Het functiebegrip van Euler

Discontinue functies in de Analyse

Ans Huizing

Bachelorscriptie
Begeleid door Dr. Steven Wepster

Departement Wiskunde
Universiteit Utrecht
21 juni 2024

Voorwoord

Toen ik op zoek ging naar een geschikt onderwerp voor mijn bachelorscriptie, kwam ik er al snel op uit dat ik over de geschiedenis van de analyse wilde schrijven. Omdat dit onderwerp erg breed is, moest ik een gerichtere keuze maken. In 'A History of Mathematics: An Introduction' van Viktor Katz las ik dat door de jaren heen de termen 'functie' en 'continuïteit' veranderd zijn. Dit was dus al bekend, maar ik vroeg me af of zo'n verandering in definitie bij één wiskundige ook al op te merken is. Omdat van Euler veel gepubliceerd is en hij actief was in de jaren dat het functiebegrip gangbaar werd, leek hij een goede keuze.

Al snel kwam ik een artikel van Giovanni Ferraro tegen: 'Functions, Functional Relations, and the Laws of Continuity in Euler'. In dit artikel staat al veel over Eulers functiebegrip. De verwijzingen die Ferraro maakt naar de van werken van Euler, heb ik nagezocht. Zo begon ik ook steeds meer van Euler zelf te lezen, in vertaling weliswaar, en kwam ik steeds meer over zijn functiebegrip te weten. Op een gegeven moment verwijst Ferraro naar een artikel van Euler dat nog onvertaald op 'The Euler Archive' staat. Ik wilde eigenlijk wel graag weten wat erin stond, want Ferraro suggereert in zijn artikel dat Euler hier anders tegen een functie aankijkt dan in andere werken. Zodoende kwam het plan om 'De usu functionum discontinuarum in analysi' te vertalen. Aanvankelijk zou ik alleen de (op het oog) relevante stukken vertalen, maar uiteindelijk heb ik het hele artikel uit het Latijn in het Nederlands vertaald.

Deze vertaling is de basis geworden van deze scriptie, waarin ik het artikel vergelijk met andere werken van Euler. In deze versie is de vertaling nog niet helemaal gecorrigeerd: er kunnen nog fouten in zitten. Deze worden er zo snel mogelijk uitgehaald, waarna ik mijn vertaling op 'The Euler Archive' zal laten plaatsen.

Inhoudsopgave

1 Introductie

In deze scriptie onderzoeken we de ontwikkeling van het functiebegrip van Leonhard Euler (1707-1783). Dat doen we aan de hand van het artikel 'De usu functionum discontinuarum in analysi', dat tot voor kort nog niet (openbaar) vertaald was. De zelfgemaakte vertaling (uit het Latijn in het Nederlands) van dit artikel is in de appendix bijgevoegd.

De term 'functie' werd in het einde van de zeventiende eeuw voor het eerst gebruikt door Johann Bernoulli (1667-1748) en Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). In een briefwisseling bespraken de wiskundigen vraagstukken omtrent het isoperimetrisch probleem. Bij al deze vraagstukken, waarvan de eerste door de Grieken in de tweede eeuw voor Christus werden geformuleerd, wordt gezocht naar het grootst mogelijke gebied dat door een bepaalde kromme is ingesloten.

Bernoulli en Leibniz beschreven de wiskunde meetkundig, zonder gebruik te maken van een assenstelsel. In plaats daarvan werden verhoudingen tussen lijnstukken gebruikt om tot een oplossing te komen. De term 'grootheid' was wel gebruikelijk. Dit begrip had veelal een meetkundige betekenis: er werd bijvoorbeeld de lengte van een lijnstuk of kromme mee aangeduid, of een afstand. Een 'ordinaat' (of 'applicata' in het Latijn) was een beschrijving van parallelle lijnen met hun uiteinden langs een gemeenschappelijke lijn.[1] Op het moment dat Bernoulli een vraagstuk formuleert, schrijft hij een keer over "welke functie dan ook van de ordinaten".[2] Op deze manier laat hij de lengte van een lijnstuk afhangen van een functie. Het is hier nog niet duidelijk wat Bernoulli precies bedoelt. Een 'functio' betekent in het Latijn en Frans zowel vervulling als uitvoering [20, p. 426]. In de context van meetkunde kan een functie dus een grootheid (de lengte) zijn, maar ook kan hij de regel (het functievoorschrift) zijn om deze grootheid te vinden. In 1718 definieert Bernoulli de functie in een verslag over het isoperimetrisch quotiënt. Hij stelt:

"Men noemt hier een functie een variabele grootte, een grootheid samengesteld op welke manier dan ook van deze variabele grootte en constanten." [3]

Een variabele grootte heeft hier nog steeds een meetkundige betekenis. Hoewel Bernoulli met deze definitie de eerstgenoemde betekenis van een functie als grootheid lijkt te bedoelen, gebruikte hij beide betekenissen door elkaar [18, p. 229-233].

Waar Bernoulli en Leibniz de term 'functie' sporadisch gebruiken, schrijft Euler een leerboek waarin de functie centraal staat. In dit boek, 'Introductio in Analysin infinitorum', introduceert Euler zijn functiebegrip.

In dit onderzoek proberen we te achterhalen of en hoe Eulers functiebegrip veranderde door de introductie van discontinue functies. Dit doen we door de twee leerboeken voor wiskundestudenten, 'Introductio in Analysin infinitorum' ([8]) en 'Institutiones calculi differentialis' ([6]), te vergelijken met 'De usu functionum discontinuarum in analysi' ([5]). In 'De usu functionum discontinuarum in analysi' introduceert en definieert Euler de discontinue functie. Voor Euler was het duidelijk dat discontinue functies bij de analyse hoorden, maar daar waren veel wiskundigen in zijn tijd het niet mee eens. We zullen de leerboeken doorlopen, waarbij we ons vooral concentreren op definities en verwoordingen die ook in [5] terugkomen. Hierna

[1] In een assenstelsel werd met een 'ordinaat' het y-coördinaat benoemd.

