d_{\chi\mu}$ voor $\mu \in \mathrm{IBr}(G)$. Als $\chi \in B$ dan geldt $d_{\chi\mu} = 0$ als $\mu \notin B$. Dus θ_B is een lineaire combinatie van $\mu \in B \cap \mathrm{IBr}(G)$. Ook geldt dat als $\chi \notin B$ dan $d_{\chi\mu} = 0$. Dus θ_0 is een lineaire combinatie van $\mu \notin B \cap \mathrm{IBr}(G)$. Doordat $\phi \in B$ en doordat $\phi = \theta_B + \theta_0$ moet gelden dat $\phi = \theta_B$. □

Stelling 3.4.17 ([8], 15.29)**.** *Laat B een p-blok zijn van G. Dan geldt*

$$|Irr(G) \cap B| \geq |IBr(G) \cap B|.$$

Laat $\chi \in Irr(G) \cap B$. Dan zijn de volgende beweringen equivalent.

(a) $|Irr(G) \cap B| = |IBr(G) \cap B|$.

(b) $p \nmid \frac{|G|}{\chi(1)}$.

(c) $Irr(G) \cap B = \{\chi\}$.

Tevens geldt dan $IBr(G) \cap B = \{\hat{\chi}\}$.

Bewijs. Laat $D = (d_{\chi\phi})$ de decompositiematrix zijn en laat D_B de deelmatrix zijn die correspondeert met de kolommen en rijen geïndexeerd door elementen van B. Voor elke $\phi \in B$ geldt dat de kolomvector D een nul bevat als deze niet bevat is in D_B, immers als er een niet nul element bevat is buiten de kolom D_B dan zou de corresponderende karakter χ in hetzelfde p-blok zitten als deze ϕ en dat is weer een tegenspraak. Vanuit stelling 3.3.3 weten we dat D lineair onafhankelijke kolommen heeft. Dit heeft als gevolg dat D_B ook lineair onafhankelijke kolommen moet hebben. Dus hieruit volgt dat er op zijn minst evenveel rijen moet zijn als kolommen. Dus hieruit volgt $|\mathrm{Irr}(G) \cap B| \geq |\mathrm{IBr}(G) \cap B|$.
We gaan nu de equivalentie aantonen van *(a)*,*(b)* en *(c)*.
Neem eerst *(a)* aan. Dan weten we dat D_B een inverteerbare matrix is. Laat nu $D_B^{-1} = (a_{\phi\chi})$. Voor een gegeven $\chi \in \mathrm{Irr}(G) \cap B$ geldt er

$$\sum_{\phi \in B} a_{\phi\chi} \Phi_\phi = \sum_{\phi \in B} a_{\phi\chi} \left(\sum_{\xi \in \mathrm{Irr}(G) \cap B} d_{\xi\phi} \xi \right),$$

waarbij we $\xi \in \mathrm{Irr}(G) \cap B$ want de decompositie getallen daarbuiten geven 0. We kunnen dit omschrijven naar

$$\sum_{\xi \in \mathrm{Irr}(G) \cap B} \left(\sum_{\phi \in B} a_{\phi\chi} d_{\xi\phi} \right) \xi.$$

Merk nu op dat deze sommatie precies gelijk is aan χ, dit komt doordat $(a_{\phi\chi})$ de inverse is van $D_B = (d_{\chi\phi})$. Dat betekent dat $d_{\xi\phi} a_{\phi\chi} = \delta_{\xi\chi}$. Dus we kunnen concluderen

$$\sum_{\phi \in B} a_{\phi\chi} \Phi_\phi = \sum_{\xi \in \mathrm{Irr}(G) \cap B} \left(\sum_{\phi \in B} a_{\phi\chi} d_{\xi\phi} \right) \xi = \chi.$$

Dus χ is een lineaire combinatie van Φ_ϕ wat weer inhoudt vanuit gevolg 3.4.10 dat $\chi(y) = 0$ als $p | o(y)$. Als nu $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ dan geldt

$$|P|[\chi_P, 1_P] = |P|[(\sum_{\phi \in B} a_{\phi\chi} \Phi_\phi)_P, 1_P] = \sum_{\phi \in B} a_{\phi\chi} |P|[(\Phi_\phi)_P, 1_P] = \sum_{\phi \in B} a_{\phi\chi} \Phi_\phi(1) = \chi(1),$$

waarbij we gebruik hebben gemaakt van de lineariteit van het inproduct en gevolg 3.4.10. Dus hieruit volgt dat $\chi(1)$ in haar priemfactorisatie een macht van p heeft en dit heeft als gevolg dat $\frac{|G|}{\chi(1)}$ geen macht van p bevat. Dus $p \nmid \frac{|G|}{\chi(1)}$.
Neem nu *(b)* aan dan geldt $p \nmid \frac{|G|}{\chi(1)}$. Neem aan dat $|G| = p^k z$ voor p priem en $k, z \in \mathbb{N}$ dan weten we dat $\chi(1) = p^k x$ voor $x \in \mathbb{N}$. Dit weten we want $\chi(1)$ kan niet een kleinere macht van p hebben want anders zou $p \mid \frac{|G|}{\chi(1)}$ maar $\chi(1)$ kan ook niet een hogere macht van p hebben want dan zou gelden $\chi(1) \nmid |G|$. Hieruit volgt dat $\frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi(g)} \in \tilde{R}$, immers het bevat geen machten van p. Dus $\frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi(g)} g \in \tilde{R[G]}$. We gaan nu gebruik maken van stelling 3.4.15 met $\mathscr{A} = \{\chi\}$. Dan volgt dat $\mathscr{A}$ een vereniging is van verzamelingen van de vorm $\mathrm{Irr}(G) \cap B$. Doordat $\mathscr{A}$ precies één element bevat geldt nu dat $\mathrm{Irr}(G) \cap B = \{\chi\}$.
Neem nu *(c)* aan. Dan geldt

$$0 < |\mathrm{IBr}(G) \cap B| \leq |\mathrm{Irr}(G) \cap B| = 1,$$

waarbij de strikte ongelijkheid komt vanuit gevolg 3.3.6. Dus *(a)* is hiermee bewezen.
Ook geldt dat als $\mathrm{IBr}(G) \cap B = \{\phi\}$ dan geldt $\phi = b\hat{\chi}$ voor een $b \in \mathbb{Z}$ vanuit lemma 3.4.16. Dus $\hat{\chi} = d_{\chi\phi}\phi = d_{\chi\phi} b \hat{\chi}$. Dus $d_{\chi\phi} b = 1$ en doordat $b \in \mathbb{Z}$ en $d_{\chi\phi} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ moet gelden $d_{\chi\phi} = 1$. Dus $\hat{\chi} = \phi$. $\square$

De theorie die wij hier behandeld hebben, is niet alle theorie die hierover bekend is. Isaacs bespreekt bijvoorbeeld in zijn boek nog p-defect groepen en Brauers eerste en tweede hoofdstelling. Deze theorie gaan wij hier niet bespreken.

Hoofdstuk 4

Voorbeelden

Nu we alle theorie hebben besproken gaan we een aantal voorbeelden uitwerken.

4.1 $\mathbb{Z}_p$

Als p priem is dan heeft $\mathbb{Z}_p$ precies p elementen. Dus als we een karakteristiek ongelijk aan p nemen, dan geldt vanuit stelling 3.3.7 dat $\mathrm{IBr}(G) = \mathrm{Irr}(G)$. Dus we gaan $\mathbb{Z}_p$ beschouwen over een lichaam van karakteristiek p. De karaktertabel van $\mathbb{Z}_p$ ziet er als volgt uit

	0	1	2	$\dots$	$p-1$
χ_1	1	1	1	$\dots$	1
χ_2	1	ω_p	ω_p^2	$\dots$	ω_p^{p-1}
χ_3	1	ω_p^2	ω_p^4	$\dots$	$\omega_p^{2(p-1)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
χ_p	1	ω_p^{p-1}	$\omega_p^{2(p-1)}$	$\dots$	ω_p

.

