Universiteit Utrecht

Faculteit Bètawetenschappen

Discontinuïteiten in spellen met onvolledige informatie

Bachelorscriptie

Ilse Blankenvoorde

Wiskunde

Begeleider:

Prof. dr. Willemien Kets
Mathematisch Instituut

6 juni 2024

Inleiding

In spellen met volledige informatie hebben alle spelers informatie over alle eigenschappen van het spel. De structuur van het spel, de acties die de spelers kunnen kiezen en de uitbetaling die de gekozen acties opleveren voor de verschillende spelers zijn voor iedereen bekend. In een spel met onvolledige informatie heeft tenminste één van de spelers geen informatie over een deel van het spel. Dit kan bijvoorbeeld betekenen dat een van de spelers geen informatie of onvolledige informatie heeft over de uitbetalingen van de andere spelers of de beschikbare acties van de andere spelers.

Een strategieprofiel waarin alle spelers op de best mogelijke manier reageren op de keuzes van de andere spelers, wordt een evenwicht van het spel genoemd. In een dergelijk evenwicht kan geen enkele speler zijn opbrengst verhogen door af te wijken naar een andere strategie.

Spellen met onvolledige informatie kunnen bijzondere discontinuïteiten vertonen. Spellen met volledige informatie hebben vaak meerdere evenwichten. Echter, als we een spel met slechts een zeer klein detail omvormen naar een spel met onvolledige informatie, zien we dat er in een dergelijk spel (met 'bijna volledige informatie') vaak nog maar één evenwicht aanwezig is.

In een spel met onvolledige informatie is het van cruciaal belang dat een speler de hoeveelheid informatie die hij wel tot zijn beschikking heeft optimaal benut om zo de beste strategie voor het spelen van het spel te kunnen bepalen. Wanneer mensen nadenken over de beste strategie voor het spelen van een spel in deze vorm, volgen ze hierbij vaak hun intuïtie. Als een spel met onvolledige informatie slechts op een klein detail afwijkt van de variant met volledige informatie, kan dit voor een evenwicht zorgen dat sterk ingaat tegen wat onze intuïtie ons vertelt.

In deze scriptie zullen we proberen te begrijpen waar deze discontinuïteiten en tegenintuïtieve evenwichten vandaan komen. Statische spellen verlenen zich uitstekend voor het onderzoeken van de best mogelijke strategieën voor het spelen van een spel. Spellen van deze vorm met twee spelers zijn in het bijzonder erg overzichtelijk qua structuur. Een bijkomend voordeel is dat de uitbetalingen van de spelers kunnen worden weergegeven in een matrix. We behandelen in deze scriptie een aantal voorbeelden van dit soort spellen waarbij we de evenwichten van de varianten met volledige en onvolledige informatie met elkaar zullen vergelijken. Ten slotte zullen we een concept introduceren dat het mogelijk maakt om 'bijna-optimale' strategieën te vinden voor het spelen van statische spellen met onvolledige informatie, waarbij de eerder gevonden discontinuïteiten bijna helemaal verdwijnen. Dit is wenselijk, omdat de gevonden 'bijna-optimale' strategieën veel beter aansluiten bij de menselijke intuïtie voor het spelen van spellen in deze vorm.

Hoofdstuk 1 zal de benodigde voorkennis over statische spellen met volledige en onvolledige informatie behandelen. In hoofdstuk 2 zullen we twee voorbeelden van spellen met onvolledige informatie bekijken waarin de evenwichten een discontinuïteit vertonen ten opzichte van de evenwichten van de variant met volledige informatie. In hoofdstuk 3 zullen we een nieuw concept introduceren dat we toepassen op een van de voorbeelden uit hoofdstuk 2. We laten zien dat dit concept het mogelijk maakt om 'bijna optimale' strategieën te vinden voor het spelen van dit spel, zonder dat de eerder gevonden discontinuïteiten sterk tot uiting komen.

Inhoudsopgave

1 Achtergrond

In sectie 1.1 zullen we enkele basisbegrippen definiëren van statische spellen met volledige informatie. In sectie 1.2 bouwen we hierop voort en behandelen we belangrijke voorkennis voor statische spellen met onvolledige informatie, die we later in hoofdstuk 2 en hoofdstuk 3 nodig zullen hebben.

1.1 Statische spellen met volledige informatie

Deze sectie is gebaseerd op [2]. We bekijken in deze sectie statische spellen met een eindig aantal spelers die elk een eindig aantal acties tot hun beschikking hebben. Daarnaast gaan we uit van *volledige informatie*. Dit houdt in dat alle mogelijke acties en alle mogelijke uitbetalingen gemeenschappelijke kennis zijn voor alle spelers. Ten slotte gaan we er vanuit dat alle spelers rationeel handelen. Elke speler zal de best mogelijke actie kiezen om zo zijn uitbetaling te maximalizeren. Voor een *statisch spel*, waarbij spelers tegelijkertijd een actie kiezen of elkaars acties niet kunnen observeren, gebruiken we een representatie in de zogenoemde *normale vorm*. Dit betekent dat de mogelijke acties en de bijbehorende *uitbetalingen* van de spelers worden weergegeven in een matrix. De *uitbetaling* van een speler geeft aan wat de opbrengst van het spel is naar aanleiding van de combinatie van acties die alle spelers gekozen hebben. We bekijken een voorbeeld van een dergelijk spel in normale vorm.

Voorbeeld 1.1. Twee kinderen eten de koekjestrommel van hun moeder leeg. Wanneer ze dit ontdekt roept ze de kinderen bij zich en moeten ze, los van elkaar en zonder dat ze de mogelijkheid hebben om met elkaar te communiceren, de keuze maken om te bekennen dat ze de koekjes hebben gegeten (B), ofwel om dit te ontkennen en het andere kind te verraden (V). De uitbetaling in figuur 1 representeert het aantal uren huisarrest dat de kinderen krijgen.

		Kind 2	
		B	V
Kind 1	B	$-1, -1$	$-10, 0$
	V	$0, -10$	$-9, -9$

Figuur 1: De normale vorm van het spel uit voorbeeld 1.1.

We bekijken wat voor elk kind de best mogelijke reactie is op de acties van het andere kind. In alle gevallen verkrijgen beide kinderen de hoogste uitbetaling wanneer ze hun schuld ontkennen en het andere kind verraden. Actie V is voor beide kinderen dan ook de beste reactie op alle mogelijke acties van de ander. De combinatie van acties (V, V) wordt het *Nash-evenwicht* van het spel genoemd. Dit houdt kort gezegd in dat beide spelers hun uitbetaling niet kunnen verhogen door het spelen van een andere actie. Later zullen we het Nash-evenwicht preciezer definiëren.

We zullen nu kijken naar het algemene geval, waarin we uitgaan van een spel met een eindig aantal spelers die elk een eindig aantal acties hebben. De weergave van een spel in normale vorm bestaat uit

(i) De spelers van het spel

De n spelers van het spel nummeren we met de gehele getallen $1, ..., n$ waarbij we een willekeurige speler aanduiden met $i \in (1, ..., n)$

(ii) De acties die elke speler heeft

De (eindige) verzameling A_i wordt de *actieruimte* van speler i genoemd en bevat alle beschikbare acties voor speler i. Met $a_i \in A_i$ duiden we een mogelijke actie voor speler i aan. Met $(a_1, ..., a_n)$ wordt een combinatie van acties aangeduid voor het spelen van het spel, waarbij a_i de gekozen actie is van speler i.

(iii) De uitbetaling die de spelers krijgen, voor elke mogelijke combinatie van acties die gespeeld kan worden in het spel

Voor speler i wordt de uitbetalingsfunctie gegeven door $u_i(a_1, ..., a_n)$. We refereren naar deze uitbetalingsfunctie als u_i. Bij een combinatie van acties $(a_1, ..., a_n)$ wordt de uitbetaling voor alle n spelers dus gegeven door

$$(u_1(a_1, ..., a_n), ..., u_n(a_1, ..., a_n)) = (u_1, ..., u_n)$$

We vatten deze punten samen met behulp van de volgende definitie.

Definitie 1.2. De representatie van een statisch spel in normale vorm met volledige informatie en n spelers specificeert de actieruimten $A_1, ...A_n$ en de uitbetalingsfuncties $u_1, ..., u_n$ van de spelers. We noteren dit spel als $G = \{A_1, ..., A_n; u_1, ..., u_n\}$.

Voor een statisch spel met volledige informatie hebben we dus twee stappen:

(1) Elke speler $i \in (1, ..., n)$ kiest (op hetzelfde moment of zonder dat ze elkaars keuze kunnen observeren) zijn actie a_i uit de actieruimte A_i.

(2) Elke speler i ontvangt zijn uitbetaling $u_i(a_1, ..., a_n)$.

Voor voorbeeld 1.1 kunnen we het spel dus noteren als $G = \{A_1, A_2; u_1, u_2\}$ waarbij

$$A_1 = A_2 = \{B, V\},$$

$$u_1(a_1, a_2) = \begin{cases} -1 & \text{als } (a_1, a_2) = (B, B) \\ -10 & \text{als } (a_1, a_2) = (B, V) \\ 0 & \text{als } (a_1, a_2) = (V, B) \\ -9 & \text{als } (a_1, a_2) = (V, V) \end{cases}$$

en

$$u_2(a_1, a_2) = \begin{cases} -1 & \text{als } (a_1, a_2) = (B, B) \\ 0 & \text{als } (a_1, a_2) = (B, V) \\ -10 & \text{als } (a_1, a_2) = (V, B) \\ -9 & \text{als } (a_1, a_2) = (V, V) \end{cases}$$

Dit geeft ons de mogelijkheid om te definiëren wat we verstaan onder een Nash-evenwicht.

Definitie 1.3. In het statische spel met volledige informatie $G = \{A_1, ..., A_n; u_1, ..., u_n\}$ is de combinatie van acties $s^* = (a_1^*, ..., a_n^*)$ een Nash-evenwicht als, voor alle spelers $i \in (1, ..., n)$, a_i^* de beste reactie, of tenminste een even goede reactie, is tegen de acties $(a_1^*, ..., a_{i-1}^*, a_{i+1}^*, ..., a_n^*)$ van de $n-1$ andere spelers. Met andere woorden, als voor elke speler $i \in (1, ..., n)$, voor elke mogelijke actie $a_i \in A_i$ geldt dat

$$u_i(a_1^*, a_{i-1}^*, a_i^*, a_{i+1}^*, ..., a_n^*) \geq u_i(a_1^*, a_{i-1}^*, a_i, a_{i+1}^*, ..., a_n^*).$$

Het kan voorkomen dat een spel geen Nash-evenwicht heeft in pure strategieën, maar wel in gemengde strategieën. Wanneer we bijvoorbeeld kijken naar de normale vorm van het spel "steen papier schaar" in figuur 2, is er voor elke combinatie van acties voor één van de spelers een mogelijkheid om een hogere uitbetaling te krijgen door van actie te wisselen. Wanneer we naar de gemengde uitbreiding van dit spel kijken, zien we dat er wel een Nash-evenwicht is voor de gemengde strategie waarbij elke speler steen, papier of schaar speelt met kans $\frac{1}{3}$ (zie [1]).

		Speler 2		
		Steen	*Papier*	*Schaar*
Speler 1	*Steen*	$(0, 0)$	$(-1, 1)$	$(1, -1)$
	Papier	$(1, -1)$	$(0, 0)$	$(-1, 1)$
	Schaar	$(-1, 1)$	$(1, -1)$	$(0, 0)$

Figuur 2: De normale vorm van het spel "steen papier schaar".

1.2 Statische spellen met onvolledige informatie

Deze sectie is gebaseerd op [3]. Vanaf nu zullen we ons focussen op spellen met onvolledige informatie. Een spel met onvolledige informatie wordt ook wel een *Bayesiaans spel* genoemd. Dit betekent dat minstens één van de spelers geen kennis heeft over bepaalde eigenschappen van het spel of over bepaalde eigenschappen van de andere spelers. Het aspect van onvolledige informatie kan zich op veel verschillende manieren voordoen in een spel. Het kan bijvoorbeeld betekenen dat een van de spelers geen informatie of onvolledige informatie heeft over de uitbetalingsfunctie van de andere spelers, de beschikbare acties van de andere spelers of de hoeveelheid informatie die andere spelers hebben over de structuur van het spel.

We maken in deze sectie gebruik van de ideeën die John C. Harsanyi in de jaren 60 introduceerde over het bekijken van spellen met onvolledige informatie (zie [4]). Harsanyi liet zien dat een spel met onvolledige informatie op een eenvoudigere manier kan worden gemodelleerd door aan te nemen dat een speler meerdere types kan hebben. Een spel met onvolledige informatie is hiermee in feite een verzameling van meerdere spellen, één voor elke combinatie van type spelers. Door een zogenoemde *zet van de natuur* toe te voegen aan het begin van het spel waarmee de types van de spelers vastgelegd worden, kan een spel met onvolledige informatie worden vervormd naar een spel met volledige maar *imperfecte informatie*. Dit houdt in dat niet alle spelers op de hoogte zijn van de uitkomst van de zet van de natuur. Met behulp van dit concept (dat ook wel de Harsanyi-transformatie genoemd wordt) kunnen we dus, zonder verlies van algemeenheid, aannemen dat in ieder geval één van de spelers onvolledige informatie heeft over het type van tenminste één van de andere spelers en dat alle spelers geïnformeerd zijn over alle mogelijke types die de spelers kunnen hebben en over de beschikbare acties van alle type spelers hebben. We zullen in deze sectie kijken naar statische Bayesiaanse spellen met een eindig aantal spelers, een eindig aantal verschillende types voor elke speler en een eindig aantal beschikbare acties voor elk type.

Voorbeeld 1.4. We bekijken een voorbeeld van een spel met onvolledige informatie. Twee kinderen gaan samen spelen. Ze hebben de keuze tussen buiten spelen en binnen spelen. Kind 1 is avontuurlijk en gaat liever naar buiten terwijl kind 2 liever binnen is. Daarnaast heeft kind 2 soms een slecht humeur waardoor ze helemaal niet met kind 1 wil spelen. De kans hierop is $\frac{1}{2}$. Beide kinderen moeten op hetzelfde moment hun keuze maken, zonder dat ze weten wat het andere kind kiest. Kind 1 weet van tevoren niet of kind 2 een goed of een slecht humeur heeft. In figuur 2 zijn de uitbetalingen van de kinderen te zien in alle mogelijke gevallen. Wanneer kind 2 goedgehumeurd is, vinden beide kinderen het leuker om samen te spelen dan alleen. Wanneer kind 2 slechtgehumeurd is, speelt kind 2 liever alleen. Kind 1 speelt ook in dit geval liever samen dan alleen.

Kind 2 is goedgehumeurd:

		Kind 2: Buiten	Kind 2: Binnen
Kind 1	Buiten	$(2,1)$	$(0,0)$
	Binnen	$(0,0)$	$(1,2)$

Kind 2 is slechtgehumeurd:

		Kind 2: Buiten	Kind 2: Binnen
Kind 1	Buiten	$(2,0)$	$(0,2)$
	Binnen	$(0,1)$	$(1,0)$

Figuur 3: De uitbetalingen van het spel in voorbeeld 1.4.

In dit spel heeft kind 1 slechts één type. Kind 2 heeft twee verschillende types. Ondanks dat we van tevoren niet weten wat het type van kind 2 is en dus welke van de twee spellen wordt gespeeld, kunnen we wel een Nash-evenwicht voor dit spel bepalen.

Een goede methode hiervoor is het stapsgewijs langslopen van de verschillende opties. We beginnen hierbij met een aanname voor de speler die slechts één type heeft en kijken naar de optimale reactie van de andere speler hierop. Door vervolgens te controleren of de eerste actie die op dat moment aangenomen wordt nog steeds de beste actie is voor de eerstgenoemde speler, kan een Nash-evenwicht gevonden worden of uitgesloten worden. Deze techniek komt vaker terug en is goed om in het achterhoofd te houden voor het vinden van pure Nash-evenwichten in statische spellen.

Stel dat kind 1 in een Nash-evenwicht kiest voor buiten spelen. Als kind 2 goedgehumeurd is, is de beste keuze in dit geval buiten spelen. Als kind 2 slechtgehumeurd is, is het de beste keuze om voor binnen spelen te kiezen. De verwachte uitbetaling van kind 1 is in dit geval $\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 1$. Wanneer kind 1 in dit geval wisselt van actie en voor binnen spelen kiest, is de verwachte uitbetaling van kind 1 $\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$. We kunnen daarom concluderen dat (Buiten, Buiten Binnen) een Nash-evenwicht is. (Deze notatie houdt in dat kind 2 buiten kiest in het goedgehumeurde geval en binnen in het slechtgehumeurde geval.)
Stel nu dat kind 1 in een Nash-evenwicht kiest voor binnen spelen. De beste reactie van kind 2 hierop is dan binnen spelen in het goedgehumeurde geval en buiten spelen in het slechtgehumeurde geval. De verwachte uitbetaling van kind 1 in dit geval is $\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2}$. Wanneer kind 1 in dit geval wisselt van actie en voor buiten spelen kiest, is de verwachte uitbetaling van kind 1 $\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$. Een Nash-evenwicht waarbij kind 1 voor binnen spelen kiest bestaat dus niet. We kunnen daarom concluderen dat (Buiten, Buiten Binnen) het enige Nash-evenwicht van dit spel is (waarbij we gemengde Nash-evenwichten buiten beschouwing laten).

We bekijken nu het algemene geval van een statisch Bayesiaans spel. We modelleren een spel van deze vorm dus door aan te nemen dat een speler meerdere types kan hebben. We nemen, zoals eerder benoemd werd, aan dat alle spelers bekend zijn met hun eigen uitbetalingsfunctie, maar onvolledige informatie kunnen hebben over het type van de andere spelers.