[2] In het Frans: les functions quelconques de ces appliquées. Bron: J. Bernoulli, Opera omnia I, 1742, blz. 424.

[3] In het Frans: On appelle ici Function d'une grandeur variable, une quantité composée de quelque maniére que se soit de cette grandeur variable & de constantes. Bron: J. Bernoulli, Opera omnia, II, 1742, p. 241.

kunnen we ‘De usu functionum discontinuarum in analysi’ vergelijken met de leerboeken. We kijken daarbij welke eigenschappen die de functies in [8] en [6] hebben, behouden blijven.

In hoofdstuk 2 onderzoeken we hoe Euler in ‘Introductio in Analysin infinitorum’ het functiebegrip definieert. Ook staan we stil bij definities of uiteenzettingen die belangrijk zijn voor Eulers functiebegrip, dat anders is dan we vandaag de dag gewend zijn. In hetzelfde hoofdstuk bekijken we ook het leerboek over differentialen, ‘Institutiones calculi differentialis’, waarin Euler een functie ogenschijnlijk anders beschouwt. Ook kijken we kort hoe hij differentialen bepaalt.

We zullen onder andere in hoofdstuk 2 zien dat Euler in het tweede deel van [8] uitlegt wat een discontinue kromme is; dit zal het opstapje zijn voor het begrip van een discontinue functie. Ook leggen we in dit hoofdstuk uit waarom Euler zich genoodzaakt voelde om zo’n discontinue kromme te beschouwen.

In hoofdstuk 3 zullen we de inhoud van het artikel doorlopen en stilstaan bij opvallende passages. Zo zullen we hier zien hoe Eulers functiebegrip verandert. Gaandeweg komen we tot een aantal vragen, die we met behulp van de inhoud van de vertaling proberen te beantwoorden. In hoofdstuk 4 proberen we duidelijk te krijgen of Euler een discontinue kromme als integreerbaar ziet. Het lukt niet om in dit kader op alle vragen een antwoord te vinden, dus er zijn een aantal vragen onbeantwoord gebleven. Zo komen we niet te weten of en hoe Euler discontinue functies differentieert, en of discontinue functies verbonden zijn.

Omdat in de achttiende eeuw het werken met functies in de analyse nieuw was, is het interessant om te zien hoe Euler, de wiskundige die de functie centraal zette in de analyse, het functiebegrip aanpast. Dit geeft ook inzicht in hoe algemeen ‘nieuwe’ wiskunde ontstaat. Als wiskundestudenten zijn we gewend dat wiskunde ‘kant en klaar’ gepresenteerd wordt in een boek of dictaat. Bij het bedenken, uitvinden of ontwikkelen van nieuwe wiskunde, moet echter soms het oude systeem aangepast worden. Dit zien we bij Euler gebeuren.

Giovanni Ferraro heeft in [10] een erg compleet artikel over het functiebegrip van Euler geschreven. Ook heeft hij het artikel bestudeerd dat we vertaald hebben. Toch kunnen we aan de hand van ‘De usu functionum discontinuarum in analysi’ nog opmerkingen maken die niet in Ferraro’s artikel staan. De vragen waar we op stuiten, noemt Ferraro bijvoorbeeld niet. Ook het boek [18] van Jacqueline Stedall schetst een beeld van Eulers functiebegrip. Op haar zijn we in paragraaf 2.3 kritisch, omdat ze mogelijk een nuance mist.

De lezer wordt geacht enige voorkennis te hebben van de geschiedenis van de wiskunde, met name die in de periode 1600-1800. Hierdoor kunnen Eulers teksten goed in de context geplaatst worden. Voorkennis kan bijvoorbeeld worden opgedaan met de bachelorcursus ‘Geschiedenis van de wiskunde’.

De afbeeldingen in deze scriptie zijn zelf gemaakt, tenzij anders is aangegeven.

2 Functies in Eulers werken

In dit hoofdstuk zullen we ontdekken hoe Euler in zijn leerboeken over analyse ([8]) en differentialen ([6]), een functie bepaalt. We zullen stilstaan bij deze definities en bepaalde eigenschappen van functies toelichten. Deze eigenschappen zijn belangrijk voor Eulers functiebegrip en komen terug in het artikel dat we vertaald hebben.

2.1 Een functie in Introductio I

In 1748 verscheen het eerste deel van 'Introductio in Analysin infinitorum' (de introductie van de analyse van het oneindige), dat in 1745 geschreven is [13, p. 113]. Vanaf nu zullen we dit werk de Introductio noemen.

De Introductio, [8], bestaat uit twee delen. Beide teksten zijn bedoeld voor wiskundestudenten en zetten methoden uit de analyse en analytische meetkunde uiteen die nodig zijn voor het rekenen met infinitesimalen. Door in het eerste deel de functie centraal te stellen, wordt het duidelijk dat voor Euler een functie het belangrijkste onderwerp binnen de analyse is. Hiermee heeft hij een andere kijk op de analyse dan bijvoorbeeld Newton en Leibniz, die voornamelijk krommen beschouwden in hun werken over infinitesimalen [16, p. 617-618].

In de inleiding noemt Euler dat veel studenten moeite hebben met het begrijpen van de "hogere kunst" [8, inleiding, Vol. I]. Hier verwijst hij naar het begrip van de 'hogere analyse': voor Euler en zijn tijdgenoten bevat de hogere analyse onderwerpen waar differentialen in voorkomen. De onderwerpen die in de Introductio behandeld worden, horen allemaal bij de lagere analyse [13, p. 113]. Er komen in dit werk geen integralen en differentialen voor. Euler zag dus een noodzaak om de basis van de analyse goed op papier te zetten.

Zoals Euler in de inleiding al schrijft, bestaat het eerste deel uit enkel analyse. Het tweede boek bevat toepassingen binnen de meetkunde die direct volgen uit het eerste deel [8, inleiding, Vol. I].

