

Hurwitz-getallen

Vanuit Meerdere Perspectieven

Willem Sabin Kalkman

Bachelorscriptie wiskunde

Begeleider: Dr. M. (Martijn) Kool



**Universiteit
Utrecht**

Departement Wiskunde

Universiteit Utrecht

Januari 2022

Samenvatting

In deze bachelorscriptie gaan we hurwitz-getallen onderzoeken aan de hand van het boek *Riemann Surfaces and Algebraic Curves* van Renzo Cavelieri en Eric Miles. Ons doel is om uit te komen bij de monodromie representatie formule:

$$H_{h \xrightarrow{d} g}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \frac{|M|}{d!}$$

Om dit te bereiken introduceren we voorkennis die studenten op bachelor niveau nodig hebben; in het eerste deel worden Riemann oppervlakken en holomorfe afbeeldingen ertussen behandeld. Daarna worden hurwitz-getallen gedefinieerd, die we vervolgens vertalen naar een topologisch probleem. Zo sluiten we het af met de gewenste formule, die hier boven is benoemd, en haar toepassingen.

Inhoudsopgave

Inleiding	2
1 Introductie in Riemann-oppervlakken	4
1.1 Complexe variëteiten en (compacte) voorbeelden	4
1.1.1 Algebraïsche krommen	5
1.1.2 Riemann-sfeer	7
1.1.3 Projectieve krommen	9
1.2 Holomorfe afbeeldingen tussen riemann-oppervlakken	12
1.3 Vertakkingen van holomorfe afbeeldingen	15
2 Hurwitz-getallen	20
2.1 Definitie en Voorbeelden	20
2.2 Holomorfe afbeelding als topologische overdekkingsruimte	22
2.3 Van holomorfe functie naar monodromie-representatie	23
2.4 Van monodromie-representaties naar hurwitz-getallen	27

Inleiding

In dit bacheloronderzoek zal de brug die hurwitz-getallen slaan tussen meetkunde en topologie worden onderzocht. Het berekenen van hurwitz-getallen komt in feite neer op het tellen van holomorfe afbeeldingen tussen riemann-oppervlakken. Dit onderwerp kan dus als deel van de *enumeratieve meetkunde* worden gezien, een deelgebied van de wiskunde dat zich bezig houdt met het tellen van het aantal oplossingen van een algebraïsch meetkundig probleem. De objecten die bij dit telprobleem worden onderzocht zijn compacte riemann-oppervlakken en holomorfe functies ertussen. Deze concepten werden voor het eerst geïntroduceerd door de beroemde Duitse wiskundige Bernard Riemann (1826-1866), die grote bijdragen heeft geleverd aan het ontwikkelen van de complexe analyse, die voor ons belangrijk zal zijn. Andere vakgebieden waar Riemann aan heeft bijgedragen zijn onder anderen de getaltheorie, met bijvoorbeeld de beroemde riemann-hypothese, en niet-euclidische meetkunde, wat als een belangrijke voorbereiding voor Einstein's relativiteitstheorie wordt gezien[LJ17].

De volgende hoofdrolspeler in ons verhaal is Adolf Hurwitz (1859-1919), die onder andere verder heeft gebouwd op de concepten van riemann-oppervlakken. Het onderzoek naar hurwitz-getallen is recentelijk nieuw leven ingeblazen door onderzoek naar kwantumgravitatie en snaartheorie[CM16], onderzoeksgebieden in de natuurkunde die kwantummechanica en de algemene relativiteitsleer proberen te verenigen. We zullen verder niet in gaan op de natuurkunde.

Wij zullen ons richten op de klassieke wiskundige kant van het verhaal, waar onze doelstelling zal zijn om de eerdergenoemde brug die wordt geslagen tussen meetkunde en topologie uit te lichten. Specifiek neemt dit opmerkelijke verband gestalte wanneer we hurwitz-getallen eerst definiëren als een som tussen holomorfe afbeeldingen van riemann-oppervlakken, en later omschrijven naar het tellen van zogenaamde monodromie-representaties: groepshomomorfismen tussen de fundamenteelgroep van een topologische ruimte naar de permutatie groep.

Om dit klassieke onderwerp te onderzoeken zullen we voor het overgrote deel de lijnen volgen die in het studieboek *Riemann Surfaces and Algebraic Curves - A First Course in Hurwitz Theory* door Renzo Cavellieri en Eric Miles [CM16] zijn uitgezet. De toegevoegde waarde van dit onderzoek zal voor een groot deel liggen in het oplossen van opgaven en uitwerken van voorbeelden. Het overnemen van bewijzen uit het boek wordt zo veel mogelijk vermeden door naar het boek te verwijzen, echter zijn hierop een paar uitzondering: Het bewijs van stelling 2.4.1 zal in de kern hetzelfde zijn als in het boek, maar is met oog op de compleetheid van het verhaal toegevoegd, omdat het expliciet inzicht geeft in hoe de stap van monodromie-representaties naar holomorfe afbeeldingen wordt gemaakt. Verder zullen de bewijzen voor stellingen 1.1.2 ,1.1.6 ,1.3.3, 2.4.2 niet worden weggelaten, omdat hier ten opzichte van het boek belangrijke details en verdere uitwerkingen aan zijn toegevoegd. Allerlaatst is er bij elke stelling, opgave en elk voorbeeld een verwijzing, als deze bestaat, naar het nummer van het desbetreffende onderdeel in het boek. (bijvoorbeeld het label 'opg. 4.2.2.' verwijst naar *exercise* 4.2.2. in het boek.)

Deze uiteenzetting is opgedeeld in twee hoofdstukken: in het eerste hoofdstuk zullen we riemann-oppervlakken definiëren en voorbeelden bekijken. Ook gaan we holomorfe afbeeldingen tussen compacte riemann-oppervlakken definiëren en zien dat deze hele mooie eigenschappen met zich mee dragen. Een belangrijke eigenschap zal zijn dat voor elk punt een afbeelding lokaal te zien is als de macht $z \mapsto z^k$, waar slechts op een eindig aantal punten geldt dat $k > 1$. Deze punten zullen om intuïtieve redenen '*vertakkingspunten*' heten. Ook zullen we zien dat holomorfe afbeeldingen, weggelaten een eindig aantal punten, een topologische overdekking blijken tussen de twee riemann-oppervlakken. Dit zal een grote hint zijn naar het topologische aspect van ons onderwerp. In het tweede hoofdstuk zullen we dan eindelijk hurwitz-getallen definiëren en laten zien dat deze omgeschreven kunnen worden naar topologische concepten, waarmee we zullen concluderen.

Nog een allerlaatste opmerking: Deze scriptie is zoals u inmiddels gemerkt heeft in het Nederlands geschreven. Dit is een bewuste keuze geweest, grotendeels gemotiveerd door twee redenen:

1. Het Nederlands is een functionerende taal om wiskunde onder woorden te brengen, met een aantal unieke termen voor wiskundige begrippen.
2. Deze keuze zal de kennisoverdracht van de internationale wiskundige gemeenschap, naar eigen inzicht, minimaal tot niet schaden, aangezien er veel Engelse bronnen over dit onderwerp bestaan, zoals bijvoorbeeld het boek waarop deze scriptie is gebaseerd.

Hoofdstuk 1

Introductie in Riemann-oppervlakken

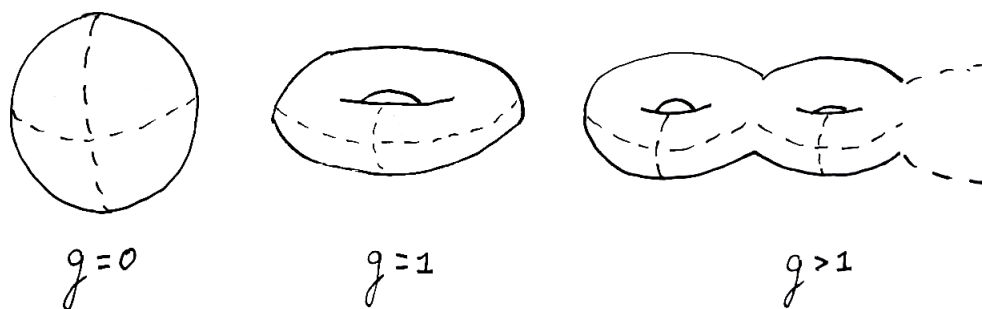
In dit hoofdstuk maken we kennis met complexe variëteiten, oftewel Riemann-oppervlakken. Dit zijn de objecten van onze studie. Deze objecten zijn vanwege hun complexe structuur interessant binnen de complexe analyse, waar ze ook zijn ontwikkeld. Hoewel niet-compacte riemann-oppervlakken een interessante rol spelen als natuurlijke domeinen van complexe functies kijken wij vooral naar compacte riemann-oppervlakken als meetkundige objecten, die interessant zijn voor de hurwitz-getallen die we ermee gaan definiëren.

1.1 Complexe variëteiten en (compacte) voorbeelden

Definitie 1.1.1 (riemann-oppervlak). Een riemann-oppervlak is een complex differentieerbare variëteit met dimensie 1, oftewel: X is een riemann-oppervlak als:

- X een verbonden Hausdorff topologische ruimte is
- Voor elke $x \in X$ er een homeomorfisme $\phi_x : U_x \rightarrow V_x$ bestaat, met U_x een open omgeving van $x \in X$ en V_x een open deelverzamelingen van \mathbb{C} .
- Voor alle U_x, U_y met niet-lege doorsnede geldt dat de transitiefunctie $T_{x,y} : \phi_y \circ \phi_x^{-1} : \phi_x(U_x \cap U_y) \rightarrow \phi_y(U_x \cap U_y)$ holomorf is.

Een riemann-oppervlak is tevens homeomorf aan een reëel oppervlak, zijnde een reële variëteit van dimensie 2; aangezien een open verzameling op het complexe vlak op natuurlijke wijze homeomorf is aan een open verzameling in het reële vlak via de afbeelding $z = a + bi \mapsto (a, b) \in \mathbb{R}^2$. Verder vertelt de complexe analyse ons dat holomorfe afbeeldingen zogenaamde oriëntatie behoudende functies zijn [Lan99][H1]. Dit impliceert dat een riemann-oppervlak ook oriënteerbaar is. De beroemde classificatie van compacte oppervlakken, zoals bijvoorbeeld beschreven staat in [Arm83][H7], vertelt ons dat elk compact riemann-oppervlak homeomorf is aan een oppervlak met positief geslacht g , oftewel een sfeer, of de verbonden som van g tori, zoals in figuur 1.1.



Figuur 1.1: Een riemann-oppervlak is homeomorf aan een oriënteerbaar topologisch oppervlak. De classificatie van oppervlakken vertelt ons dat dit de sfeer is, met geslacht 0, of een verbonden som van g tori met geslacht g .

Verdere conventionele begrippen zijn handig om te kennen: We noemen een functie ϕ_x **lokale coördinaten** in de buurt van x , het paar (U_x, ϕ_x) een **kaart**, en een collectie kaarten $(U_x, \phi_x)_{x \in X}$ die van X een riemann-oppervlak maken noemen we **een atlas**. In andere woorden: een atlas is een collectie kaarten die X overdekken en die **verenigbaar** zijn, wat wil zeggen: waarvan alle transitiefuncties holomorf zijn.

Op een topologisch oppervlak X kunnen we verschillende atlassen definiëren om een riemann-oppervlak te maken. Neem bijvoorbeeld $X = \mathbb{C}$. Hier is het snel duidelijk dat elke willekeurige open overdekking, met de identiteit als lokale coördinaat functie, een atlas is. Het meest triviaal geval zijnde een atlas met slechts één kaart: (\mathbb{C}, ϕ) met $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \phi(x) = x$.

Om deze reden zullen we het begrip van maximale atlassen introduceren. Twee atlassen zijn verenigbaar, wanneer de vereniging van de twee atlassen ook een atlas is. Als een atlas elke kaart van een andere atlas bevat, dan kunnen we zeggen dat de eerste atlas groter of gelijk is aan de tweede. Op deze manier kunnen we een partiële ordening van atlassen construeren. Het Lemma van Zorn vertelt ons dan dat er minstens één maximaal element in deze partiële ordening bestaat, die we een **maximale atlas** noemen. We zullen er over het algemeen vanuit gaan dat we met maximale atlassen werken, zodat we in bewijzen een zo ruim mogelijke keuze aan kaarten hebben.

Het voorbeeld dat \mathbb{C} een riemann-oppervlak is, is natuurlijk niet heel interessant: vanzelfsprekend is een deelverzameling van \mathbb{C} homeomorf aan een deelverzameling van \mathbb{C} . Nu zullen we echter een aantal interessante voorbeelden bespreken, die we ook vaker zullen gebruiken in onze verdere discussie.