De uitbetalingsfunctie van speler i wordt nu gegeven door $u_i(a_1, ..., a_n; t_i)$ waarbij t_i het type van speler i is. Alle mogelijke types van speler i behoren tot de verzameling T_i die we de *type-ruimte* noemen. Voor elk type t_i heeft speler i dus een aparte uitbetalingsfunctie. Wanneer een speler i geen informatie heeft over de uitbetalingsfunctie van een andere speler $j \in (1, ..., n)$ is dit equivalent met het gebrek aan informatie van speler i over het type t_j van speler j. Merk op dat we er vanuit gaan dat alle spelers op de hoogte zijn van elkaars type-ruimtes. Dat wil zeggen dat alle spelers op de hoogte zijn van het type van een speler wanneer zijn type-ruimte bestaat uit één enkel type.

Welk type elke speler heeft in een spel wordt bepaald door de zogenoemde *zet van de natuur*. Deze volgt de kansverdeling $p(t_1, ..., t_n)$. In een statisch Bayesiaans spel is het bepalen van de types van alle spelers altijd de eerste stap. We gaan er vanuit dat iedere speler i zijn eigen type t_i vervolgens komt te weten. Daarnaast nemen we aan dat de kansverdeling $p(t_1, ..., t_n)$ bekend is bij alle spelers. Deze verdeling geeft informatie over de waarschijnlijkheid van alle mogelijke combinaties van type spelers in het spel. *Het denkbeeld* van speler i over de types van de andere spelers wordt gegeven door $p_i(t_1, ..., t_{i-1}, t_{i+1}, ..., t_n \mid t_i)$. Het subscript van deze functie wordt enkel gebruikt om te verduidelijken dat het hier gaat over het denkbeeld van speler i, gegeven zijn type t_i. Als speler i zijn eigen type t_i weet, kan hij dus berekenen wat de kans is dat de andere spelers de types $(t_1, ..., t_{i-1}, t_{i+1}, t_n)$ hebben. Voor meer overzicht gebruiken we de notatie $t_{-i} = (t_1, ..., t_{i-1}, t_{i+1}, t_n)$ waarbij $t_{-i} \in T_{-i}$ en T_{-i} de verzameling is van alle mogelijke waarden van t_{-i}. Het denkbeeld van speler i over de types van de andere spelers kan daarom ook genoteerd worden als $p_i(t_{-i} \mid t_i)$. We kunnen dit herschrijven met behulp van *de stelling van Bayes*.

Stelling 1.5. *(De stelling van Bayes)*
Voor twee gebeurtenissen A en B geldt dat $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ als $P(B) > 0$.
Indien $P(B) = 0$ wordt deze voorwaardelijke kans gedefinieerd door $P(A \mid B) = 0$.

In het geval dat $p(t_i) = 0$, volgt dus direct dat $p_i(t_{-i} \mid t_i) = 0$. Omdat het niet van toegevoegde waarde is om het denkbeeld $p_i(t_{-i} \mid t_i)$ van speler i te bekijken wanneer de kans 0 is dat speler i van type t_i is, nemen we aan dat $p(t_i) > 0$.
We kunnen $p_i(t_{-i} \mid t_i)$ nu herschrijven als $p_i(t_{-i} \mid t_i) = \dfrac{p(t_{-i}, t_i)}{p(t_i)}$. Merk op dat $p(t_{-i}, t_i)$ niets anders is dan $p(t_1, ..., t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, ..., t_n)$ en dat $p(t_i)$ de sommatie is van $p(t_{-i}, t_i)$ over alle mogelijke combinaties van $t_{-i} \in T_{-i}$ waarbij alleen t_i onveranderd blijft. We vinden daarom dat

$$p_i(t_{-i} \mid t_i) = \frac{p(t_{-i}, t_i)}{p(t_i)} = \frac{p(t_1, ..., t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, ..., t_n)}{\sum\limits_{t_{-i} \in T_{-i}} p(t_{-i}, t_i)} = \frac{p(t_1, ..., t_n)}{\sum\limits_{t_{-i} \in T_{-i}} p(t_{-i}, t_i)}$$

In sectie 1.1 zagen we dat een speler i de actieruimte A_i had die bestaat uit alle mogelijke acties a_i van speler i. Nu kan het echter ook voorkomen dat verschillende types van een speler verschillende acties tot hun beschikking hebben. We introduceren daarom de definitie van *een strategie* in een statisch Bayesiaans spel.

Definitie 1.6. In een statisch Bayesiaans spel is *een strategie* van speler i een functie $s_i : T_i \to A_i$. Voor elk type t_i in de type-ruimte T_i van speler i wordt met $s_i(t_i)$ de actie aangegeven die dit type zal spelen in het spel (indien de zet van de natuur heeft bepaald dat speler i van type t_i is).

De weergave van een statisch Bayesiaans spel bestaat dus uit

(i) De spelers van het spel

De n spelers van het spel nummeren we met de gehele getallen $1, ..., n$ waarbij we een willekeurige speler aanduiden met $i \in (1, ..., n)$

(ii) De types die elke speler heeft

De (eindige) verzameling T_i wordt de *type-ruimte* van speler i genoemd en bevat alle mogelijke types van speler i. Elke speler i is op de hoogte van zijn eigen type t_i. Daarnaast is T_i bekend bij alle spelers van het spel.

(iii) De acties die elke speler heeft

De (eindige) verzameling A_i wordt de *actieruimte* van speler i genoemd en bevat alle beschikbare acties voor speler i. Met $(s_1(t_1), ..., s_n(t_n))$ wordt een combinatie van acties aangeduid voor het spelen van het spel, waarbij $s_i(t_i) \in A_i$ de gekozen actie is van type t_i van speler i.

(iv) Het denkbeeld dat elke speler heeft over de types van de andere spelers

Het denkbeeld van speler i over de types van de andere spelers wordt gegeven door $p_i(t_{-i} \mid t_i)$ en modelleert de onzekerheid van speler i over de mogelijke types van de andere $n-1$ spelers, gegeven dat zijn eigen type t_i is.

(v) De uitbetaling die de spelers krijgen, voor elke mogelijke combinatie van acties die gespeeld kan worden in het spel

Voor type t_i van speler i wordt de uitbetalingsfunctie gegeven door $u_i(s_1(t_1), ..., s_n(t_n); t_i)$. We refereren naar deze uitbetalingsfunctie als u_i. Bij de combinatie van acties $(s_1(t_1), ..., s_n(t_n))$ wordt de uitbetaling voor alle n spelers dus gegeven door

$$(u_1(s_1(t_1), ..., s_n(t_n); t_1), ..., u_n(s_1(t_1), ..., s_n(t_n); t_n)) = (u_1, ..., u_n)$$

We vatten deze punten samen met behulp van de volgende definitie.

Definitie 1.7. De representatie van een statisch Bayesiaans spel met n spelers specificeert de actieruimten $A_1, ..., A_n$, de type-ruimten $T_1, ..., T_n$, de denkbeelden $p_1, ..., p_n$ en de uitbetalingsfuncties $u_1, ..., u_n$ van de spelers. We noteren dit spel als

$$G = \{A_1, ..., A_n; T_1, ..., T_n; p_1, ..., p_n; u_1, ..., u_n\}.$$

Voor een statisch spel met onvolledige informatie hebben we dus vier stappen:

(1) De zet van de natuur geeft een vector $t = (t_1, ..., t_n)$ met de types van alle spelers.

(2) Elke speler krijgt informatie over zijn eigen type.

(3) Elke speler $i \in (1, ..., n)$ kiest (op hetzelfde moment of zonder dat ze elkaars keuze kunnen observeren) zijn actie $s_i(t_i)$ uit de actieruimte A_i.

(4) Elke speler ontvangt zijn uitbetaling $u_i(s_1(t_1), ..., s_n(t_n); t_i)$.

We kunnen nu een Nash-evenwicht in een statisch Bayesiaans spel definiëren. Wanneer we kijken naar definitie 1.3 ligt het voor de hand dat in een statisch Bayesiaans spel $G = \{A_1, ..., A_n; T_1, ..., T_n; p_1, ..., p_n; u_1, ..., u_n\}$ de combinatie van acties $s^* = (s_1^*(t_1), ..., s_n^*(t_n))$ een Bayesiaans Nash-evenwicht is als, voor elke speler $i \in (1, ..., n)$ en voor alle types t_i van speler i, $s_i^*(t_i)$ de beste reactie, of tenminste een even goede reactie, is tegen de combinatie van acties $(s_1^*(t_1), ..., s_{i-1}^*(t_{i-1}), s_{i+1}^*(t_{i+1}), ..., s_n^*(t_n))$ van de andere $n-1$ spelers. Met andere woorden, als voor elke speler $i \in (1, ..., n)$, voor elk type t_i van speler i, en voor elke mogelijke actie $s_i(t_i) \in A_i$ geldt dat

$$u_i(s_1^*(t_1), ..., s_{i-1}^*(t_{i-1}), s_i^*(t_i), s_{i+1}^*(t_{i+1}), ..., s_n^*(t_n)) \geq \\ u_i(s_1^*(t_1), ..., s_{i-1}^*(t_{i-1}), s_i(t_i), s_{i+1}^*(t_{i+1}), ..., s_n^*(t_n)).$$

Dit is echter nog niet het hele idee. We moeten hier namelijk ook nog rekening houden met het feit dat de types van de andere $n-1$ spelers niet bekend zijn bij speler i. Daarom moeten we het denkbeeld van speler i mee laten wegen in de definitie van het Bayesiaanse Nash-evenwicht om de best mogelijke actie van speler i te bepalen.

Definitie 1.8. In het statische Bayesiaanse spel $G = \{A_1, ..., A_n; T_1, ..., T_n; p_1, ..., p_n; u_1, ..., u_n\}$ is de combinatie van acties $s^* = (s_1^*(t_1), ..., s_n^*(t_n))$ een Bayesiaans Nash-evenwicht als, voor elke speler $i \in (1, ..., n)$ en voor alle types t_i van speler i geldt dat $s_i^*(t_i)$ de som

$$\sum_{t_{-i} \in T_{-i}} u_i(s_1^*(t_1), ..., s_{i-1}^*(t_{i-1}), s_i(t_i), s_{i+1}^*(t_{i+1}), ..., s_n^*(t_n); t_i) \cdot p_i(t_{-i} \mid t_i) \text{ maximaliseert.}$$

2 Voorbeelden

In dit hoofdstuk zullen we een aantal voorbeelden behandelen van spellen met onvolledige informatie waarbij de Nash-evenwichten van het spel een discontinuïteit vertonen ten opzichte van de Nash-evenwichten van het spel wanneer uitgegaan wordt van volledige informatie. We beginnen in sectie 2.1 met "het e-mail-spel" waarbij spelers hun actie kiezen nadat een bepaalde vorm van e-mail-communicatie heeft plaatsgevonden. Vervolgens bekijken we in sectie 2.2 "het risicospel" waarbij de structuur van het spel ervoor zorgt dat de spelers niet volledig op de hoogte zijn van de uitbetalingen in het spel.

Bij het behandelen van deze voorbeelden komen twee Engelse termen aan bod die zich moeilijk laten vertalen. Voor *common knowledge* zullen we de Nederlandse term *gemeenschappelijke kennis* gebruiken en voor *mutual knowledge* gebruiken we de Nederlandse term *gedeelde kennis*. In sectie 2.1 zal de betekenis van deze termen verder uitgelegd worden.

2.1 Het e-mail-spel

In deze sectie bekijken we "het e-mail-spel"[10, 11]. In het Engels is dit spel ook wel bekend onder de naam "the electronic mail game". Dit spel bestaat uit twee verschillende statische spellen. Spel G_a wordt gespeeld met kans $(1-p)$ en spel G_b wordt gespeeld met kans p, waarbij $p < \frac{1}{2}$. In figuur 4 is de normale vorm van dit spel te zien. Hierbij geldt dat $L > M > 1$.

We zien direct dat het voor beide spelers van groot belang is om dezelfde actie te kiezen als de tegenspeler. In spel G_a ontvangen beide spelers de hoogst mogelijke uitbetaling wanneer ze allebei voor actie A kiezen. In spel G_b is het om dezelfde reden optimaal wanneer beide spelers actie B kiezen.

Spel G_a (met kans $1-p$)

		Speler 2 A	Speler 2 B
Speler 1	A	(M, M)	$(1, -L)$
	B	$(-L, 1)$	$(0, 0)$

Spel G_b (met kans p)

		Speler 2 A	Speler 2 B
Speler 1	A	$(0, 0)$	$(1, -L)$
	B	$(-L, 1)$	(M, M)

Figuur 4: De normale vorm van het e-mail-spel waarbij $p < \frac{1}{2}$ en $L > M > 1$.

We bekijken allereerst de versie van dit spel waarin de spelers niet met elkaar kunnen communiceren. De zet van de natuur bepaalt of spel G_a of G_b wordt gespeeld. Speler 1 is de enige speler die op de hoogte wordt gebracht van de uitkomst hiervan en weet welk spel wordt gespeeld. Speler 2 heeft hier geen informatie over en beide spelers kunnen hierover niet communiceren. We gaan op zoek naar een Nash-evenwicht in dit spel (in pure strategieën). We gebruiken hierbij een beredenering van dezelfde soort als in voorbeeld 1.4.

Stel dat speler 2 in een Nash-evenwicht kiest voor actie A. Voor zowel het geval van spel G_a als dat van G_b is het nu de beste keuze voor speler 1 om ook voor actie A te kiezen. De verwachte uitbetaling van speler 2 is in dit geval $M(1-p)+0\cdot p = M(1-p)$. Wanneer speler 2 wisselt naar actie B, wordt zijn verwachte uitbetaling $-L(1-p)+p\cdot -L = -L+pL-pL = -L$. Dit is duidelijk een lagere uitbetaling dan wanneer speler 2 voor actie A kiest. We kunnen daarom concluderen dat (AA, A) een Nash-evenwicht is. Hierbij duidt de notatie van de eerste coördinaat AA op de keuzes van speler 1 in het geval dat het spel G_a (de eerste A) dan wel G_b (de tweede A) is. De tweede coördinaat A duidt op de keuze van speler 2 (die niet weet welk spel gespeeld wordt en dus slechts één keuze maakt).
Stel nu dat speler 2 in een Nash-evenwicht kiest voor actie B. Als spel G_a gespeeld wordt is het voor speler 1 de beste keuze om voor actie A te gaan. In het geval van spel G_b levert actie B speler 1 de hoogste uitbetaling op. In dit geval is de verwachte uitbetaling van speler 2 gelijk aan $-L(1-p)+p\cdot M$. Wanneer speler 2 wisselt naar actie A, wordt zijn verwachte uitbetaling $M(1-p)+1\cdot p$. Speler 2 kan zijn uitbetaling dus verhogen door te wisselen naar actie A. Er bestaat in dit spel dus geen Nash-evenwicht waarin speler 2 actie B kiest.
We kunnen daarom concluderen dat het enige Nash-evenwicht van dit spel (AA,A) is. Beide spelers hebben in dit Nash-evenwicht een verwachte uitbetaling van $M(1-p)$.

We zullen ook het andere uiterste geval van dit spel bekijken. Hierbij nemen we aan dat het *gemeenschappelijke kennis* is welk spel wordt gespeeld. Binnen de speltheorie is *gemeenschappelijke kennis* een term die regelmatig gebruikt wordt. Hoewel de betekenis hiervan intuïtief vaak vanzelfsprekend is, is het de moeite waard om stil te staan bij wat hiermee precies bedoeld wordt. We leggen daarom kort uit wat we bedoelen met de begrippen *gedeelde kennis* en *gemeenschappelijke kennis*.

Stel dat speler 1 van type t_1 is en speler 2 van type t_2. Het is dan *eerste orde gedeelde kennis* onder de spelers 1 en 2 dat (bijvoorbeeld) het spel G_b wordt gespeeld wanneer beide spelers kans 1 toekennen aan spel G_b. Dit correspondeert met de beweringen “Speler 1 weet dat het spel G_b is” en “Speler 2 weet dat het spel G_b is”.
We kunnen dit idee uitbreiden met een extra stap. Er volgt nu dat het *2-de orde gedeelde kennis* is onder de spelers 1 en 2 (van type t_1 resp. t_2) dat het spel G_b wordt gespeeld, wanneer beide spelers kans 1 toekennen aan spel G_b én kans 1 toekennen aan de gebeurtenis dat de andere speler kans 1 toekent aan spel G_b. Dit komt overeen met de beweringen “Speler 1 weet dat het spel G_b is en speler 1 weet dat speler 2 weet dat het spel G_b is” en “Speler 2 weet dat het spel G_b is en speler 2 weet dat speler 1 weet dat het spel G_b is”.
De definitie van *n-de orde gedeelde kennis* volgt door dit iteratief toe te passen. We kunnen n-de orde gedeelde kennis dan ook zien als de situatie waarin de beredenering ‘Speler 1 en speler 2 weten dat het spel G_b is, speler 1 weet dat speler 2 weet dat het spel G_b is en speler

2 weet dat speler 1 weet dat het spel G_b is, speler 1 weet dat speler 2 weet dat speler 1 weet dat het spel G_b is en speler 2 weet dat speler 1 weet dat speler 2 weet dat het spel G_b is, ...' van eindige lengte is.

Wanneer deze beredenering van oneindige lengte is, zeggen we dat het *gemeenschappelijke kennis* is onder de spelers 1 en 2 (van type t_1 resp. t_2) dat het spel G_b wordt gespeeld. Voor speler 1 geldt dan dus de oneindige beredenering "Speler 1 weet dat het spel G_b is, speler 1 weet dat speler 2 weet dat het spel G_b is, speler 1 weet dat speler 2 weet dat speler 1 weet dat het spel G_b is, speler 1 weet dat speler 2 weet dat speler 1 weet dat speler 2 weet dat het spel G_b is, ...' en voor speler 2 geldt de oneindige beredenering "Speler 2 weet dat het spel G_b is, speler 2 weet dat speler 1 weet dat het spel G_b is,...".
Hiernaast kan gemeenschappelijke kennis over het spel dat wordt gespeeld ook op een andere manier volgen. Wanneer de spelers 1 en 2, ongeacht het type dat ze hebben, altijd kans 1 toekennen aan het spel G_b, zeggen we dat het gemeenschappelijke kennis is onder de spelers 1 en 2 dat het spel G_b wordt gespeeld.