We zullen een aantal definities uit het eerste boek bekijken. Hierbij proberen we in onze verwoording dichtbij de oorspronkelijke tekst van Euler te blijven, om er zo achter te komen wat hij precies bedoelt.

Voordat Euler een functie definieert, begint hij met het begrip van verschillende soorten grootheden.

"Een constante grootheid is bekend en behoudt voortdurend dezelfde waarde" [8, §1, Vol. I],

zo luidt de eerste definitie. Daarna volgt:

"Een variabele grootheid is een onbepaalde of universele grootheid, die alle volledig bepaalde waarden in zich omvat" [8, §2, Vol. I].

Euler beschouwde een variabele grootheid als een abstracte grootheid, die bepaald of gekenmerkt wordt door de operaties die uitgevoerd kunnen worden met andere variabelen en constanten. Het is goed om op te merken dat een constante grootheid niet een specifiek voorbeeld van een variabele grootheid is, omdat een variabele grootheid andere (meer algemene) eigenschappen heeft. Als je een variabele grootheid bij een constante grootheid optelt, blijft de uitkomst namelijk een variabele grootheid.

De meetkundige betekenis die voorheen aan grootheden werden toegekend, is in Eulers definities niet terug te vinden. Dit wordt bevestigd als hij verderop schrijft dat variabelen ontelbaar veel groottes (of waardes) kunnen aannemen en dat deze ook imaginair of nul kunnen zijn

[10, p. 109-109][8, §3, Vol. I]. Euler lijkt hier aan 'imaginair' dezelfde betekenis te geven als wij dit doen. Onder sectie vijf geeft hij immers $5\sqrt{-1}$ als voorbeeld van een imaginair getal. Verder is het aannemelijk dat Euler met deze naamgeving niet de negatieve getallen bedoelt, aangezien hij deze in sectie negen expliciet benoemt met 'negativae'.

2.1.1 Eulers eerste definitie van een functie

In de vierde sectie wordt het functiebegrip geïntroduceerd.

"Een functie van een variabele grootheid is een bepaalde analytische uitdrukking die is samengesteld uit die variabele grootheid en uit constante getallen of grootheden" [8, §4, Vol. I].

Deze definitie lijkt erg op die van Bernoulli. Dit is in het geheel niet toevallig, aangezien Euler veel van Johann Bernoulli geleerd heeft. In tegenstelling tot zijn leermeester, lijkt Euler hier de nadruk te leggen op de functie als regel. Met een 'analytische uitdrukking' bedoelt Euler een algebraïsche vergelijking. Uit het vervolg van de Introductio blijkt dat de analytische uitdrukkingen niet eindig hoeven te zijn: Euler gaat er vanuit dat elke functie geschreven kan worden als machtsreeks. Daar geeft hij verder geen bewijs voor [16, p. 618-619]. Opvallend is dat er nergens beschreven staat wat Euler met een analytische uitdrukking bedoelt. Hieruit kunnen we concluderen dat dit een bekende term was, en dat Euler veronderstelde dat de lezers hiermee bekend waren. Door een functie als eindige of oneindige analytische uitdrukking te beschouwen volgt dat deze, in onze termen, ook continu en differentieerbaar is [10, p. 110-111].

Omdat Euler een functie definieert áls analytische uitdrukking, maakt hij in zijn verwoording niet altijd een verschil tussen een functie en de vergelijking die de functie weergeeft. Zo noemt hij $a + 3z$ in sectie vier een functie van z. Dit is dus niet de vergelijking die de functie weergeeft, maar de functie zelf. Voor Euler zijn bepaalde vergelijkingen dus functies.

We kunnen met behulp van de vijfde sectie nog meer over Eulers begrip van functies te weten komen. Hier stelt Euler dat een functie van een variabele grootheid zelf ook weer een variabele grootheid is. Hij bekijkt hier een ander aspect van het functiebegrip: waar in de vierde definitie een functie als regel werd gezien, wordt hier de nadruk gelegd op een functie als grootheid. Ook Euler gebruikte, net zoals Bernoulli, beide betekenissen of interpretaties [18, p. 233].

Onder de definitie legt Euler uit dat een functie ontelbaar veel waarden kan aannemen en dat een functie geen waarden uitsluit. Dit komt omdat alle getallen, inclusief de imaginaire, kunnen worden gesubstitueerd[4] als de variabele in de functie. Hieruit kunnen we afleiden dat voor Euler alle functies het complexe vlak als domein en bereik hebben. Euler merkt wel op dat er 'schijnbare' functies bestaan, die niet van waarde veranderen als de variabele verandert. Indien dit het geval is, is deze waarde geen variabele grootheid (maar een constante) en hebben we niet te maken met een functie [8, §5, Vol. I]. Deze stelling is opvallend, want dit betekent dat wat wij constante functies noemen, geen functies zijn in Eulers definitie. De vergelijking $Z = z^0$ is bijvoorbeeld voor Euler geen functie van z. Dit heeft te maken met Eulers begrip van een variabele grootheid: deze moet universeel zijn en geen specifieke waarde aannemen [10, pp. 118-119].

Deze observatie sluit goed aan bij wat opvalt in de formuleringen van Euler. Wanneer hij een waarde in een functie wil invoeren, beschrijft hij dat de variabele grootheid wordt vervangen of gesubstitueerd door deze waarde.[5] Door deze formulering wordt het nogmaals duidelijk dat

[4] Euler gebruikt het Latijnse woord 'substituo', dat 'vervangen' of 'achter iets plaatsen' betekent.

[5] Zie bijvoorbeeld definitie vijf en tien in het Latijn.

een functie de relatie tussen variabele grootheden vastlegt en dat een constante grootheid niet een specifiek voorbeeld is van een variabele grootheid. Een specifieke functiewaarde verkrijgt Euler door de variabele grootheid door een constante te vervangen. Hij gebruikt dus niet de verwoording 'een waarde invullen', wat wij gewend zijn te horen.