Het enige p-reguliere element in $\mathbb{Z}_p$ is het element 0. Hierdoor weten we dat er ook één Brauer karakter is en die wordt gegeven door $\phi = \hat{\chi_1}$ en dit is het triviale karakter. De tabel is

	0
ϕ	1

.

De decompositiematrix is dan $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ en de Cartan matrix is $D^T D = \begin{pmatrix} p \end{pmatrix}$. Dus de projectieve karakter Φ van ϕ wordt gegeven door $\Phi = \chi_1 + \chi_2 + \ldots + \chi_p = p\phi$. Verder hebben we slechts één p-blok in dit geval, namelijk $B = \{\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_p, \phi\}$ en in de Brauer graaf zijn alle irreducibele normale karakters met elkaar verbonden, immers ϕ verbindt ze allemaal.

4.2 D_4

Als we de groep D_4 beschouwen dan is het makkelijk om de Brauer karakters te bepalen. Merk namelijk op dat $|D_4| = 8 = 2^3$. Dus elk element behalve het eenheidselement heeft een orde die deelbaar is door 2. Dus we zouden slechts één Brauer karakter hebben over een lichaam van karakteristiek 2 namelijk het karakter waarvoor geldt $\phi(e) = 1$. Over een lichaam van karakteristiek ongelijk aan 2 zal gelden $p \nmid |D_4|$ dus de Brauer karakters zouden gelijk zijn aan de normale karakters.

Opmerking 4.2.1. *Dit is natuurlijk waar voor elke groep van orde* 8. *Over het algemeen geldt dat als we een lichaam* F *beschouwen van karakteristiek* p *dat dan geldt dat voor elke groep van orde* p^k *met* p *priem en* $k \in \mathbb{N}$ *er slechts één Brauer karakter is. Namelijk het triviale karakter* $\phi(e) = 1$. *Voor zo'n groep geldt natuurlijk ook dat er maar een* p*-blok is.*

4.3 D_3

4.3.1 Als $p = 2$

De 2-reguliere elementen van D_3 zijn $\mathscr{P} = \{e, r, r^2\}$. Als we de karaktertabel van D_3 beperken tot deze elementen krijgen we de volgende tabel:

	e	r
$\hat{\chi_1}$	1	1
$\hat{\chi_2}$	1	1
$\hat{\chi_3}$	2	-1

.

We weten dat er twee irreducibele Brauer karakters zijn. We zien dat $\hat{\chi_1} = \hat{\chi_2}$ het triviale Brauer karakter is en noemen we ϕ_1. We claimen dat $\hat{\chi_3}$ de andere irreducibele Brauer karakter is. Als $\hat{\chi_3}$ niet een irreducibel Brauer karakter is dan weten we dat $\hat{\chi_3} = \sum_{\phi \in \mathrm{IBr}(G)} n_\phi \phi$ waarbij $n_\phi \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Dus het is een lineaire combinatie van de irreducibele Brauer karakters. Doordat we weten dat er twee irreducibele Brauer karakters zijn weten we dus dat $\hat{\chi_3} = n_{\phi_1}\phi_1 + n_{\phi_2}\phi_2$. Doordat we aannemen dat $\hat{\chi_3}$ reducibel is, moet ϕ_2 een Brauer karakter zijn van graad 1. We weten dat $\hat{\chi_3} \neq 2\phi_1$. Dus er zijn nog twee opties over. Namelijk $\hat{\chi_3} = \phi_1 + \phi_2$ of $\hat{\chi_3} = 2\phi_2$. Als $\hat{\chi_3} = \phi_1 + \phi_2$ dan $\phi_2(r) = -2$, want $-1 = \hat{\chi_3} = \phi_1(r) + \phi_2(r) = 1 + \phi_2(r)$. Dus $\phi_2(r) = -2$. Maar doordat we weten dat ϕ_2 een Brauer karakter is van graad 1 weten we dus ook dat de representatie gelijk is aan de waarde van het karakter. Dus de representatie die dit karakter voortbrengt wordt gegeven door $\rho : D_3 \to M_1(F)$ met F een lichaam van karakteristiek 2 en we weten nu $r \mapsto (2)$ maar in karakteristiek 2 is dit hetzelfde als $r \mapsto (0)$. Maar nu is ρ geen representatie meer, immers $r^3 = e$ maar $\rho(r)^3 = (0) \neq (1)$. Dus we weten nu dat $\hat{\chi_3} \neq \phi_1 + \phi_2$.
Stel nu dat $\hat{\chi_3} = 2\phi_2$. Dan moet gelden $\phi_2(r) = -\frac{1}{2}$. Maar $-\frac{1}{2}$ is geen algebraïsch geheel getal terwijl een Brauer karakter de som is van eenheidswortels en dus ook een algebraïsch geheel getal. Dus $\hat{\chi_3} \neq 2\phi_2$. Doordat we geen ander Brauer karakter kunnen construeren van graad 1 moet gelden dat $\hat{\chi_3}$ een irreducibel Brauer karakter is van graad 2. Hiermee hebben we alle Brauer karakters gevonden van D_3 over een lichaam van karakteristiek 2. Dus de decompositiematrix en de Cartan matrix zijn als volgt gegeven:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dus $\Phi_{\phi_1} = \chi_1 + \chi_2 = 2\phi_1$ en $\Phi_{\phi_2} = \chi_3 = \phi_2$. Dus er zijn twee blokken voor de $p = 2$ namelijk $B_1 = \{\chi_1, \chi_2, \phi_1\}$ en $B_2 = \{\chi_3, \phi_2\}$. We zien hier dat stelling 3.4.17 hier van toepassing is. Immers voor B_2 geldt $|\mathrm{Irr}(G) \cap B| = |\mathrm{IBr}(G) \cap B|$, $\mathrm{Irr}(G) \cap B = \{\chi\}$ en $\mathrm{IBr}(G) \cap B = \{\hat{\chi}\}$. Ook geldt $p \nmid \frac{|G|}{\chi(1)}$ want $p = 2$, $|G| = 6$ en $\chi(1) = 2$. Er geldt $\frac{|G|}{\chi(1)} = 3$. Dus $p \nmid \frac{|G|}{\chi(1)}$.

4.3.2 Als $p = 3$

In het vorige hoofdstuk hebben we vaak als groep D_3 genomen over een lichaam van karakteristiek 3, zie voorbeelden 3.2.15, 3.3.5 en 3.4.6. De decompositiematrix D en de Cartan matrix C zijn als volgt

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = D^T D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

De projectieve karakters zijn $\Phi_{\phi_1} = \chi_1 + \chi_3 = 2\phi_1 + \phi_2$ en $\Phi_{\phi_2} = \chi_2 + \chi_3 = \phi_1 + 2\phi_2$. In voorbeeld 3.4.6 weten we dat $B = \{\chi_1, \chi_2, \chi_3, \phi_1, \phi_2\}$. Dus $B \cap \mathrm{Irr}(G) = \mathrm{Irr}(G)$ en $B \cap \mathrm{IBr}(G) = \mathrm{IBr}(G)$. Neem nu $x = e$ en $y = s$ dan geldt $\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(x)\overline{\chi(y)} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot -1 + 2 \cdot 0 = 0$. Ook geldt $\sum_{\phi \in \mathrm{IBr}(G)} \phi(x)\overline{\Phi_\phi(y)} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot -1 = 0$. Dus we zien hier dat $\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(x)\overline{\chi(y)} = \sum_{\phi \in \mathrm{IBr}(G)} \phi(x)\overline{\Phi_\phi(y)}$ zoals in lemma 3.4.9.