Binnen de speltheorie wordt regelmatig aangenomen dat spelers gemeenschappelijke kennis hebben over de structuur van een spel. Dit wordt vaak toegelicht met een situatie waarin spelers mondeling met elkaar kunnen communiceren. In dit voorbeeld wordt dit gezien als de situatie waarin speler 1 naast speler 2 staat en vertelt welk spel (G_a dan wel G_b) de spelers spelen.
In hoofdstuk 3 zullen we nog verder ingaan op de betekenis van gedeelde en gemeenschappelijke kennis. We zullen zien dat het concept van gemeenschappelijke kennis nog verder uitgediept kan worden. In deze huidige sectie is het echter voldoende om aan te nemen dat er inderdaad sprake is van gemeenschappelijke kennis wanneer speler 1 door middel van mondelinge communicatie aan speler 2 vertelt welk spel de spelers spelen.

Stel nu dat het *gemeenschappelijke kennis* is onder beide spelers of spel G_a dan wel spel G_b gespeeld wordt. Wanneer we de spellen G_a en G_b los van elkaar bekijken, zien we direct dat spel G_a één Nash-evenwicht heeft, namelijk (A, A). In spel G_b zijn zowel (A, A) als (B, B) Nash-evenwichten. Hieruit volgt dat het beide spelers de hoogst mogelijke uitbetaling oplevert wanneer ze voor actie A kiezen in spel G_a en voor actie B kiezen in spel G_b. De uitbetalingen van beide spelers zijn in dit Nash-evenwicht gelijk aan M. Hoewel de uitbetalingen van de spelers gelijk zijn aan $(1 - p)M$ wanneer de spelers in beide spellen kiezen voor actie A, is ook dit een Nash-evenwicht van het spel. De spelers kunnen in dit geval namelijk geen hogere uitbetaling verkrijgen door een andere actie te kiezen in één of beide spellen.

We zullen nu gaan kijken naar een uitgebreidere variant van dit spel. Hierin wordt een specifieke vorm van communicatie tussen beide spelers toegevoegd om ervoor te zorgen dat de informatie omtrent welk spel gespeeld wordt wel gedeelde kennis maar géén gemeenschappelijke kennis kan worden onder de spelers. Het blijft zo dat speler 1 op de hoogte is van de uitkomst van de zet van de natuur en dus weet welk spel wordt gespeeld. Beide spelers hebben nu de beschikking over een computer. De communicatie tussen beide spelers over het type spel dat wordt gespeeld verloopt op basis van een automatische e-mail en werkt als volgt.

Wanneer het spel G_a gespeeld wordt, stuurt de computer van speler 1 geen bericht naar speler 2. Wanneer het spel G_b gespeeld wordt, stuurt de computer van speler 1 automatisch een bericht naar de computer van speler 2. Er bestaat altijd een kleine kans $\epsilon > 0$ dat een verzonden bericht niet overkomt bij de beoogde ontvanger. Daarom versturen beide computers altijd automatisch een ontvangstbevestiging wanneer ze een bericht ontvangen. Er ontstaat dus een communicatiestroom tussen de twee spelers met een opeenvolging van berichten, want een inkomende bevestiging wordt door de computers ook als bericht gezien waarop een automatische ontvangstbevestiging wordt verzonden. De communicatiestroom stop wanneer een bericht niet overkomt. Na afloop van de communicatiestroom krijgen beide spelers te zien hoeveel berichten hun computer heeft verstuurd. Op basis van deze informatie kiezen de spelers vervolgens hun actie voor het spelen van het spel.

Merk op dat, zelfs als speler 1 weet dat het spel G_b is, er nog steeds een groot risico kleeft aan het kiezen van actie B zolang speler 1 niet voldoende verzekerd is van het feit dat speler 2 voor actie B zal gaan kiezen.

We zetten op een rijtje hoe de vijf eigenschappen van een statisch Bayesiaans spel (zoals we zagen in sectie 1.2) op dit voorbeeld van toepassing zijn. Allereerst hebben we twee spelers, speler 1 en speler 2. Beide spelers kunnen meerdere types hebben. Voor elke combinatie van type spelers wordt er dus een ander spel gespeeld. We kunnen de types van een speler in dit voorbeeld relateren aan het aantal berichten dat de computer van die speler verzonden heeft. De type-ruimte van speler 1 wordt in dit geval gegeven door $T_1 = \{t_1 \mid t_1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ en de type-ruimte van speler 2 wordt gegeven door $T_2 = \{t_2 \mid t_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$. Hierbij corresponderen t_1 en t_2 met het totaal aantal berichten die de computers van speler 1 respectievelijk speler 2 hebben verstuurd nadat de communicatiestroom gestopt is. De combinaties van types die mogelijk zijn in dit spel zijn dus weer te geven als $\{(t_1, t_2) \mid t_1 = t_2 \text{ of } t_1 = t_2 + 1\}$ waarbij $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. We noemen (t_1, t_2) ook wel *de toestand* van het spel. We zullen naar een willekeurig berichtenaantal van een speler refereren met $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Omdat we elke combinatie van type spelers (en dus elke toestand) kunnen zien als het spelen van een ander spel, wordt de verzameling van alle mogelijke spellen die gespeeld kunnen worden in dit geval gegeven door $\{(t, t), (t + 1, t) \mid t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$. De actieruimte is in dit spel hetzelfde voor beide spelers. Voor alle types van speler 1 en speler 2 geldt dat $A_1 = A_2 = \{A, B\}$.

Beide spelers weten verder dat het spel G_a is met kans $(1 - p)$ en G_b met kans p, waarbij $p < \frac{1}{2}$. De waarschijnlijkheidsverdeling voor de verschillende toestanden van het spel kunnen we daarom direct berekenen. We zien dat voor alle $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ geldt dat

$$\begin{aligned}
&p(0,0) = 1 - p, \\
&p(t+1, t+1) = p(1-\epsilon)^{t+1}(1-\epsilon)^{t}\epsilon = p\epsilon(1-\epsilon)^{2t+1} \\
&p(t+1, t) = p(1-\epsilon)^{t+1}(1-\epsilon)^{t-1}\epsilon = p\epsilon(1-\epsilon)^{2t}
\end{aligned}$$

Aan de hand van deze waarschijnlijkheidsverdeling kunnen we, met behulp van de regel van Bayes, de denkbeelden van de spelers over het type van de andere speler afleiden. De uitbetaling die de spelers krijgen voor elke mogelijke combinatie van acties die gespeeld kan worden in het spel wordt gegeven door figuur 4.

Merk op dat $(0,0)$ de enige toestand is waarin het spel G_a wordt gespeeld. In alle andere toestanden $\{(t+1,t+1),(t+1,t) \mid t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ wordt spel G_b gespeeld.

We zetten de informatie die de spelers uit de communicatiestructuur kunnen opmaken op een rij. Speler 1 weet altijd welk spel wordt gespeeld. Speler 2 weet niet welk spel gespeeld wordt in de toestanden $(0,0)$ en $(1,0)$. Speler 2 weet in dit geval namelijk niet of speler 1 geen bericht gestuurd heeft of dat speler 1 wel een bericht gestuurd heeft maar het bericht niet aangekomen is. In de toestanden $(1,0)$ en $(1,1)$ weet speler 2 dat het spel G_b is, maar weet speler 1 niet of speler 2 weet dat het spel G_b is. In de toestanden $(1,1)$ en $(2,1)$ weet speler 2 dat het spel G_b is, weet speler 1 dat speler 2 weet dat het spel G_b is, maar weet speler 2 niet of speler 1 weet dat speler 2 weet dat het spel G_b is. Deze redenering gaat op dezelfde voet door naarmate er meer berichten over en weer worden verstuurd.

Omdat $\epsilon > 0$, zal het aantal berichten t dat een speler verzonden heeft altijd eindig zijn. Voor alle toestanden geldt daarom dat, hoe groot t ook wordt, het nooit gemeenschappelijke kennis is dat het spel G_b is. Anderzijds, wanneer $\epsilon > 0$ heel klein is, is de kans groot dat het aantal berichten dat verstuurd wordt door beide spelers erg groot is. De vraag is nu, waar trekken spelers hun grens? Je zou kunnen bedenken dat speler 1 niet genoeg overtuigd is dat speler 2 actie B zal kiezen wanneer hij $t = 1$ op zijn scherm te zien krijgt. Maar wat doet speler 1 wanneer hij te zien krijgt dat zijn computer 3814 berichten verstuurd heeft? Dit betekent dat speler 2 ofwel 3814 ofwel 3815 berichten verstuurd heeft. Intuïtief zou je zeggen dat dit voldoende overtuigend moet zijn voor speler 2 om voor actie B te kiezen.

Speltheoretisch gezien is deze beredenering echter fout. We claimen dan ook dat het optimaal is voor beide spelers om actie A te spelen in dit spel, ongeacht het aantal berichten die de computers van beide spelers verstuurd hebben.

Claim 2.1. Het e-mail-spel (zoals hierboven beschreven) heeft een **uniek** Bayesiaans Nash-evenwicht waarin beide spelers altijd voor actie A kiezen.

Bewijs van claim 2.1 [7, 11]. We geven een inductief bewijs waarbij we laten zien dat voor beide spelers actie A de beste keuze is voor alle $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

De inductiebasis:
Stel dat $t_1 = 0$, dus dat speler 1 ziet dat hij 0 berichten heeft verstuurd. Hij weet in dit geval dat het spel G_a is en zal actie A kiezen omdat dit, ongeacht de actie die speler 2 kiest, de hoogste uitbetaling voor speler 1 oplevert.

Stel dat $t_2 = 0$, dus dat speler 2 ziet dat hij 0 berichten heeft verstuurd. Er zijn nu twee mogelijkheden. Ofwel $t_1 = 0$ en speler 1 heeft geen bericht verstuurd. Het spel is dan G_a. De andere optie is dat $t_1 = 1$ en speler 1 wel een bericht gestuurd heeft maar dat het niet bij speler 2 aangekomen is. In dit geval is het spel G_b. Met behulp van de stelling van Bayes (stelling 1.5) kunnen we het denkbeeld van speler 2 over het type van speler 1 berekenen.

We vinden dat:

$$
\begin{aligned}
p_2(t_1 = 0 \mid t_2 = 0) &= \frac{\mathbb{P}(t_1 = 0 \;\&\; t_2 = 0)}{\mathbb{P}(t_2 = 0)} = \\
&= \frac{\mathbb{P}(t_1 = 0 \;\&\; t_2 = 0)}{\mathbb{P}(t_1 = 0 \;\&\; t_2 = 0) + \mathbb{P}(t_1 = 1 \;\&\; t_2 = 0)} = \frac{(1-p)}{(1-p) + p\epsilon} \\
\text{En} \quad p_2(t_1 = 1 \mid t_2 = 0) &= \frac{\mathbb{P}(t_1 = 1 \;\&\; t_2 = 0)}{\mathbb{P}(t_2 = 0)} = \\
&= \frac{\mathbb{P}(t_1 = 1 \;\&\; t_2 = 0)}{\mathbb{P}(t_1 = 0 \;\&\; t_2 = 0) + \mathbb{P}(t_1 = 1 \;\&\; t_2 = 0)} = \frac{p\epsilon}{(1-p) + p\epsilon}
\end{aligned}
$$

Wanneer speler 2 voor actie A kiest is zijn verwachte uitbetaling minstens $\frac{M(1-p)+0\cdot p\epsilon}{(1-p)+p\epsilon}$. Wanneer speler 2 voor actie B kiest is zijn verwachte uitbetaling hoogstens $\frac{-L(1-p)+M\cdot p\epsilon}{(1-p)+p\epsilon}$. Omdat $\frac{-L(1-p)+M\cdot p\epsilon}{(1-p)+p\epsilon} < \frac{M(1-p)+0\cdot p\epsilon}{(1-p)+p\epsilon}$ kunnen we concluderen dat de maximale uitbetaling die speler 2 kan krijgen door het kiezen van actie B kleiner is dan de minimale uitbetaling die speler 2 ontvangt voor het kiezen van actie A. Daarom is het kiezen van actie A in dit geval de beste keuze voor speler 2.

De inductiehypothese:
Zij nu $t > 0$ willekeurig en neem aan dat voor $t_i = t - 1$ geldt dat actie A optimaal is voor speler i. We nemen aan dat deze bewering waar is voor beide spelers $i \in \{1, 2\}$.

De inductiestap:
Stel nu dat $t_1 = t$, dus dat speler 1 in totaal t berichten heeft verstuurd. Dan heeft speler 2 ofwel t berichten ofwel $t-1$ berichten verstuurd. Speler 2 kan nu dus nog twee verschillende types hebben, $t_2 = t - 1$ of $t_2 = t$. We berekenen het denkbeeld van speler 1 over het type $t_2 = t - 1$ van speler 2.

$$
p_1(t_2 = t-1 \mid t_1 = t) = \frac{\mathbb{P}(t_1 = t \;\&\; t_2 = t-1)}{\mathbb{P}(t_1 = t)} = \frac{\mathbb{P}(t_1 = t \;\&\; t_2 = t-1)}{\mathbb{P}(t_1 = t \;\&\; t_2 = t-1) + \mathbb{P}(t_1 = t \;\&\; t_2 = t)}
$$

$$
= \frac{(1-p)(1-\epsilon)^{t-1}\epsilon(1-\epsilon)^{t-1}}{(1-p)\epsilon(1-\epsilon)^{2t-2} + (1-p)(1-\epsilon)^{t}(1-\epsilon)^{t-1}\epsilon} = \frac{(1-\epsilon)^{-1}}{(1-\epsilon)^{-1} + 1} = \frac{\frac{1}{1-\epsilon}}{\frac{2-\epsilon}{1-\epsilon}} = \frac{1}{2-\epsilon}
$$

We benoemen deze voorwaardelijke kans voor het gemak $q = \frac{1}{2-\epsilon}$. Er geldt dus ook dat $p_1(t_2 = t \mid t_1 = t) = 1 - q$. Omdat we weten dat $\epsilon > 0$ een kleine kans is waarop een bericht niet overkomt, kunnen we concluderen dat $\frac{1}{2-\epsilon} > \frac{1}{2}$. In het geval van $t_1 = t$ geldt dus dat speler 1 de kans het grootst acht dat speler 2 van type $t_2 = t-1$ is. Uit de inductiehypothese weten we dat actie A opitmaal is voor speler speler 2 in het geval van $t_2 = t - 1$.

We weten in dit geval (geval $t_1 = t$) dus dat spel G_b gespeeld wordt. Ook weten we dat speler 2 van type $t_2 = t - 1$ zal kiezen voor actie A en dat de kans op dit type $t_2 = t - 1$ (gegeven dat $t_1 = t$) gelijk is aan q. We weten niet wat speler 2 van type $t_2 = t$ zal kiezen.

Hieruit volgt dat de verwachte uitbetaling van speler 1 met type $t_1 = t$ minimaal 0 is wanneer hij voor actie A kiest. Met behulp van dezelfde informatie kunnen we ook concluderen dat wanneer speler 1 van type $t_1 = t$ voor actie B kiest, zijn verwachte uitbetaling hoogstens $M(1-q) - L \cdot q$ is. We hebben zojuist gezien dat $q > \frac{1}{2}$ en we weten dat $L > M$, dus $M(1-q) - Lq < 0$. De maximale uitbetaling die speler 1 kan krijgen door het kiezen van actie B is dus kleiner dan de minimale uitbetaling die speler 1 ontvangt voor het kiezen van actie A. Hieruit volgt dat actie A optimaal is voor speler 1 wanneer zijn type $t_1 = t$ is.

Stel nu dat $t_2 = t$, dus dat speler 2 in totaal t berichten heeft verstuurd. Dan heeft speler 1 ofwel t berichten ofwel $t + 1$ berichten verstuurd. We berekenen het denkbeeld van speler 2 over het type $t_1 = t$ van speler 1.

$$\begin{aligned}
p_2(t_1 = t \mid t_2 = t) &= \frac{\mathbb{P}(t_1 = t \ \&\ t_2 = t)}{\mathbb{P}(t_2 = t)} = \frac{\mathbb{P}(t_1 = t \ \&\ t_2 = t)}{\mathbb{P}(t_1 = t \ \&\ t_2 = t) + \mathbb{P}(t_1 = t+1 \ \&\ t_2 = t)} \\
&= \frac{(1-p)(1-\epsilon)^t(1-\epsilon)^{t-1}\epsilon}{(1-p)(1-\epsilon)^t(1-\epsilon)^{t-1}\epsilon + (1-p)(1-\epsilon)^t(1-\epsilon)^t\epsilon} = \\
&= \frac{(1-p)\epsilon(1-\epsilon)^{2t-1}}{(1-p)\epsilon(1-\epsilon)^{2t-1} + (1-p)\epsilon(1-\epsilon)^{2t-1}(1-\epsilon)} = \frac{1}{1+1-\epsilon} = \frac{1}{2-\epsilon} = q
\end{aligned}$$

Merk op dat we inmiddels weten dat speler 1 van type $t_1 = t$ voor actie A kiest. We weten echter nog niet wat speler 1 van type $t_1 = t + 1$ zal kiezen. Verder weten we dat in dit geval (geval $t_2 = t$) spel G_b gespeeld wordt. We passen dezelfde strategie toe als hierboven en bekijken de verwachte uitbetaling van speler 2.
Wanneer speler 2 kiest voor actie A is zijn verwachte uitbetaling minimaal 0. Wanneer speler 2 kiest voor actie B is zijn verwachte uitbetaling hoogstens $-L \cdot q + M(1-q)$. We zagen eerder al dat $-Lq + M(1-q) < 0$, dus de maximale uitbetaling die speler 2 kan krijgen door het kiezen van actie B is kleiner dan de minimale uitbetaling die speler 2 ontvangt voor het kiezen van actie A. Hieruit volgt dat actie A optimaal is voor speler 2 wanneer zijn type $t_2 = t$ is.

We hebben hiermee laten zien dat actie A optimaal is voor alle $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Het is daarom, ongeacht het aantal verzonden berichten, altijd de beste keuze voor beide spelers om actie A te kiezen. Het e-mail-spel heeft dus een uniek Bayesiaans Nash-evenwicht waarin beide spelers altijd voor actie A kiezen.