2.1.2 Soorten functies

Omdat een functie als een grootheid gezien werd, kon Euler de begrippen 'algebraïsch', 'transcendent',[6] 'rationaal' en 'irrationaal', die tot dan toe alleen op getallen van toepassing waren, ook voor functies definiëren [18, p. 233]. Dit doet hij in de zevende en achtste sectie. Een algebraïsche functie bestaat uit alleen algebraïsche operaties, terwijl transcendente functies ook andere operaties kunnen bevatten. De logaritmische en exponentiële functie zijn hier voorbeelden van. Omdat deze gerepresenteerd kunnen worden door reeksen, voldoen ze wel aan Eulers definitie van een functie. In het eerste boek van Introductio worden in hoofdstukken acht en negen de goniometrische functies geïntroduceerd. Deze functies zijn ook transcendent [16, p. 316-317].

Euler benoemt dat algebraïsche functies niet altijd expliciet gegeven worden. Als voorbeeld geeft hij $Z^5 = azzZ^3 - bz^4Z^2 + cz^3Z - 1$. In alle voorbeelden in dit boek is Z een functie van z. Hij schrijft erbij dat "hoewel deze vergelijking hier misschien niet wordt opgelost, Z toch gelijk staat aan een uitdrukking die is samengesteld uit de variabele z en constanten, en daarom is Z een functie van z" [8, §7, Vol. I]. Hieruit kunnen we concluderen dat een afhankelijkheid tussen Z en z voldoende is om Z een functie van z te noemen.

De algebraïsche functies kunnen worden onderverdeeld in rationale en irrationale functies. In een rationale functie komen alleen de operaties optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen en machtsverheffen met gehele exponenten voor, terwijl in irrationale functies een wortelteken voorkomt. Door dit wortelteken wordt de functie als variabele grootheid irrationaal. Vervolgens deelt Euler de irrationale functies op in expliciete en impliciete. In expliciete functies staat het wortelteken. Bij impliciete functies is het volgens Euler niet mogelijk een expliciete waarde voor Z te verkrijgen door middel van worteltrekken. Hij geeft het voorbeeld $Z^7 = azZ^2 - bz^5$ en noemt dat Z een impliciete functie is van z [8, §8, Vol. I]. Deze laatste uitspraak is opvallend, omdat Euler niet kan weten welke veeltermen wel of niet een expliciete Z toelaten; deze theorie is later pas ontwikkeld. Dit roept de vraag op wat Euler met het 'niet mogelijk zijn' (non licet) bedoelt. Lukt het hém niet om een expliciet functievoorschrift te vinden, of gaat hij er vanuit dat inderdaad niemand dit kan? Ons vermoeden is nu dat hij van het laatste uitgaat, hoewel hij dit niet kan bewijzen.

Uit de bovenstaande definities wordt duidelijk dat voor Euler een impliciete functie voldoet aan zijn definitie van een functie. Dit komt overeen met sectie tien, waar hij een verschil maakt tussen uniforme (dit noemen wij enkelvoudige) functies en veelvormige (meerwaardige) functies.[7] De laatstgenoemde functie geeft verschillende waarden voor elke waarde in de plaats van de variabele. Hij merkt op dat rationale functies altijd uniform zijn en irrationale functies meerwaardig. Een wortelteken is immers dubbelzinnig en omvat twee waarden [8, 10, Vol. I]. We kunnen hieruit afleiden dat Euler de wortelfunctie $Z = \sqrt{z}$ als $Z^2 = z$ beschouwt. Op deze manier is bijvoorbeeld $\sqrt{4} = \pm 2$.

Tot slot belichten we een formulering die vaker terugkomt in de Introductio en die we ook tegen zullen komen in de vertaling van [5]. Als Euler schrijft over 'de natuur van een functie',

[6] Euler beschouwde een getal als transcendent op dezelfde manier als wij dit doen: een getal is transcendent, als het niet een nulpunt is van een polynoom met gehele coëfficiënten [4, p. 297].

[7] In het Latijn zijn deze termen achtereenvolgens 'uniform' en 'multiform'.

lijkt hij de vorm van het functievoorschrift te bedoelen. Dit leiden we af uit sectie negen, waar Euler voor het eerst deze verwoording gebruikt. Hij schrijft dat de constante grootheden, "of deze nu positief of negatief, geheel of fractioneel, rationaal of irrationaal of zelfs transcendent zijn, de aard van de functies niet veranderen" [8, §9, Vol. I]. Het is dus aannemelijk dat bijvoorbeeld de functies $Z = az^3$ voor alle waarden van a ongelijk aan nul dezelfde natuur hebben. Hierbij gaan we er vanuit dat de uitspraak van Euler in het algemeen geldt, en niet alleen in dit specifieke geval (van een fractionele functie). In sectie negentien gebruikt Euler dezelfde woorden. Er staat dat "de natuur van een veelvormige functie wordt uitgedrukt door de vergelijking tussen Z en z" [8, §19, Vol. I]. Hier kunnen we niet uit afleiden of Euler met 'de natuur van een functie' het specifieke functievoorschrift bedoelt, of de vorm waarin dit staat. We gaan er vanaf nu vanuit dat Euler met deze woorden de vorm van de vergelijking wil aanduiden.

We hebben gezien dat Eulers functiebegrip in het eerste deel van de Introductio verschilt van ons huidige begrip van een functie. Euler beschouwt een functie als een analytische uitdrukking, waardoor alle functies, in onze termen, glad zijn. Ook hebben we gezien dat niet alle vergelijkingen een functie definiëren: omdat een functie van een variabele grootheid zelf weer variabel is, voldoen constante functies niet aan Eulers definitie van een functie. Verder hebben we gezien hoe Euler de functies opdeelt in verschillende soorten. Opvallend is dat een algebraïsche functie niet expliciet gegeven hoeft te worden. De irrationale functies deelt Euler op in impliciet en expliciet, waaruit opnieuw volgt dat impliciete functies voor Euler voldoen aan het functiebegrip. Een functie hoeft dus niet eenduidig te zijn.