1.1.1 Algebraïsche krommen

We beginnen met een makkelijk voorbeeld:

Stelling 1.1.1. *De grafiek van een continue holomorfe functie f is $\Gamma_f := \{(z, f(z)) \mid z \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ is een riemann-oppervlak*

Bewijs. Merk allereerst op dat Γ_f een Hausdorff topologische ruimte is geïnduceerd door $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Verder laten we zien dat Γ_f een riemann-oppervlak is gegeven door één kaart $(\Gamma_f, \phi = \pi|_{\Gamma_f})$, waar

$$\pi : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, (z, f(z)) \mapsto z$$

de projectie naar het eerste coördinaat. Omdat het één kaart betreft hoeven we geen transitiefuncties te controleren; het blijft voor ons om te laten zien dat ϕ een homeomorfisme is. Ten eerste is ϕ continu, want de projectie naar één coördinaat is een continue afbeelding. Ten tweede is

$$\phi^{-1} = \text{Id}|_{\mathbb{C}} \times f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}, z \mapsto (z, f(z))$$

continu, omdat het een product betreft van de twee continue functies f en de identiteit. \square

Definitie 1.1.2 (def. 3.1.2). Neem willekeurige $p(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$, dan noemen we de verzameling $V(p) := \{(x, y) | p(x, y) = 0\} \subset \mathbb{C}^2$ een **gladde affiene vlakke kromme**, wanneer er geen $(x_0, y_0) \in V(p)$ bestaat zodat $\frac{\partial p}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial p}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$

De volgende stelling bewijst dat $V(p)$ een riemann-oppervlak is.

Stelling 1.1.2 (opg. 3.1.3). *Een gladde affiene vlakke kromme is een riemann-oppervlak.*

Bewijs. Neem een punt $(x_0, y_0) \in V(p)$, waar $V(p)$ gedefinieerd zoals in de definitie hierboven. Dan weten we dat er voor de partiële afgeleiden van p naar x, y op (x_0, y_0) geldt dat altijd minstens één van de twee ongelijk is aan 0. Stel nu $\partial p / \partial x \neq 0$, dan bestaat er volgens de impliciete functiestelling een open omgeving $U_{(x_0, y_0)} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ van (x_0, y_0) , een open verzameling $V_{(x_0, y_0)} \subset \mathbb{C}$ en een holomorfe functie

$$f : U_{(x_0, y_0)} \rightarrow \mathbb{C} \text{ zodat } V(p) \cap U_{(x_0, y_0)} = \Gamma_f.$$

Definieer nu de lokale coördinaten functie

$$\phi_{(x_0, y_0)} : U_{(x_0, y_0)} \cap V(p) \rightarrow V_{(x_0, y_0)}, (x, f(x)) \mapsto x.$$

Stel nu dat de partiële afgeleide naar x op (x_0, y_0) wel gelijk is aan 0, dan weten we meteen dat de partiële afgeleide naar y dat niet is, dus kunnen we precies hetzelfde doen als hierboven met de impliciete functiestelling toegepast op de andere variabele: Er bestaat een open omgeving $U_{(x_0, y_0)}$ en een open verzameling $V_{(x_0, y_0)}$ en een holomorfe functie

$$g : U_{(x_0, y_0)} \rightarrow \mathbb{C} \text{ zodat } V(p) \cap U_{(x_0, y_0)} = \{(g(y), y) | y \in V_{x_0}\}$$

Nu kunnen we een soortgelijke lokale coördinaten functie definiëren:

$$\phi_{(x_0, y_0)} : U_{(x_0, y_0)} \cap V(p) \rightarrow V_{(x_0, y_0)}, (g(y), y) \mapsto y.$$

Lokaal is $V(p)$ dus gewoon een grafiek naar één van de assen. Nu willen we nog laten zien dat de kaarten verenigbaar zijn, oftewel dat de transitiefuncties holomorf zijn. Neem twee punten $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in V(p)$ waar $(U_{(x_0, y_0)} \cap U_{(x_1, y_1)}) \cap V(p) \neq \emptyset$.

Stel $\phi_{(x_0, y_0)}, \phi_{(x_1, y_1)}$ allebei projecties naar dezelfde as. Dan zijn de transitiefuncties tussen deze kaarten allebei de identiteit op $V_{(x_0, y_0)} \cap V_{(x_1, y_1)}$, dus zijn de kaarten verenigbaar. Stel nu de kaarten zijn projecties naar verschillende assen, dus stel zonder verlies van algemeenheid dat we de volgende kaarten hebben:

$$\phi_{(x_0, y_0)}((x, f(x))) = x \text{ en } \phi_{(x_1, y_1)}((g(y), y)) = y,$$

dan geldt er voor de ene transitiefunctie

$$\phi_{(x_0, y_0)} \circ \phi_{(x_1, y_1)}^{-1}(y) = g(y),$$

en geldt er voor de andere transitiefunctie

$$\phi_{(x_1, y_1)} \circ \phi_{(x_0, y_0)}^{-1}(x) = f(x).$$

Deze functies zijn holomorf, dus $V(p)$ is een riemann-oppervlak. □

1.1.2 Riemann-sfeer

Zoals gezegd zullen we vooral geïnteresseerd zijn in compacte riemann-oppervlakken, dus laten we nu de één-punts-compactificatie van \mathbb{C} beschouwen. Deze wordt gemaakt door aan \mathbb{C} één nieuw disjunct punt ∞ toe te voegen om $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ te verkrijgen. De open verzamelingen zijn gedefinieerd als: de hele verzameling \mathbb{C}^* , de open verzamelingen van \mathbb{C} en $G \cup \{\infty\}$, waar $G \subset \mathbb{C}$ en $\mathbb{C} \setminus G$ compact en gesloten is. De volgende twee ondersteunende lemma's (Uit [Arm83][H3]), zullen we aannemen zonder bewijs.

Lemma 1.1.1. *De één-punts-compactificatie X^* van een lokaal-compacte, maar niet compacte, Hausdorff ruimte X is een compacte, Hausdorff topologische ruimte.*

Lemma 1.1.2. *Een bijectieve en continue functie van een compacte ruimte naar een Hausdorff ruimte is een homeomorfisme.*

Aangezien \mathbb{C} homeomorf is aan het reële vlak, en de één-punts-compactificatie van het reële vlak homeomorf is aan de eenheids sfeer S^2 , hebben we dat de één-punts-compactificatie van \mathbb{C} ook homeomorf is aan S^2 .

Definitie 1.1.3. Definieer de riemann-sfeer $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ als volgt: Zij $U_1 = U_2 = \mathbb{C}$ twee disjuncte kopieën van \mathbb{C} en bekijk de functie $g : U_1 \setminus \{0\} \rightarrow U_2 \setminus \{0\}$ met $g(z) = 1/z$. We definiëren de equivalentie-relatie, waar elk punt in U_1, U_2 equivalent aan zichzelf is en $g(z) \sim z$, met $z \in U_1$, om vervolgens de quotiënt-ruimte

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) := \frac{U_1 \sqcup U_2}{\sim},$$

te definiëren.

Lemma 1.1.3 (opg. 3.2.1). $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ is de één-punts-compactificatie van \mathbb{C} .

Bewijs. Als verzamelingen is $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ het complexe vlak plus één punt, wat we ∞ noemen: Beschouw de bijectie

$$h : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \text{ met } z \mapsto [z], \infty \mapsto [0] \in U_2,$$

waar \mathbb{C}^* de één-punts-compactificatie van \mathbb{C} is. We claimen dat h continu is en $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ Hausdorff, zodat lemma 2 impliceert dat \mathbb{C}^* en $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ homeomorf zijn, met de conclusie dat $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ de één-punts-compactificatie van \mathbb{C} is.

Ten eerste is h continu: neem een open V in $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, stel dat V niet het punt $0 \in U_2$ bevat, dan is V ook open in U_1 . Het teruggehaalde beeld van V is dus open in \mathbb{C}^* . Stel de open verzameling V bevat wel het punt $0 \in U_2$, dan is het complement van V gesloten en compact in U_1 , dus is $h^{-1}(V)$ open in \mathbb{C}^* . Dus h is continu. Ten tweede laten we zien dat $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ Hausdorff is: Merk eerst op dat g een homeomorfisme is, met als gevolg: twee verzamelingen zijn disjunct in U_1 dan en slechts dan als hun beelden onder g disjunct zijn in U_2 , dan en slechts dan als de verzamelingen onder het quotiënt disjunct zijn. Neem nu twee punten $[z_1], [z_2]$ waarvan zonder verlies van algemeenheid, z_1, z_2 allebei in U_1 zitten. Dan omdat U_1 Hausdorff is, zijn er twee disjuncte open omgevingen V_1, V_2 van z_1, z_2 , waar

$$V_1 \sqcup g(V_1 - \{0\}), \text{ en } V_2 \sqcup g(V_2 - \{0\})$$

ook open verzamelingen zijn. Dus hun beeld onder het quotiënt bestaat ook uit een vereniging open disjuncte omgevingen van $[z_1], [z_2]$. Stel nu dat z_1, z_2 niet allebei in één van de opens U_i zitten, dat kan alleen als zonder verlies van algemeenheid $z_1 = 0 \in U_1$ en $z_2 = 0 \in U_2$. Bekijk dan de twee verzamelingen

$$Z = \{[x] : x \in U_1 \text{ waar } |x| < 0.5\} \text{ en } N = \{[y] : y \in U_2 \text{ waar } |y| < 0.5\},$$

met $|x|$ de standaard euclidische absolute waarde voor complexe getallen. Het teruggehaalde beeld van Z is

$$Z' = \{x \in U_1 : |x| < 0.5\} \sqcup \{y \in U_2 : |y| > 2\}$$

en voor N' soortgelijk. Dan zijn N' en Z' open en disjunct in $U_1 \sqcup U_2$, dus ook in $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. We concluderen dat $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ Hausdorff is. \square

Stelling 1.1.3. $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ is een riemann-oppervlak

Bewijs. Ten eerste hebben we al gezien dat $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ een Hausdorff en compacte topologische ruimte is. Nu willen we nog laten zien dat er een goede atlas op $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ gedefinieerd kan worden. Voor de verzamelingen U_1, U_2 definiëren we $[U_i]$ als in het bewijs hierboven. Vervolgens bekijken we de volgende coördinaat functies

$$\phi_i : [U_i] \rightarrow U_i \text{ met } [x] \mapsto z_i$$

waar z_i de representant van $[x]$ die element is van U_i . Hier zijn ϕ_1 en ϕ_2 homeomorfismen. Nu bekijken we de transitiefuncties T_{12} en T_{21} waar

$$T_{21} = \phi_1 \circ \phi_2^{-1} : U_2 \setminus \{0\} \rightarrow U_1 \setminus \{0\}.$$

We hebben voor $z_2 \in U_2 \setminus \{0\}$ dat

$$z_2 \xrightarrow{\phi_2^{-1}} [z_2] = [z_1 = 1/z_2] \xrightarrow{\phi_1} 1/z_2$$

In het domein geldt altijd dat $z_2 \neq 0$, dus de functie T_{21} is duidelijk holomorf. Precies hetzelfde geldt voor transitiefunctie T_{12} . We hebben nu een atlas van $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ met twee kaarten waarvan de transitie functies holomorf zijn, dus $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ is een riemann-oppervlak. \square

1.1.3 Projectieve krommen

Een ander mooi voorbeeld van compacte riemann-oppervlakken zijn projectieve krommen. In een eerdere paragraaf hebben we al naar affiene vlakke kromme gekeken, die op het complexe vlak zijn gedefinieerd. Nu zullen we naar krommen kijken die in het projectieve vlak $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ liggen. Belangrijk hierbij is dat ze wel goed gedefinieerd moeten zijn, aangezien de projectieve ruimte een verzameling van equivalentieclassen is. Dit kan al snel fout gaan:

Voorbeeld 1.1.1. Neem de polynoom $p(x, y, z) = x^2 + y^3 + z - 5$, dan $P(1, 1, 1) = -2 \neq 9 = P(2, 2, 2)$. Dit is niet wel-gedefinieerd in het projectieve vlak waar $[1 : 1 : 1] = [2 : 2 : 2]$ één punt is.

Bedenk echter dat we bij het geval van de affiene vlakke kromme alleen geïnteresseerd waren in de nulpunten van de polynoom. Dus ook hier zullen we alleen op nulpunten eisen dat de polynoom wel-gedefinieerd is in het projectieve vlak. Daarom introduceren we de volgende definitie:

Definitie 1.1.4 (def. 3.2.4). Een polynoom $P \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ wordt **homogeen van graad** d genoemd als aan één van de volgende eisen wordt voldaan:

1. Elke term heeft graad d
2. Voor elke $t \in \mathbb{C}$,

$$P(tX, tY, tZ) = t^d P(X, Y, Z)$$

3. “Euler’s identiteit” geldt:

$$X \frac{\partial P}{\partial X} + Y \frac{\partial P}{\partial Y} + Z \frac{\partial P}{\partial Z} = d \cdot P$$

Stelling 1.1.4 (opg. 3.2.7). *De bovenstaande eisen (1,2 en 3) zijn equivalent.*

Bewijs. 1 \iff 2) We kunnen de polynoom P opschrijven als

$$P(X, Y, Z) = \sum_{i \in I} a_i (X^{k_i} Y^{l_i} Z^{m_i}).$$

Stel elke term heeft graad d , dan voor elke i $k_i + l_i + m_i = d$, dus

$$P(tX, tY, tZ) = \sum_{i \in I} a_i t^{k_i+l_i+m_i} (X^{k_i} Y^{l_i} Z^{m_i}) = t^d \sum_{i \in I} a_i (X^{k_i} Y^{l_i} Z^{m_i}) = t^d P(X, Y, Z).$$

De omgekeerde implicatie wordt bewezen door de redenering van achter naar voor te lezen.