□

Waar onze intuïtie eerder nog zei dat speler 1 het beste voor actie B kon kiezen wanneer hij 3814 berichten verstuurd heeft, blijkt dit dus toch niet de beste keuze te zijn. Hoeveel berichten de spelers ook verstuurd hebben aan het eind van de (eindige) communicatiestroom, actie A blijft voor beide spelers altijd de beste keuze voor het spelen van het spel. Het enige Nash-evenwicht in dit spel is dan ook dat beide spelers altijd voor actie A kiezen.

De situatie waarin $\epsilon \to 0$ komt in de topologie overeen met convergentie naar het spel met volledige informatie. Dit maakt dat hogere orde gedeelde kennis in de topologische zin willekeurig dicht bij gemeenschappelijke kennis ligt [11]. Toch zorgt het aannemen van gedeelde kennis van hoge maar eindige orde hier voor een sterk afwijkend Nash-evenwicht. We vinden dus een discontinuïteit in het gedrag van de spelers wanneer we het e-mail-spel vergelijken met de variant waarin het gemeenschappelijke kennis is welk spel (G_a dan wel G_b) gespeeld wordt.

Waar bij de variant met gemeenschappelijke kennis de Nash-evenwichten worden gegeven door "beide spelers kiezen actie A in spel G_a en actie B in spel G_b" en "beide spelers kiezen actie A in beide spellen", heeft het hierboven genoemde e-mail-spel alleen nog het Nash-evenwicht waarin alle type spelers voor actie A kiezen. Deze discontinuïteit wordt veroorzaakt door een zogenoemd infectie-argument. Het inductieve karakter van het bewijs van claim 2.1 geeft dit duidelijk weer. De denkbeelden van een speler van type t over de mogelijke types van de tegenspeler (en de bijbehorende acties die deze types kiezen) beïnvloeden de actie die deze speler kiest. Op deze manier 'infecteren' de type spelers met een strikt dominante strategie elkaar. Deze infectie begint bij de spelers die worden bekeken in de inductiebasis en werkt door naar alle andere type spelers in het spel. Dit zorgt ervoor dat het Nash-evenwicht van het spel sterk beïnvloed wordt.

2.2 Het risicospel

In deze sectie bekijken we een tweede voorbeeld [6] waarbij we een discontinuïteit vinden in het gedrag van de spelers, dat zich uit in het Nash-evenwicht van het spel. We beschouwen het onderstaande "risicospel" uit figuur 5 waarbij $v, c \in \mathbb{R}$. De actie a_S wordt in dit spel gezien als de veilige actie. Wanneer een speler voor actie a_S kiest, is zijn uitbetaling altijd gelijk aan nul. Kiezen voor actie a_R daarentegen brengt risico met zich mee. De uitbetaling die een speler ontvangt hangt in dit geval af van de keuze van de andere speler en van de waarden van de parameters v en c. De parameter c representeert de kosten die een speler moet betalen voor het kiezen van de risicovolle actie a_R.

		Speler 2	
		a_R	a_S
Speler 1	a_R	$v-c, v-c$	$-c, 0$
	a_S	$0, -c$	$0, 0$

Figuur 5: De normale vorm van het risicospel, waarbij $v, c \in \mathbb{R}$.

Allereerst zoeken we alle pure Nash-evenwichten van dit spel voor verschillende waarden van v en c. We zullen de verschillende gevallen bekijken en alle gevallen vervolgens onderverdelen in vijf verschillende groepen.

Geval 1: $v > c > 0$
Er geldt nu dat $v - c > 0$ en $-c < 0$. Dit resulteert in twee pure Nash-evenwichten: (a_R, a_R) en (a_S, a_S).

Geval 2: $c < v < 0$
Er geldt nu dat $v - c > 0$ en $-c > 0$. Er is dus één puur Nash-evenwicht: (a_R, a_R). De actie a_R is in dit geval voor beide spelers de strikt dominante strategie.

Geval 3: $c < 0 < v$
Er geldt nu dat $v - c > 0$ en $-c > 0$. Er is ook hier één puur Nash-evenwicht: (a_R, a_R). De actie a_R is in dit geval voor beide spelers de strikt dominante strategie.

Geval 4: $0 = c < v$
Er geldt nu dat $v - c = v$ en $v > 0$. Dit resulteert in twee pure Nash-evenwichten: (a_R, a_R) en (a_S, a_S).

Geval 5: $c < v = 0$
Er geldt nu dat $v - c = -c$ en $-c > 0$. Er is in dit geval maar één puur Nash-evenwicht: (a_R, a_R). Voor beide spelers is de actie a_R in dit geval de strikt dominante strategie.

Geval 6: $c > v > 0$
Er geldt nu dat $v - c < 0$ en $-c < 0$. We vinden daarom één puur Nash-evenwicht: (a_S, a_S). De actie a_S is in dit geval de strikt dominante strategie voor beide spelers.

Geval 7: $v < c < 0$
Er geldt nu dat $v - c < 0$ en $-c > 0$. Dit resulteert in twee pure Nash-evenwichten: (a_R, a_S) en (a_S, a_R).

Geval 8: $v < 0 < c$
Er geldt nu dat $v - c < 0$ en $-c < 0$. Er is in dit geval maar één puur Nash-evenwicht: (a_S, a_S). Voor beide spelers is de actie a_S in dit geval de strikt dominante strategie.

Geval 9: $0 = v < c$
Er geldt nu dat $v - c = -c$ en $-c < 0$. Dit resulteert in één puur Nash-evenwicht: (a_S, a_S). De actie a_S is in dit geval voor beide spelers de strikt dominante strategie.

Geval 10: $v < c = 0$
Er geldt nu dat $v - c = v$, $v < 0$ en $c = 0$. Dit resulteert in drie pure Nash-evenwichten: (a_R, a_S), (a_S, a_R) en (a_S, a_S).

Geval 11: $v = c > 0$
Er geldt nu dat $v - c = 0$ en $-c < 0$. Het spel bevat in dit geval twee pure Nash-evenwichten: (a_R, a_R) en (a_S, a_S).

Geval 12: $v = c < 0$
Er geldt nu dat $v - c = 0$ en $-c < 0$. We vinden nu drie pure Nash-evenwichten: (a_R, a_R), (a_R, a_S) en (a_S, a_R).

Geval 13: $v = c = 0$
Er geldt nu dat $v - c = 0$ en $-c = 0$. Alle combinaties van acties leveren beide spelers nu een uitbetaling van nul op. Het spel heeft in dit geval dus vier pure Nash-evenwichten: (a_R, a_R), (a_R, a_S), (a_S, a_R) en (a_S, a_S)).

We zullen deze 13 gevallen nu gaan onderverdelen in vijf verschillende categorieën.

I. De actie a_R is strikt dominant voor beide spelers

Geval 2	$c < v < 0$
Geval 3	$c < 0 < v$
Geval 5	$c < v = 0$

II. De actie a_S is strikt dominant voor beide spelers

Geval 6	$0 < v < c$
Geval 8	$v < 0 < c$
Geval 9	$0 = v < c$

III. Er zijn twee pure Nash-evenwichten op de diagonaal (a_R, a_R) en (a_S, a_S). Dit wordt ook wel een coördinatiespel genoemd.

Geval 1	$0 < c < v$
Geval 4	$0 = c < v$
Geval 11	$0 < c = v$

IV. Er zijn twee pure Nash-evenwichten (a_R, a_S) en (a_S, a_R). Dit wordt ook wel een anti-coördinatiespel genoemd. Daarnaast voegen we ook twee randgevallen toe aan deze categorie. In deze gevallen is er naast de genoemde twee Nash-evenwichten nog een derde puur Nash-evenwicht aangezig, (a_R, a_R) ofwel (a_S, a_S).

Geval 7	$v < c < 0$
(Rand)geval 10	$v < c = 0$
(Rand)geval 12	$v = c < 0$

V. Alle profielen zijn pure Nash-evenwichten.

Geval 13	$v = c = 0$

We zagen in het begin van deze sectie dat $v, c \in \mathbb{R}$. We zullen nog een aantal extra aannames doen en het spel verder uitbreiden. Neem vanaf nu aan dat de uitbetalingsparameter v gemeenschappelijke kennis is voor alle spelers, maar de kostenparameter c niet. Desalniettemin nemen we aan dat beide spelers wel een klein beetje informatie hebben over de waarde van c. We introduceren hiervoor een *voorwaardelijke informatiestructuur.*

Definitie 2.2. Een voorwaardelijke informatiestructuur voor een verzameling van spelers N is een tupel $(\Omega, (\Pi_i)_{i\in N}, (\mu_i^\omega)_{i\in N,\omega\in\Omega})$ waarbij $(\Omega, (\Pi_i)_{i\in N})$ een toestandsruimte is voor N en waarbij voor $i \in N$ en $\omega \in \Omega$, μ_i^ω een waarschijnlijkheidsverdeling is op Ω zodanig dat $\mu_i^\omega(\Pi_i(\omega)) = 1$.

In dit geval is $N = \{1, 2\}$ de verzameling van spelers en is de toestandsruimte gedefinieerd door

$$\Omega := \left\{ (c, t_1, t_2) \in \mathbb{Z}^3 : \begin{array}{cc} & [t_1 = c \ \&\ (t_2 = c + 1 \text{ of } t_2 = c - 1)] \\ \text{of} & [t_2 = c \ \&\ (t_1 = c + 1 \text{ of } t_1 = c - 1)] \end{array} \right\}$$

In de toestand (c, t_1, t_2) van het spel geldt dat de kostenparameter gelijk is aan c, dat speler 1 van type t_1 is en speler 2 van type t_2. Speler i is in de toestand (c, t_1, t_2) op de hoogte van de waarde van t_i.

Beschouw nu de functies $\gamma_i : \Omega \to \mathbb{Z}$ gegeven door $\gamma_i(c, t_1, t_2) = t_i$ en $\gamma : \Omega \to \mathbb{Z}$ gegeven door $\gamma(c, t_1, t_2) = c$. Het partitie-element van speler i in $\omega \in \Omega$ wordt nu gegeven door $\Pi_i(\omega) = \{\omega' \in \Omega : \gamma_i(\omega') = \gamma_i(\omega)\}$. Met andere woorden, $\Pi_i(\omega)$ is een verzameling van toestanden waarin de informatie t_i die speler i heeft steeds hetzelfde is.

Om de voorwaardelijke informatiestructuur voor dit spel compleet te maken, specificieren we μ_i^ω als de univorme verdeling op $\Pi_i(\omega)$ voor $i \in N$ en $\omega \in \Omega$, zodanig dat $\mu_i^\omega(\Pi_i(\omega)) = 1$ voor $i \in N$ en $\omega \in \Omega$. Naast het gebruik van deze voorwaardelijke informatiestructuur nemen we aan dat v een strikt positief even geheel getal is, dus dat $v \in \{2, 4, ...\}$.

Omdat dit een spel is met onvolledige informatie, modelleren we dit spel met verschillende types voor beide spelers. We definiëren de verzameling van spelers in dit spel met bovenstaande voorwaardelijke informatiestructuur daarom door $M = \{(i, t_i) : i \in N, t_i \in \mathbb{Z}\}$. Voor elke speler (i, t_i) in M is de actieruimte hetzelfde, namelijk $\{a_R, a_S\}$.

Ten slotte definiëren we de uitbetalingsfunctie van het spel. Stel dat speler $(i, t_i) \in M$ voor actie $a_{(i,t_i)}$ kiest en de andere spelers in de verzameling M kiezen voor de actie $a_{-(i,t_i)} := (a_{(j,t_j)})_{(j,t_j)\in M\setminus(i,t_i)}$. Dan wordt de uitbetaling van speler $(i, t_i) \in M$ gegeven door

$$U_i(a_{(i,t_i)}, a_{-(i,t_i)}) := \sum_{\substack{\omega\in\Omega: \\ \gamma_i(\omega)=t_i}} \sum_{(c,t_{-i})\in\mathbb{Z}^2} \mu_i^\omega(\{\omega' \in \Omega : \gamma(\omega') = c, \gamma_{-i}(\omega') = t_{-i}\})\ u_i^c(a_{(i,t_i)}, a_{-(i,t_i)})$$

waarbij u_i^c de uitbetalingsfunctie is in het originele spel met kostenparameter c.

We zullen nu in een aantal verschillende stappen toewerken naar het vinden van de Nash-evenwichten in dit spel. Allereerst komen we terug op de specificatie van het partitie-element $\Pi_i(\omega)$ van speler i in $\omega \in \Omega$. Deze naam suggereert de volgende claim.

Claim 2.3. $\forall i \in N$ vormt $\{\Pi_i(\omega) : \omega \in \Omega\}$ een partitie op Ω.

Bewijs van claim 2.3.
Neem zonder verlies van algemeenheid aan dat $i = 1$. We moeten nu laten zien dat $\{\Pi_1(\omega) : \omega \in \Omega\}$ een partitie op Ω vormt. In dit spel kan een toestand vier verschillende vormen aannemen, namelijk:

i. $(c, t_1, t_2) = (c, c, c - 1)$

ii. $(c, t_1, t_2) = (c, c, c + 1)$

iii. $(c, t_1, t_2) = (c, c - 1, c)$

iv. $(c, t_1, t_2) = (c, c + 1, c)$

Omdat $\gamma_1(c, t_1, t_2) := t_1$, zien we dat $\gamma_1(c, c, c-1) = \gamma_1(c, c, c+1) = c$, $\gamma_1(c, c-1, c) = c-1$ en $\gamma_1(c, c+1, c) = c+1$. Er geldt dus dat speler 1 hetzelfde type t_1 heeft in de gevallen i en ii.

Het is daarom voldoende om te laten zien dat de verzamelingen

$A = \{(c, c, c-1), (c, c, c+1) : c \in \mathbb{Z}\}$
$B = \{(c, c-1, c) : c \in \mathbb{Z}\}$
$C = \{(c, c+1, c) : c \in \mathbb{Z}\}$ een partitie op Ω vormen.

Merk allereerst op dat $\emptyset \notin A, B, C$. We moeten nog aantonen dat $A \cup B \cup C = \Omega$ en dat $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$ en $B \cap C = \emptyset$.

We kunnen Ω als volgt herschrijven:

$$\Omega := \left\{ (c, t_1, t_2) \in \mathbb{Z}^3 : \begin{array}{rl} & [t_1 = c \;\&\; (t_2 = c+1 \text{ of } t_2 = c-1)] \\ \text{of} & [t_2 = c \;\&\; (t_1 = c+1 \text{ of } t_1 = c-1)] \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ (c, t_1, t_2) \in \mathbb{Z}^3 : \begin{array}{rl} & [t_1 = c \;\&\; t_2 = c+1] \\ \text{of} & [t_1 = c \;\&\; t_2 = c-1] \\ \text{of} & [t_2 = c \;\&\; t_1 = c+1] \\ \text{of} & [t_2 = c \;\&\; t_1 = c-1] \end{array} \right\} =$$

$$= \{(c, c, c-1), (c, c, c+1), (c, c-1, c), (c, c+1, c) \in \mathbb{Z}^3\} =$$
$$= \{(c, c, c-1), (c, c, c+1), (c, c-1, c), (c, c+1, c) : c \in \mathbb{Z}\} =$$
$$= \{(c, c, c-1), (c, c, c+1) : c \in \mathbb{Z}\} \cup \{(c, c-1, c) : c \in \mathbb{Z}\} \cup \{(c, c+1, c) : c \in \mathbb{Z}\} =$$
$$= A \cup B \cup C$$

Dus er geldt inderdaad dat $\Omega = A \cup B \cup C$. Zij nu $\omega \in \Omega$ willekeurig. Dan is ω van de vorm $(c, c, c-1)$, $(c, c, c+1)$, $(c, c-1, c)$ of $(c, c+1, c)$. We zien direct dat al deze mogelijke gevallen van ω tot precies één van de verzamelingen A, B of C behoren. We kunnen daarom concluderen dat de doorsneden $A \cap B$, $A \cap C$ en $B \cap C$ leeg zijn. Hieruit volgt dat de claim waar is, dus dat $\forall i \in N$, $\{\Pi_i(\omega) : \omega \in \Omega\}$ een partitie op Ω vormt.

$\square$

We weten dus dat A, B en C een partitie op Ω vormen. Daarnaast geldt er dat $\mu_i^\omega(\Pi_i(\omega)) = 1$ voor $i \in N$ en $\omega \in \Omega$. Neem nu, zonder verlies van algemeenheid, aan dat $i = 1$. $\Pi_i(\omega)$ is een verzameling van toestanden waarvoor de informatie t_i die speler i heeft hetzelfde is. Voor speler 1 geldt dus dat $\{\Pi_1(\omega) : \omega \in \Omega\} = \{A, B, C\}$. Omdat μ_i^ω de univorme verdeling is op $\Pi_i(\omega)$, volgt hieruit dat

$$\mu_1^\omega(\{\omega \in \Omega : \gamma(w') = c^*\}) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{als } c^* = \gamma_1(\omega) - 1 \\ \frac{1}{2} & \text{als } c^* = \gamma_1(\omega) \\ \frac{1}{4} & \text{als } c^* = \gamma_1(\omega) + 1 \end{cases}$$

We lichten dit kort toe. Stel namelijk dat $c^* = \gamma_1(\omega) - 1$. Er geldt dat $\gamma_1 = c + 1$ in het geval $(c, c+1, c)$. Dit zijn de spellen in de verzamling C, dus er volgt nu dat $\mu_1^\omega(\{\omega \in \Omega : \gamma(\omega') = c^*\}) = \frac{1}{4}$. Op dezelfde manier komt $c^* = \gamma_1(\omega)$ overeen met de gevallen in verzameling A en $c^* = \gamma_1(\omega) + 1$ met de gevallen in verzameling B.

Voor alle $i \in N$ en $\omega \in \Omega$ geldt daarom dat

$$\mu_i^\omega(\{\omega \in \Omega : \gamma(w') = c^*\}) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{als } c^* = \gamma_i(\omega) - 1 \\ \frac{1}{2} & \text{als } c^* = \gamma_i(\omega) \\ \frac{1}{4} & \text{als } c^* = \gamma_i(\omega) + 1 \end{cases} \tag{1}$$

Met andere woorden, wanneer we een willekeurige toestand (c, t_1, t_2) nemen, dan is voor speler i de kans dat de kostenparameter c gelijk is aan de waarde van t_i gelijk aan $\frac{1}{2}$. De kans dat de kostenparameter c gelijk is aan $t_i - 1$ is $\frac{1}{4}$, evenals de kans dat de kostenparameter c gelijk is aan $t_i + 1$.