Voordat we het tweede deel van de Introductio bekijken, zullen we zien dat Euler in [6], zijn leerboek over de differentiaalrekening, een functie ook anders aanduidt.

2.2 Een andere definitie?

In 'Institutiones calculi differentialis', [6], gebruikt Euler andere woorden om aan te geven wat een functie is. Dit boek, dat is geschreven in 1748 en uitgegeven in 1755, kan gezien worden als het eerste leerboek voor de differentiaalrekening. Het sluit aan op de Introductio en af en toe wordt er naar dit eerder uitgegeven boek verwezen. In het voorwoord schrijft hij:

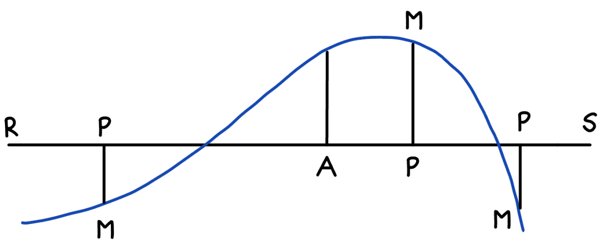
"De grootheden die op deze manier van andere afhankelijk zijn, namelijk de grootheden die een verandering ondergaan wanneer andere veranderen, worden functies van deze grootheden genoemd. Deze definitie is vrij breed van toepassing en omvat alle manieren waarop de ene grootheid door andere kan worden bepaald. Als x dus de variabele grootheid aanduidt, dan worden alle andere grootheden die op enigerlei wijze van x afhankelijk zijn of erdoor bepaald worden, de functies ervan genoemd" [6, p. vi].

Hier definieert Euler een functie als een relatie tussen twee grootheden. Dit is abstracter, of in ieder geval minder concreet, dan het eerder genoemde functiebegrip. Er is immers geen analytische expressie meer nodig. Giovanni Ferraro suggereert in [10] dat Euler een functie ziet als zowel een analytische expressie als een relatie, en dat hij afhankelijk van de context tussen de twee verwoordingen wisselt. Elders in het voorwoord geeft Euler voorbeelden van grootheden in de natuur en hoe deze afhankelijk van elkaar kunnen zijn. Hier komen geen formules aan te pas en daarom past de intuïtieve interpretatie van een functie als relatie hier goed. Als hij in latere hoofdstukken voor deze waarnemingen in de natuur formules geeft, schakelt hij (noodgedwongen) over naar de interpretatie van een functie als analytische expressie. Het gebruik van deze formules (of analytische expressies) was alleen gebruikelijk in de analyse: in de mechanica en meetkunde volstond het intuïtieve functiebegrip [10, p. 112-114]. Dit zien we terug in het tweede deel van de Introductio.

2.3 Een functie in Introductio II

Ook in het tweede boek van de Introductio lijkt Euler de nadruk te leggen op een functie als relatie tussen grootheden. In dit deel past Euler in de meetkunde de begrippen toe die hij in het eerste deel gedefinieerd heeft. Een kromme geeft in de meetkunde weer hoe een grootheid verandert als een andere variabele verandert. Zo'n kromme geeft dus de relatie weer tussen twee grootheden. We zullen zien dat een kromme en een functie voor Euler niet hetzelfde zijn.

In de eerste zeven definities legt Euler uit hoe een functie een rechte of kromme lijn definieert. Afbeelding 1 illustreert dit. Euler trekt een rechte horizontale lijn RS (in latere secties noemt Euler dit de as) en stelt dat de variabele grootheid x (in dit deel zijn alle functies y afhankelijk van x) weergegeven kan worden door deze lijn. Vervolgens legt hij uit hoe de specifieke waarden van x gerepresenteerd worden door gedeelten die uit de lijn zijn gesneden: door het interval tussen een gekozen vast punt A en een ander punt P op de lijn te vergroten, neemt de waarde van x toe. Negatieve waarden voor x kunnen verkregen worden door P links van A te kiezen. De intervallen AP noemt Euler de abscissen[8]. Hij merkt hierbij op dat er alleen gekeken wordt naar de reële waarden van x [8, §2, Vol. II][9]. Vanuit het punt P kan nu een lijn PM loodrecht getrokken worden. De lengte van deze lijn is precies de waarde van y als de grootte van AP voor x is gesubstitueerd. De lijnstukken PM noemt Euler de ordinaten ('applicata'). Ook hier legt hij uit dat M onder de as ligt als y een negatieve waarde aanneemt [8, §4,11, Vol. II].



Figuur 1: Een functie weergegeven als kromme. De afbeelding is grotendeels overgenomen van figuur 2 in [8, §4, Vol II].

Euler concludeert:

"Daarom zal elke functie van x, die op deze manier naar de meetkunde vertaald is, een zekere lijn vastleggen, recht of krom, waarvan de aard afhangt van de natuur van de functie y" [8, §6, Vol. II].

Een functie als analytische uitdrukking kan dus vertaald worden naar de functie als relatie tussen grootheden. Een functie y van x geeft een bepaalde kromme.

In sectie acht gebeurt er iets opmerkelijks. Er staat:

"Hoewel veel kromme lijnen mechanisch kunnen worden beschreven door de voortgaande beweging van een punt, waardoor de gehele samengestelde gebogen lijn tegelijkertijd kan worden bekeken, zullen we de oorsprong van deze kromme lijnen hier toch hoofdzakelijk beschouwen

[8]'Abscissa' betekent afbreking of snede in het Latijn.