1 \iff 3) Schrijf wederom

$$P(X, Y, Z) = \sum_{i \in I} a_i (X^{k_i} Y^{l_i} Z^{m_i}),$$

dan kunnen we de volgende berekening uitvoeren:

$$\begin{aligned} X \frac{\partial P}{\partial X} + Y \frac{\partial P}{\partial Y} + Z \frac{\partial P}{\partial Z} &= X \left(\frac{\partial}{\partial X} \sum_{i \in I} a_i (X^{k_i} Y^{l_i} Z^{m_i}) \right) + Y \left(\frac{\partial}{\partial Y} \sum_{i \in I} a_i (X^{k_i} Y^{l_i} Z^{m_i}) \right) \\ &\quad + Z \left(\frac{\partial}{\partial Z} \sum_{i \in I} a_i (X^{k_i} Y^{l_i} Z^{m_i}) \right) = X \left(\sum_{i \in I} a_i k_i Y Z (X^{k_i-1} Y^{l_i-1} Z^{m_i-1}) \right) \\ &\quad + Y \left(\sum_{i \in I} a_i l_i X Z (X^{k_i-1} Y^{l_i-1} Z^{m_i-1}) \right) + Z \left(\sum_{i \in I} a_i m_i X Y (X^{k_i-1} Y^{l_i-1} Z^{m_i-1}) \right) = \\ &XY Z \sum_{i \in I} a_i (k_i + l_i + m_i) (X^{k_i-1} Y^{l_i-1} Z^{m_i-1}) = \sum_{i \in I} a_i d (X^{k_i} Y^{l_i} Z^{m_i}) = d \cdot P(X, Y, Z). \end{aligned}$$

Ook hier geldt de omgekeerde implicatie; Als eis 3) als waar wordt aangenomen, dan hebben we voor elke $i \in I$ dat $k_i + l_i + m_i = d$, oftewel dat elke term van polynoom P graad d heeft. \square

De eis dat een polynoom met drie complexe variabelen homogeen is (met een graad d) blijkt sterk genoeg om te impliceren dat de nulpunten van deze polynoom wel-gedefinieerd zijn in het projectieve vlak.

Stelling 1.1.5 (opg 3.2.8). *Een homogeen polynoom $P \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ is wel-gedefinieerd in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ op haar nulpunten.*

Bewijs. Zij $P \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ een homogeen polynoom. Zij (X, Y, Z) een nulpunt van P . Stel nu

$$[X : Y : Z] = [X' : Y' : Z'],$$

dan bestaat er een $t \in \mathbb{C}$, zodat

$$(X', Y', Z') = (tX, tY, tZ).$$

Wegens eis 2) is (X', Y', Z') ook een nulpunt van P . \square

Nu we dit achter de rug hebben kunnen we zonder verdere zorgen de volgende verzameling bekijken.

Definitie 1.1.5. Gegeven een homogene polynoom $P \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ van graad d , dan heet de verzameling

$$V(P) : \{[X : Y : Z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mid P(X, Y, Z) = 0\}$$

een **vlakke projectieve kromme** van graad d . Als er geen punt $(X, Y, Z) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ bestaat waarvoor

$$\frac{\partial P}{\partial X}(X, Y, Z) = \frac{\partial P}{\partial Y}(X, Y, Z) = \frac{\partial P}{\partial Z}(X, Y, Z) = 0,$$

dan heet $V(P)$ een **gladde** vlakke projectieve kromme.

Niet geheel onverwachts blijkt deze ruimte ook een riemann-oppervlak te zijn.

Stelling 1.1.6 (prop. 3.2.6). *Een gladde vlakke projectieve kromme is een compact riemann-oppervlak*

Bewijs. Eerst laten we zien dan $V(P)$ compact is. Beschouw de projectie

$$\pi : \mathbb{C}^3 \setminus (0, 0, 0) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}), (X, Y, Z) \mapsto [X : Y : Z],$$

en de continue homogene polynoom $P : (X, Y, Z) \mapsto P(X, Y, Z)$ van graad d . Ten eerste hebben we $\pi^{-1}(V(P)) = P^{-1}(0)$. Merk vervolgens op dat $P^{-1}(0)$ gesloten is omdat P continu is en $\{0\}$ een gesloten verzameling. We concluderen dat omdat $\pi^{-1}(V(P))$ gesloten is dat $V(P)$ dat ook is onder de definitie van de quotiënttopologie. We zien dat $V(P)$ compact, omdat een gesloten deelverzameling van een compacte ruimte (volgens lemma 1.1.4 is $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ inderdaad compact) zelf altijd ook compact is.

Nu willen we laten zien dat de doorsnede van $V(P)$ met een willekeurige affiene coördinaat kaart van $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ een riemann-oppervlak is. Beschouw zonder verlies van algemeenheid de kaart

$$U_X = \{[X : Y : Z] \mid X \neq 0\} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$$

met lokale coördinaten:

$$\phi_X([X : Y : Z]) = (Y/X, Z/X)$$

De verzameling $\phi_X(V(P) \cap U_X)$ is hier gelijk aan $V(h)$, waar de polynoom definiëren als $h(y, z) := P(1, y, z)$. Er geldt nu bovendien

$$\frac{\partial h}{\partial y}(y, z) = \frac{\partial P}{\partial Y}(1, Y, Z), \text{ en } \frac{\partial h}{\partial z}(y, z) = \frac{\partial P}{\partial Z}(1, Y, Z)$$

We willen nu aantonen dat er geen nulpunten $(y_0, z_0) \in \mathbb{C}^2$ van h bestaan zodat

$$\frac{\partial h}{\partial y}(y_0, z_0) = \frac{\partial h}{\partial z}(y_0, z_0) = 0.$$

Stel zo een (y_0, z_0) bestaat wel. Dan omdat $V(P)$ glad is moet er wel gelden dat

$$\frac{\partial P}{\partial X}(1, y_0, z_0) \neq 0.$$

Maar nu krijgen we de volgende tegenspraak met behulp van ‘Euler’s identiteit’ uit definitie 1.1.4.

$$\frac{\partial P}{\partial X}(1, y_0, z_0) + y_0 \frac{\partial P}{\partial Y}(1, y_0, z_0) + z_0 \frac{\partial P}{\partial Z}(1, y_0, z_0) = \frac{\partial P}{\partial X}(1, y_0, z_0) \neq 0,$$

maar ook

$$\frac{\partial P}{\partial X}(1, y_0, z_0) + y_0 \frac{\partial P}{\partial Y}(1, y_0, z_0) + z_0 \frac{\partial P}{\partial Z}(1, y_0, z_0) = d \cdot P(1, y_0, z_0) = 0.$$

We zien dus dat $V(h)$ een gladde affiene kromme is, waarvan we hebben aangetoond dat het een riemann-oppervlak is. Dus $V(P)$ is ook een riemann-oppervlak. \square

Bij het vorige bewijs hebben we dit lemma nodig.

Lemma 1.1.4. *Het projectieve vlak $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ is een compacte complexe variëteit van dimensie 2.*

Bewijs. Ten eerste zullen we laten zien dat $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ een compacte Hausdorff topologische ruimte is: We identificeren $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ als een quotiënt op de eenheidssfeer $U = \{z : |z| = 1, z \in \mathbb{C}^3\}$ in \mathbb{C}^3 met de cyclische groep $\mu_2 = -1, 1$ met groepsactie op de sfeer

$$\begin{aligned} 1 \cdot (X_0, X_1, \dots, X_n) &= (X_0, X_1, \dots, X_n), \text{ en} \\ -1 \cdot (X_0, X_1, \dots, X_n) &= (-X_0, -X_1, \dots, -X_n), \end{aligned}$$

waar $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) = U/\mu_2$. De eenheidssfeer is compact, dus $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ is dat ook. Het is niet moeilijk in te zien dat we als omgeving rond elk punt in U/μ_2 kleine open balletjes kunnen geven die disjunct zijn, zoals we dat ook zouden kunnen doen in U . Dus $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ is Hausdorff. Nu bekijken we de kaarten die we aan $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ kunnen geven. Definieer

$$U_X := \{[X : Y : Z] \mid X \neq 0\},$$

en zo ook U_Y, U_Z . En definieer de lokale coördinaat afbeelding als

$$\phi_X : U_X \rightarrow \mathbb{C}^2, [X : Y : Z] = [1 : Y/X : Z/X] \mapsto (Y/X, Z/X)$$

, en wederom op dezelfde manier ϕ_Y, ϕ_Z . Het is duidelijk dat de verzameling lijnen die door de oorsprong van \mathbb{C}^3 lopen (waar $X \neq 0$) open is dan en slechts dan als de projectie in het YZ-vlak ook open is, dus ϕ_X is een homeomorfisme, zo ook ϕ_Y, ϕ_Z . Nu willen we laten zien dat de transitiefuncties holomorf zijn. Bekijk $T_{X,Y} = \phi_Y \circ (\phi_X)^{-1}$, die stuurt $(y, z) \in \mathbb{C}^2$ met $y \neq 0$ naar

$$T_{X,Y} : (y, z) \xrightarrow{\phi_X^{-1}} [1 : y : z] = [1/y : 1 : z/y] \xrightarrow{\phi_Y} (1/y, z/y),$$

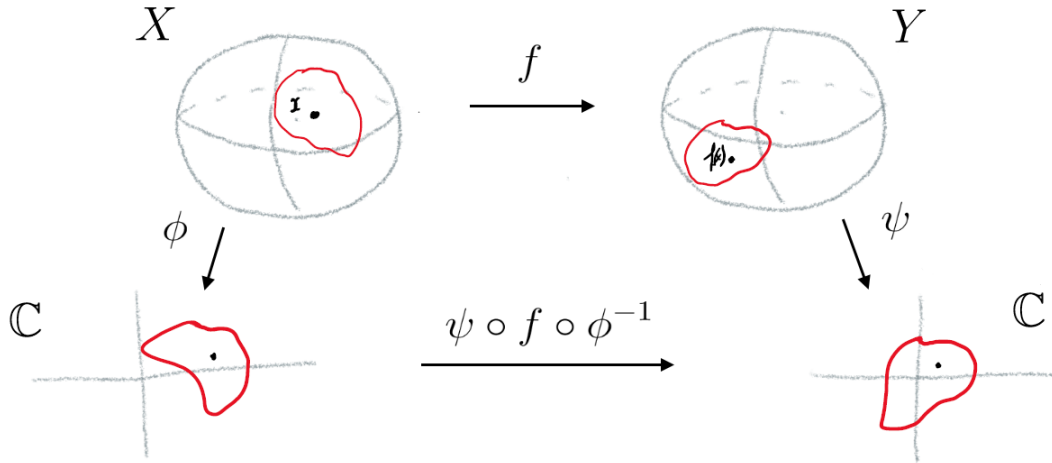
dus $T_{X,Y}$. Op geheel analoge wijze concluderen we dat de andere transitiefuncties $T_{Y,X}, T_{X,Z}, T_{Z,X}, T_{Y,Z}, T_{Z,Y}$ ook holomorf zijn. \square

1.2 Holomorfe afbeeldingen tussen riemann-oppervlakken

Nu we de objecten van ons onderzoek, compacte riemann-oppervlakken, hebben geïntroduceerd zullen we het hebben over morfismen hiertussen.

Definitie 1.2.1. Zij X, Y riemann-oppervlakken en $f : X \rightarrow Y$ een afbeelding tussen de twee verzamelingen. Dan noemen we f holomorf op $x \in X$ als voor elke willekeurig paar kaarten $\phi_x, \phi_{f(x)}$ de functie $\phi_{f(x)} \circ f \circ \phi_x^{-1}$ holomorf is op $\phi(x)$. Als f holomorf voor elke $x \in X$, dan noemen we f een holomorfe afbeelding tussen riemann-oppervlakken.

Wat er in feite wordt vereist is dat de functie overal lokaal holomorf is, ongeacht welke kaart gekozen wordt. Hierom noemen we de functie $\phi_{f(x)} \circ f \circ \phi_x^{-1}$ een **lokale uitdrukking** van f . Dit idee wordt uitgebeeld in het diagram van figuur 1.2. We kunnen hier meteen een simplificatie maken: Het blijkt niet nodig te zijn om elke combinatie van kaarten te bekijken; Het is voldoende om één lokale uitdrukking te vinden die holomorf is op x .



Figuur 1.2: Deze figuur illustreert wat een lokale uitdrukking van een functie f doet. Het is de afbeelding tussen lokale coördinaten, die door f heen wordt gestuurd.

Stelling 1.2.1 (opg. 4.1.1). $f : X \rightarrow Y$ is holomorfe op $x \in X$ dan en slechts dan als er een lokale uitdrukking bestaat $\phi_{f(x)} \circ f \circ \phi_x^{-1}$ die holomorfe is.