Op dezelfde manier vinden we ook dat voor alle $i \in N$ en $\omega \in \Omega$ geldt dat

$$\mu_i^\omega(\{\omega' \in \Omega : \gamma_{-i}(w') = c^*\}) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{als } c^* = \gamma_i(\omega) - 1 \\ \frac{1}{2} & \text{als } c^* = \gamma_i(\omega) + 1 \end{cases} \tag{2}$$

Met andere woorden, wanneer we een willekeurige toestand (c, t_1, t_2) nemen, dan is voor speler i de kans dat het type van de andere speler gelijk is aan $t_i - 1$ of $t_i + 1$ in beide gevallen gelijk aan $\frac{1}{2}$.

Claim 2.4. In dit spel is de strategie a_R strikt dominant voor de spelers $(i, t_i) \in M$ met $t_i < 0$ en is de strategie a_S is strikt dominant voor de spelers $(i, t_i) \in M$ met $t_i > v$.

Bewijs van claim 2.4.
Eerder zagen we al dat de actie a_R strikt dominant is voor de spelers in de gevallen van categorie I. Omdat v een strikt positief even geheel getal is, bevinden we ons nu in geval 3, waarin $c < 0 < v$. Uit (1) volgt dat de voorwaardelijke verwachting van c gegeven wordt door $\mathbb{E}(c \mid t_i) = t_i$. We kunnen daarom concluderen dat de actie a_R strikt dominant is voor alle spelers $(i, t_i) \in M$ zodanig dat $t_i < 0$.
Op dezelfde manier hebben we gezien dat de actie a_S strikt dominant is voor de spelers in categorie II. Omdat $v \in \{2, 4, 6, ...\}$, hebben we het in dit geval over de spelers in geval 6, waarin geldt dat $0 < v < c$. Omdat de voorwaardelijke verwachting van c gelijk is aan t_i, kunnen we concluderen dat de actie a_S strikt dominant is voor alle spelers $(i, t_i) \in M$ zodanig dat $t_i > v$.

□

Claim 2.5. In elk Nash-evenwicht van dit spel kiest iedere speler $(i, t_i) \in M$ voor de actie a_R zolang $t_i < \frac{v}{2}$ en voor de actie a_S zolang $t_i > \frac{v}{2}$.

Bewijs van claim 2.5.
We moeten dus laten zien dat voor alle spelers $(i, t_i) \in M$, a_R de beste reactie is zolang $t_i < \frac{v}{2}$ en a_S de beste reactie is zolang $t_i > \frac{v}{2}$. Allereerst laten we zien dat alle spelers $(i, t_i) \in M$ met $t_i < \frac{v}{2}$ voor actie a_R kiezen. We geven hiervoor een inductief bewijs. We weten dat $c \in \mathbb{Z}$ en we hebben in claim 2.4 gezien dat de actie a_R strikt dominant is voor de spelers $(i, t_i) \in M$ met $t_i < 0$, dus we beginnen het inductiebewijs bij de spelers $(i, 0) \in M$.

De inductiebasis:
We laten zien dat actie a_R de beste keuze is voor alle spelers $(i, 0)$ (met $i \in \{1, 2\}$). Neem zonder verlies van algemeenheid aan dat $i = 1$. Neem aan dat $t_1 = 0$ en stel dat speler 2 voor de actie a_R kiest met kans p en voor de actie a_S kiest met kans $1 - p$ (waarbij $0 \leq p \leq 1$). Wanneer speler $(i, t_i) = (1, 0)$ kiest voor actie a_S, levert dit een uitbetaling van 0 op. Wanneer speler $(1, 0)$ kiest voor actie a_R, levert dit een uitbetaling van $p(v - c) + (1 - p)(-c) = pv - c$ op. De voorwaardelijke verwachting van c is gelijk aan t_i, dus de actie a_R is het beste voor speler $(1, 0)$ zolang $pv - t_1 > 0$. Omdat $t_1 = 0$, moet er dus gelden dat $pv > 0$.
Speler $(i, t_i) = (1, 0)$ kent kans $\frac{1}{2}$ toe aan de gebeurtenis dat speler 2 van type $t_2 = -1$ is en kans $\frac{1}{2}$ aan de gebeurtenis dat speler 2 van type $t_2 = 1$ is. We weten uit claim 2.4 dat speler $(i, t_i) = (2, -1)$ voor actie a_R kiest. We weten niet wat speler $(i, t_i) = (2, 1)$ doet, maar we weten nu wel dat de kans dat speler 2 voor actie a_R kiest groter of gelijk is aan $\frac{1}{2}$. Met andere woorden, $p \geq \frac{1}{2}$. Gezien de voorwaarden van v volgt hieruit direct dat $pv > 0$. Actie a_R is daarom de beste keuze voor speler $(i = 1, t_i = 0)$. Alle spelers $(i, 0) \in M$ kiezen dus voor actie a_R.

De inductiehypothese:
Laat nu $0 < t_i < \frac{v}{2} - 1$ willekeurig zijn en neem aan dat alle spelers (i, t_i) voor actie a_R kiezen.

De inductiestap:
We laten zien dat nu volgt dat actie a_R de beste keuze is voor alle speler $(i, t_i + 1)$ (met $i \in \{1, 2\}$). Neem zonder verlies van algemeenheid aan dat $i = 1$. Beschouw nu speler $(1, t_i + 1)$. Neem aan dat speler 2 voor actie a_R kiest met kans p en voor a_S met kans $1 - p$ (waarbij $0 \leq p \leq 1$). Het is voor speler $(1, t_i + 1)$ nu de beste keuze om voor actie a_R te kiezen zolang geldt dat $pv - (t_i + 1) > 0$.
Speler $(1, t_i + 1)$ kent kans $\frac{1}{2}$ toe aan de gebeurtenis dat speler 2 van type t_i is en kans $\frac{1}{2}$ aan de gebeurtenis dat speler 2 van type $t_i + 2$ is. Uit de inductiehypothese volgt dat speler 2 met type t_i kiest voor actie a_R, dus we weten dat $p \geq \frac{1}{2}$.
Omdat $t_i < \frac{v}{2} - 1$, volgt dat $t_i + 1 < \frac{v}{2}$, dus er volgt dat $pv - (t_i + 1) > pv - \frac{v}{2} = v(p - \frac{1}{2})$. We zagen dat $p \geq \frac{1}{2}$, dus hieruit volgt dat $pv - (t_i + 1) > 0$. Actie a_R is daarom de beste keuze voor speler $(1, t_i + 1)$. Alle spelers $(i, t_i + 1) \in M$ kiezen dus voor actie a_R.

Hieruit volgt dat alle spelers $(i, t_i) \in M$ kiezen voor actie a_R zolang $t_i < \frac{v}{2}$.

Op dezelfde manier zullen we ook een inductief bewijs geven om te laten zien dat alle spelers $(i, t_i) \in M$ met $t_i > \frac{v}{2}$ voor actie a_S kiezen. We hebben in claim 2.4 gezien dat de actie a_S strikt dominant is voor de spelers $(i, t_i) \in M$ met $t_i > v$, dus we beginnen het inductiebewijs bij de spelers $(i, v) \in M$.

De inductiebasis:
We laten zien dat actie a_S de beste keuze is voor alle spelers $(i, v) \in M$. Neem zonder verlies van algemeenheid aan dat $i = 1$. Neem aan dat $t_1 = v$ en stel dat speler 2 voor de actie a_R kiest met kans p en voor de actie a_S kiest met kans $1 - p$ (waarbij $0 \leq p \leq 1$). Wanneer speler $(i, t_i) = (1, v)$ kiest voor actie a_S, levert dit een uitbetaling van 0 op. Wanneer speler $(1, v)$ kiest voor actie a_R, levert dit een uitbetaling van $p(v - c) + (1 - p)(-c) = pv - c$ op.

De voorwaardelijke verwachting van c is gelijk aan t_i, dus de actie a_S is het beste voor speler $(1, v)$ zolang $pv - t_1 < 0$. Omdat $t_1 = v$, moet er dus gelden dat $pv - v = v(p-1) < 0$. Speler $(i, t_i) = (1, v)$ kent kans $\frac{1}{2}$ toe aan de gebeurtenis dat speler 2 van type $t_2 = v + 1$ is en kans $\frac{1}{2}$ aan de gebeurtenis dat speler 2 van type $t_2 = v - 1$ is. We weten uit claim 2.4 dat speler $(i, t_i) = (2, v + 1)$ voor actie a_S kiest. We weten niet wat speler $(i, t_i) = (2, v - 1)$ doet, maar wel volgt nu dat $1 - p \geq \frac{1}{2}$, ofwel dat $p \leq \frac{1}{2}$. Omdat $v \in \{2, 4, 6, ...\}$ volgt hieruit direct dat $v(p-1) < 0$. Actie a_S is daarom de beste keuze voor speler $(i, t_i) = (1, v)$. Alle spelers $(i, v) \in M$ kiezen dus voor actie a_S.

De inductiehypothese:
Laat nu $\frac{v}{2} + 1 < t_i < v$ willekeurig zijn en neem aan alle spelers (i, t_i) voor actie a_S kiezen.

De inductiestap:
We laten zien dat nu volgt dat actie a_S de beste keuze is voor alle speler $(i, t_i - 1) \in M$. Neem zonder verlies van algemeenheid aan dat $i = 1$. Beschouw nu speler $(1, t_i - 1)$. Neem aan dat speler 2 voor actie a_R kiest met kans p en voor a_S met kans $1-p$ (waarbij $0 \leq p \leq 1$). Het is voor speler $(1, t_i - 1)$ nu de beste keuze om voor actie a_S te kiezen zolang geldt dat $pv - (t_i - 1) < 0$.
Speler $(1, t_i - 1)$ kent kans $\frac{1}{2}$ toe aan de gebeurtenis dat speler 2 van type $t_i - 2$ is en kans $\frac{1}{2}$ aan de gebeurtenis dat speler 2 van type t_i is. Uit de inductiehypothese volgt dat speler 2 met type t_i kiest voor actie a_S, dus we weten dat $p \leq \frac{1}{2}$.
Omdat $\frac{v}{2} + 1 < t_i$, volgt dat $\frac{v}{2} < t_i - 1$, dus er volgt dat $pv - (t_i - 1) < pv - \frac{v}{2} = v(p - \frac{1}{2})$. We zagen dat $p \geq \frac{1}{2}$, dus hieruit volgt dat $v(p - \frac{1}{2}) < 0$. Hieruit volgt dat $pv - (t_i - 1) < 0$. Actie a_S is daarom de beste keuze voor speler $(1, t_i - 1)$. Alle spelers $(i, t_i - 1) \in M$ kiezen dus voor actie a_S.

Hieruit volgt dat alle spelers $(i, t_i) \in M$ kiezen voor actie a_S zolang $t_i > \frac{v}{2}$.

□

We zien dus dat alle spelers voor de actie a_R kiezen zolang $t_i < \frac{v}{2}$ en voor de actie a_S kiezen zolang $t_i > \frac{v}{2}$. Enkel het geval voor de spelers $(i, \frac{v}{2}) \in M$ hebben we nog niet behandeld.

Claim 2.6. Voor de spelers $(i, \frac{v}{2}) \in M$ zijn alle pure en gemengde strategiën voor het spelen van dit spel Nash-evenwichten.

Bewijs van claim 2.6.
Neem zonder verlies van algemeenheid aan dat $i = 1$. We weten dat een speler $(i, t_i) \in M$ alleen een dominante strategie heeft voor het spelen van dit spel wanneer $t_i < 0$ of $t_i > v$. Dat is nu niet het geval, dus we gaan kijken wat de uitbetaling is voor speler $(1, \frac{v}{2})$ voor het spelen van de acties a_R en a_S. Zoals we al eerder zagen, is de uitbetaling voor speler $(1, \frac{v}{2})$ voor het spelen van actie a_S altijd gelijk aan nul.

Omdat speler $(1, \frac{v}{2})$ kans $\frac{1}{4}$ toekent aan de toestanden $(\frac{v}{2}, \frac{v}{2}, \frac{v}{2} - 1), (\frac{v}{2}, \frac{v}{2}, \frac{v}{2} + 1)$, $(\frac{v}{2} + 1, \frac{v}{2}, \frac{v}{2} + 1)$ en $(\frac{v}{2} - 1, \frac{v}{2}, \frac{v}{2} - 1)$ kunnen we de uitbetaling van speler $(1, \frac{v}{2})$ berekenen wanneer hij voor actie a_R kiest:

• In het geval van toestand $(\frac{v}{2}, \frac{v}{2}, \frac{v}{2} - 1)$ is speler 2 van type $t_2 = \frac{v}{2} - 1$, dus zal speler 2 voor actie a_R kiezen. De uitbetaling van speler 1 is in dit geval gelijk aan $v - \frac{v}{2} = \frac{v}{2}$.
• Voor toestand $(\frac{v}{2}, \frac{v}{2}, \frac{v}{2} + 1)$ geldt dat speler 2 van type $t_2 = \frac{v}{2} + 1$ is en dus voor actie a_S zal kiezen. De uitbetaling van speler 1 is in dit geval gelijk aan $-\frac{v}{2}$.
• In toestand $(\frac{v}{2} + 1, \frac{v}{2}, \frac{v}{2} + 1)$ kiest speler 2 voor actie a_S, dus is de uitbetaling van speler 1 gelijk aan $-\frac{v}{2} - 1$.
• Voor toestand $(\frac{v}{2} - 1, \frac{v}{2}, \frac{v}{2} - 1)$ geldt dat speler 2 voor actie a_R kiest, waardoor de uitbetaling van speler 1 gegeven wordt door $v - (\frac{v}{2} - 1) = \frac{v}{2} + 1$.

Hieruit volgt dat de uitbetaling van speler $(1, \frac{v}{2})$ bij het kiezen van actie a_R gegeven wordt door

$$U_1(a_{(1,\frac{v}{2})}, a_{-(1,\frac{v}{2})}) = \frac{1}{4}(\frac{v}{2} + (-\frac{v}{2}) + (-\frac{v}{2} - 1) + (\frac{v}{2} + 1)) = 0$$

We zien dus dat beide acties exact dezelfde uitbetaling opleveren. Hieruit volgt dat de acties a_R en a_S een even goede keuze zijn voor de spelers $(i, \frac{v}{2}) \in M$. Alle pure en gemengde strategiën voor het spelen van dit spel zijn daarom Nash-evenwichten.

$\square$

Ook in dit voorbeeld zien we een duidelijke discontinuïteit wat betreft de acties die de spelers kiezen. Dit werkt door in de Nash-evenwichten van het spel. Enkel in het specifieke geval van de spelers $(i, \frac{v}{2}) \in M$ bleken alle mogelijke strategieën Nash-evenwichten te zijn. Alle andere spelers hadden slechts één beste reactie. Dit wordt, net zoals in het e-mail-spel, veroorzaakt doordat de type spelers met een strikt dominante strategie andere spelers infecteren en zo ook de acties die deze spelers kiezen beïnvloeden.

3 Kennis en geloof

We hebben in hoofdstuk 2 kunnen zien hoe de discontinuïteiten in de Nash-evenwichten van het e-mail-spel en het risico-spel ontstaan. Het inductieve bewijs van de claims over de Nash-evenwichten geeft namelijk duidelijk weer hoe de type spelers elkaar beïnvloeden. Deze infectie zorgt ervoor dat het Nash-evenwicht van het spel wordt beïnvloed. Ook al vinden we op een wiskundig correcte manier Nash-evenwichten voor het spelen van de spellen uit hoofdstuk 2, toch blijven de discontinuïteiten onwenselijk. Het spelen van het spel volgens de gevonden Nash-evenwichten wijkt namelijk ver af van de menselijke intuïtie. Het is ondenkbaar dat spelers op een iteratieve manier zullen beredeneren wat hoge orde gedeelde kennis betekent voor de beste strategie voor het spelen van een spel.

Om deze discontinuïteiten te verminderen zullen we in dit hoofdstuk toewerken naar een nieuw concept ter vervanging van gemeenschappelijke kennis. We zullen in sectie 3.1 eerst beschrijven wat we verstaan onder *kennis*, waarna we de begrippen *n-de orde gedeelde kennis* en *gemeenschappelijke kennis* verder zullen specificeren. Sectie 3.1 is gebaseerd op [8] en [9]. In sectie 3.2 introduceren we het concept van *geloof*, *gedeeld geloof* en *gemeenschappelijk p-geloof*, dat we in sectie 3.3 zullen toepassen op het e-mail-spel uit sectie 2.1. Sectie 3.2 en 3.3 zijn gebaseerd op [9].

3.1 Kennis, gedeelde kennis en gemeenschappelijke kennis

We *weten* dat een gebeurtenis plaatsvindt wanneer deze voorkomt in alle toestanden van de wereld die we voor mogelijk houden. Wanneer je bijvoorbeeld weet dat je een groene trui draagt, betekent dit dat je alleen toestanden van de wereld voor mogelijk houdt waarin je een groene trui draagt. Het niet dragen van een groene trui is daarmee uitgesloten, waardoor je weet dat je een groene trui draagt. Dit principe kunnen we exact definiëren.

Voor het modeleren van kennis gebruiken we eenzelfde soort structuur als we zagen in sectie 2.2. We beginnen daarbij met een eindige niet-lege verzameling N van spelers. De tupel $(\Omega, (\Pi_i)_{i\in N})$ is een toestandsruimte voor N. Hierbij is Ω een niet-lege aftelbare verzameling van *toestanden van de wereld*. Daarnaast is Π_i voor alle spelers $i \in N$ een partitie van Ω. Deelverzamelingen $E \subseteq \Omega$ worden *gebeurtenissen* genoemd. Een gebeurtenis E vindt plaats in een toestand ω wanneer $\omega \in E$. De gebeurtenis dat E niet plaatsvindt wordt weergegeven door $\neg E = \Omega \backslash E$.