4.4 A_4

4.4.1 Als $p = 2$

In voorbeeld 3.2.15 hebben we de karaktertabel van A_4 gezien op de 2-reguliere elementen. We zien dat er drie conjugatieklassen zijn van de 2-reguliere elementen en dus zijn er drie irreducibele Brauer karakters. Tevens zijn dat (in notatie van voorbeeld 3.2.15) $\phi_1 = \hat{\chi_1}, \phi_2 = \hat{\chi_2}$ en $\phi_3 = \hat{\chi_3}$. De decompositiematrix is gegeven voorbeeld 3.3.5 en de Cartan matrix is dus

$$C = D^T D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dus de projectieve karakters worden gegeven door

$$\begin{aligned} \Phi_{\phi_1} &= \chi_1 + \chi_4 = 2\phi_1 + \phi_2 + \phi_3; \\ \Phi_{\phi_2} &= \chi_2 + \chi_4 = \phi_1 + 2\phi_2 + \phi_3; \\ \Phi_{\phi_3} &= \chi_3 + \chi_4 = \phi_1 + \phi_2 + 2\phi_3. \end{aligned}$$

4.4.2 Als $p = 3$

De 3-reguliere elementen van A_4 zijn $\mathscr{P} = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$. De karaktertabel beperkt op de 3-reguliere elementen ziet er als volgt uit

	e	$(12)(34)$
$\hat{\chi_1}$	1	1
$\hat{\chi_2}$	1	1
$\hat{\chi_3}$	1	1
$\hat{\chi_4}$	3	-1

We zien dat $\hat{\chi_1} = \hat{\chi_2} = \hat{\chi_3}$ en dat het de triviale Brauer karakter is. Dus laat $\phi_1 = \hat{\chi_1}$. We weten dat er nu nog één irreducibele Brauer karakter is, ϕ_2. We gaan bewijzen dat $\phi_2 = \hat{\chi_4}$.

Beschouw de vectorruimte F^4 met de natuurlijke basis:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dan werkt S_4 en dus ook A_4 natuurlijk op de basisvectoren door het als volgt te definiëren: $ge_i = e_{gi}$ met $g \in A_4$. Dus neem bijvoorbeeld $(12)(34)$ en de vector e_1+e_3 dan geldt $(12)(34)(e_1+e_3) = e_2+e_4$. Deze module wordt ook wel de permutatie module genoemd. Deze module heeft een invariante 1-dimensionale deelruimte die wordt gegeven door $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$, immers voor alle $g \in A_4$ geldt $g(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$. Als we het complement beschouwen van deze deelruimte krijgen we een 3-dimensionale deelruimte $M = F^3$ en dat wordt opgespannen door

$$f_1 = e_1 - e_4 \;\; f_2 = e_2 - e_4 \;\; f_3 = e_3 - e_4.$$

De generatoren voor de groep A_4 zijn $(12)(34)$ en (123). De basis werkt op deze generatoren als volgt: $(123)f_1 = f_2, (123)f_2 = f_3$ en $(123)f_3 = f_1$ en $(12)(34)f_1 = e_2 - e_3 = f_2 - f_3, (12)(34)f_2 = e_1 - e_3 = f_1 - f_3$ en $(12)(34)f_3 = e_4 - e_3 = -f_3$. Als de module M niet irreducibel is dan moet er gelden $M = M_1 + M_2$ waarbij M_1 of M_2 van dimensie 1 is en niet triviaal. Dus laat zonder verlies van algemeenheid M_1 dimensie 1 hebben en laat z de vector zijn die M_1 opspant. Dan moet gelden $(123)z = az$ en $(12)(34)z = bz$ voor $a, b \neq 0$. Laat nu $z = x_1f_1 + x_2f_2 + x_3f_3$ zijn, immers $z \in M$ en f_1, f_2, f_3 is een basis voor M. Dan geldt $(123)z = x_1f_2 + x_2f_3 + x_3f_1$ en er moet gelden $(123)z = az$. Hieruit volgt

$$ax_1 = x_3; \tag{4.1}$$
$$ax_2 = x_1; \tag{4.2}$$
$$ax_3 = x_2. \tag{4.3}$$

Als we 4.2 in 4.1 substitueren dan krijgen we $a^2x_2 = x_3$ en als we hier 4.3 in substitueren dan krijgen we $a^3x_3 = x_3$ dus $a^3 = 1$. Doordat $a \in F$ waarbij F een lichaam is van karakteristiek 3 geldt nu $a = 1$. Doordat $a = 1$ geldt ook $x_1 = x_2 = x_3$. Noem nu $A = x_1$. Dan geldt $z = A(f_1 + f_2 + f_3)$. Er moet ook nog steeds gelden $(12)(34)z = bz$. Er geldt $(12)(34)z = (12)(34)A(f_1 + f_2 + f_3) = A(f_1+f_2)$. Ook geldt $bz = bA(f_1+f_2+f_3)$. Dus er moet gelden $A(f_1+f_2) = bA(f_1+f_2+f_3)$. Maar we weten dat $b, A \neq 0$. Dus dit is niet mogelijk. Hierdoor is er geen niet triviale 1-dimensionale module. Dus hieruit volgt dat M irreducibel is over het lichaam F. Dus in het bijzonder is $\hat{\chi_4}$ een irreducibel Brauer karakter.
Dus de decompositiematrix D en Cartan matrix C zien er als volgt uit:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

We hebben in dit geval twee p-blokken namelijk $B_1 = \{\chi_1, \chi_2, \chi_3, \hat{\chi_1}\}$ en $B_2 = \{\chi_4, \hat{\chi_4}\}$. We zien hier wederom dat stelling 3.4.17 hier van toepassing is. Immers voor B_2 geldt $|\mathrm{Irr}(G) \cap B| = |\mathrm{IBr}(G) \cap B|$, $\mathrm{Irr}(G) \cap B = \{\chi\}$ en $\mathrm{IBr}(G) \cap B = \{\hat{\chi}\}$.

Hoofdstuk 5

Hyperbolische 3-variëteiten

Een hyperbolische 3-variëteit is een variëteit van dimensie 3 met de hyperbolische metriek. Elke variëteit heeft een zogenaamde fundamentaalgroep Γ. Intuïtief gezien bevat een fundamentaalgroep alle paden die beginnen en eindigen in een vast punt. De groepsactie van deze groep is de concatenatie van paden. Als we twee paden door een continue functie in elkaar kunnen laten overlopen dan geven ze hetzelfde element in de fundamentaalgroep [[7], p.24]. Interessanter om te bestuderen zijn de (abelse) homologiegroepen. Wij zullen vooral geïnteresseerd zijn in de eerste homologiegroep en die wordt gegeven door de abelianisatie van de fundamentaalgroep [[7], p.166]. Een eigenschap van de abelianisatie is dat de abelianisatie het maximaal abelse quotiënt is van een groep [[6], p.169]. Naast de eerste homologiegroep is er ook een isometriegroep. Dit zijn bijectieve isometrieën van de metrische ruimte naar zichzelf en zulke functies vormen een groep onder functiecompositie. Vanuit Mostow rigiditeit [13] geldt dat de isometriegroep voor hyperbolische 3-variëteiten isomorf is aan de uitwendige-automorfismegroep $\mathrm{Out}(\Gamma) = \mathrm{Aut}(\Gamma)/\mathrm{Inn}(\Gamma)$, dus de factorgroep van de gehele automorfismegroep en de groep van inwendige automorfismen [11] en in het bijzonder is de isometriegroep voor de hyperbolische 3-variëteiten die wij gaan bestuderen isomorf aan $N(\Gamma)/\Gamma$, waarbij $N(\Gamma)$ de normalizator is van Γ in de isometriegroep van $\mathbb{H}^3$ [10][11]. De isometriegroep werkt dus via automorfismen op de fundamentaalgroep, hierdoor zal de isometriegroep ook op de abelianisatie werken via automorfismen. Als de abelianisatie en de isometriegroep eindig zijn dan kunnen we van de actie van de isometriegroep op de abelianisatie een representatie maken. Deze representatie zal een modulaire representatie zijn van de isometriegroep als de abelianisatie een abelse elementaire p-groep is. Ons doel hier is om deze representaties te maken voor twee verschillende hyperbolische 3-variëteiten en daarvan het Brauer karakter te bepalen.
In het eerste voorbeeld gaan we gebruik maken van Coxeter groepen en diagrammen. Een Coxeter groep is een groep van de vorm $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \mid (a_i a_j)^{m_{ij}} = 1\rangle$ waarbij $m_{ii} = 1$ en $m_{ij} \geq 2$ als $i \neq j$. Doordat $m_{ii} = 1$ geldt er $(a_i a_i)^1 = a_1^2 = 1$, dus elke voortbrenger van de groep is van orde 2. Bij een Coxeter groep hoort een Coxeter diagram. Een Coxeter diagram is een graaf waarbij we de voortbrengers als knopen zien en twee voortbrengers zijn verbonden dan en slechts dan als $m_{ij} \geq 3$. Als $m_{ij} \geq 4$ dan labelen we de tak met de waarde van m_{ij}. We kunnen door middel van deze graaf identificeren met welke groep de Coxeter groep isomorf is. Voor een uitgebreide uitleg over Coxeter groepen en diagrammen verwijzen we naar Wilson [15].