Bewijs. De implicatie van links naar rechts is triviaal. De andere kant op kunnen we handig de definitie van riemann-oppervlakken gebruiken. Stel er zijn twee kaarten $\phi_x, \phi_{f(x)}$ die een holomorfe lokale uitdrukking geven. Dan geldt er voor elke andere kaart van $x, f(x)$ $\tilde{\phi}_x, \tilde{\phi}_{f(x)}$, dat de transitiefuncties

$$\phi_x \circ \tilde{\phi}_x^{-1} \text{ en } \tilde{\phi}_{f(x)} \circ \phi_{f(x)}^{-1}$$

holomorfe zijn, en dus zal ook de samenstelling

$$\tilde{\phi}_{f(x)} \circ \phi_{f(x)}^{-1} \circ \phi_{f(x)} \circ f \circ \phi_x^{-1} \circ \phi_x \circ (\tilde{\phi}_x)^{-1} = \tilde{\phi}_{f(x)} \circ f \circ (\tilde{\phi}_x)^{-1},$$

holomorfe zijn op x . □

Een voorbeeld van een holomorfe afbeelding tussen twee riemann-oppervlakken X, Y is de constante afbeelding $f : X \rightarrow Y, f(x) = y_0$, waar y_0 een punt in Y . Nu geldt dat voor elke $x \in X$ elk tweetal kaarten $\phi_x, \phi_{f(x)=y_0}$ een constante lokale uitdrukking geven: $\phi_{y_0} \circ f \circ \phi_x^{-1} : u \mapsto \phi_{y_0}(y_0)$. De constante complexe functie is tevens holomorfe.

Een ander simpel voorbeeld van een holomorfe afbeelding is de identiteit op een riemann-oppervlak $X, f : X \rightarrow X, x \mapsto x$. Hier geldt voor elke lokale uitdrukking rond een willekeurig punt $x_0 \in X$, dat

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} = \psi \circ \phi^{-1},$$

per definitie holomorfe is op x_0 . Zo zijn er nog twee interessante gevolgen van definitie 1.2.1

Gevolg 1.2.1. Zij X een riemann-oppervlak, dan is elke lokale coördinaat afbeelding $\phi : X \rightarrow \mathbb{C}$ een holomorfe afbeelding tussen riemann-oppervlakken.

Bewijs. Voor een willekeurige $x \in X$ neem een lokale coördinaat functie ϕ_x . Dan hebben we de holomorfe lokale uitdrukking van ϕ_x , $\phi = \text{Id}_{\mathbb{C}} \circ \phi_x \circ \phi_x^{-1} = \phi_x \circ \phi_x^{-1}$. \square

Nu een wat interessantere opgave:

Stelling 1.2.2 (vb. 4.1.2.). *Beschouw $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$ als de één-punts compactificatie van \mathbb{C} . De afbeelding $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, met $z \mapsto z^d$, $\infty \mapsto \infty$. Dan is f een holomorfe afbeelding tussen riemann-oppervlakken.*

Bewijs. We hadden voor $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ een atlas met twee kaarten:

$$(U_1 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - \{\infty\}, \phi_1 : z \mapsto z) \text{ en } (U_2 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - \{0\}, \phi_2 : z \mapsto 1/z = \tilde{z}, 1/\infty := 0)$$

Voor elk punt z in de open verzameling U_1 hebben we dus de lokale coördinaten $\phi_1 : z \mapsto z$, en dan zit $f(z)$ ook in U_1 , dus $\phi_1(f(z)) = f(z)$. Dit geeft de lokale uitdrukking van f voor punten $z \in U_1$:

$$F_1(z) = \phi_1 \circ f \circ \phi_1^{-1}(z) = f(z) = z^d.$$

Dit is inderdaad een holomorfe afbeelding. Nu moeten we nog bewijzen dat f holomorf is op een open omgeving van het punt ∞ . We bekijken de lokale uitdrukking van f voor de kaart U_2 die het betreffende punt en het beeld ervan bevatten. Merk op dat $f(U_2) \subset U_2$. Nu willen we de lokale uitdrukking

$$F_2(\tilde{z}) = (\phi_2 \circ f \circ \phi_2^{-1})(\tilde{z})$$

bekijken. Voor het punt $\tilde{z} = 0$ geldt

$$F_2(0) = (\phi_2 \circ f)(\infty) = \phi_2(\infty) = 0.$$

Voor de andere punten $\tilde{z} \neq 0$ geldt dat we $F_2(\tilde{z})$ kunnen berekenen via de transitiefuncties en de lokale uitdrukking F_1 :

$$F_2(\tilde{z}) = T_{21} \circ F_1 \circ T_{12}(\tilde{z}) = T_{21} \circ F_1(1/z) = T_{21}((1/z)^d) = \tilde{z}^d.$$

We zien dus dat de lokale uitdrukking $F_2(\tilde{z}) = \tilde{z}^d$ holomorf is op $\tilde{z} = 0$. We concluderen dat f een holomorfe afbeelding tussen riemann-oppervlakken is. \square

Stelling 1.2.3 (opg. 4.1.4.). *Neem $a, b, c \in \mathbb{C}$ en beschouw de polynoom $p(z) = (z - a)(z - b)(z - c)$. Dan is de functie $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ gegeven door $z \mapsto p(z)$ en $\infty \mapsto \infty$ een holomorfe afbeelding, waar we wederom $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ identificeren als $\mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$.*

Bewijs. Beschouw weer twee kaarten, de eerste die onder andere a, b, c bevat:

$$(U_1 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - \{\infty\}, \phi_1 : z \mapsto z)$$

en dit keer de tweede kaart met een aantal punten weggelaten,

$$(U_2 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - N, \phi_2 : z \mapsto 1/z = \tilde{z}, \text{ met } 1/\infty := 0),$$

waar

$$N = \{0\} \cup \{1/n : n \in \{a, b, c\}, n \neq 0\}.$$

Dan hebben we voor $[z] \in U_1$ de lokale uitdrukking

$$F_1 : z \xrightarrow{\phi_1^{-1}} z \xrightarrow{f} p(z) \xrightarrow{\phi_1} p(z)$$

Voor de overige punten $[1/z] = [\tilde{z}] \in U_2$ hebben we de lokale uitdrukking die $\tilde{z} \neq 0$ afbeeld naar:

$$F_2 : \tilde{z} \xrightarrow{T_{2,1}} 1/z \xrightarrow{F_1} p(1/z) \xrightarrow{T_{1,2}} \frac{1}{p(1/z)}$$

(merk op dat we er voor hebben gezorgd dat $1/z \neq a, b, c$) Het punt $\phi_2(\infty)$ wordt door F_2 als volgt afgebeeld:

$$F_2 : 0 \xrightarrow{\phi_2^{-1}} \infty \xrightarrow{f} \infty \xrightarrow{\phi_2} 0.$$

□

Definitie 1.2.2. Twee riemann-oppervlakken X, Y zijn **isomorf (bi-holomorf)**, notatie $X \cong Y$ als er holomorfe afbeeldingen $f : X \rightarrow Y$ and $g : Y \rightarrow X$ bestaan zodat $g \circ f = I_X$ en $f \circ g = I_Y$. Een isomorfisme $h : X \rightarrow X$ van X naar zichzelf heet een **automorfisme** van X .

1.3 Vertakkingen van holomorfe afbeeldingen

Wat inmiddels is opgevallen is dat een holomorfe afbeelding tussen riemann-oppervlakken X, Y veel verschillende lokale uitdrukkingen heeft dichtbij een punt $x \in X$, afhankelijk van de keuze van kaarten. Gegeven een lokale coördinaat functie ϕ_x , en een automorfisme h op \mathbb{C} , dan geeft $h \circ \phi_x$ een nieuw lokale coördinaat functie. Bijvoorbeeld $h : z \mapsto z + (a + bi)$ geeft een translatie van de lokale coördinaten. We zien zo dat we voor elk riemann-oppervlak een kaart kunnen maken voor x die **gecentreerd is rond x** , namelijk dat $\phi_x(x) = 0$. De volgende stelling gaat verder dan dit: Voor elke holomorfe afbeelding f bestaat er voor elk punt $x \in X$ een lokale uitdrukking die z naar z^k stuurt, met k een positief geheel getal.

Stelling 1.3.1. *Laat $f : X \rightarrow Y$ een niet-constante holomorfe afbeelding tussen riemann-oppervlakken. Voor willekeurige $x \in X$ bestaan er kaarten gecentreerd rond x en $f(x)$, zodat de lokale uitdrukking van f met deze kaarten $z \mapsto z^k$ is, voor een getal $k \geq 1$, deze k is uniek*

Bewijs. Zie [CM16](pagina 51) voor een bewijs. □

Het feit dat deze k voor de lokale uitdrukkingen gecentreerd rond $x \in X$ uniek bepaald is, vertelt ons dat deze k een eigenschap is van het punt x . Wij zullen nu onderzoeken wat de gevolgen van deze eigenschap zijn. Om te beginnen handige terminologie om hierover te praten.

Definitie 1.3.1 (def 4.2.2.). Zij $f : X \rightarrow Y$ een niet-constante holomorfe afbeelding tussen riemann-oppervlakken. Dan, gegeven een punt $x \in X$ die een lokale uitdrukking $F(z) = z^{k_x}$ heeft, hebben we de volgende termen:

- Het getal k_x heet de **vertakkingsindex** van f op x

- Als $k_x = 1$ noemen we f **onvertakt** op x
- Als $k_x > 1$ noemen we x een **vertakkingspunt**
- Het beeld van een vertakkingspunt $f(x)$ noemen we een **vouwpunt**
- de verzameling van alle vertakkingspunten noemen we de **vertakkingslocus**
- het beeld van de vertakkingslocus noemen we de **vouw-locus**, die tevens alle vouwpunten bevat.

Merk op dat de vouw-locus het beeld is van de vertakkingspunten, maar omdat een holomorfe afbeelding meestal niet injectief is, de vertakkingslocus niet per se het teruggehaalde beeld van de vouw-locus hoeft te zijn. Het kan best voorkomen dat een onvertakt punt en een vertakkingspunt naar hetzelfde vouwpunt worden gestuurd. De vraag wat voor vertakkingsindices de punten in het teruggehaalde beeld van een vouwpunt hebben wordt significant in het volgende hoofdstuk.

De volgende stelling uit de complexe analyse, te vinden in [Lan99], zal van pas komen om vertakkingspunten te onderzoeken.

Lemma 1.3.1 (Inverteerbare Functie Stelling). *Zij $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ een holomorfe functie en $z_0 \in U$ zodanig dat $f'(z_0) \neq 0$. Dan bestaat er een open omgeving V van $f(z_0)$ en een holomorfe afbeelding $h : V \rightarrow \mathbb{C}$ zodat $z_0 \in h(V)$ en voor elke $z \in h(V)$, $h \circ f(z) = z$.*

Stelling 1.3.2 (opm. 4.2.3.). *De functie f is onvertakt op $x \in X$ dan en slechts dan als er een lokale uitdrukking F van f op een omgeving van x (niet per se gecentreerd rond x), met lokale coördinaten ϕ rond x en ψ rond $f(x)$, bestaat zodat $F'(\phi(x)) \neq 0$, oftewel f is lokaal inverteerbaar rond x .*

Bewijs. Stel ten eerste dat x onvertakt is. Dan is er dus een lokale uitdrukking $F(z) = z$ van f gecentreerd rond x . Dan $F'(\phi(x)) = 1 \neq 0$. Nu voor de omgekeerde implicatie: Stel er is een lokale uitdrukking F van f op een omgeving van x , waar $F'(\phi(x)) \neq 0$, dan volgens de inverteerbare functie stelling (lemma 1.3.1) bestaat er een omgeving V van $F(\phi(x))$ en een holomorfe afbeelding $g : V \rightarrow \mathbb{C}$ zodat $\phi(x) \in g(V)$ en voor alle $z \in g(V)$ geldt $g \circ F(z) = z$. We beperken vervolgens de lokale coördinaat functie ϕ rond x tot $g(V)$, en daarna voeren we de coördinaten-transformatie $\tilde{z} = z - \phi(x)$ uit zodat

$$g \circ F(z - \phi(x)) = z - \phi(x), \text{ en dus } g \circ F(\tilde{z}) = \tilde{z},$$

waar nu x en $f(x)$ gecentreerd zijn door de lokale coördinaten functies $\phi - \phi(x)$ en $g \circ \psi$. Dus $k_x = 1$. □

Hiermee kunnen we onder andere de volgende eigenschap van vertakkingspunten bewijzen.

Gevolg 1.3.1 (lem. 4.2.4). *Zij $f : X \rightarrow Y$ een niet-constante holomorfe afbeelding tussen riemann-oppervlakken. De vertakkingslocus R is een discrete deelverzameling van X , oftewel er bestaan open verzamelingen U_i zodat elke U_i precies één vertakkingspunt $x \in R$ bevat.*

Bewijs. Neem $x_0 \in X$ dan zijn er kaarten gecentreerd rond x_0 $(\phi, U_{x_0}), (\psi, V_{x_0})$ zodat de lokale uitdrukking van de vorm $F(z) = z^{k_{x_0}}$ is. Dan geldt er voor elke $x \in U_{x_0} \setminus \{x_0\}$ dat $\phi(x) \neq 0$ en dus $F'(\phi(x)) = k_x(\phi(x))^{k_x-1} \neq 0$. Volgens stelling 1.3.2 hebben we dat elke $x \in U_{x_0} \setminus \{x_0\}$ onvertakt is. Dit geldt in het bijzonder dus ook voor elke $x_0 \in R$. \square

Om te bewijzen dat de vertakkingslocus eindig is zullen we (nog) een topologisch lemma nodig hebben.