Met de partitie-elementen van de spelers wordt de kennis die de spelers hebben gemodelleerd. Voor het partitie-element $\Pi_i(\omega) \in \Pi_i$ geldt altijd dat $\omega \in \Pi_i(\omega)$. Wanneer de wereld zich in de toestand ω bevindt, houdt speler i de toestanden in $\Pi_i(\omega)$ voor mogelijk. Speler i weet dus dat de echte toestand van de wereld een van de toestanden in $\Pi_i(\omega)$ is. Het is daarom evident dat ω een element van $\Pi_i(\omega)$ moet zijn (dit zorgt er namelijk voor dat een speler i in een toestand ω deze toestand ook daadwerkelijk voor mogelijk houdt). Dit brengt ons tot de volgende definitie, waarbij we uitgaan van de zojuist genoemde structuur.

Definitie 3.1. *(Kennis)*
Laat N een eindige niet-lege deelverzameling van spelers zijn en $(\Omega, (\Pi_i)_{i\in N})$ een toestandsruimte voor N. Een speler $i \in N$ *weet* dat een gebeurtenis $E \subseteq \Omega$ plaatsvindt in een toestand $\omega \in \Omega$ wanneer $\Pi_i(\omega) \subseteq E$. Met andere woorden, in alle toestanden die speler i voor mogelijk houdt vindt de gebeurtenis E plaats. Dit definieert voor alle spelers $i \in N$ een *kennis operator* $K_i : 2^\Omega \to 2^\Omega$ zodanig dat $K_i(E) := \{\omega \in \Omega : \Pi_i(\omega) \subseteq E\}$[1]. Met andere woorden, $K_i(E)$ betekent dat speler i weet dat de gebeurtenis E plaatsvindt.

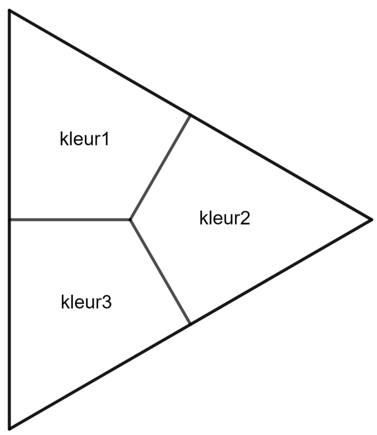
De kennisoperator K_i heeft een aantal belangrijke eigenschappen. Voor alle spelers $i \in N$ en gebeurtenissen $E, F \in \Omega$ geldt er dat:

(1) $K_i(E) \subseteq E$
Dit betekent dat wanneer speler i weet dat de gebeurtenis E plaatsvindt, E waar is. Een speler kan dus alleen gebeurtenissen kennen die waar zijn.
(2) $K_i(\Omega) = \Omega$.
In elke toestand van de wereld kent een speler i de toestandsruimte Ω.
(3) $E \subseteq F \implies K_i(E) \subseteq K_i(F)$
Wanneer voor elke toestand $\omega \in E$ ook geldt dat $\omega \in F$, geldt er ook dat een speler i weet dat de gebeurtenis F plaatsvindt zodra hij weet dat de gebeurtenis E plaatsvindt.
(4) $K_i(E) \subseteq K_i(K_i(E))$
Als een speler i weet dat de gebeurtenis E plaatsvindt, dan weet deze speler dat hij weet dat E plaatsvindt.
(5) $\neg K_i(E) \subseteq K_i(\neg K_i(E))$
Als een speler i niet weet dat een gebeurtenis E plaatsvindt, dan weet deze speler dat hij niet weet dat E plaatsvindt.

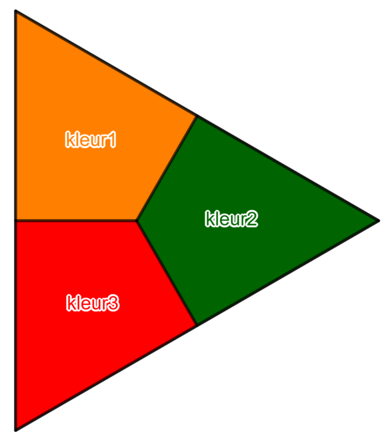
We zullen met een voorbeeld illustreren hoe de kennis-operator werkt.

Voorbeeld 3.2. We bekijken een situatie waarin de spelleider een vlag van een fictief land ontworpen heeft. De vlag bestaat uit 3 vlakken in de kleuren oranje, groen en rood. Een speler (die we speler 1 zullen noemen) probeert te raden wat de juiste vlag is met zo weinig mogelijk tips van de spelleider. Dit spel bevat dus zes mogelijke toestanden voor de kleuren van de vlag (het is niet toegestaan om de vlag te draaien).

[1]Met 2^Ω wordt de *machtsverzameling* van Ω aangeduid. Dit is de verzameling van alle mogelijke deelverzamelingen van Ω.



Afbeelding 1: De vlag uit voorbeeld 3.2.



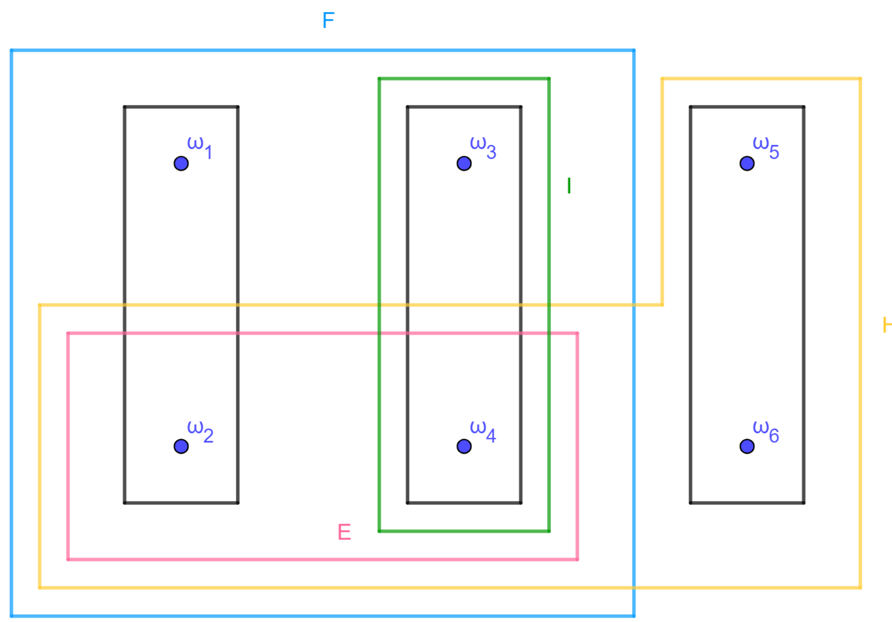
Afbeelding 2: De visuele weergave van ω_1.

Er geldt dat $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ zodanig dat:
ω_1: Kleur 1 = oranje, kleur 2 = groen, kleur 3 = rood
ω_2: Kleur 1 = oranje, kleur 2 = rood, kleur 3 = groen
ω_3: Kleur 1 = groen, kleur 2 = oranje, kleur 3 = rood
ω_4: Kleur 1 = groen, kleur 2 = rood, kleur 3 = oranje
ω_5: Kleur 1 = rood, kleur 2 = groen, kleur 3 = oranje
ω_6: Kleur 1 = rood, kleur 2 = oranje, kleur 3 = groen

In afbeelding 2 is een visuele weergave te zien van de toestand ω_1. Verder wordt de informatiepartitie van speler 1 gegeven dor $\Pi_1 = \{\{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4\}, \{\omega_5, \omega_6\}\}$. Wanneer de toestand ω_5 is, houdt speler 1 dus de toestanden ω_5 en ω_6 voor mogelijk. Hij weet echter niet welke van deze toestanden de juiste is. We bekijken nu een aantal mogelijke tips die de spelleider kan geven om te zien wat dit betekent voor de kennis die speler 1 heeft. Een visuele weergave van de informatie-partitie van speler 1 en de hieronder genoemde gebeurtenissen is te zien in afbeelding 3.

- Laat E de gebeurtenis zijn dat de tweede kleur van de vlag rood is. Dat wil zeggen, $E = \{\omega_2, \omega_4\}$. Er is geen enkele toestand $\omega \in \Omega$ zodat $\Pi_1(\omega) \subseteq E$, dus $K_1(E) = \emptyset$. Er is dus (gegeven de informatiepartitie van speler 1) geen verzameling van toestanden te noemen waarin speler 1 de gebeurtenis E kent.

- Laat F de gebeurtenis zijn dat de eerste kleur van de vlag oranje of groen is. Dat wil zeggen, $F = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$. In dit geval kent speler 1 de gebeurtenis F wanneer de toestand ω_1, ω_2, ω_3 of ω_4 is. Met andere woorden, $K_1(F) = F$.



Afbeelding 3: Een visuele weergave van de informatie-partitie van speler 1 en de gebeurtenissen E, F, H en I.

- Laat H de gebeurtenis zijn dat ofwel de eerste ofwel de tweede kleur van de vlag rood is. Dit komt overeen met $H = \{\omega_2, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$. Speler 1 kent daarom de gebeurtenis H wanneer de toestand ω_5 of ω_6 is. Er geldt dus dat $K_1(H) = \{\omega_5, \omega_6\}$.

- Laat I de gebeurtenis zijn dat de eerste kleur van de vlag groen is. Dat wil zeggen, $I = \{\omega_3, \omega_4\}$. Speler 1 kent de gebeurtenis I in de toestanden ω_3 en ω_4, oftewel $K_1(I) = I$.

Merk ten slotte op dat er geen enkele toestand is waarin de speler de toestand weet. Voor elke toestand $\omega \in \Omega$ geldt daarom dat $K_1(\{\omega\}) = \emptyset$.

Nu we de kennisoperator K_i geïntroduceerd hebben, kunnen we gaan definiëren wat we precies bedoelen met de bewering dat een gebeurtenis *gedeelde kennis* of *gemeenschappelijke kennis* is voor de spelers in N. De definitie van gemeenschappelijke kennis volgt op een soortgelijke manier als de definitie van gedeelde kennis.

Definitie 3.3. *(n-de orde gedeelde kennis)*
Laat $E \in \Omega$ een gebeurtenis zijn. De gebeurtenis dat E *gedeelde kennis* is onder de spelers in de verzameling N wordt gegeven door $K(E) := \bigcap_{i \in N} K_i(E)$. Er geldt dat $K^1(E) := K(E)$ en dat $K^n(E) := K(K^{n-1}(E))$ voor alle $n \in \mathbb{N}_{>1}$. De gebeurtenis $K^n(E)$ houdt in dat E *n-de orde gedeelde kennis* is onder de spelers in de verzameling N, waarbij $K^n(E) = \{\omega \in \Omega : \Pi_i(\omega) \subseteq K^{n-1}(E) \text{ voor alle } i \in N\}$. De gebeurtenis E is dus n-de orde gedeelde kennis in een toestand ω wanneer $\omega \in K^n(E)$.

Definitie 3.4. *(gemeenschappelijke kennis)*
Laat $E \in \Omega$ een gebeurtenis zijn. Dan wordt de gebeurtenis dat E *gemeenschappelijke kennis* is onder de spelers in de verzameling N gegeven door $C(E) := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K^n(E)$. Dit betekent dat een gebeurtenis E gemeenschappelijke kennis is in een toestand ω wanneer $\omega \in C(E)$.

Bovenstaande definitie komt overeen met de iteratieve uitleg van gemeenschappelijke kennis in sectie 2.1. Het idee van een oneindige beredenering van de vorm "Ik weet dat jij weet dat ik weet dat jij weet dat ik weet dat..." is intuïtief goed voor te stellen. Toch is het niet denkbaar dat mensen bepalen of in een toestand ω een gebeurtenis E gemeenschappelijke kennis is door het oneindige aantal beweringen van de vorm $\omega \in K(E), \omega \in K^1(E), \omega \in K^2(E), \ldots$ te controleren en zo te kunnen beslissen of daadwerkelijk geldt dat $\omega \in \bigcap_{n \in N} K^n(E)$. Zelfs voor gedeelde kennis van en hogere maar eindige orde is het ondenkbaar dat menselijke spelers deze stappen iteratief zullen doorlopen bij het spelen van het e-mail-spel (precies dit zorgt voor het tegenintuïtieve karakter van het gevonden Nash-evenwicht in dit spel).

De volgende equivalente definitie van gemeenschappelijke kennis is eenvoudiger toe te passen. Voor het bewijs van de equivalentie van definitie 3.4 en 3.5 verwijzen we naar [8].

Definitie 3.5. *(gemeenschappelijke kennis)*
Laat $F \subseteq \Omega$ een *vanzelfsprekende gebeurtenis* zijn. Dat wil zeggen dat alle spelers deze gebeurtenis weten wanneer hij plaatsvindt. Oftewel, voor alle $\omega \in F$ en voor alle spelers $i \in N$ geldt dat $\Pi_i(\omega) \subseteq F$. Een gebeurtenis E is gemeenschappelijke kennis in een toestand $\omega \in \Omega$ als er een *vanzelfsprekende* gebeurtenis F plaatsvindt zodat $\omega \in F$ en $F \subseteq E$.

We illustreren dit idee opnieuw met een voorbeeld.

Voorbeeld 3.6. We bekijken opnieuw het spel met de vlaggen uit voorbeeld 3.2, maar veranderen de situatie naar een spel met twee spelers. De informatie-partitie van de spelers wordt nu gegeven door $\Pi_1 = \{\{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4\}, \{\omega_5\}, \{\omega_6\}\}$ en
$\Pi_2 = \{\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \{\omega_4, \omega_5\}, \{\omega_6\}\}$

We zullen met behulp van de definities 3.4 en 3.5 beredeneren dat er geen toestand is waarin de gebeurtenis $F = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ gemeenschappelijke kennis is onder de spelers. Er geldt dat $K_1(F) = F$ en dat $K_2(F) = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Hieruit volgt dat $K(F) = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Op dezelfde manier vinden we dat $K_1(K(F)) = \{\omega_1, \omega_2\}$ en $K_2(K(F)) = K(F)$, dus
$K(K(F)) = \{\omega_1, \omega_2\}$. Hieruit volgt nu dat $K_1(K(K(F))) = K(K(F))$ en dat
$K_2(K(K(F))) = \emptyset$, dus we kunnen concluderen dat $K(K(K(F))) = \emptyset$. Aangezien
$C(F) := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K^n(F)$, geldt er dat $C(F) \subseteq K^n(F)$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, dus ook dat
$C(F) \subseteq K(K(K(F)))$. Dit betekent dat $C(F) = \emptyset$.

Ook met behulp van definitie 3.5 kunnen we tot deze conclusie komen. We zien namelijk dat er geen vanzelfsprekende gebeurtenis bevat is in F. Door de informatie-partities van de spelers is er namelijk geen deelverzameling W van F te vinden waarin voor alle $\omega \in W$ geldt dat $\Pi_i(\omega) \in W$ voor alle $i \in N$. Dit komt voort uit het feit dat de partitie-elementen $\Pi_1(\omega)$ en $\Pi_2(\omega)$ verschillend van elkaar zijn voor alle $\omega \in F$.

Op soortgelijke manier kunnen we ook beredeneren dat de gebeurtenis $H = \{\omega_2, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ gemeenschappelijke kennis is onder de spelers wanneer de toestand ω_6 is. Er geldt namelijk dat de gebeurtenis $\{\omega_6\}$ een vanzelfsprekende gebeurtenis is. Beide spelers kennen deze gebeurtenis wanneer de toestand ω_6 is. Omdat $\{\omega_6\} \subseteq H$, volgt hieruit direct dat de gebeurtenis H gemeenschappelijke kennis is onder de spelers in de toestand ω_6.

3.2 Geloof, gedeeld geloof en gemeenschappelijk geloof

Waar n-de orde gedeelde kennis in een situatie met 2 spelers en een gebeurtenis A een **eindige** beredenering van de vorm "Ik weet dat A plaatsvindt, ik weet dat jij weet dat A plaatsvindt, ik weet dat jij weet dat ik weet dat A plaatsvindt, ..." representeert, moet deze van oneindige lengte zijn in het geval van gemeenschappelijke kennis.

Wanneer het n-de orde gedeelde kennis is dat A plaatsvindt onder de spelers, wil dit niet direct zeggen dat de spelers helemaal geen informatie hebben over de $n+1$-de uitspraak. Ook al is er niet voldoende informatie om te zorgen voor $n+1$-de orde gedeelde kennis, de spelers kunnen nog wel een positieve kans toekennen aan deze $n+1$-de stap van de beredenering. Dit wordt vormgegeven met het concept van *geloof*.

Indien beide spelers altijd een positieve kans toekennen aan de gebeurtenis A, kunnen we een beredenering van oneindige lengte maken van de vorm "Ik geloof met kans p_1 dat A plaatsvindt, ik geloof met kans p_1 dat jij gelooft met kans p_1 dat A plaatvindt, ...". Op deze manier zijn de uitspraken in elke stap minder sterk dan wanneer we het hebben over kennis. Toch zijn er veel situaties waarin dit idee goed van pas komt. Het kan namelijk voorkomen dat er helemaal geen sprake is van gedeelde kennis over een gebeurtenis onder de spelers van een spel. In deze situatie kan een eindige of oneindige bewering die iets zegt over het geloof van de spelers over deze gebeurtenis van groot belang zijn. Het concept van geloof vervangt dan het concept van kennis, waardoor de aanwezige informatie die de spelers hebben over een bepaalde gebeurtenis zo goed mogelijk kan worden benut.

We houden in deze sectie vast aan dezelfde structuur zoals we die gebruikten bij het introduceren van het concept van kennis. Dit is terug te lezen in de tweede alinea van sectie 3.1.