5.1 Weeks variëteit

De Weeks variëteit $\mathcal{M}_1$ is een georiënteerde 3-dimensionale gesloten hyperbolische variëteit. Deze variëteit heeft het kleinste volume van alle georiënteerde 3-dimensionale gesloten hyperbolische variëteiten. De fundamentaalgroep van de Weeks variëteit wordt gegeven door

$$\Gamma = \left\langle a, b \mid abab^2a^{-2}b^2 = baba^2b^{-2}a^2 = 1 \right\rangle.$$

We gaan hier eerst de eerste homologiegroep van bepalen. Om dit te doen gaan we dus de abelianisatie van de fundamentaalgroep bepalen. Laat $f : \Gamma \to \Gamma/[\Gamma, \Gamma]$ het natuurlijke homomorfisme zijn en laat $A := f(a)$ en $B := f(b)$. Dan geldt dat $f(ab) = A + B$, $f(a^i) = iA$, $f(b^j) = jB$ en $f(1) = 0$. Hieruit volgt dat de relaties van Γ onder de abelianisatie gegeven worden als volgt:

$$f(abab^2a^{-2}b^2) = A + B + A + 2B - 2A + 2B = 5B = 0; \tag{5.1}$$

$$f(baba^2b^{-2}a^2) = B + A + B + 2A - 2B + 2A = 5A = 0. \tag{5.2}$$

Dus we weten $5A = 5B = 0$. Hieruit concluderen we dat A en B elementen zijn van orde 5 en dat ze de abelianisatie voortbrengen. Vanuit de universele eigenschap kunnen we concluderen dat $A, B \neq 0$ en dat $A \notin \langle B \rangle$ en dus is de abelianisatie gelijk aan $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/(a^5, b^5) = \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$. Dit kunnen we concluderen want we hebben al commutatoren uitgedeeld en het quotiënt dat we nu hebben is een abelse groep. Als we meer commutatoren uitdelen dan nemen we dus de abelianisatie van $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ maar doordat $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ al abels is, is de abelianisatie de groep zelf. Dit brengt ons tot de conclusie dat $\Gamma/[\Gamma, \Gamma] \cong \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$.
Dan gaan we nu de isometriegroep, isom$(\mathcal{M}_1)$ bepalen. Molnar heeft bepaald dat de isometriegroep van $\mathcal{M}_1$ wordt voortgebracht door de volgende drie automorfismen van Gamma[12]:

$$\begin{cases} a \mapsto a^{-1}, \\ b \mapsto b^{-1}, \end{cases} \qquad \begin{cases} a \mapsto b, \\ b \mapsto a, \end{cases} \qquad \begin{cases} a \mapsto a, \\ b \mapsto a^{-1}b^{-1}. \end{cases}$$

Vanuit de Mostow rigidity stelling bestaan er $r, s, t \in \mathbb{H}^3$ zodanig dat

$$\begin{cases} rar^{-1} = a^{-1}, \\ rbr^{-1} = b^{-1}, \end{cases} \qquad \begin{cases} sas^{-1} = b, \\ sbs^{-1} = a, \end{cases} \qquad \begin{cases} tat^{-1} = a, \\ tbt^{-1} = a^{-1}b^{-1}. \end{cases}$$

Vanuit deze relaties kunnen we een aantal andere relaties uitwerken. Er geldt namelijk:

$$\begin{cases} r^2ar^{-2} = rrar^{-1}r^{-1} = ra^{-1}r^{-1} = a, \\ r^2br^{-2} = rrbr^{-1}r^{-1} = rb^{-1}r^{-1} = b, \end{cases} \qquad \begin{cases} s^2as^{-2} = ssas^{-1}s^{-1} = sbr^{-1} = a, \\ s^2bs^{-2} = ssbs^{-1}s^{-1} = sas^{-1} = b, \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^2at^{-2} = ttat^{-1}t^{-1} = tat^{-1} = a, \\ t^2bt^{-2} = ttbt^{-1}t^{-1} = ta^{-1}b^{-1}t^{-1} = a^{-1}ba, \end{cases} \qquad \begin{cases} rsa(rs)^{-1} = b^{-1}, \\ rsb(rs)^{-1} = a^{-1}, \end{cases} \qquad \begin{cases} (rs)^2a(rs)^{-2} = a, \\ (rs)^2b(rs)^{-2} = b, \end{cases}$$

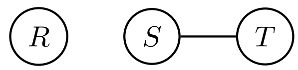
$$\begin{cases} rta(rt)^{-1} = a^{-1}, \\ rtb(rt)^{-1} = ab, \end{cases} \qquad \begin{cases} (rt)^2a(rt)^{-2} = a, \\ (rt)^2b(rt)^{-2} = b, \end{cases} \qquad \begin{cases} sta(st)^{-1} = b, \\ stb(st)^{-1} = b^{-1}a^{-1}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (st)^2a(st)^{-2} = b^{-1}a^{-1}, \\ (st)^2b(st)^{-2} = a, \end{cases} \qquad \begin{cases} (st)^3a(st)^{-3} = a, \\ (st)^3b(st)^{-3} = b, \end{cases} \qquad \begin{cases} (rst)a(rst)^{-1} = b^{-1}, \\ (rst)b(rst)^{-1} = ba. \end{cases}$$

Dus we zien dat

$$r^2 = s^2 = (rs)^2 = (rt)^2 = (st)^3 = 1 \text{ en } t^2 = a^{-1}. \tag{5.3}$$

Er geldt $\text{Isom}(\mathcal{M}_1) = N(\Gamma)/\Gamma$, waarbij $N(\Gamma)$ de normalisator is van Γ in de isometriegroep $\text{Isom}(\mathbb{H}^3)$. Laat nu $R := r\Gamma$, $S := s\Gamma$ en $T = t\Gamma$ dan geldt $R, S, T \in N(\Gamma)/\Gamma$. Dan gelden de relaties van 5.3 nog steeds behalve dat ook geldt $T^2 = 1$ immers $t^2\Gamma = a^{-1}\Gamma$ en $a^{-1} \in \Gamma$, dus $a^{-1}\Gamma = \Gamma$. Uit dit alles volgt dat $\text{Isom}(\mathcal{M}_1)$ wordt voortgebracht door R, S en T. Uit de relaties die we hebben volgt dat $\text{Isom}(\mathcal{M}_1)$ een Coxeter groep is met als Coxeter diagram:



Vanuit het Coxeter diagram kunnen we concluderen dat de $\text{Isom}(\mathcal{M}_1)$ isomorf is aan D_6[11]. We weten dat R, S en T de isometriegroep voortbrengen en dus ook D_6. De natuurlijke voortbrengers van D_6 zijn r en s. Vanuit de relaties die we hebben kunnen we de voortbrengers uitdrukken in de natuurlijke voortbrengers. Als we dat doen dan zien we dat $R = r^3, S = s$ en $T = r^2 s$, immers nu zijn alle voortbrengers en RT en RS van orde 2 en ST is van orde 3.
De isometriegroep werkt op Γ en dus ook op de abelianisatie. De actie van de isometriegroep op de abelianisatie kunnen we weergeven in matrices. Dan krijgen we een 2-dimensionale mod 5 representatie van D_6. Als we bijvoorbeeld de actie R op de abelianisatie bekijken dan zien we dat $A \mapsto -A$ en $B \mapsto -B$, immers $A^{-1} = -A$ en $B^{-1} = -B$. Als we dit voor alle elementen doen van D_6 dan krijgen we de volgende matrices

$$R = r^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \; S = s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; T = r^2 s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$ST = r^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \; RST = r = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

De eigenwaarden van r^3 zijn $\lambda_1 = -1$ en $\lambda_2 = -1$ dus de som van de eigenwaarden is -2. Als we de som van de eigenwaarden nemen van de elementen hierboven krijgen we het volgende Brauer karakter tabel:

	e	r	r^2	r^3	s	rs
ϕ	2	1	-1	-2	0	0

.