[9]De term 'reëel getal' werd door Descartes al gebruikt om imaginaire wortels van reële wortels van een polynoom te scheiden.

als voortkomend uit functies, die meer analytisch en algemeen zijn en beter geschikt zijn voor berekeningen. Daarom zal een functie van x een bepaalde lijn opleveren, recht of krom, van waaruit de kromme lijnen op hun beurt functies mogen worden genoemd" [8, §8, Vol. II].

Hier lijkt Euler te breken met de doctrine van de Franse filosoof en wiskundige René Descartes (1596-1650), die er vanuit ging dat elke kromme mechanisch gegenereerd kan worden met een constructie. Euler neemt echter aan dat aan elke kromme één of meerdere functies ten grondslag ligt of liggen. Merk op dat Euler niet beweert dat elke kromme beschreven kan worden door precies één functie. Dit wordt in de volgende sectie duidelijk. Het lijkt erop dat Jacqueline Stedall in [18, p. 238-239] deze nuance niet opmerkt als ze schrijft dat elke kromme, hoe deze ook gevormd is, als een functie gezien kan worden.

2.3.1 Continuïteit van krommen

In sectie negen legt Euler uit dat krommen continu en discontinu kunnen zijn.

"Uit dit idee van rechte en kromme lijnen[10] *volgt onmiddellijk hun verdeling in continue en discontinue of gemengde lijnen. Een continue kromme lijn wordt namelijk zo beschouwd dat haar natuur wordt uitgedrukt door één bepaalde functie van x. Maar als een kromme lijn zo wordt beschouwd dat verschillende delen ervan (...) worden uitgedrukt door verschillende functies van x, (...) noemen we dergelijke kromme lijnen discontinu of gemengd en onregelmatig, omdat ze niet worden gevormd volgens één constante regel en samengesteld zijn uit delen van verschillende continue krommen"* [8, §9, Vol. II].

Een functie is hier voor Euler nog steeds analytisch uit te drukken.[11] Daarom zijn we het niet eens met de uitspraak van Stedall in [18, p. 239], waar ze stelt dat Euler hier een functie door krommen definieert.

Uit de bovenstaande definitie van discontinue krommen volgt dat een kromme met een knik discontinu genoemd wordt. Er zijn immers (minstens) twee functievoorschriften nodig. We kunnen afleiden dat

$$y = \begin{cases} x^2 & \text{als } x \geq 0, \\ -x & \text{als } x < 0 \end{cases}$$

hier een voorbeeld van is. Deze definitie verschilt met het hedendaagse begrip van continuïteit. Eerder zagen we al dat een functie als analytische expressie per definitie differentieerbaar is (in onze termen). Krommen die in een punt niet differentieerbaar zijn, kunnen in Eulers definitie dus niet continu zijn, omdat er geen analytische uitdrukking bestaat die zo'n kromme beschrijft. In de volgende sectie noemt Euler dat alle krommen die in de meetkunde mechanisch gegeven kunnen worden, voortkomen uit één functie. Dit zijn precies de krommen die Descartes beschouwde. Euler bekijkt daarentegen ook krommen die uit twee of meer functies voorkomen. Met het begrip van discontinue krommen, kan hij dus meer krommen beschouwen dan Descartes.

Merk op dat 'continu' voor Euler niet hetzelfde is als 'meetkundig verbonden zijn'. De kromme die verkregen wordt door de functie[12] $y = \frac{1}{x}$ bestaat uit twee niet-verbonden delen, maar is wel continu, omdat hij gegeven wordt door één functievoorschrift. Andersom is het niet zo duidelijk: geven twee functievoorschriften die niet verbonden zijn een discontinue kromme?

[10] In deze scriptie is 'linea curva' steeds vertaald met 'kromme lijn'. Hier wordt een kromme mee bedoeld.

[11] Dit stelt Ferraro in [10, 126] en hier kunnen we het mee eens zijn.

[12] Merk op dat we in paragraaf 2.1.1 gezien hebben dat voor Euler bepaalde vergelijkingen functies zijn. Euler maakt daarom niet altijd een onderscheid tussen de termen 'functie' en 'vergelijking'. Hier hebben we deze verwoording over genomen.

Ziet Euler bijvoorbeeld $y = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{als } x \geq 0 \\ -x & \text{als } x < 0 \end{cases}$ als één discontinue kromme? Hier zullen we in dit hoofdstuk niet achter komen. In hoofdstuk 3.2 komen we hier op terug.

In de secties die volgen, beschrijft Euler eigenschappen van krommen. Hoewel hij dit niet nadrukkelijk vermeldt, behandelt hij in het vervolg alleen nog continue krommen. Zo schrijft hij in sectie veertien dat de natuur van een kromme gedefinieerd wordt door de vergelijking tussen de orthogonale coördinaten y en x, of deze nu expliciet is of niet. Hier lijkt Euler er al vanuit te gaan dat de kromme door één vergelijking uitgedrukt wordt. Zo'n kromme is dus continu. Een sectie later stelt hij dat er evenveel krommen als functies bestaan, waarna hij de krommen opdeelt in algebraïsch en transcendent, net zoals hij eerder bij functies deed. Ook hier gaat hij dus weer uit van louter continue krommen.

In sectie 61 introduceert Euler een nieuw concept. Hij behandelt hier vergelijkingen die in rationale factoren ontbonden kunnen worden:

"Want als een vergelijking twee of meer factoren heeft, dan zal er sprake zijn van twee of meer vergelijkingen, die elk een bepaalde gebogen lijn zullen genereren, die samen de kracht van de voorgestelde vergelijking zullen uitputten. Vergelijkingen van deze soort, die in factoren kunnen worden opgelost, omvatten dus niet één, maar meerdere continue krommen, waarvan elk kan worden uitgedrukt door een bepaalde vergelijking. Deze krommen zijn verder niet met elkaar verbonden, behalve dat hun vergelijkingen onderling worden vermenigvuldigd. Omdat de verbinding afhankelijk is van ons oordeel,[13] *kunnen dergelijke gebogen lijnen niet als één continue lijn worden beschouwd. Dergelijke vergelijkingen, die we hierboven complex hebben genoemd, produceren kromme lijnen die niet continu zijn, maar zijn samengesteld uit continue lijnen, die we daarom complex zullen noemen"* [8, §61, Vol. II].