Definitie 3.7. *(p-geloof)*
Laat N een eindige niet-lege deelverzameling van spelers zijn, $(\Omega, (\Pi_i)_{i\in N})$ een toestandsruimte voor N en μ een kansverdeling over Ω. Een speler $i \in N$ *gelooft met een kans van tenminste* p dat een gebeurtenis $E \subseteq \Omega$ plaatsvindt in een toestand $\omega \in \Omega$ wanneer $\mu(E \mid \Pi_i(\omega)) \geq p$. Hierbij geldt dat $0 \leq p \leq 1$. Deze gebeurtenis wordt ook wel afgekort als "*speler i p-gelooft E in ω*" en dit wordt genoteerd met $B_i^p(E)$. De gebeurtenis $B_i^p(E)$ is dus een verzameling van toestanden waarin speler i een kans van tenminste p toekent aan het plaatsvinden van E. Oftewel, $B_i^p(E) = \{\omega : \mu(E \mid \Pi_i(\omega) \geq p\}$.

Het concept van p-geloof is gedefinieerd voor elke $0 \leq p \leq 1$. Toch is p-geloof van grotere waarde wanneer geldt dat $p > \frac{1}{2}$. Ondanks de geldige benaming voor kleine waarden van p gaat de betekenis die we als lezer bijna automatisch hangen aan het woord 'geloof' verloren wanneer we p-geloof in dit geval gebruiken. Wanneer een speler een kans van $p = 0.1$ toekent aan het plaatsvinden van een bepaalde gebeurtenis, gaat het tegen de menselijke intuïtie in om hier het woord 'geloof' aan te koppelen. Daarnaast kan het voor waarden van $p \leq \frac{1}{2}$ zo zijn dat een speler twee tegenstrijdige evenementen p-gelooft (zoals we zullen zien in voorbeeld 3.13). Het is dus belangrijk om in het achterhoofd te houden dat p-geloof voor $p \leq \frac{1}{2}$ geen sterke overtuigingen van een speler weergeeft. Net zoals de kennisoperator heeft ook B_i^p een aantal interessante eigenschappen. We lichten enkele van deze eigenschappen kort toe.

Voor alle $0 \leq p \leq 1$, $i \in N$ en alle gebeurtenissen E en F geldt er dat:
(1) $B_i^p(E) \in \mathcal{F}_i$
Hierbij is $\mathcal{F}_i$ de verzameling van alle verenigingen van Π_i. Omdat Π_i een partitie van Ω is waarbij speler i een positieve kans toekent aan alle verzamelingen, is het vanzelfsprekend dat een p-geloof van speler i een element is van de verzameling $\mathcal{F}_i$.
(2) Laat $E \in \mathcal{F}_i$. Dan geldt er dat $B_i^p(E) = E$
Omdat $E \in \mathcal{F}_i$ kent speler i een positieve kans toe aan de toestanden waarin de gebeurtenis E plaatvindt. Hieruit volgt dat het p-geloof van speler i over gebeurtenis E precies dezelfde toestanden omvat als de gebeurtenis E zelf.
(3) $B_i^p(B_i^p(E)) = B_i^p(E)$
Er volgt uit (1) dat $B_i^p(E) \in \mathcal{F}_i$. Het toepassen van de gebeurtenis $B_i^p(E)$ op eigenschap (2) geeft direct het gewenste resultaat.
(4) Als $E \subseteq F$, dan $B_i^p(E) \subseteq B_i^p(F)$
Als de gebeurtenis E bevat is in de gebeurtenis F en speler i p-gelooft E in een toestand ω, dan kent speler i ook een kans van tenminste p toe aan de gebeurtenis F in deze toestand.
(5) $\mu(E \mid B_i^p(E)) \geq p$
Stel dat speler i p-gelooft dat E plaatsvindt in een toestand ω. Dan is de kans op de gebeurtenis E ook tenminste p in deze toestand ω.

In sectie 3.1 zagen we dat gemeenschappelijke kennis kan worden gedefinieerd met behulp van een zogenoemde *vanzelfsprekende gebeurtenis* (zie definitie 3.5). Ditzelfde idee kunnen we toepassen voor het definiëren van *gemeenschappelijk p-geloof*. We introduceren hiervoor eerst het idee van *vanzelfsprekend p-geloof*.

Definitie 3.8. De gebeurtenis E is *vanzelfsprekend p-geloof* als voor alle speler $i \in N$ geldt dat $E \subseteq B_i^p(E)$. Met andere woorden, wanneer de gebeurtenis E plaatsvindt, p-geloven alle spelers dit.

Dit principe geeft ons de mogelijkheid om te definiëren wat we verstaan onder *gemeenschappelijk p-geloof*. Deze definitie is vergelijkbaar met definitie 3.5 van gemeenschappelijke kennis.

Definitie 3.9. *(gemeenschappelijk p-geloof)*
Een gebeurtenis F is *gemeenschappelijk p-geloof* in een toestand ω als er een gebeurtenis E bestaat die *vanzelfsprekend p-geloof* is in ω (dus dat $\omega \in E$), zodanig dat voor alle spelers $i \in N$ geldt dat $E \subseteq B_i^p(F)$.

We bekijken een voorbeeld om dit te illustreren.

Voorbeeld 3.10. Een trein vol passagiers rijdt van Utrecht naar Deventer. Neem aan dat H de gebeurtenis "de trein rijdt niet verder dan Apeldoorn" is en dat I de gebeurtenis "de conducteur vertelt via de intercom dat de trein niet verder rijdt dan Apeldoorn" is. We kunnen er in dit voorbeeld vanuit gaan dat het intercomsysteem in de trein goed werkt.

Stel dat de toestand ω is en dat gebeurtenis I in deze toestand plaatsvindt. Als iedereen het bericht van de conducteur zeker hoort, is de gebeurtenis I een *vanzelfsprekende gebeurtenis*. Dit houdt in dat zodra I plaatsvindt, alle mensen in de trein dit weten. De gebeurtenis H is hiermee *gemeenschappelijke kennis* onder alle passagiers.

Het kan echter zo zijn dat niet alle reizigers het bericht kunnen horen (omdat ze liggen te slapen of een koptelefoon met harde muziek dragen bijvoorbeeld). Dit zorgt ervoor dat I geen vanzelfsprekende gebeurtenis is onder de reizigers. Het kan zelfs zo zijn dat de gebeurtenis I geen *vanzelfsprekend p-geloof* is voor een hoge waarde van p. Wanneer een passagier die een koptelefoon draagt en het bericht niet kan horen een kleine kans toekent aan de gebeurtenis H, zal I geen vanzelfsprekend p-geloof zijn voor een hoge waarde van p. Voor een gebeurtenis om vanzelfsprekend p-geloof te zijn moet deze namelijk bevat zijn in het p-geloof van alle passagiers. We nemen aan dat ϵ de kans is dat **niet** alle passagiers een omroep via de intercom horen.
Wanneer L de gebeurtenis "Alle passagiers kunnen berichten via de intercom van de trein horen én de conducteur vertelt via de intercom dat de trein niet verder rijdt dan Apeldoorn" is, dan is deze gebeurtenis L vanzelfsprekend $(1-\epsilon)$-geloof onder de reizigers in de trein. Hieruit volgt dat de gebeurtenis H gemeenschappelijk $(1-\epsilon)$-geloof onder de reizigers is in alle toestanden waarin L plaatsvindt.

Gemeenschappelijk p-geloof is, net zoals we zagen bij gemeenschappelijke kennis, ook op een iteratieve manier te beschouwen. De iteratieve definitie van gemeenschappelijk p-geloof volgt hieruit op eenzelfde manier als definitie 3.4 volgt uit definitie 3.3.

Definitie 3.11. *(n-de orde gedeeld p-geloof)*
Laat $E \in \Omega$ een gebeurtenis zijn. De gebeurtenis dat E *gedeeld p-geloof* is onder de spelers in de verzameling N wordt gegeven door $Bp(E) := \bigcap_{i \in N} B_i^p(E)$. Er geldt dat $Bp^1(E) := Bp(E)$ en dat $Bp^n(E) := Bp(Bp^{n-1}(E))$ voor alle $n \in \mathbb{N}_{>1}$. De gebeurtenis $Bp^n(E)$ houdt in dat E *n-de orde gedeeld p-geloof* is onder de spelers in de verzameling N.

Definitie 3.12. *(gemeenschappelijke p-geloof)*
Laat $E \in \Omega$ een gebeurtenis zijn. Dan wordt de gebeurtenis dat E *gemeenschappelijke p-geloof* is onder de spelers in de verzameling N gegeven door $X^p(E) := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Bp^n(E)$. Dit betekent dat een gebeurtenis E gemeenschappelijke p-geloof is in een toestand ω wanneer $\omega \in X^p(E)$. $X^p(E)$ is dus de gebeurtenis "E is gemeenschappelijk p-geloof".

Net zoals bij de twee definities van gemeenschappelijke kennis, zijn ook definitie 3.9 en 3.12 equivalent aan elkaar (zie [9]). Daarnaast geldt er voor elke gebeurtenis F en voor elke $0 \leq p \leq 1$ dat:

(i) de gebeurtenis $X^p(F)$ is *vanzelfsprekend p-geloof*
(ii) $X^p(F) \subseteq B_i^p(F)$ voor alle $i \in N$

We kunnen (i) als volgt lezen: Wanneer F gemeenschappelijk p-geloof is (dus $X^p(F)$ vindt plaats) dan p-geloven alle spelers dat F gemeenschappelijk p-geloof is.
De tweede bewering (ii) houdt niets anders in dan dat alle spelers p-geloven dat de gebeurtenis F plaatsvindt zodra deze gebeurtenis F gemeenschappelijk p-geloof is onder de spelers.

We bekijken een voorbeeld om te zien hoe we definitie 3.12 kunnen toepassen.

Voorbeeld 3.13. Twee jonge muzikanten doen mee aan een concours. Ze hebben ofwel heel veel uren gestudeerd en kunnen het gevraagde stuk foutloos spelen (V) ofwel te weinig gestudeerd en het stuk nog niet goed onder de knie (W). De kans dat een muzikant het stuk foutloos kan spelen is $1 - \epsilon$ (voor een kleine $\epsilon > 0$). De toestandsruimte Ω wordt daarom gegeven door $\Omega = \{VV, VW, WV, WW\}$, waarbij $\mu(VV) = (1-\epsilon)^2$,
$\mu(VW) = \mu(WV) = \epsilon(1-\epsilon)$ en $\mu(WW) = \epsilon^2$.
Beide muzikanten weten van zichzelf of ze goed genoeg gestudeerd hebben, dus ze zijn op de hoogte van hun eigen type. Hieruit volgt dat de informatiepartities van beide spelers worden gegeven door $\Pi_1 = \{\{VV, VW\}, \{WV, WW\}\}$ en $\Pi_1 = \{\{VV, WV\}, \{VW, WW\}\}$.

We noemen A de gebeurtenis dat beide muzikanten het stuk foutloos kunnen spelen, oftewel $A = \{VV\}$. Er geldt in geen enkele toestand $\omega \in \Omega$ dat een van de spelers weet dat A plaatsvindt, dus A kan geen gemeenschappelijke kennis zijn onder de spelers. Wel geldt er in de toestand VV voor beide spelers $i \in \{1, 2\}$ dat $B_i^{1-\epsilon}(A) = A$. Beide spelers weten in de toestand VV namelijk dat ze het stuk zelf foutloos kunnen spelen. Daarnaast kennen ze kans $1 - \epsilon$ toe aan de gebeurtenis dat de andere muzikant het stuk foutloos kan spelen. Er volgt nu dat $B_i^{1-\epsilon}(B_i^{1-\epsilon}(A)) = B_i^{1-\epsilon}(A) = A$. Op dezelfde manier zien we ook dat

$B_i^{1-\epsilon}(B_i^{1-\epsilon}(B_i^{1-\epsilon}(A))) = A$, $B_i^{1-\epsilon}(B_i^{1-\epsilon}(B_i^{1-\epsilon}(B_i^{1-\epsilon}(A)))) = A$, ... etc. We kunnen daarom concluderen dat $X^p(E) = A$, ofwel dat de gebeurtenis dat beide muzikanten het stuk foutloos kunnen spelen gemeenschappelijk $(1-\epsilon)$-geloof is onder beide muzikanten.

Merk op dat dit voorbeeld weinigzeggend is voor $\epsilon = \frac{1}{2}$. Er geldt dan dat $p = \frac{1}{2}$. Wanneer we nu de gebeurtenissen $E = \{VV, WW\}$ en $F = \{VW, WV\}$ bekijken, zien we dat het in elke toestand $\omega \in \Omega$ gemeenschappelijk p-geloof is dat beide muzikanten verschillende types hebben. Tegelijkertijd geldt er echter ook in elke toestand $\omega \in \Omega$ dat het gemeenschappelijk p-geloof is dat beide muzikanten hetzelfde type hebben. Dit resulteert in gemeenschappelijk p-geloof van twee tegenstrijdige gebeurtenissen.

3.3 Geloof en het e-mail-spel

In het e-mail-spel namen we aan dat de waarde van ϵ, de kans dat een bericht niet aankomt bij de beoogde ontvanger, heel erg klein is. Het is geen gekke gedachte om te denken dat deze waarde misschien verwaarloosbaar is. Los van het feit dat we het spel opnieuw moeten vormgeven voor de waarde $\epsilon = 0$ (de communicatiestroom stopt nooit, dus hoe komen de spelers te weten dat ze oneindig veel berichten verstuurd hebben?), is deze aanname alleen toegestaan wanneer het de uitkomst van het spel niet op een drastische manier verandert. We hebben in sectie 2.1 gezien dat dit wel degelijk het geval is, want we vinden voor een kleine $\epsilon > 0$ enkel een Nash-evenwicht waarin beide spelers altijd voor actie A kiezen. Voor het geval van gemeenschappelijke kennis (te beschouwen als de variant $\epsilon = 0$) is het Nash-evenwicht (A, A) wanneer het spel G_a gespeeld wordt en zijn er twee Nash-evenwichten (A, A) en (B, B) wanneer het spel G_b gespeeld wordt.

In deze sectie zullen we laten zien dat het principe van gemeenschappelijke kennis kan worden vervangen door het concept van gedeeld p-geloof om zo een “bijna optimale” strategie te vinden voor het spelen van het e-mail-spel waarbij de discontinuïteiten die we eerder vonden bijna helemaal verdwijnen. Voordat we het principe van gedeeld p-geloof kunnen toepassen op het e-mail-spel, introduceren we het laatste stuk benodigde informatie dat hiervoor nodig is, waarin wordt toegewerkt naar een belangrijke stelling. Deze informatie is gebaseerd op [9].

We nemen aan dat $\{\mathcal{G}_1, ..., \mathcal{G}_m\}$ een verzameling is van eindige statische spellen met volledige informatie. Op al deze spellen zijn dezelfde verzameling van spelers en dezelfde verzamelingen van beschikbare acties van toepassing. Voor elke $\ell \in \{1, ..., m\}$ wordt het spel $\mathcal{G}_\ell$ gegeven door $\mathcal{G}_\ell = (N, (A_i)_{i\in N}, (u_i^\ell)_{i\in N})$. Hierbij is N een eindige verzameling van spelers. Daarnaast is voor alle spelers $i \in N$, A_i een eindige verzameling van acties en $u_i^\ell : \Pi_j A_j \to \mathbb{R}$ een uitbetalingsfunctie.

Neem aan dat Ω een aftelbare toestandsruimte is en G de partitie $G = \{G^1, ..., G^m\}$ hiervan, bestaande uit m deelverzamelingen van Ω zodanig dat wanneer ω een element is van G^ℓ, het spel $\mathcal{G}_\ell$ wordt gespeeld. We noemen deze partitie G de *spelpartitie*. Laat μ een kansverdeling over Ω zijn. We nemen zonder verlies van algemeenheid aan dat elk partitie-element van G een positieve kans heeft onder μ. (Mocht een partitie-element kans nul hebben onder μ, dan kunnen we deze uit de toestandsruimte Ω verwijderen en het bijbehorende spel negeren om de gewenste voorwaarde te verkrijgen). We refereren met $\Pi(\omega)$ naar het partitie-element in G dat de toestand ω bevat. Wanneer het spel $\mathcal{G}_\ell$ gespeeld wordt in een toestand ω geldt er dus dat $\Pi(\omega) = G^\ell$.

Net zoals we eerder zagen wordt ook nu de informatiepartitie van een speler $i \in N$ gegeven door Π_i. Het partitie-element dat de toestand ω bevat wordt gegeven door $\Pi_i(\omega)$. We zagen in sectie 3.1 dat het kan voorkomen dat een speler niet weet in welke toestand ω het spel verkeert of geen informatie heeft over een bepaalde gebeurtenis. Omdat een partitie-element G^ℓ simpelweg een gebeurtenis is in de context van sectie 3.1, kan het dus voorkomen dat spelers niet weten welk spel er wordt gespeeld. Een speler i weet welk spel uit de verzameling $\{\mathcal{G}_1, ..., \mathcal{G}_m\}$ gespeeld wordt als ieder partitie-element van Π_i een deelverzameling is van een partitie-element van de spelpartitie G. Wanneer dit het geval is, noemen we de informatie-partitie van speler i ook wel een *verfijning* van de partitie G. Wanneer de informatie-partitie van een speler geen verfijning is van G, is een speler in tenminste één van de toestanden onzeker over welk spel gespeeld wordt.

We noemen een spel $\mathcal{G}_\ell$ gemeenschappelijke kennis in een toestand ω wanneer de gebeurtenis G^ℓ gemeenschappelijke kennis is in ω (zoals we zagen in sectie 3.1). Op dezelfde manier noemen we een spel $\mathcal{G}_\ell$ gemeenschappelijk p-geloof in ω wanneer de gebeurtenis G^ℓ gemeenschappelijk p-geloof is in ω.

De strategie van een speler is een functie die beschrijft welke actie hij kiest, uitgaande van de informatie die hij heeft. Voor speler $i \in N$ is een strategie dus een functie $\sigma_i : \Pi_i \to \Delta(A_i)$ waarbij $\Delta(A_i)$ de verzameling van kansverdelingen op de actieruimte A_i is. Dit is in feite een algemenere versie van definitie 1.6. Waar definitie 1.6 zich tot pure strategieën beperkt, nemen we nu ook gemengde strategieën op in de mogelijkheden.