We merken op dat dit een irreducibel gewoon karakter is van D_6 en dat $5 \nmid |D_6| = 12$. Dus vanuit 3.3.7 hebben we nu ook een irreducibel Brauer karakter van D_6.

5.2 Seifert-Weber variëteit

De Seifert-Weber variëteit is een van de eerste voorbeelden van gesloten hyperbolische 3-variëteiten die men ontdekt heeft. De fundamentaalgroep van de Seifert-Weber variëteit wordt gegeven door

$$\Gamma = \langle a_1, a_2, \ldots, a_6 \mid a_3^{-1} a_6 a_4^{-1} a_5 a_2 = a_6 a_2^{-1} a_3 a_5 a_1^{-1} = a_3 a_4^{-1} a_6 a_5^{-1} a_1 = a_2^{-1} a_6 a_3^{-1} a_4 a_1 = a_2 a_4 a_5^{-1} a_6 a_1^{-1} = a_4 a_2 a_5 a_3 a_1 = 1 \rangle.$$

We gaan hier ook de eerste homologiegroep van bepalen. Dit doen we op eenzelfde manier als het vorige voorbeeld. Laat $f : \Gamma \to \Gamma/[\Gamma, \Gamma]$ het natuurlijke homomorfisme zijn en laat $A_i = f(a_i)$ voor

$1 \leq i \leq 6$. Vanuit de relaties krijgen we dan de volgende zes relaties:

$$A_2 - A_3 - A_4 + A_5 + A_6 = 0; \tag{5.4}$$
$$A_1 + A_3 - A_4 - A_5 + A_6 = 0; \tag{5.5}$$
$$-A_1 + A_2 + A_4 - A_5 + A_6 = 0; \tag{5.6}$$
$$-A_1 - A_2 + A_3 + A_5 + A_6 = 0; \tag{5.7}$$
$$A_1 - A_2 - A_3 + A_4 + A_6 = 0; \tag{5.8}$$
$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = 0. \tag{5.9}$$

Als we alle vergelijking waarin A_1 voorkomt omschrijven zodat A_1 wordt uitgedrukt in de rest kunnen we al die vijf vergelijkingen bij elkaar optellen en dan zullen we tot de conclusie komen dat $5A_1 = 0$, evenzo kunnen we dit doen voor A_2 en A_3 en komen we ook hier tot de conclusie dat $5A_2 = 5A_3 = 0$. Als we 5.4 omschrijven dan krijgen we $A_4 = A_2 - A_3 + A_5 + A_6$, als we 5.7 omschrijven krijgen we $A_5 = A_1 + A_2 - A_3 - A_6$. Dus als we dit combineren krijgen we:

$$\begin{aligned}
A_4 &= A_2 - A_3 + A_5 + A_6 \\
A_4 &= A_2 - A_3 + (A_1 + A_2 - A_3 - A_6) + A_6 \\
A_4 &= A_2 - A_3 + A_1 + A_2 - A_3 - A_6 + A_6 \\
A_4 &= A_1 + 2A_2 - 2A_3 \\
A_4 &= A_1 + 2A_2 - 2A_3 + 5A_3 \\
A_4 &= A_1 + 2A_2 + 3A_3.
\end{aligned}$$

Als we nu 5.9 gebruiken, krijgen we $A_5 = -A_1 - A_2 - A_3 - A_4$ en als we A_4 substitueren krijgen we

$$A_5 = -A_1 - A_2 - A_3 - A_1 - 2A_2 - 3A_3 = -2A_1 - 3A_2 - 4A_3 = 3A_1 + 2A_2 + A_3.$$

Als we 5.8 omschrijven krijgen we $A_6 = -A_1 + A_2 + A_3 - A_4$ en als we hier A_4 in substitueren krijgen we

$$A_6 = -A_1 + A_2 + A_3 - A_1 - 2A_2 - 3A_3 = -2A_1 - A_2 - 2A_3 = 3A_1 + 4A_2 + 3A_3.$$

Dus we zien dat A_4, A_5 en A_6 uit te drukken zijn in A_1, A_2 en A_3. Dus A_1, A_2 en A_3 zijn voortbrengers van de abelianisatie en hebben orde 5. Met eenzelfde argument als bij ons vorige voorbeeld kunnen we concluderen dat $\Gamma/[\Gamma,\Gamma] \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/(a_1^5, a_2^5, a_3^5) = \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$.
Mednykh heeft laten zien dat de isometriegroep van de Seifert-Weber variëteit isomorf is aan S_5 en de voortbrengers van de isometriegroep zijn de volgende automorfismen [10]:

$$\begin{cases} a_1 \mapsto a_2, \\ a_2 \mapsto a_3, \\ a_3 \mapsto a_4, \\ a_4 \mapsto a_5, \\ a_5 \mapsto a_1, \\ a_6 \mapsto a_6, \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 \mapsto a_1^{-1}, \\ a_2 \mapsto a_2^{-1}, \\ a_3 \mapsto a_5, \\ a_4 \mapsto a_6, \\ a_5 \mapsto a_3, \\ a_6 \mapsto a_4, \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 \mapsto a_3^{-1} a_4 a_5^{-1} a_4, \\ a_2 \mapsto a_6^{-1} a_2 a_6^{-1} a_4, \\ a_3 \mapsto a_6^{-1} a_3 a_5 a_3, \\ a_4 \mapsto a_4^{-1} a_6 a_1^{-1} a_6, \\ a_5 \mapsto a_3^{-1} a_1^{-1} a_3^{-1} a_6, \\ a_6 \mapsto a_6^{-1} a_2 a_6^{-1} a_5. \end{cases}$$

Evenals bij de Weeks variëteit kunnen we gebruik maken van de Mostow rigidity stelling en dus bestaan er $a, c, r \in \mathbb{H}^3$ zodanig dat

$$\begin{cases} ca_1c^{-1} \mapsto a_2, \\ ca_2c^{-1} \mapsto a_3, \\ ca_3c^{-1} \mapsto a_4, \\ ca_4c^{-1} \mapsto a_5, \\ ca_5c^{-1} \mapsto a_1, \\ ca_6c^{-1} \mapsto a_6, \end{cases} \qquad \begin{cases} aa_1a^{-1} \mapsto a_1^{-1}, \\ aa_2a^{-1} \mapsto a_2^{-1}, \\ aa_3a^{-1} \mapsto a_5, \\ aa_4a^{-1} \mapsto a_6, \\ aa_5a^{-1} \mapsto a_3, \\ aa_6a^{-1} \mapsto a_4, \end{cases} \qquad \begin{cases} ra_1r^{-1} \mapsto a_3^{-1}a_4a_5^{-1}a_4, \\ ra_2r^{-1} \mapsto a_6^{-1}a_2a_6^{-1}a_4, \\ ra_3r^{-1} \mapsto a_6^{-1}a_3a_5a_3, \\ ra_4r^{-1} \mapsto a_4^{-1}a_6a_1^{-1}a_6, \\ ra_5r^{-1} \mapsto a_3^{-1}a_1^{-1}a_3^{-1}a_6, \\ ra_6r^{-1} \mapsto a_6^{-1}a_2a_6^{-1}a_5. \end{cases}$$

Vanuit de hierboven genoemde relaties is het duidelijk dat a en c van respectievelijk orde 5 en 2 zijn. Minder snel te zien is dat r ook van orde 2 is. In sectie A.4 zullen we laten zien dat r orde 2 heeft.