Deze complexe krommen zijn dus niet continu, omdat ze niet voortgebracht worden door één functie. In de sectie hierna geeft Euler een voorbeeld. Hij geeft de tweedegraadsvergelijking $yy = ay + xy - ax$ en stelt dat deze opgedeeld kan worden in twee rationale factoren: $(y - x)(y - a) = 0$. "De vergelijking zal dan de twee vergelijkingen $y - x = 0$ en $y - a = 0$ bevatten. Beide zijn een rechte lijn, dat wil zeggen, de eerste vormt een semi-rechte hoek met het begin van de abscis, terwijl de laatste evenwijdig is aan de as op een afstand $= a$" [8, §62, Vol. II]. We zien dat een complexe kromme bestaat uit twee of meer krommen, terwijl een discontinue kromme samengesteld is uit meerdere stukjes van verschillende krommen.

Opvallend aan het voorbeeld hierboven is de vergelijking $y = a$. Deze geeft een rechte, horizontale lijn, en eerder zagen we dat Euler zulke vergelijkingen niet als functie beschouwt. In de meetkunde komen deze constante functies echter veel voor. Zou Euler daarom de term 'functie' hier vermijden? Hij deelt immers de vergelijkingen op in complex en niet-complex, en niet de functies. De complexe krommen die uit deze complexe vergelijkingen voortkomen, bestaan ook niet uit functies, zoals de discontinue krommen per definitie wel doen, maar uit vergelijkingen.

We kunnen nog iets zeggen over deze uitspraak. Het wordt nu namelijk duidelijk dat de kromme die gegeven wordt door de vergelijking $y = \sqrt{x^2}$ niet continu is. Eerder in hoofdstuk 2.1.2 merkten we op dat de wortelfunctie voor Euler dubbelzinnig is, dus deze vergelijking wordt door Euler opgevat als $y^2 = x^2$. Dat is precies de complexe vergelijking $(y-x)(y+x) = 0$, die een complexe en niet-continue kromme voortbrengt. De kromme met de vergelijking

[13] Hier bedoelt Euler dat er meerdere manieren zijn waarop de verschillende vergelijkingen verbonden kunnen zijn. In een kruispunt van krommen, kan je kiezen welke vergelijking of kromme je verder volgt. Deze keuze is afhankelijk van ons oordeel. We zullen deze verwoording vaker terug zien.

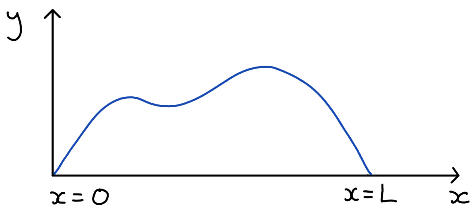
$y = \begin{cases} x & \text{als } x \geq 0 \\ -x & \text{als } x < 0 \end{cases}$ bestaat daarentegen uit twee delen van verschillende functies, en is daarom discontinu.

In dit tweede deel van de Introductio hebben we gezien dat elke functie y van x een kromme definieert. Andersom geeft niet elke kromme een functie, want een kromme kan discontinu zijn. Een discontinue kromme bestaat uit verschillende functies en deze functies worden gegeven door de analytische uitdrukkingen zoals in het eerste deel van de Introductio. Een kromme die bepaald wordt door één functie, wordt continu genoemd. Zo wordt duidelijk dat een kromme niet hetzelfde is als een functie. Ook hebben we opnieuw gezien dat een vergelijking iets anders is dan een kromme of een functie. Een vergelijking kan namelijk, in tegenstelling tot een functie, een rechte lijn opleveren. Opvallend aan sectie 61 is bovendien dat Euler schrijft dat (complexe) vergelijkingen (complexe) krommen produceren. Een kromme kan dus uit functies bestaan, maar ook uit vergelijkingen. We zullen zien dat deze laatste verwoording lijkt op de definitie van krommen in [5].

2.3.2 Het probleem van de trillende snaar

Waarschijnlijk voelde Euler zich genoodzaakt om discontinue krommen te definiëren, nadat hij zich bezig had gehouden met partiële differentiaalvergelijkingen.

De Franse filosoof en wiskundige Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) publiceerde in 1747 zijn oplossing van het probleem van de trillende snaar. De vraag is wat de verplaatsing y van een snaar is op tijdstip t. Verder geeft x de plaats langs de snaar aan. Hier is y dus een functie van x en t. De snaar heeft een lengte L, dus $0 \leq x \leq L$. D'Alembert ontdekte dat $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ in verhouding moet staan met $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ (in moderne notatie).



Figuur 2: De uitwijking y op een bepaald tijdstip van een snaar die vast zit op $x = 0$ en $x = L$.

Hij gaf de oplossing voor het geval dat de differentiaalquotiënten gelijk aan elkaar zijn, waaruit volgt dat de oplossing gegeven wordt door de vergelijking $y(x,t) = \Psi(t+x) - \Psi(t-x)$, waarbij Ψ een willekeurige oneven functie is die periodiek is met periode $2L$. D'Alembert gebruikte hier de term 'functie' als analytische uitdrukking. Hij nam bij deze oplossing aan dat de uitwijking y in het begin gelijk is aan nul, dus $y(x,0) = 0$. Verder zit de snaar aan de uiteinden vast, dus de aangenomen randvoorwaarden zijn $y(0,t) = y(L,t) = 0$ [18, p. 264-271]. In figuur 2 is een voorbeeld van de vorm van de snaar te zien op een bepaald tijdstip.

In een artikel dat d'Alembert kort hierna publiceerde, gaf hij een algemenere oplossing en nam hij aan dat $y(x,0) = f(x)$, zodat de snaar in het begin de vorm aan kan nemen van de kromme f. Ook de beginsnelheid hangt in deze oplossing af van een functie: $v(x,0) = g(x)$.