De verwachte uitbetaling van speler i wanneer hij volgens de strategie σ_i speelt en de andere spelers volgens de strategieën $\sigma_{-i} = (\sigma_1, ..., \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, ..., \sigma_m)$ spelen, wordt nu gegeven door

$$U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) := \sum_{\omega \in \Omega} \mu(\omega) \sum_{\ell=1}^{m} u_i(\sigma_i(\Pi_i(\omega)), \sigma_j(\Pi_j(\omega))_{j \in N \setminus \{i\}})$$

Definitie 3.14. *(ex ante η-evenwicht)*
Ga uit van de hierboven genoemde aannames en notaties. Voor $\eta > 0$ is een profiel van strategieën $\sigma = (\sigma_j)_{j \in N}$ een *ex ante η-evenwicht* wanneer voor elke speler $i \in N$ en voor alle $s_i \in \Delta(A_i)$ geldt dat $U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq U_i(s_i, \sigma_{-i}) - \eta$. Met andere woorden, alle spelers $i \in N$ kunnen hun uitbetaling met maximaal η verhogen door af te wijken van hun strategie σ_i en het spel volgens een andere strategie $s_i \in \Delta(A_i)$ te spelen.

Beschouw de verzameling van eindige spellen met volledige informatie $\{\mathcal{G}_1, ..., \mathcal{G}_m\}$. Al deze spellen hebben tenminste één Nash-evenwicht (zie [5]). Voor alle $\ell \in \{1, .., m\}$ noteren we de verzameling van Nash-evenwichten van het spel $\mathcal{G}_\ell$ met NE_ℓ.

Stelling 3.15. *(Stelling van Monderer en Samet)*
Laat $\eta > 0$ en $Z > 0$. Dan bestaat er een $p^0 < 1$ en een $\delta^0 > 0$ zodat voor alle $p > p^0$ en voor alle $\delta < \delta^0$ het volgende geldt:
Voor elke eindige verzameling $\{\mathcal{G}_1, ..., \mathcal{G}_m\}$ van spellen (waarbij voor alle $\ell \in \{1, ..., m\}$ een spel $\mathcal{G}_\ell$ gegeven wordt door $\mathcal{G}_\ell = (N, (A_i)_{i\in N}, (u_i^\ell)_{i\in N}))$ zodat

$$-Z \leq u_i^\ell(s) \leq Z \text{ voor alle } \ell \in \{1, ..., m\},\ i \in N \text{ en } s \in \prod_j \Delta(A_j),$$

voor elke collectie $(s_\ell^*)_{\ell\in\{1,...,m\}} \in \prod_\ell NE_\ell$ van Nash-evenwichten in de spellen met volledige informatie, voor elke aftelbare toestandsruimte Ω, spel-partitie G van Ω en kansverdeling μ op Ω zodat μ een positieve kans toekent aan elk partitie-element in G, voor elke collectie $(\Pi_i)_{i\in N}$ van informatie-partities van de spelers in N,

als μ een kans groter dan $1-\delta$ toekent aan de gebeurtenis dat G^ℓ gemeenschappelijk p-geloof is onder de spelers, dan is er een profiel van strategieën σ met de volgende eigenschappen:

1. μ kent een kans groter dan $1 - \eta$ toe aan de gebeurtenis dat de spelers spelen volgens s_ℓ^* in G^ℓ voor $\ell \in \{1, ..., m\}$;
2. Het absolute verschil tussen $U_i(\sigma)$ en $\sum_{\ell=1}^{m} \mu(G^\ell)u_i^\ell(s_\ell^*)$ is kleiner dan η voor alle $i \in N$;
3. σ is een ex ante η-evenwicht.

We zullen bovenstaande stelling toepassen op het e-mail-spel. We gebruiken de hierboven genoemde notatie en we nemen aan dat de kans op spel $\mathcal{G}_1$ dan wel spel $\mathcal{G}_2$ gelijk is aan $\frac{1}{2}$. Daarnaast gebruiken we de uitbetalingen die hieronder weergegeven zijn in figuur 6. Hoewel dit spel andere voorwaarden en uitbetalingen heeft dan die we zagen in sectie 2.1, is dit een in de literatuur veelvoorkomende variant van het e-mail-spel en zijn de resultaten die we gevonden hebben in sectie 2.1 voor deze variant precies hetzelfde (zie [7]).

Spel $\mathcal{G}_1$ (met kans $\frac{1}{2}$)

Speler 1 \ Speler 2	A	B
A	$(1,1)$	$(1,0)$
B	$(0,0)$	$(0,0)$

Spel $\mathcal{G}_2$ (met kans $\frac{1}{2}$)

Speler 1 \ Speler 2	A	B
A	$(0,0)$	$(0,-2)$
B	$(-2,0)$	$(1,1)$

Figuur 6: De normale vorm van een variant van het e-mail-spel.

Het spel werkt op dezelfde manier als we zagen in sectie 2.1. Speler 1 krijgt te weten welk spel gespeeld wordt en de computer van speler 1 stuurt een bericht naar de computer van speler 2 wanneer het spel $\mathcal{G}_2$ is. De computers sturen een bevestigingsbericht op elk inkomend bericht, waarbij de kans dat een bericht niet aankomt bij de beoogde ontvanger gegeven wordt door (een hele kleine) $\epsilon > 0$. Wanneer de communicatiestroom gestopt is, krijgen de spelers alleen te weten hoeveel berichten hun eigen computer verstuurd heeft.

Voor het bestuderen van dit voorbeeld noemen we $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ het totaal aantal verstuurde berichten. We kijken daarom nu naar de toestandsruimte $\Omega = \{0, 1, 2, ...\}$ waarbij elke $k \in \Omega$ het totaal aantal berichten van de communicatiestroom representeert. De kansverdeling μ over Ω wordt nu gegeven door $\mu(0) = \frac{1}{2}$ en $\mu(k) = \frac{1}{2}\epsilon(1-\epsilon)^{k-1}$ voor alle $k \geq 1$.

De spelpartitie is in dit geval $G = \{G^1, G^2\}$, waarbij $G^1 = \{0\}$ en $G^2 = \{1, 2, 3, ...\}$. De toestand $k = 0$ is namelijk de enige toestand waarin spel $\mathcal{G}_1$ gespeeld wordt. In alle andere toestanden is het spel $\mathcal{G}_2$. De informatiepartitie van de spelers wordt nu gegeven door $\Pi_1 = \{\{0\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, ...\}$ en $\Pi_2 = \{\{0, 1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}, ...\}$. We zullen in dit voorbeeld refereren naar het Nash-evenwicht (A,A) van het spel $\mathcal{G}_1$ als s_1^* en naar het Nash-evenwicht (B,B) van het spel $\mathcal{G}_2$ als s_2^*.

We kunnen onze bevindingen uit sectie 2.1 gebruiken om iets te zeggen over het geloof van de spelers omtrent het spel dat wordt gespeeld. Gegeven de informatiepartitie van speler 1 zien we direct dat speler 1 de gebeurtenis G^1 1-gelooft in de toestand $k = 0$. Voor het geloof van speler 2 in de toestand $k = 0$ kunnen we kijken naar het denkbeeld van speler 2 wanneer zijn computer 0 berichten verstuurd heeft. We zagen dat $p_2(t_2 = 0 \mid t_1 = 0) = \frac{(1-p)}{(1-p)+p\epsilon}$ (in de context van sectie 2.1). Wanneer we dit toepassen op de huidige variant, volgt op dezelfde manier (met behulp van stelling 1.5) dat speler 2 een kans van $\frac{1/2}{1/2+1/2\epsilon} = \frac{1}{1+\epsilon}$ toekent aan de gebeurtenis G^1 in de toestand $k = 0$. Hieruit volgt dat de spelers een *gedeeld* $\frac{1}{1+\epsilon}$*-geloof* hebben over de gebeurtenis G^1 in de toestand $k = 0$. Met andere woorden, er geldt dat $B_1^{p_\epsilon}(G^1) \cap B_2^{p_\epsilon}(G^1) = \{0\}$ waarbij $p_\epsilon = \frac{1}{1+\epsilon}$.

Speler 1 weet altijd welk spel er gespeeld wordt, dus hij heeft in alle toestanden $k = 1, 2, 3, ...$ een 1-geloof dat de gebeurtenis G^2 plaatsvindt. Omdat $\Pi_2 = \{\{0, 1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}, ...\}$, geldt voor $k \geq 2$ dat speler 2 de gebeurtenis $\{2, 3, 4, 5, ...\}$ 1-gelooft. Omdat deze gebeurtenis bevat is in de gebeurtenis G^2 (oftewel, $\{2, 3, 4, 5, ...\} \subseteq G^2$), volgt nu (uit eigenschap 4 op pagina 32) dat speler 2 de gebeurtenis G^2 1-gelooft voor $k \geq 2$. Er geldt dus dat speler 1 en speler 2 in de toestanden $k = 2, 3, 4, ...$ 1-geloven dat de gebeurtenis G^2 plaatsvindt. Omdat $p_\epsilon < 1$, volgt hieruit ook dat beide spelers p_ϵ-geloven dat de gebeurtenis G^2 plaatsvindt in de toestanden $k \geq 2$. Met andere woorden, er geldt dat $B_1^{p_\epsilon}(G^2) \cap B_2^{p_\epsilon}(G^2) = \{2, 3, 4, 5, ...\}$.

Laat $\delta^0 > 0$ en $p^0 < 1$ gegeven zijn. We nemen nu aan dat $1 - \delta = p_\epsilon = \frac{1}{1+\epsilon}$. Er geldt dan dat $\delta = \frac{\epsilon}{1+\epsilon}$. Omdat $p_\epsilon \to 1$ als $\epsilon \to 0$, kunnen we een voldoende kleine ϵ vinden zodat $\delta < \delta^0$ (voor een gegeven δ^0 uit stelling 3.15). Omdat $p_\epsilon \to 1$ als $\epsilon \to 0$ kunnen we ϵ dus ook voldoende klein kiezen zodat $p_\epsilon > p^0$ (voor een gegeven p^0 uit stelling 3.15).

Ook zien we dat $\mu(\{1\}) = \frac{1}{2}\epsilon$. Omdat $\mu(\{1\}) \to 0$ als $\epsilon \to 0$, kunnen we een voldoende kleine ϵ vinden zodat μ een kans van groter dan $1 - \delta = \frac{1}{1+\epsilon}$ toekent aan de gebeurtenis dat G^1 dan wel G^2 gedeeld p_ϵ-geloof is onder de spelers van het spel.

Stelling 3.15 vertelt ons nu dat er voor elke $\eta > 0$ en voldoende kleine ϵ (die aan bovenstaande voorwaarden voldoet) een ex-ante η-evenwicht bestaat, zodanig dat μ een kans groter dan $1 - \eta$ toekent aan de situatie dat de spelers spelen volgens het Nash-evenwicht s_ℓ^* in G^ℓ (met $\ell \in \{1, 2\}$). In dit ex ante η-evenwicht kiezen de spelers dus *met een kans groter dan* $1 - \eta$ voor actie A als $k = 0$ en voor actie B als $k \geq 1$.

Wanneer we nog concreter kijken naar de variant van het e-mail-spel uit figuur 6, zien we dat er voor $\epsilon < \eta$ een ex ante η-evenwicht σ is zodanig dat beide spelers volgens het Nash-evenwicht s_ℓ^* spelen zodra ze p_ϵ-geloven dat het spel $\mathcal{G}_\ell$ is. Met andere woorden, als beide spelers voor actie A kiezen als $k = 0$, speler 1 voor actie B kiest als $k = 1$, speler 2 voor actie A kiest als $k = 1$ en beide spelers voor actie B kiezen als $k \geq 2$. Speler 2 heeft in de informatiepartitie $\{0, 1\}$ immers een p_ϵ-geloof dat het spel $\mathcal{G}_1$ is. We kunnen dit ex ante η-evenwicht σ dus weergeven als $\sigma_1(0) = \sigma_2(0) = s_1^*$, $\sigma_1(1) = s_2^*$, $\sigma_2(1) = s_1^*$ en $\sigma_1(k) = \sigma_2(k) = s_2^*$ voor alle $k \geq 2$.

Merk op dat de kans dat beide spelers spelen volgens het Nash-evenwicht s_ℓ^* in G^ℓ inderdaad groter is dan $1 - \eta$ (zoals stelling 3.15 ons vertelt). De enige toestand waarin dit niet gebeurt is namelijk de toestand $k = 1$. Omdat $\mu(1) = \frac{1}{2}\epsilon$ en $\epsilon < \eta$, geldt er inderdaad dat

$$\mu\{k \in \Omega : \sigma_i(k) = s_\ell^* \text{ als } k \in G^\ell, \forall \ell \in \{1, 2\} \text{ en } \forall i = 1, 2\} > 1 - \eta$$

De aanname $\epsilon < \eta$ zorgt er ook voor dat wordt voldaan aan de voorwaarde dat beide spelers maximaal η kunnen verdienen door af te wijken van deze strategie. We laten zien dat dit klopt. In de gevallen $k = 0$ en $k \geq 2$ spelen de spelers volgens een Nash-evenwicht. Dit houdt in dat beide spelers geen winst kunnen maken door van strategie te veranderen in deze gevallen. Neem nu aan dat $k = 1$. In dit geval is $\mathcal{G}_2$ het spel dat wordt gespeeld, dus we kijken naar de tweede uitbetalingsmatrix van figuur 6.

Speler 1 kiest in het gevonden ex ante η-evenwicht nu voor actie A en speler 2 voor actie B. De kans dat het spel $\mathcal{G}_2$ is, is gelijk aan $\frac{1}{2}$. De kans dat het eerste bericht niet aankomt bij speler 2 is gelijk aan ϵ. Doordat de spelers de hierboven genoemde keuzes maken, worden de uitbetalingen voor beide spelers in dit geval gegeven door $(-2, 0)$.

Speler 1 kan nu een uitbetaling van 0 behalen door te wisselen van actie en dus voor actie A te kiezen. De uitbetalingen voor beide spelers worden dan $(0, 0)$. De verwachte winst van deze wissel voor speler 1 is hiermee $\frac{1}{2} \cdot \epsilon \cdot 2 = \epsilon$. Omdat er geldt dat $\epsilon < \eta$, voldoet dit aan de voorwaarde dat speler 1 maximaal η mag verdienen door zijn strategie te veranderen.
Speler 2 kan een uitbetaling van 1 behalen door te wisselen van actie en dus voor actie B te kiezen. De uitbetalingen voor beide spelers worden dan $(1, 1)$. De verwachte winst van deze wissel voor speler 2 is hiermee $\frac{1}{2} \cdot \epsilon \cdot 1 = \frac{1}{2}\epsilon$, wat opnieuw kleiner is dan η.

Wanneer we dit resultaat terugvertalen naar de context van het e-mail-spel en bedenken dat beide spelers alleen informatie hebben over het aantal berichten dat hun eigen computer verstuurd heeft, zien we dus dat beide spelers voor actie A kiezen zolang hun computer 0 berichten verstuurd heeft. Beide spelers kiezen voor actie B zodra hun computer minstens 1 bericht verstuurd heeft.

Het gedeelde p_ϵ-geloof van de spelers over het spel dat wordt gespeeld speelt een cruciale rol voor de toepasbaarheid van stelling 3.15. Hoewel de gevonden strategie geen Nash-evenwicht is, komt het spelen van het spel op de manier die we net beschreven hebben wel sterk in de buurt daarvan. Enkel in het geval dat het spel $\mathcal{G}_2$ is en het eerste bericht van speler 1 niet aankomt bij de computer van speler 2, spelen de spelers niet volgens een Nash-evenwicht. De kans op deze toestand van het e-mail-spel is gelukkig erg klein door de kleine waarde van ϵ. De discontinuïteit die we eerder vonden in sectie 2.1 is hiermee bijna volledig weggevaagd. Het spelen van het e-mail-spel volgens het hierboven beschreven ex ante η-evenwicht sluit veel beter aan bij de menselijke intuïtie en is dan ook een mooi resultaat te noemen.

Referenties

[1] Hongbo Chen. „Game Theory and Nash Equilibrium in Rock Paper Scissors". In: *Highlights in Business, Economics and Management* 1 (nov 2022), p. 234–237. DOI: 10.54097/hbem.v1i.2568.

[2] Robert Gibbons. *Game Theory for Applied Economists*. Princeton University Press, 1992. Hfdstk. 1, p. 2–14. ISBN: 9780691003955. URL: http://www.jstor.org/stable/j.ctvcmxrzd.

[3] Robert Gibbons. *Game Theory for Applied Economists*. Princeton University Press, 1992. Hfdstk. 3, p. 146–152. ISBN: 9780691003955. URL: http://www.jstor.org/stable/j.ctvcmxrzd.

[4] John C. Harsanyi. „Games with Incomplete Information Played by "Bayesian"Players, I-III Part I. The Basic Model". In: *Management Science* 14.3 (1967), p. 159–182. URL: https://doi.org/10.1287/mnsc.14.3.159.

[5] Albert Xin Jiang en Kevin Leyton-Brown. „A Tutorial on the Proof of the Existence of Nash Equilibria". In: 2007. URL: https://api.semanticscholar.org/CorpusID:18197132.

[6] Willemien Kets. *Inleveropgave speltheorie*. WISB272, 2023. Utrecht University.

[7] Willemien Kets. *Lecture notes L5; Epistemic Game Theory*. WISB272, 2023. Utrecht University. Hfdstk. 5, p. 12–16.

[8] Willemien Kets. *Lecture notes L5; Epistemic Game Theory*. WISB272, 2023. Utrecht University. Hfdstk. 2 and 3, p. 2–9.

[9] Dov Monderer en Dov Samet. „Approximating Common Knowledge With Common Beliefs". In: *Games and Economic Behavior* 1 (jun 1989), p. 170–190. DOI: 10.1016/0899-8256(89)90017-1.

[10] Martin J. Osborne en Ariel Rubinstein. *A Course in Game Theory*. Versie 2012-4-9. The MIT Press, dec 1994. Hfdstk. 5.5, p. 81–85. ISBN: 0-262-65040-1. URL: https://arielrubinstein.tau.ac.il/books/GT.pdf.

[11] Ariel Rubinstein. „The Electronic Mail Game: Strategic Behavior Under "Almost Common Knowledge"". In: *The American Economic Review* 79.3 (1989), p. 385–391. ISSN: 00028282. URL: http://www.jstor.org/stable/1806851 (bezocht op 15-05-2024).