De isometriegroep is S_5 en we kunnen de elementen r, c, a identificeren door $r \mapsto (12), c \mapsto (12345)$, en $a \mapsto (23)(45)$. Hierachter zit een uitgebreide meetkundige interpretatie waar wij niet op ingaan maar die te lezen is in Mednykh [10]. Nu kunnen we de actie van de isometriegroep op de abelianisatie beschouwen. We kunnen de isometriegroep op de abelianisatie laten werken. Zo werkt $r = (12)$ op de abelianisatie door A_1 te sturen naar

$$\begin{aligned} A_3^{-1}A_4A_5^{-1}A_4 &= 4A_3 + 2A_4 + 4A_5 \\ &= 4A_3 + 2(A_1 + 2A_2 + 3A_3) + 4(3A_1 + 2A_2 + A_3) \\ &= 14A_1 + 12A_2 + 14A_3 \\ &= 4A_1 + 2A_2 + 4A_3. \end{aligned}$$

Als we dit doen voor alle relaties dan krijgen we de volgende matrices:

$$r = (12) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad c = (12345) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad rc = (2345) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$a = (23)(45) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad rc^2 = (24)(135) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (rc^2)^2 = (153) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

De eigenwaarden van (12) zijn:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 4 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 3 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(4-\lambda)(\lambda^2 - 6) = 0$$

$$\lambda_1 = 4 \quad \lambda_{2,3} = \pm\sqrt{6}.$$

Dus de som van de eigenwaarden is 4 en is dus congruent aan -1 mod 5. Als we dit doen voor (2345) krijgen we het volgende:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & 4-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(4-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(4-\lambda)^2(3-\lambda) - 4(3-\lambda) = 0$$

$$(3-\lambda)((4-\lambda)^2 - 4) = 0$$

$$3-\lambda = 0 \quad (4-\lambda)^2 - 4 = 0$$

$$\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = 6 \quad \lambda_3 = 2.$$

Dus de som van de eigenwaarden is 11 en is dus congruent aan 1 mod 5. Als we dit doen voor alle elementen behalve (12345), immers (12345) is van orde 5, krijgen we de volgende Brauer karakter tabel:

	e	(12)	(153)	(2345)	(24)(35)	(24)(135)
ϕ	3	-1	0	1	-1	2

.

Cornelissen en Peyerimhoff hebben in hun werk een 3-dimensionale mod 5 representatie van S_5 geconstrueerd die irreducibel is[4]. Het Brauer karakter dat hierbij verkregen worden noemen we ψ. De tabel van ψ ziet er als volgt uit:

	e	(12)	(153)	(2345)	(24)(35)	(24)(135)
ψ	3	1	0	-1	-1	-2

.

Laat sgn : $S_5 \to F_5^\times$ het lineaire karakter zijn die het teken geeft van de permutatie mod 5. Dus sgn is 1 voor elementen die een even aantal transposities en -1 voor elementen met een oneven aantal transposities. We merken nu op dat $\phi = \psi \otimes \text{sgn}$. Dit is ook een irreducibel Brauer karakter. Debray heeft in zijn werk alle irreducibele Brauer karakters van S_5 bepaald voor de priem $p = 5$[5]. In zijn tabel staan helaas wel fouten. In zijn tekst merkt hij wel op dat $\psi \otimes \text{sgn}$ een irreducibel Brauer karakter is maar hij doet deze vermenigvuldiging helaas verkeerd waardoor hij op een foutief karakter uitkomt, in zijn geval is dat ϕ_4.

Bijlage A

Appendix

In hoofdstuk 3 zijn er een aantal stellingen en lemma's die wij alleen gebruiken zonder dat we de stelling expliciet in hoofdstuk 3 behandelen. In de bewijzen waarbij dit gebeurt, hebben wij wel gerefereerd naar dit hoofdstuk. Hier worden die stellingen en lemma's genoemd maar niet bewezen. Als men geïnteresseerd is in de bewijzen, wordt men doorverwezen naar het boek van Isaacs [8]. Ook zullen we bewijzen dat de conjugatie met de automorfisme die gegeven is in de vorige sectie orde 2 heeft.

A.1 Hoofdstuk 2

De volgende stelling hebben we gebruikt in het bewijs van 3.4.13.

Stelling A.1.1 ([8], 2.13)**.** *De volgende relatie geldt voor alle $h \in G$.*

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_i(gh)\chi_j(g^{-1}) = \delta_{ij}\frac{\chi_i(h)}{\chi_i(1)}.$$

Het volgende lemma hebben we gebruikt om blokken te definiëren in 3.4.

Lemma A.1.2 ([8], 2.25)**.** *Laat ρ een irreducibele $\mathbb{C}$-representatie zijn van G van graad n. Laat A een $n \times n$ matrix over $\mathbb{C}$ zodanig dat A commuteert met $\rho(g)$ voor alle $g \in G$. Dan geldt $A = \epsilon I$ voor een $\epsilon \in \mathbb{C}$ en waarbij I de $n \times n$ identiteitsmatrix is.*

A.2 Hoofdstuk 8

De volgende stelling hebben we gebruikt om stelling 3.3.9 te bewijzen.

Stelling A.2.1 ([8], 8.4)**.** *Laat $Z \subseteq R \subseteq \mathbb{C}$ met R een ring*

(a) Een functie ϕ, die constant is op conjugatieklassen van G, is een R-gegeneraliseerd karakter dan en slechts dan als $\theta_E \in R[Irr(E)]$ voor elke elementaire $E \subseteq G$.

(b) Elke $\chi \in Irr(G)$ is een $\mathbb{Z}$-lineaire combinatie van karakters van de vorm λ^G waarbij λ een lineaire karakter is van de elementaire ondergroepen G.

A.3 Hoofdstuk 9 & 15

Beide stellingen en het lemma hebben we gebruikt in het bewijs van 3.2.11.

Stelling A.3.1 ([8], 9.2)**.** *Laat ρ een irreducibele F-representatie zijn van G van graad n. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent:*

(a) ρ is absoluut irreducibel.

(b) $\rho(F[G]) = M_n(F)$.

Stelling A.3.2 ([8], 9.6)**.** *Laat ρ een irreducibel representatie van $F[G]$ zijn en neem een $a \in F[G]$. Dan bestaat er een $b \in F[G]$ zodanig dat $\rho(b) = \rho(a)$ en $\tau(b) = 0$ voor alle irreducibele $F[G]$-representaties τ die niet equivalent zijn met ρ.*

Lemma A.3.3 ([8], 15.4)**.** *Laat $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{C}$ algebraïsch over $\mathbb{Q}$ en laat I een echte ideaal van R, waarbij R de ring is van algebraïsche gehele getallen. Veronderstel dat niet alle $\alpha_i = 0$. Dan bestaat er een $\beta \in \mathbb{C}$ zodanig dat $\beta\alpha_i \in R$ voor alle i maar niet alle i geldt $\beta\alpha_i \in I$.*

Het bewijs van dit laatste lemma wordt niet gegeven in Isaacs.