Lemma 1.3.2. *Een oneindige discrete deelverzameling S van een compacte topologische ruimte X heeft een limietpunt. (Een punt buiten S waarvan elke open omgeving een niet-lege doorsnede met S heeft)*

Bewijs. Stel S heeft geen limietpunt, dan geldt er voor elke $x \in X$ dat er een open omgeving U_x van x bestaat zodat $U_x \cap S = \emptyset$ of $U_x \cap S = \{x\}$. Bekijk dan de open overdekking $D = \{U_x : x \in X\}$ van X . Deze heeft een eindige deelloverdekking, want X is compact. Maar elke verzameling U_x bevat maximaal één punt van de verzameling S en de eindige overdekking is een overdekking van X dus bevatten ze alle punt van S . De verzameling S moet dus wel eindig zijn. \square

Uit het bewijs van gevolg 1.3.1 blijkt dat de vertakkingslocus R geen limietpunt heeft. Uit het bovenstaande lemma volgt dat R eindig is.

Gevolg 1.3.2 (lem: 4.2.5). *Zij $f : X \rightarrow Y$ een niet-constante holomorfe afbeelding tussen riemann-oppervlakken, en X compact, dan is de vertakkingslocus R van f een eindige verzameling. Hieruit volgt dat de vouw-locus $f(R)$ ook een eindige verzameling is.*

Omdat een niet-constante holomorfe afbeelding surjectief is [CM16][st. 4.3.1] kunnen we voor elke $y \in Y$, het teruggehaalde beeld bekijken. We gebruiken dit in de volgende definitie.

Definitie 1.3.2. Zij $f : X \rightarrow Y$ een niet-constante holomorfe afbeelding tussen compacte riemann-oppervlakken. De **graad** van f is de kardinaliteit van het teruggehaalde beeld van y waar y niet in de vouw-locus van f zit. Als f constant is dan zeggen we dat de functie graad 0 heeft.

De volgende stelling zal vaststellen dat de graad wel-gedefinieerd is.

Stelling 1.3.3 (st. 4.3.3). *Zij $f : X \rightarrow Y$ een niet-constante holomorfe afbeelding tussen compacte riemann-oppervlakken. Als $y_0, y_1 \in Y$ geen vouwpunten, dan $|f^{-1}(y_0)| = |f^{-1}(y_1)|$ is eindig.*

Bewijs. Laat B de vouw-locus van f . Neem een punt $y_0 \in Y \setminus B$, en neem een punt $x \in f^{-1}(y_0)$. We weten dat er een open omgeving U_x van x bestaat en lokale coördinaten gecentreerd rond x , zodat de lokale uitdrukking F van de vorm $z \mapsto z^d$ is. We zien dat U_x alleen één punt uit $f^{-1}(y_0)$ bevat en dat is het punt x . Dus de verzameling $f^{-1}(y_0)$ is discreet, en dus eindig, net zoals we bij gevolg 1.3.2 hebben gezien.

We noemen nu d de kardinaliteit van het teruggehaalde beeld $|f^{-1}(y_0)| = d$. We willen laten zien dat de verzameling

$$A = \{y \in Y \setminus B : |f^{-1}(y)| = d\}$$

zowel open als gesloten is in $Y \setminus B$. Omdat y_0 bevat is in A zal A niet leeg zijn, en omdat een niet-lege deelverzameling van een samenhangende topologische ruimte die zowel open en gesloten gelijk is aan de ruimte zelf, zal er dan gelden dat $A = Y \setminus B$. (Want $A \sqcup A^C$ is een disjuncte open overdekking van een samenhangende ruimte.) Ten eerste vanwege lemma 1.3.3 blijkt het dat voor elk willekeurig punt $y \in A$ een open verzameling kunnen vinden, waarvoor elk punt in die open verzameling ook d teruggehaalde punten heeft. Dus elke $y \in A$ is een inwendig punt van A , dus A is een open verzameling. We kunnen op identieke wijze beredeneren dat het complement $A^C = \{y \in Y \setminus B : |f^{-1}(y)| \neq d\}$ open is. Dus geldt er $A = Y \setminus B$. \square

Lemma 1.3.3 (opg 4.3.3). *Zij $f : X \rightarrow Y$ een niet-constante holomorfe afbeelding tussen compacte riemann-oppervlakken. We kunnen voor elke $y \in Y$ wat geen vouw-punt is, een open omgeving V vinden, zodat het teruggehaalde beeld de vereniging is van disjuncte open omgevingen rond elk punt in $f^{-1}(y)$. En zodat elke disjuncte omgeving individueel homeomorf is aan V .*

Bewijs. Neem een punt $y \in A$, en laat $\{x_1, \dots, x_d\} = f^{-1}(y)$ de punten in het teruggehaalde beeld. Voor elk punt x_i hebben we kaarten gecentreerd rond x_i en $f(x_i)$ met de lokale uitdrukking $z \mapsto z$. Omdat X Hausdorff is, kunnen we elke kaart rond x_i begrenzen tot de kaart (ϕ_i, U_i) zodat elke U_i paarsgewijs disjunct is. Laat $\{(V_i, \psi_i)\}$ dezelfde kaarten gecentreerd rond $f(x_i) = y$. Deze lokale coördinaten geven dan ook de lokale uitdrukking

$$F_i = \psi_i \circ f \circ \phi_i^{-1} : z \mapsto z.$$

De lokale uitdrukking heeft vanwege compositie, als domein de verzameling

$$D_i := \phi_i^{-1}(U_i \cap f^{-1}(V_i)).$$

Omdat V_i open is en omdat f continu is, geldt er dat $U_i \cap f^{-1}(V_i)$ open is. Dit impliceert dat het domein D_i ook open is. De oorsprong $\phi(i)$ is dus een inwendig punt van D_i . We kunnen dus een klein open bolletje B_i rondom 0 kiezen, zodat $F_i(B_i) = B_i$. Dan is $\psi_i^{-1}(B_i)$ dus een open deelverzameling van $f(U_i)$. Door alle doorsnedes van deze verzamelingen te nemen krijgen we een open verzameling

$$S = \psi_1^{-1}(B_1) \cap \dots \cap \psi_d^{-1}(B_d) \subset f(U_1) \cap f(U_2) \cap \dots \cap f(U_d)$$

Nu hebben we dus de situatie dat S een open omgeving is van y , waarvan het teruggehaalde beeld minstens een verzameling is van d disjuncte open omgevingen van x_i , die bevat zijn in U_i , die homeomorf is aan S . Het probleem is dat het teruggehaalde beeld van S ook meer punten kan bevatten dan deze disjuncte omgevingen. We willen dus nu een open omgeving van y vinden waarvan het teruggehaalde beeld alléén uit zulke disjuncte open omgevingen van x_i 's bestaat. Stel een dergelijke open omgeving bestaat niet. Neem dan een punt $r \in \psi_1(S)$ (maakt in feite niet uit welke functie ψ_i we gebruiken), dan definiëren we de collectie bolletjes

$$C_n = \psi_1^{-1}(\{z \in \mathbb{C} : |z| < |r| \cdot 2^{-n}\})$$

voor $n \geq 0$. Elk bolletje C_n bevat (minimaal) één punt in het teruggehaalde beeld dat niet bevat is in $U_1 \cup \dots \cup U_d$, dus we kiezen voor elk bolletje C_n één zo een punt

c_n . Dit zijn oneindig veel verschillende punten, want voor elke c_n kunnen we een bolletje C_m vinden dat $f(c_n)$ niet bevat, dus $c_m \neq c_n$. Omdat X compact is en de verzameling punten c_n oneindig is, heeft de verzameling het limietpunt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L.$$

De reeks $f(c_n)$ heeft natuurlijk het limiet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(c_n) = y.$$

Omdat er voor elke $x_i \in f^{-1}(y)$ de open omgeving U_i geen punt van de reeks $\{c_n\}_{n \geq 0}$ bevat, geldt er $f(L) \neq y$. Dit is in tegenspraak met de continuïteit van f , dus er bestaat wel een open omgeving van y waarvan het teruggehaalde beeld bevat is in $U_1 \cup \dots \cup U_d$. Dit geldt dus ook voor één van de bolletjes C_n met een geheel getal n , waarvoor ook geldt dat het teruggehaalde beeld de vereniging van d disjuncte verzamelingen is die homeomorf zijn aan C_n , vanwege het feit dat f lokaal, begrensd tot de omgevingen U_i, V_i , een homeomorfisme is. \square

Het gevolg hiervan is nog sterker:

Gevolg 1.3.3 (opg. 4.3.2). *Zij $f : X \rightarrow Y$ een holomorfe afbeelding tussen compacte riemann-oppervlakken van graad $d > 0$, $y \in Y$ en $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_n\}$, dan*

$$\sum_{i=1}^n k_{x_i} = d.$$

Bewijs. Zij B de vouw-locus. Dan voor $y \in Y \setminus B$ weten we al door stelling 1.3.3 dat de vertakkingsindices van punten in $f^{-1}(y)$ optellen tot d . Stel nu $y \in B$. Er zijn dan voor alle $x_i \in f^{-1}(y)$ kaarten $(U_i, \phi_i), (V_i, \psi_i)$ gecentreerd rond $x_i, f(x_i)$ waarvan de lokale uitdrukking $F_i(z) = z^{k_{x_i}}$, en kies alle U_i zodat ze disjunct zijn. Neem nu een open verzameling

$$V \subset f(U_1) \cap \dots \cap f(U_n)$$

zoals we in het vorige bewijs hebben gedaan, en neem een $y_0 \in V$. Dit is dan geen vouwpunt, en voor elke i heeft het teruggehaalde beeld van $F_i^{-1}(\psi_i(y_0))$ precies k_{x_i} elementen. Omdat de verzamelingen U_i paarsgewijs disjunct zijn, bevat ook U_i precies k_{x_i} teruggehaalde punten van y_0 . We weten dat $|f^{-1}(y_0)| = d$, dus alle k_{x_i} tellen ook op tot d . \square

Hoofdstuk 2

Hurwitz-getallen

We hebben in het vorige hoofdstuk gezien wat vertakkingspunten van holomorfe afbeeldingen tussen riemann-oppervlakken zijn, en dat het altijd om een eindige hoeveelheid discrete punten gaat. We hebben nu gezien dat als we naar een gegeven afbeelding kijken, we allerlei vertakkingspunten met bepaalde vertakkingsindex krijgen. Stel we draaien dit om en stellen een bepaald riemann-oppervlak Y met een bepaald geslacht g vast en kiezen van tevoren de vouw-locus $b_1, b_2, \dots, b_n \in Y$ en hoe de teruggehaalde beelden zijn vertakt. Dan kunnen we de afbeeldingen tellen die hieraan voldoen. Dit is in feite wat hurwitz-getallen zijn.

2.1 Definitie en Voorbeelden

Als we holomorfe afbeeldingen gaan tellen, moeten we eerst een notie hebben van wanneer twee holomorfe afbeeldingen hetzelfde zijn, anders zullen we nooit een eindige hoeveelheid krijgen.

Definitie 2.1.1 (def 6.1.1.). Voor twee holomorfe afbeeldingen tussen riemann-oppervlakken $f : X \rightarrow Y$ en $g : \tilde{X} \rightarrow Y$ geldt het volgende.

- De afbeeldingen f, g zijn **isomorf** als er een isomorfisme tussen riemann-oppervlakken $\phi : X \rightarrow \tilde{X}$ bestaat, zodat $f = g \circ \phi$.
- Een **automorfisme** van een holomorfe afbeelding $f : X \rightarrow Y$ is een isomorfisme $\psi : X \rightarrow X$ zodat $f = f \circ \psi$. $\text{Aut}(f)$ is de groep van automorfismen van f .

Voorbeeld 2.1.1 (opg. 6.1.1.). Neem de elliptische kromme $E_1 = V(y^2 - (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)) \subset \mathbb{C}^2$ met elke $a_i \in \mathbb{C}$ uniek. De projectie $\pi : E_1 \rightarrow \mathbb{C}$ gegeven door $(x, y) \mapsto x$ is een holomorfe afbeelding. We zullen laten zien dat $\sigma : E_1 \rightarrow E_1$ gegeven door $(x, y) \mapsto (x, -y)$ een niet-triviaal automorfisme van π is:

Ten eerste merk op dat π inderdaad holomorf is aangezien $E_1 \subset \mathbb{C}^2$, dus is π een holomorfe afbeelding in de conventionele zin. Het is eenvoudig te zien dat $\pi = \pi \circ \sigma$, nu moeten we nog aantonen dat σ een bi-holomorfisme is.