A.4 Bewijs dat r orde 2 heeft

We gaan bewijzen dat $r^2 a_i r^{-2} = a_i$ voor $i = 1, 2, \ldots, 6$, waarbij de automorfisme wordt gegeven zoals in sectie 5.2. Eerst doen we dit voor a_1 en a_2:

$$
\begin{aligned}
r^2 a_1 r^{-2} &= r a_3^{-1} a_4 a_5^{-1} a_4 r^{-1} \\
&= a_3^{-1} a_5^{-1} a_3^{-1} a_6 a_4^{-1} a_6 a_1^{-1} a_6 a_6^{-1} a_3 a_1 a_3 a_4^{-1} a_6 a_1^{-1} a_6 \\
&= a_3^{-1} a_5^{-1} a_3^{-1} a_6 a_4^{-1} a_6 a_1^{-1} a_3 a_1 a_3 a_4^{-1} a_4 a_1^{-1} a_6 \\
&\overset{(1)}{=} a_3^{-1} a_5^{-1} a_2^{-1} a_5^{-1} a_4 a_4^{-1} a_6 a_1^{-1} a_3 a_1 a_3 a_4^{-1} a_6 a_1^{-1} a_6 \\
&= a_3^{-1} a_5^{-1} a_2^{-1} a_5^{-1} a_6 a_1^{-1} a_3 a_1 a_3 a_4^{-1} a_6 a_1^{-1} a_6 \\
&\overset{(3)}{=} a_3^{-1} a_3 a_1 a_4 a_5^{-1} a_6 a_1^{-1} a_3 a_1 a_3 a_4^{-1} a_6 a_1^{-1} a_6 \\
&= a_1 a_4 a_5^{-1} a_6 a_1^{-1} a_3 a_1 a_3 a_4^{-1} a_4 a_1^{-1} a_6 \\
&\overset{(5)}{=} a_1 a_2^{-1} a_1 a_6^{-1} a_6 a_1^{-1} a_3 a_1 a_3 a_4^{-1} a_6 a_1^{-1} a_6 \\
&= a_1 a_2^{-1} a_3 a_1 a_3 a_4^{-1} a_6 a_1^{-1} a_6 \\
&\overset{(7)}{=} a_1 a_2^{-1} a_3 a_5 a_6^{-1} a_4 a_4^{-1} a_6 a_1^{-1} a_6 \\
&= a_1 a_2^{-1} a_3 a_5 a_1^{-1} a_6 \\
&\overset{(9)}{=} a_1 a_6^{-1} a_1 a_5^{-1} a_5 a_1^{-1} a_6 \\
&= a_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r^2 a_2 r^{-2} &= r a_6^{-1} a_2 a_6^{-1} a_4 r^{-1} \\
&= a_5^{-1} a_6 a_2^{-1} a_6 a_6^{-1} a_2 a_6^{-1} a_4 a_5^{-1} a_6 a_2^{-1} a_6 a_4^{-1} a_6 a_1^{-1} a_6 \\
&= a_5^{-1} a_4 a_5^{-1} a_6 a_2^{-1} a_6 a_4^{-1} a_6 a_1^{-1} a_6 \\
&\overset{(2)}{=} a_5^{-1} a_2^{-1} a_1 a_6^{-1} a_6 a_2^{-1} a_6 a_4^{-1} a_6 a_1^{-1} a_6 \\
&= a_5^{-1} a_2^{-1} a_1 a_2^{-1} a_6 a_4^{-1} a_6 a_1^{-1} a_6 \\
&\overset{(4)}{=} a_5^{-1} a_2^{-1} a_4^{-1} a_3 a_6^{-1} a_6 a_4^{-1} a_6 a_1^{-1} a_6 \\
&= a_5^{-1} a_2^{-1} a_4^{-1} a_3 a_4^{-1} a_6 a_1^{-1} a_6 \\
&\overset{(6)}{=} a_5^{-1} a_2^{-1} a_4^{-1} a_1^{-1} a_5 a_6^{-1} a_6 a_1^{-1} a_6 \\
&= a_5^{-1} a_2^{-1} a_4^{-1} a_1^{-1} a_5 a_1^{-1} a_6 \\
&\overset{(8)}{=} a_3 a_1 a_1^{-1} a_5 a_1^{-1} a_6 \\
&= a_3 a_5 a_1^{-1} a_6 \\
&\overset{(10)}{=} a_2 a_6^{-1} a_6 \\
&= a_2
\end{aligned}
$$

hierbij hebben we de volgende identiteiten gebruikt die afgeleid kunnen worden vanuit Γ, de fundamentaal groep:

$$\begin{array}{ll}
(1): a_3^{-1}a_6 = a_2^{-1}a_5^{-1}a_4 & (2): a_4a_5^{-1} = a_2^{-1}a_1a_6^{-1} \\
(3): a_5^{-1}a_2^{-1} = a_3a_1a_4 & (4): a_1a_2^{-1} = a_4^{-1}a_3a_6^{-1} \\
(5): a_4a_5^{-1} = a_2^{-1}a_1a_6^{-1} & (6): a_3a_4^{-1} = a_1^{-1}a_5a_6^{-1} \\
(7): a_1a_3 = a_5a_6^{-1}a_4 & (8): a_5^{-1}a_2^{-1}a_4^{-1} = a_3a_1 \\
(9): a_2^{-1}a_3 = a_6^{-1}a_1a_5^{-1} & (10): a_3a_5a_1^{-1} = a_2a_6^{-1}.
\end{array}$$

Dus $r^2a_1r^{-2} = a_1$ en $r^2a_2r^{-2} = a_2$. Nu gaan we dat laten zien voor de elementen a_3 en a_4.

$$\begin{aligned}
r^2a_3r^{-2} &= ra_6^{-1}a_3a_5a_3r^{-1} \\
&= a_5^{-1}a_6a_2^{-1}a_6a_6^{-1}a_3a_5a_3a_3^{-1}a_1^{-1}a_3^{-1}a_6a_6^{-1}a_3a_5a_3 \\
&= a_5^{-1}a_6a_2^{-1}a_3a_5a_1^{-1}a_5a_3 \\
&\overset{(1')}{=} a_5^{-1}a_6a_2^{-1}a_2a_6^{-1}a_5a_3 \\
&= a_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r^2a_4r^{-2} &= ra_4^{-1}a_6a_1^{-1}a_6r^{-1} \\
&= a_6^{-1}a_1a_6^{-1}a_4a_6^{-1}a_2a_6^{-1}a_5a_4^{-1}a_5a_4^{-1}a_3a_6^{-1}a_2a_6^{-1}a_5 \\
&\overset{(2')}{=} a_6^{-1}a_1a_6^{-1}a_4a_6^{-1}a_2a_6^{-1}a_6a_1^{-1}a_2a_5a_4^{-1}a_3a_6^{-1}a_2a_6^{-1}a_5 \\
&= a_6^{-1}a_1a_6^{-1}a_4a_6^{-1}a_2a_1^{-1}a_2a_5a_4^{-1}a_3a_6^{-1}a_2a_6^{-1}a_5 \\
&\overset{(3')}{=} a_6^{-1}a_1a_6^{-1}a_4a_6^{-1}a_6a_3^{-1}a_4a_2a_5a_4^{-1}a_3a_6^{-1}a_2a_6^{-1}a_5 \\
&= a_6^{-1}a_1a_6^{-1}a_4a_3^{-1}a_4a_2a_5a_4^{-1}a_3a_6^{-1}a_2a_6^{-1}a_5 \\
&\overset{(4')}{=} a_6^{-1}a_1a_6^{-1}a_4a_3^{-1}a_1^{-1}a_3^{-1}a_4^{-1}a_3a_6^{-1}a_2a_6^{-1}a_5 \\
&\overset{(5')}{=} a_6^{-1}a_1a_6^{-1}a_4a_4^{-1}a_6a_5^{-1}a_3^{-1}a_4^{-1}a_3a_6^{-1}a_2a_6^{-1}a_5 \\
&= a_6^{-1}a_1a_5^{-1}a_3^{-1}a_4^{-1}a_3a_6^{-1}a_2a_6^{-1}a_5 \\
&\overset{(6')}{=} a_2^{-1}a_3a_5a_5^{-1}a_3^{-1}a_4^{-1}a_3a_6^{-1}a_2a_6^{-1}a_5 \\
&= a_2^{-1}a_4^{-1}a_3a_6^{-1}a_2a_6^{-1}a_5 \\
&\overset{(7')}{=} a_2^{-1}a_1a_2^{-1}a_6a_6^{-1}a_2a_6^{-1}a_5 \\
&= a_2^{-1}a_1a_6^{-1}a_5 \\
&\overset{(8')}{=} a_4
\end{aligned}$$