- σ is een bijectie: Als $(x, y) \in E_1$ dan $y^2 - (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) = 0$, maar dan ook $(-y)^2 - (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) = 0$, dus ook $(x, -y) \in E_1$, verder is de functie een inverse van zichzelf, dus ook bijectief.

- σ is holomorf tussen E_1 en E_1 : $E_1 \subset \mathbb{C}^2$ en σ is holomorf in \mathbb{C}^2 , dus σ is een holomorfe afbeelding tussen riemann-oppervlakken.

In de inleiding van dit hoofdstuk hadden we het erover dat bij het tellen van holomorfe functies, we graag de vertakkingen van tevoren willen vaststellen. Hiervoor zijn de volgende begrippen nuttig:

Definitie 2.1.2 (def. 6.1.4.). Zij $f : X \rightarrow Y$ een holomorfe afbeelding tussen riemann-oppervlakken van graad d , en neem $y \in Y$, en beschouw het teruggehaalde beeld $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_n\}$. Elke $x_i \in f^{-1}(y)$ heeft een bepaalde vertakkingsindex k_{x_i} . We hebben de volgende definities.

- De verzameling $\{k_{x_1}, \dots, k_{x_n}\}$ noemen we het **vertakkingsprofiel** van f op y . We hebben gezien dat deze vertakkingsindices optellen tot de graad d van f . Derhalve is het vertakkingsprofiel een partitie van het getal d .
- Als het vertakkingsprofiel van f op y $\{1, 1, \dots, 1\}$ is dan heet f **onvertakt** op y
- als het vertakkingsprofiel $\{d\}$ is, heet f **volledig vertakt** op y .

Voorbeeld 2.1.2 (vb. 6.1.5). Gegeven een $d > 0$ en de holomorfe afbeelding $p : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ met $p(x) = x^d$ en $p(\infty) = \infty$. Dan is p volledig vertakt op 0 en ∞ , en onvertakt op elk ander punt. Dit komt omdat de punten 0 en ∞ volgens stelling 1.2.2 vertakkingsindex d hebben. Dat f onvertakt is op de overige punten van $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ volgt uit stelling 1.3.2.

Nu zijn we klaar om hurwitz-getallen te gaan bekijken. Het doel van hurwitz-getallen is om, gegeven een compact riemann-oppervlak Y , alle holomorfe afbeeldingen van een riemann-oppervlak X naar Y te tellen, terwijl we van tevoren vaststellen wat de vouwpunten en vertakkingsprofielen moeten gaan worden. Met de Riemann-Hurwitz formule kunnen we dan ook het geslacht van X van tevoren vaststellen. Een holomorfe afbeelding die aan deze voorwaarden voldoet noemen we een hurwitz-overdekking van type $(g, h, d, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$, zoals we nu precies zullen definiëren.

Definitie 2.1.3. Een holomorfe afbeelding $f : X \rightarrow Y$ die aan de onderstaande voorwaarden voldoet noemen we een **hurwitz-overdekking** met de data $g, h, d, \lambda_1, \dots, \lambda_n$.

- X en Y zijn samenhangend, compact, en met respectievelijk geslacht h, g .
- De vouw-locus van f is $B = \{b_1, \dots, b_n\}$
- Het vertakkingsprofiel van f op b_i is λ_i

Definitie 2.1.4 (hurwitz-getal (def. 6.1.6)). Beschouw Y een samenhangend, compact, riemann-oppervlak van geslacht g . Kies de punten $b_1, \dots, b_n \in Y$ en laat $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ partities van een positief geheel getal d . Dan definiëren we

$$H_{h \rightarrow g}^d(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \sum_{[f]} \frac{1}{|\text{Aut}(f)|}$$

waar de eerste term een **hurwitz-getal** heet. Hier is f een Hurwitz overdekking van de data $g, h, d, \lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Merk op dat een hurwitz-getal voor bepaalde discrete data niet bestaat als het niet voldoet aan de Riemann-Hurwitz formule. Het is tijd voor een berekening van een specifiek hurwitz-getal.

Voorbeeld 2.1.3 (opg. 6.1.3). Laat $Y = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ en neem de punten $b_1 = 0, b_2 = \infty$. Kies $d > 0$ en $\lambda_1 = \lambda_2 = \{d\}$, dan $H_{0 \rightarrow 0}^d(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{d}$

Bewijs. We zien in een lange en gedetailleerde beschrijving een bewijs [CM16][pagina 83] dat $[f]$, met $f(x) = x^d$, de enige isomorfiëklasse van Hurwitz overdekkingen is voor de gegeven data. Nu moeten we nog laten zien dat $|\text{Aut}(f)| = d$. We bekijken een automorfisme g van f . Er geldt $f = f \circ g$, dus voor elke y_0 moet gelden dat als $x_0 \in f^{-1}(y_0)$, dat ook $g(x_0) \in f^{-1}(y_0)$.

Dus g permuteert de elementen van het teruggehaalde beeld van $f(y_0)$. Een automorfisme van f zal ook, begrensd tot \mathbb{C} , een automorfisme moeten zijn van $f|_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z^d$. Merk op dat een dergelijk automorfisme bi-holomorf is op \mathbb{C} , en dat holomorfe afbeeldingen op het complexe vlak zowel hoeken als oriëntaties behouden. Dit samen met het feit dat $g \circ f = f$ impliceert dat de oorsprong naar de oorsprong wordt gestuurd en voor elk punt de afstand tot de oorsprong niet verandert onder g , zorgt er voor dat rotaties de enige mogelijke automorfismen zijn. Om een automorfisme van f te zijn zal het specifiek gaan om de rotaties

$$\text{Aut}(f) = \{\phi(z) = z \cdot e^{k(2\pi i)/d} : k = 1, 2, 3, \dots, d\}.$$

We concluderen $|\text{Aut}(f)| = d$. □

De moeilijkheid van dit bewijs, en het feit dat het niet uit lijkt te maken dat we de punten $0, \infty$ hebben gekozen als vouwpunten, in plaats van een ander paar (antipodale) punten, geeft ons een vermoeden dat we dit probleem misschien beter aan kunnen pakken. In de volgende paragraaf zullen we met een andere aanpak kennis maken.

2.2 Holomorfe afbeelding als topologische overdekkingsruimte

We hebben gezien hoe moeilijk het is om hurwitz-getallen te berekenen vanuit de gegeven definitie. We zullen vanaf nu beginnen met het vertalen van hurwitz-getallen naar een topologisch probleem. De eerste belangrijke stap hierin is om op te merken dat een holomorfe afbeelding tussen riemann-oppervlakken f , weggelaten de vertakkingslocus, een topologische overdekking is.

Stelling 2.2.1. *Laat $f : X \rightarrow Y$ een holomorfe afbeelding tussen riemann-oppervlakken van graad d met vertakkingslocus $R \subset X$ en vouw-locus $B \subset Y$. Dan is de begrenzing $f : (X \setminus R) \rightarrow (Y \setminus B)$ een topologische overdekking van graad d .*

Bewijs. Bij lemma 1.3.3 hebben we gezien dat er voor elk niet-vouwpunt $y_0 \in Y \setminus B$ geldt dat we een open omgeving V kunnen kiezen zodat

$$f^{-1}(V) = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_d$$

een vereniging van disjuncte open omgevingen van punten in $f^{-1}(y_0)$. Bovendien zagen we dat er geldt dat elke V_i homeomorf is aan V . Dus $f : (X \setminus R) \rightarrow (Y \setminus B)$ is een topologische overdekking. De functie f is dan een vertakte overdekking. \square

Definitie 2.2.1. Een continue functie tussen compacte topologische oppervlakken $p : X \rightarrow Y$ heet een **vertakte overdekking** als er een eindige verzameling punten $B \subset Y$ bestaat zodat:

- $p^{-1}(B)$ een eindige verzameling is
- $p : X \setminus p^{-1}(B) \rightarrow Y \setminus B$ een topologische overdekking is.

Dan hebben we nog een stelling die ons vertelt dat elke overdekking van $Y \setminus B$, waar B een eindig aantal punten van Y , een unieke holomorfe afbeelding tussen riemann-oppervlakken geeft, op isomorfisme na.

Stelling 2.2.2 (Riemann's Existence Theorem, [CM16](H6.2)). *Zij Y een compact riemann-oppervlak en X° een topologisch oppervlak. Stel $B \subset Y$ een verzameling van een eindig aantal punten en stel dat we een overdekking $f^\circ : X^\circ \rightarrow Y \setminus B$ hebben van eindige graad. Dan is er een uniek compact riemann-oppervlak X (op isomorfisme na), zodat X gelijk aan X° plus een eindig aantal punten, en zodat we een holomorfe afbeelding $f : X \rightarrow Y$ krijgen, waar f een uitbreiding van f° .*

2.3 Van holomorfe functie naar monodromie-representatie

We hebben nu gezien dat een holomorfe functie ook een topologische overdekking geeft. We zullen zien dat het tellen van deze overdekkingen neer komt op het tellen van wat we monodromie-representaties gaan noemen. We beginnen met een paar belangrijke stellingen uit de algebraïsche topologie over paden en lifts, deze zijn met bewijs en verdere uitwerking terug te vinden in [Hat02][H1.3].

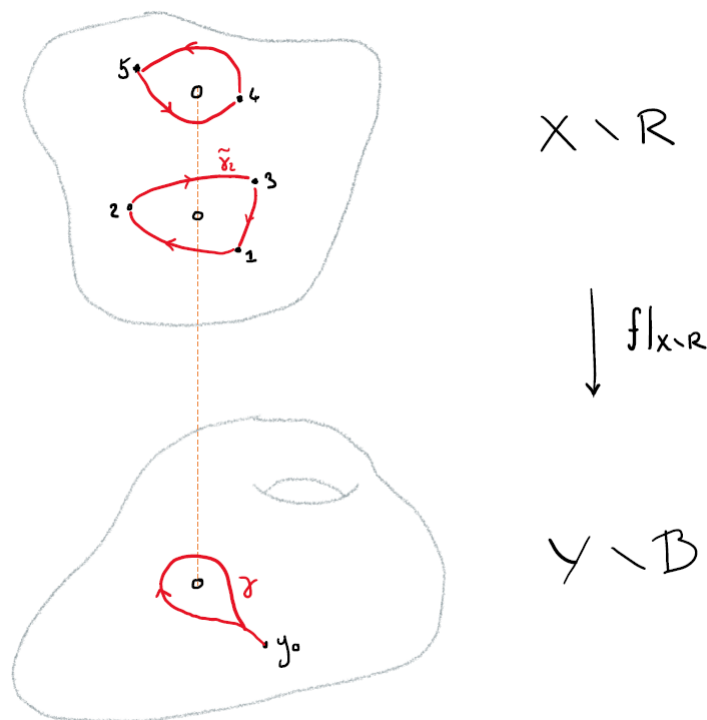
Lemma 2.3.1 (“unique lifting property”). *Gegeven een overdekking $f : X \rightarrow Y$. Voor elk pad $\gamma : I \rightarrow Y$ dat begint op het punt $y_0 \in Y$ en voor elk punt $x \in f^{-1}(y_0)$ bestaat er een unieke lift $\tilde{\gamma} : I \rightarrow X$ die op x begint.*

Lemma 2.3.2 (“homotopy lifting property”). *Gegeven een overdekking $f : X \rightarrow Y$, een homotopie $f_t : Z \rightarrow Y$ en een afbeelding $f_0 : Z \rightarrow X$ die een lift is van f_0 . Dan bestaat er een unieke homotopie $\tilde{f}_t : Z \rightarrow X$ die een lift is van f_t .*

Deze lemma's hebben voor ons twee belangrijke gevolgen.

Gevolg 2.3.1. *Stel $[\gamma_1] = [\gamma_2]$ voor $[\gamma_1], [\gamma_2] \in \pi_1(Y, y_0)$, dan als we twee lifts hebben waar $\tilde{\gamma}_1(0) = \tilde{\gamma}_2(0)$, dan ook $\tilde{\gamma}_1(1) = \tilde{\gamma}_2(1)$*

Bewijs. Dit komt omdat er volgens “homotopy lifting property” ook een homotopie bestaat tussen de twee paden in de overdekkingsruimte, dus hun eindpunten zijn gelijk. \square



Figuur 2.1: We zien hier hoe het liften van een lus een permutatie kan voortbrengen.

Gevolg 2.3.2. *Stel we hebben twee lifts $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$ van de paden γ_1, γ_2 die op elkaar aansluiten, dus $\tilde{\gamma}_2(0) = \tilde{\gamma}_1(1)$. Dan is de padcompositie $\tilde{\gamma}_1 * \tilde{\gamma}_2$ de unieke lift van $\gamma_1 * \gamma_2$ die bij $\tilde{\gamma}_1(0)$ begint.*

Bewijs. Dit volgt uit het feit dat $\tilde{\gamma}_1 * \tilde{\gamma}_2$ inderdaad een lift is van $\gamma_1 * \gamma_2$ die bij $\tilde{\gamma}_1(0)$ begint. Dat deze uniek is volgt uit de “unique lifting property”. \square

Zij $f : X \rightarrow Y$ een holomorfe afbeelding van graad d tussen samenhangende riemann-oppervlakken met vouw-locus $B = \{b_1, \dots, b_n\} \subset Y$. We kiezen een punt $y_0 \notin B$ en bekijken een lus $\gamma : [0, 1] \rightarrow Y \setminus B$ door y_0 . Kies een punt $x \in f^{-1}(y_0)$. Dan is er een lift van γ naar $\tilde{\gamma}_x$ op X die begint bij x . Aangezien $\gamma(1) = y_0$ hebben we dat voor het eindpunt van gamma geldt $\gamma(1) \in f^{-1}(y_0)$. (natuurlijk hoeft $\gamma(1)$ niet gelijk te zijn aan x .) We kunnen dan voor een lus γ de volgende functie definiëren:

$$\sigma_\gamma : f^{-1}(y_0) \rightarrow f^{-1}(y_0), \text{ met } \sigma_\gamma(x) = \tilde{\gamma}_x(1).$$

Dit idee wordt in figuur 2.1 uitgelicht.

Stelling 2.3.1 (opg. 7.1.1). σ_γ is een permutatie (ex 7.1.1.)

Bewijs. Neem de functie σ_γ . We gaan laten zien dat deze functie een inverse functie $\sigma_{\bar{\gamma}}$ heeft, met $\bar{\gamma}$ het teruglopende pad van γ (oftewel $\bar{\gamma}(t) = \gamma(1 - t)$). Hiervoor gebruiken we de *homotopy lifting property* en *unique lifting property*. Definieer $h_t(s)$ als de homotopie tussen $(\gamma * \bar{\gamma})(s)$ en het constante pad $c_{y_0}(s) = y_0$. (De homotopie is hier bijvoorbeeld

$$h_t(s) = (\gamma * \bar{\gamma})(s) \text{ als } s \in [0, \frac{1}{2}(1 - t)] \cup [\frac{1}{2}(1 + t), 1]$$

en

$$h_t(s) = (\gamma * \tilde{\gamma})\left(\frac{1}{2}(1-t), \frac{1}{2}(1+t)\right)$$

De *homotopy lifting property* vertelt ons dat de lift van $\gamma * \tilde{\gamma}$ die begint bij $x \in (y_0)^{-1}$ homotoop is aan de constante lus $\tilde{c}_{y_0}(t) = x$. Dus we hebben ook dat de lift $\tilde{\gamma}$ die begint op $\tilde{\gamma}(1)$ eindigt op x , dus $\sigma_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\gamma}(1)) = x$. \square

Definitie 2.3.1 (def. 7.1.1). Een y_0 -**gelabelde afbeelding** is een paar (f, L) , waar $f : X \rightarrow Y$ een afbeelding tussen riemann-oppervlakken van graad d en waar

$$L : f^{-1}(y_0) \rightarrow \{1, \dots, d\}$$

een bijectie is. Merk op dat dit impliceert dat y_0 geen vouwpunt is. Hier noemen we L een **labeling** van het teruggehaalde beeld van y_0 . Een isomorfisme van y_0 -gelabelde afbeeldingen $(f_1, L_1), (f_2, L_2)$ bestaat uit een bi-holomorfisme tussen riemann-oppervlakken $\phi : X_1 \rightarrow X_2$ zodanig dat

$$f_2 \circ \phi = f_1, \text{ en } L_2 \circ \phi = L_1.$$

Het toepassen van een labeling zorgt er voor dat de permutatie σ_γ een element van S_d wordt.

Lemma 2.3.3 (opg. 7.1.2). *Twee elementen $\sigma_1, \sigma_2 \in S_d$ bij γ horend met twee verschillende “labelingen” van $f^{-1}(y_0)$ zijn geconjugeerd, oftewel er bestaat een $\omega \in S_d$ zodat $\sigma_2 = \omega \sigma_1 \omega^{-1}$.*

Bewijs. Stel σ_1, σ_2 zijn gelabeld door L_1, L_2 respectievelijk. Dan geldt er $\sigma_1 = L_1 \circ \sigma_\gamma \circ L_1^{-1}$ en $\sigma_2 = L_2 \circ \sigma_\gamma \circ L_2^{-1}$. Merk op dat er dan geldt

$$L_1 \circ L_2^{-1} \circ \sigma_2 \circ L_2 \circ L_1^{-1} = L_1 \circ \sigma_\gamma \circ L_1^{-1} = \sigma_1.$$

\square

Definitie 2.3.2. De afbeelding $\Phi : \pi_1(Y \setminus B, y_0) \rightarrow S_d, \gamma \mapsto \sigma_\gamma$ heet een **monodromie representatie**.

Stelling 2.3.2. *De monodromie representatie $\Phi : \pi_1(Y \setminus B, y_0) \rightarrow S_d, \gamma \mapsto \sigma_\gamma$ is een groepshomomorfisme.*

Bewijs. Vanwege gevolg 2.3.1 is deze functie wel-gedefinieerd. Vanwege gevolg 2.3.2 hebben we te maken met een groepshomomorfisme, want er geldt: $\sigma_{\gamma * \eta} = \sigma_\eta \circ \sigma_\gamma$ \square

Een permutatie wiens cykeldecompositie bestaat uit disjuncte cyclen van lengte $\{l_1, \dots, l_k\}$ heeft **cykeltype** $\{l_1, \dots, l_k\}$.

Lemma 2.3.4 (opg. 7.1.3). *twee cyclen in S_d zijn geconjugeerd dan en slechts dan als ze het zelfde cykeltype hebben.*

Bewijs. Zij σ, τ geconjugeerde permutaties in S_d , dus er is een $\omega \in S_d$ zodanig dat $\sigma = \omega \tau \omega^{-1}$. Stel nu τ stuurt i naar j , dan $(\omega \tau \omega^{-1})(\omega(i)) = \omega(\tau(i)) = \omega(j)$. Dus σ stuurt dan $\omega(i)$ naar $\omega(j)$. Dit impliceert dat σ en τ dezelfde cykelstructuur hebben.

Stel nu, voor de omgekeerde implicatie, dat σ, τ dezelfde cykelstructuur $\{k_1, k_2, k_3, \dots, k_n\}$ hebben. Dan kunnen we de permutaties opschrijven als

$$\sigma = (a_1, \dots, a_{k_1})(a_{k_1+1}, \dots, a_{k_1+k_2}) \dots (a_{k_1+k_2+\dots+k_{n-1}+1}, \dots, a_{k_1+k_2+\dots+k_n})$$

$$\tau = (b_1, \dots, b_{k_1})(b_{k_1+1}, \dots, b_{k_1+k_2}) \dots (b_{k_1+k_2+\dots+k_{n-1}+1}, \dots, b_{k_1+k_2+\dots+k_n})$$

En we kiezen de permutatie ω met $b_i \mapsto a_i$. Dan $(\omega\tau\omega^{-1})(a_i) = \sigma(a_i)$. Dus σ en τ zijn geconjugueerd. \square

Definitie 2.3.3 (def. 7.1.6). Zij Y een samenhangend riemann-oppervlak van geslacht g en $y_0, b_1, \dots, b_n \in Y$. Laat $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ partities van het positief gehele getal d . Een monodromie representatie van het type $(g, d, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ is een groepshomomorfisme $\Phi : \pi_1(Y \setminus \{b_1, \dots, b_n\}, y_0) \rightarrow S_d$ zodanig dat, als ρ_k de homotopieklasse van een kleine lus rond b_k is, de permutatie $\Phi(\rho_k)$ een cykeltype λ_k heeft. Bovendien als de ondergroep $\text{Im}\Phi \leq S_d$ transitief is, dan noemen we Φ een **samenhangende monodromie representatie**.

In de komende stelling willen we laten zien waarom Φ samenhangend wordt genoemd wanneer haar beeld een transitieve permutatiegroep oplevert. Daarvoor zullen we eerst een aantal topologische lemma's nodig hebben.

Lemma 2.3.5. *Een (complexe) variëteit X is samenhangend dan en slechts dan als X pad-samenhangend is.*

Lemma 2.3.6. *Voor een variëteit X en een discreet aantal eindige punten $B \subset X$ geldt dat als X samenhangend dan ook $X \setminus B$ samenhangend is.*

Bewijs. Stel variëteit X is samenhangend, dan is X ook pad-samenhangend. Stel we halen een eindig aantal punten B weg van X . Dan voor elke twee punten $x_1, x_2 \in X \setminus B$ is er een pad van x_1 naar x_2 in X . Stel dit pad loopt door één van de punten in $b \in B$. Bekijk dan lokaal een open omgeving van b die geen andere punten in B bevat. (Dit kan want X is Hausdorff.) Neem dan een open bolletje in deze lokale open omgeving. Deel de radius van het open bolletje voor de zekerheid door twee, en laat het pad omleiden via de rand van het open bolletje. Het pad gaat niet meer door b . Dit kan je herhalen totdat er geen punten in B gekruist worden. Dus $X \setminus B$ pad-samenhangend, dus $X \setminus B$ is samenhangend. \square

Stelling 2.3.3 (ex 7.1.6). *Zij $f : X \rightarrow Y$ een holomorfe afbeelding tussen riemann-oppervlakken van graad d . Dan voor elke keuze y_0 en voor elke labeling van $f^{-1}(y_0)$ is de bijhorende monodromie representatie Φ samenhangend dan en slechts dan als X een samenhangend riemann-oppervlak is.*

Bewijs. Stel dat $d = 1$, dan is de stelling triviaal want dan moet X samenhangend zijn, en hebben we altijd dat $\text{Im}(\Phi) = S_1$ transitief is.

Stel nu dat $d > 1$. Zij R de vertakkingslocus van f , en laat B de vouw-locus zijn. Stel dat X samenhangend is, dan is X ook pad-samenhangend, en dan is $X \setminus R$ ook pad-samenhangend (want R bevat een eindig aantal punten). Zij y_0 een willekeurig punt in $Y \setminus B$, dan bestaat er tussen elk paar punten $x_1, x_2 \in f^{-1}(y_0)$ een pad γ in $X \setminus B$. Dit is dan tevens ook een lift van de lus $f(\gamma)$, dus $\text{Im}(\Phi)$ is transitief, en dus Φ is samenhangend.

Stel X is niet samenhangend, dan zijn er twee open disjuncte verzamelingen U, V die X overdekken. Omdat Y wel samenhangend is weten we wegens lemma 2.3.7 dat $f(U), f(V)$ niet disjunct kunnen zijn. Neem vervolgens $y_0 \in f(U) \cap f(V)$. Dan zijn er $r_1, r_2 \in f^{-1}(y_0)$ waarvan $r_1 \in U$ en $r_2 \in V$. Dit betekent specifiek dat er geen pad in X kan bestaan tussen r_1 en r_2 , dus ook dat voor elke lus γ op y_0 in $\pi_1(Y \setminus B, y_0)$ de lift $\tilde{\gamma}$ die begint bij r_1 niet kan eindigen op r_2 . Dus voor

$$\Phi : \pi_1(Y \setminus B, y_0) \rightarrow S_d, \gamma \mapsto \sigma_\gamma$$

geldt dat $\text{Im}(\Phi)$ niet transitief is, dus Φ is niet samenhangend. \square

Lemma 2.3.7. *Wanneer we een topologische overdekking $p : X \rightarrow Y$ hebben met Y een samenhangende ruimte en X niet samenhangend, dan geldt er voor elke niet-triviale open overdekking $U \cup V = X$ van X , waar U en V disjunct zijn, dat $p(U)$ en $p(V)$ niet disjunct zijn.*

Bewijs. Omdat X onsaamenhangend is, hebben we twee disjuncte open verzamelingen U, V die X overdekken. Stel voor een bewijs uit het ongerijmde dat $p(U)$ en $p(V)$ disjunct zijn. Omdat $U \sqcup V$ een open overdekking van X is, hebben we dat $p(U) \cup p(V) = Y$. Omdat Y samenhangend is moet één van de verzamelingen $p(U), p(V)$ niet-open zijn. Stel $p(U)$ is niet open, dan is er een punt $y \in p(U)$ dat geen inwendig punt is. Dus elke open omgeving van y heeft een niet-lege doorsnede met $p(V)$. Omdat de functie p een topologische overdekking is, weten we dat er een open omgeving W van y bestaat, waarvan $p^{-1}(W)$ een vereniging is van open verzamelingen homeomorf aan W . Neem een kleine open verzameling rond y bevat in W homeomorf aan de eenheidsschijf. Deze bevat zowel punten van $p(V)$ als van $p(U)$, dus er moet een open verzameling in X homeomorf aan de eenheidsschijf zijn die zowel punten van U als van V bevat. Dit is in tegenstrijd met het feit dat U en V disjunct zijn, dus onze aanname dat $p(U)$ en $p(V)$ disjunct kunnen zijn is fout. \square

2.4 Van monodromie-representaties naar hurwitz-getallen

Stelling 2.4.1 (st. 7.2.2). *Gegeven een monodromie representatie Φ van het type $(g, d, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$, voor een samenhangend compact riemann-oppervlak Y van geslacht g , en $B = \{b_1, \dots, b_n\} \in Y$ bestaat er een y_0 -gelabelde afbeelding van compacte riemann-oppervlakken die Y overdekt met vouw-locus B , waarvan Φ de bijhorende monodromie representatie is. Zo een afbeelding is uniek op isomorfismen tussen y_0 -gelabelde afbeeldingen na.*

Bewijs. We zullen ten eerste een overdekking willen maken met behulp van de informatie die Φ ons geeft. Dan zullen we met de stelling *Riemann's Existence Theorem* laten zien dat we een unieke isomorfielklasse van y_0 -gelabelde afbeeldingen krijgen.