waarbij we hier de volgende identiteiten hebben gebruikt:

$$\begin{array}{ll}
(1'): a_3a_5a_1^{-1} = a_2a_6^{-1} & (2'): a_5a_4^{-1} = a_6a_1^{-1}a_2 \\
(3'): a_2a_1^{-1} = a_6a_3^{-1}a_4 & (4'): a_4a_2a_5 = a_1^{-1}a_3^{-1} \\
(5'): a_3^{-1}a_1^{-1} = a_4^{-1}a_6a_5^{-1} & (6'): a_6^{-1}a_1 = a_2^{-1}a_3a_5 \\
(7'): a_4^{-1}a_3 = a_1a_2^{-1}a_6 & (8'): a_2^{-1}a_1a_6^{-1}a_5 = a_4.
\end{array}$$

Dus $r^2 a_3 r^{-2} = a_3$ en $r^2 a_4 r^{-2} = a_4$. Tenslotte gaan we dat laten zien voor de elementen a_5 en a_6.

$$\begin{aligned}
r^2 a_5 r^{-2} &= r a_3^{-1} a_1^{-1} a_3^{-1} a_6 r^{-1} \\
&= a_3^{-1} a_5^{-1} a_3^{-1} a_6 a_4^{-1} a_5 a_4^{-1} a_3 a_3^{-1} a_5^{-1} a_3^{-1} a_6 a_6^{-1} a_2 a_6^{-1} a_5 \\
&= a_3^{-1} a_5^{-1} a_3^{-1} a_6 a_4^{-1} a_5 a_4^{-1} a_5^{-1} a_3^{-1} a_2 a_6^{-1} a_5 \\
&\overset{(1'')}{=} a_3^{-1} a_5^{-1} a_3^{-1} a_6 a_4^{-1} a_5 a_4^{-1} a_1^{-1} a_6 a_2^{-1} a_2 a_6^{-1} a_5 \\
&= a_3^{-1} a_5^{-1} a_3^{-1} a_6 a_4^{-1} a_5 a_4^{-1} a_1^{-1} a_5 \\
&\overset{(3'')}{=} a_3^{-1} a_5^{-1} a_2^{-1} a_5^{-1} a_4 a_4^{-1} a_5 a_4^{-1} a_1^{-1} a_5 \\
&= a_3^{-1} a_5^{-1} a_2^{-1} a_4^{-1} a_1^{-1} a_5 \\
&\overset{(5'')}{=} a_3^{-1} a_5^{-1} a_2^{-1} a_4^{-1} a_4 a_2 a_5 a_3 a_5 \\
&= a_5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r^2 a_6 r^{-2} &= r a_6^{-1} a_2 a_6^{-1} a_5 r^{-1} \\
&= a_5^{-1} a_6 a_2^{-1} a_6 a_6^{-1} a_2 a_6^{-1} a_4 a_5^{-1} a_6 a_2^{-1} a_6 a_3^{-1} a_1^{-1} a_3^{-1} a_6 \\
&= a_5^{-1} a_4 a_5^{-1} a_6 a_2^{-1} a_6 a_3^{-1} a_1^{-1} a_3^{-1} a_6 \\
&\overset{(2'')}{=} a_5^{-1} a_4 a_5^{-1} a_6 a_1^{-1} a_4^{-1} a_3 a_3^{-1} a_1^{-1} a_3^{-1} a_6 \\
&= a_5^{-1} a_4 a_5^{-1} a_6 a_1^{-1} a_4^{-1} a_1^{-1} a_3^{-1} a_6 \\
&\overset{(4'')}{=} a_5^{-1} a_2^{-1} a_1 a_1^{-1} a_4^{-1} a_1^{-1} a_3^{-1} a_6 \\
&= a_5^{-1} a_2^{-1} a_4^{-1} a_1^{-1} a_3^{-1} a_6 \\
&\overset{(6'')}{=} a_3 a_1 a_1^{-1} a_3^{-1} a_6 \\
&= a_6
\end{aligned}$$

hierbij hebben we de volgende identiteiten gebruikt:

$$\begin{aligned}
&(1'') : a_5^{-1} a_3^{-1} = a_1^{-1} a_6 a_2^{-1} && (2'') : a_2^{-1} a_6 = a_1^{-1} a_4^{-1} a_3 \\
&(3'') : a_3^{-1} a_6 = a_2^{-1} a_5^{-1} a_4 && (4'') : a_4 a_5^{-1} a_6 = a_2^{-1} a_1 \\
&(5'') : a_1^{-1} = a_4 a_2 a_5 a_3 && (6'') : a_5^{-1} a_2^{-1} a_4^{-1} = a_3 a_1.
\end{aligned}$$

Dus $r^2 a_5 r^{-2} = a_5$ en $r^2 a_6 r^{-2} = a_6$. Dus $r^2 a_i r^{-2} = a_i$ en we kunnen dus concluderen dat r orde 2 heeft.

Bibliografie

[1] Beukers, F. (2018). *Lineaire Algebra*. Departement Wiskunde UU. p.99.

[2] Beukers, F. (2012). *Elementary Number Theory*. Departement Wiskunde UU. p.8.

[3] Cañez, S. *Notes on dual spaces*, https://sites.math.northwestern.edu/~scanez/courses/334/notes/dual-spaces.pdf (Geraadpleegd op 30-10-2021).

[4] Cornelissen, G. & Peyerimhoff, M. (2021). *Twisted isospectrality, homological wideness and isometry* https://arxiv.org/pdf/2107.00253.pdf

[5] Debray, A. (2015). *Modular Representation Theory and the CDE Triangle*. Stanford University Department of Mathematics https://www.math.purdue.edu/~adebray/writing/adebray_senior_thesis.pdf

[6] Dummit, D.S. & Foote, R.M. (2004). *Abstract Algebra* (3de ed). John Wiley & Sons, Inc.

[7] Hatcher, A. (2001). *Algebraic Topology*. Cambridge University Press. p.166.

[8] Isaacs, I.M. (1976). *Character Theory of Finite Groups*. Academic Press.

[9] James, G. & Liebeck, M. (2004). *Representation and Characters of Groups* (2de ed). Cambridge University Press.

[10] Mednykh, A.D., *The isometry group of the hyperbolic space of a Seifert-Weber dodecahedron*, Sibirsk. Mat. Zh. 28 (1987) no. 5, 134–144, [English translation: Siberian Math. J. 28 (1987), no. 5, 798–806]

[11] Mednykh, A. D. , & Vesnin, A. (1998). Visualization of the isometry group action on the Fomenko-Matveev-Weeks manifold. *Journal of Lie Theory, 8*(1), 51–66.

[12] Molnar, E., *On isometries of space forms*, in: Differential Geometry and its Applications (Eger, 1989), North-Holland, Amsterdam, 1992. 509–534.

[13] Rodriguez Miguel, J. A. (2015). *Mostow's Rigidity Theorem*. Université de Rennes `https://webmath.univ-rennes1.fr/irmar/pampers/notes/1516/2015_12_03_José.pdf`

[14] Speyer, D.E. (2010). [Reactie op "Recovering representation from its character".] *mathoverflow.net*. https://mathoverflow.net/questions/32836/recovering-representation-from-its-character (Geraadpleegd op 25-01-2022.)

[15] Wilson, Robert A. (2009). "Chapter 2", *The finite simple groups*. Springer-Verlag London Limited 2009.