Zij Y een samenhangend compact riemann oppervlak met geslacht g , dan is deze ruimte homeomorf aan haar identificatie-veelhoek:

$$p_1 q_1 \bar{p}_1 \bar{q}_1 p_2 q_2 \bar{p}_2 \bar{q}_2 \dots p_g q_g \bar{p}_g \bar{q}_g$$

We kiezen een hoekpunt van de veelhoek en voor elk punt b_i van B verbinden we dat hoekpunt met b_i via een pad s_i . Dit kan op een manier dat de paden s_i niet kruisen omdat B een eindig aantal punten bevat en omdat de veelhoek met de rand weggelaten homeomorf is aan de open schijf. We definiëren een nieuwe identificatie-veelhoek

$$P := s_1 \bar{s}_1 \dots s_n \bar{s}_n p_1 q_1 \bar{p}_1 \bar{q}_1 \dots p_g q_g \bar{p}_g \bar{q}_g,$$

die na identificatie identiek is aan de vorige. Neem een willekeurig punt $y_0 \in Y \setminus B$, we kunnen de identificatieveelhoek altijd zo kiezen dat y_0 in het inwendige zit. Bekijk d kopieën P_1, \dots, P_d van de veelhoek die via de identiteit naar P worden gestuurd. Dan schrijven we de punten van het teruggehaalde beeld van y_0 als y_1, \dots, y_d , en de randen van de veelhoek P_k als $p_{i,k}, q_{i,k}, s_{j,k}$.

We willen nu een topologische overdekking van Y maken door de randen van P_1, \dots, P_d op de juiste manier te identificeren, dit doen we middels de monodromie representatie Φ , die ons vertelt hoe de veelhoeken verbonden zijn. De fundamentealgroep $\pi_1(Y, y_0)$ wordt gegenereerd door kleine lussen p'_i, q'_j , die precies de randen p_i, q_j zijn verbonden via een pad aan y_0 . De fundamentealgroep $\pi_1(Y \setminus B, y_0)$ wordt dan door de lussen p'_i, q'_j gegenereerd samen met een kleine lus ν_l rond b_l , verbonden aan y_0 . De monodromie-representatie vertelt ons hoe we deze lussen moeten 'liften' tussen P_1, \dots, P_d , wat ons vertelt hoe we de veelvlakken moeten identificeren om de gewenste overdekking te krijgen.

Merk op dat de lus ν_i de veelhoek P bij de rand s_i "verlaat", om weer "terug te komen" bij rand \bar{s}_i . Als we ν_i liften naar beginpunt y_k , dan verlaat zij P_k bij rand $s_{i,k}$ en komt ze terug in de veelhoek $(\Phi(\nu_i))(k)$ door de rand $\bar{s}_{i,(\Phi(\nu_i))(k)}$. Dus we identificeren voor mogelijke waarden voor i en k de volgende randen:

$$s_{i,k} \sim \bar{s}_{i,(\Phi(\nu_i))(k)}.$$

We doen hetzelfde voor de lussen p'_j en q'_j , voor alle $j \in \{1, \dots, g\}, k \in \{1, \dots, d\}$

$$p_{j,k} \sim \bar{p}_{j,(\Phi(p_j))(k)},$$

$$q_{j,k} \sim \bar{q}_{j,(\Phi(q_j))(k)}.$$

Zo krijgen we de identificatie-veelhoek:

$$C := (P_1 \sqcup P_2 \sqcup \dots \sqcup P_d) / \sim.$$

Twee punten die nu equivalent zijn onder de relatie \sim worden naar hetzelfde punt gestuurd onder de identiteit van hun desbetreffende veelhoek, dus de afbeelding $f := \text{Id}_1 \cup \dots \cup \text{Id}_d$ is wel-gedefinieerd onder ons quotiënt. Verder als we f ook begrenzen tot C weggelaten de punten die naar B afbeelden, dan hebben een topologische overdekking van $Y \setminus B$. Vanwege *Riemann's Existence Theorem* is er een unieke complexe structuur op C die f holomorf maakt. Bovendien geldt er nu dat, per constructie, Φ de monodromie-representatie van f is.

Nu willen we nog laten zien dat f uniek is op isomorfie van y_0 -gelabelde afbeeldingen

na. Stel dat $(g : X \rightarrow Y, L)$ een y_0 -gelabelde afbeelding die ook de monodromie-representatie Φ geeft. Dan is de beperking van f tot $X \setminus g^{-1}(\Gamma)$, waar Γ de rand is van identificatie-veelhoek P , een topologische overdekking van enkelvoudig samenhangende verzamelingen. Definieer de afbeelding

$$\phi : X \setminus g^{-1}(\Gamma) \rightarrow P_1 \sqcup P_2 \sqcup \dots \sqcup P_d,$$

met de volgende regel: als $x \in X \setminus g^{-1}(\Gamma)$ het label i heeft, gegeven door L , dan wordt x naar het punt $g(x)$ in veelhoek P_i gestuurd. De afbeelding ϕ geeft dan een homeomorfisme tussen $X \setminus g^{-1}(\Gamma)$ en $C \setminus f^{-1}(\Gamma)$. Aangezien g de monodromie-representatie Φ voortbrengt, zullen de losse samenhangende componenten van $X \setminus g^{-1}(\Gamma)$ wel op zodanige manier zijn verbonden in X dat ϕ op een natuurlijk manier tot een homeomorfisme $\tilde{\phi}$ tussen X en C uitbreidt. Dit is ook een isomorfisme van y_0 -gelabelde afbeeldingen. \square

We hebben nu gezien dat er een bijectie bestaat tussen de volgende verzamelingen:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{isomorfielklassen van } y_0\text{-gelabelde} \\ \text{afbeeldingen } (f : X \rightarrow Y, L), \text{ waar } X \\ \text{een samenhangend riemann-oppervlak} \\ \text{en } f \text{ als vouwpunten } B = \{b_1, \dots, b_n\} \\ \text{heeft met vertakkingsprofiel } \lambda_i \text{ voor } b_i \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Verbonden monodromie} \\ \text{representaties} \\ \Phi : \pi_1(Y \setminus B, y_0) \rightarrow S_d \\ \text{van het type } (g, d, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \end{array} \right\}$$

We kunnen dus monodromie-representaties tellen om het aantal isomorfielklassen van y_0 -gelabelde afbeeldingen te weten te komen. De volgende stelling maakt het laatste vertaalstapje om ons eindelijk hurwitz-getallen te laten berekenen door gebruik te maken van monodromie-representaties.

Stelling 2.4.2 (th 7.3.1). *Zij M de verzamelingen samenhangende monodromie representaties van het type $(g, d, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Dan*

$$H_{h \xrightarrow{d} g}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \frac{|M|}{d!}$$

waar h vast staat door de Riemann-Hurwitz formule.

Bewijs. Merk op dat een automorfisme van f een isomorfisme van y_0 -gelabelde afbeeldingen is, waar de afbeelding hetzelfde blijft en de labels veranderen. Als L een labeling van de punten in $f^{-1}(y_0)$ is en $\phi \in \text{Aut}(f)$, dan definiëren we de actie $\phi \bullet L := L \circ \phi^{-1}$, wat een vrije groepsactie is:

1. Ten eerste is het een groepsactie, want $\text{Id} \bullet L = L$ en $\phi \bullet (\psi \bullet L) = (L \circ \psi) \circ \phi = L \circ (\psi \circ \phi) = (\phi \circ \psi) \bullet L$
2. Ten tweede is het een vrije groepsactie, want volgens lemma 2.4.1, onder dit bewijs, geldt er $\phi \bullet L = L \Rightarrow \phi = \text{Id}_X$.

Nu hebben we gezien dat de identiteit het enige automorfisme op f is dat L onveranderd laat. Omdat er in totaal $d!$ manieren zijn om het teruggehaalde beeld van y

te labelen, en elke isomorfielklasse $|\text{Aut}(f)|$ aantal y_0 -gelabelde afbeeldingen met f als afbeelding bevat, zijn er in totaal

$$\frac{d!}{|\text{Aut}(f)|} = m_f$$

isomorfielklassen van y_0 -gelabelde afbeeldingen ($f : X \rightarrow Y, L$), wat gelijk is aan m_f het aantal verschillende monodromie-representaties van f door verschillende labels. Dan krijgen we

$$H_{h \xrightarrow{d} g}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{[f]} \frac{1}{|\text{Aut}(f)|} = \sum_{[f]} \frac{m_f}{d!} = \frac{1}{d!} \sum_{[f]} m_f = \frac{1}{d!} |M|.$$

□

Lemma 2.4.1. *Zij $f : X \rightarrow Y$ een holomorfe afbeelding tussen samenhangende riemann-oppervlakken met vertakkingslocus R en zij $\phi : X \rightarrow X$ een automorfisme van f . Dan als voor een punt $x \in X \setminus R$ geldt dat $\phi(x) = x$, dan geldt er $\phi = \text{Id}_X$.*

Bewijs. Stel er bestaat een punt $x_0 \in X \setminus R$ waarvoor $\phi(x_0) = x_0$. Laat dan A de niet-lege verzameling van alle punten $x \in X \setminus R$ die naar zichzelf worden afgebeeld. Neem een punt $x \in A$. Neem een open omgeving U van x zodat $f^{-1}(f(U))$, d disjuncte kopieën van U zijn. Omdat ϕ een automorfisme moet er gelden dat het teruggehaalde beeld van $\phi(U)$ een deelverzameling is van $f^{-1}(f(U))$, de d disjuncte open verzamelingen. Neem voor bewijs uit het ongerijmde aan dat er geen open omgeving van $f(x)$ bestaat die in A bevat is. Dan kunnen we net als in lemma 1.3.3 een rijtje punten construeren die buiten U zit in het domein, maar naar x convergeren in het bereik. Dit is in tegenstrijd met de continuïteit van f , dus x moet een inwendig punt van A zijn.

Stel er bestaat een punt $x' \in X \setminus R$ waarvoor $\phi(x') \neq x'$, dan is er op dezelfde manier een open omgeving van x' waarvoor dit geldt, dus A^C is ook open. Dat $A \cup A^C$ een disjuncte open overdekking is van de samenhangende ruimte X waar zowel A als A^C niet leeg zijn, betekent dat de aanname dat A^C niet-leeg is, niet klopt. Dus $A = X \setminus R$. Als laatst: de eindige verzameling B zal wegens continuïteit moeten volgen, zodat ϕ begrensd tot B ook de identiteit is. □

In het volgende voorbeeld zullen we de kracht van deze nieuwe topologische omschrijving van hurwitz-getallen laten zien. Hier kan je in gedachten houden hoe langdradig en ingewikkeld hetzelfde bewijs bij voorbeeld 2.1.3 was, waar we gebruik maakten van de originele definitie van hurwitz-getallen.

Voorbeeld 2.4.1 (opg. 7.3.1). Zij $Y = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, en $b_1 = 0$, $b_2 = \infty$. We willen het hurwitz-getal $H_{0 \xrightarrow{d} 0}((d), (d))$ berekenen, met $d > 0$. Hiervoor moeten we kijken wat voor monodromieën $\Phi : \pi_1(Y \setminus B, y_0) \rightarrow S_d$ we kunnen verzinnen die hier aan voldoen. We hebben een vouw-locus van twee punten $B = \{b_1, b_2\}$. We weten dat $Y \setminus \{b_1, b_2\}$ homotoop is aan de cirkel S^1 , dus $\pi_1(Y \setminus B, y_0)$ is gegenereerd door één element g . Het beeld van generator g moet tevens ook cykelstructuur $\{d\}$ hebben, dus

$$\Phi(g) = (a_1, \dots, a_d).$$

Er zijn nu $\frac{d!}{d}$ keuzes voor cykel $\Phi(g)$, omdat we rekening houden met de rotatie structuur van cyclen (want bijvoorbeeld de cyclen $(1234) = (2341)$ zijn gelijk), dus ook $|M| = \frac{d!}{d}$. We concluderen dat

$$H_{0 \rightarrow 0}^d((d), (d)) = \frac{|M|}{d!} = \frac{\frac{d!}{d}}{d!} = \frac{1}{d}.$$

Bibliografie

- [Arm83] Mark Anthony Armstrong. *Basic Topology, (Undergraduate texts in mathematics)*. Springer, 1983.
- [CM16] Renzo Cavalieri and Eric Miles. *Riemann Surfaces and Algebraic Curves; a first course in Hurwitz numbers*. Cambridge University Press, 2016.
- [Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Allen Hatcher, 2002.
- [Lan99] Serge Lang. *Complex Analysis*. Springer, 1999.
- [LJ17] Sumio Yamada Lizhen Ji, Athanase Papadopoulos. *From Riemann to Differential Geometry and Relativity*. Springer, 2017.