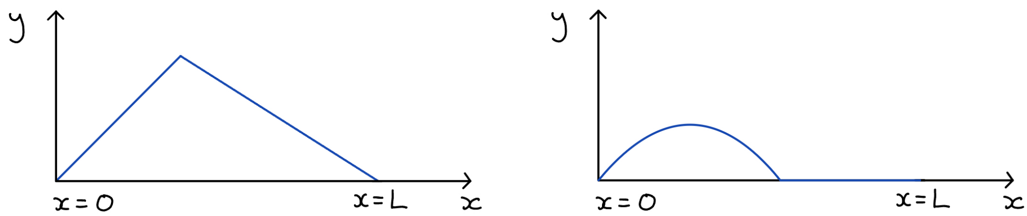
D'Alembert concludeerde dat er in dit geval alleen een oplossing bestaat, indien f en g oneven en periodieke functies zijn [16, p. 609].

Euler en d'Alembert hadden via briefwisselingen contact over het probleem van de trillende snaar. In 1749 publiceerde Euler zijn oplossing. Hij loste de algemene vergelijking,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{1}$$

(in moderne notatie) op. De differentiaalquotiënten staan hier verhouding met een constante c^2. Rekening houdend met de randcondities, wordt $y(x,t) = \Psi(x+ct) - \Psi(x-ct)$ voor een willekeurige Ψ is. Vergelijking 1 noemen we nu de golfvergelijking. Euler verschilde met d'Alembert van mening over de keuze voor de functies f en g. Deze kunnen volgens Euler elke kromme zijn die je met de hand kan tekenen.[14] Zo'n kromme hoeft dus niet bepaald te worden door één analytische uitdrukking en kan een 'knik' bevatten. Daarbij schreef Euler dat f en g niet noodzakelijk oneven en periodiek zijn: elke kromme die gedefinieerd is op $[0, L]$ kan uitgebreid worden tot een oneven en periodieke kromme door $f(-x) = -f(x)$ en $f(x \pm 2L) = f(x)$ te stellen [16, p. 609-611]. Door deze uitbreiding kan weer een 'knik' in de kromme voorkomen. Merk op dat Euler f en g dus krommen noemt, en geen functies.

Bij de keuze voor f heeft Euler duidelijk de vorm van een snaar in gedachten. Als er aan een snaar getrokken wordt, komt er een knik in. Ook als de snaar in een punt ingedrukt wordt, ontstaat er een knik op dit punt. Een illustratie is weergegeven in figuur 3.[15] Deze vormen moeten dus volgens Euler door een kromme f omvat worden.



Figuur 3: Twee manieren voor de beginpositie van een snaar. Links wordt de snaar vastgehouden en uitgerekt; rechts is de snaar ingedrukt.

Vanaf 1759 begon ook de wiskundige Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) zich met het vraagstuk te bemoeien. Euler en Lagrange hadden per brief contact over vraagstukken omtrent het onderwerp dat we nu de variatierekening noemen [15, p. 600]. Hoewel Lagrange het probleem van de trillende snaar anders aanpakte en de golfvergelijking niet gebruikte, was hij het eens met Eulers methode en met diens keuze voor de initiële toestand van de snaar. Ook Lagrange vond dus dat f en g curven met een knik kunnen zijn. D'Alembert maakte echter bezwaar tegen Eulers aanname. In 1761 publiceerde hij een artikel waarin hij liet zien dat er geen helling $\frac{\partial y}{\partial x}$ in een hoekpunt bestaat: links en rechts van het punt waar de snaar wordt vastgehouden, is de helling verschillend. D'Alembert concludeert dat $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ niet gedefinieerd is en dat de oorspronkelijke fractionele differentiaalvergelijking zo niet opgelost kan worden. In 1762 en 1765 reageert Euler op dit bezwaar in publicaties. Hij beweert dat de kromme op een hoekpunt slechts infinitesimaal verschilt van een kromme zonder hoekpunt. Zo'n kromme is

[14]De verwoording van 'een kromme die (vrij) met de hand getrokken/getekend wordt' gebruikt Euler vaak en zullen we vaker tegenkomen.

[15]De afbeelding is geïnspireerd op figuur 2 in [21].

(in onze termen) wel overal differentieerbaar. D'Alembert was hier niet van overtuigd. Ook Lagrange vond dat Euler niet correct met differentialen omging in zijn uitwerking [21].

Opvallend in de publicaties van Euler over dit probleem, zoals bijvoorbeeld in [9] dat in 1765 geschreven is, zijn de afbeeldingen. In de tekst wordt verwezen naar afbeeldingen die lijken op figuur 3, zoals bijvoorbeeld de kromme in figuur 4. Waar in de Introductio geen voorbeelden van discontinue krommen voorkomen, werkt Euler hier dus wel met deze krommen. Bij afbeelding 4 schrijft Euler bijvoorbeeld dat de figuur samengesteld is uit een kromme lijn AMC en een rechte lijn CB [9, p. 311]. Hierdoor wordt het opnieuw duidelijk dat het probleem van de trillende snaar voor Euler een aanleiding is om discontinue krommen met een knik te beschouwen.

Figuur 4: Een illustratie van een discontinue kromme in [9, p. 325].

2.4 Differentiatie in 'Institutiones calculi differentiales'

Eerder zijn we in paragraaf 2.2 al de 'Institutiones calculi differentiales' tegengekomen. Euler legt in dit boek uit wat differentialen zijn en hoe we hiermee kunnen rekenen. We lichten hier kort toe wat Euler onder differentialen verstond, omdat hij in 'De usu functionum discontinuarum in analysi' ook differentialen in voorbeelden gebruikt. We zullen in paragraaf 3.5 zien dat Euler daar dezelfde notatie voor differentialen gebruikt.

Euler begint in het eerste hoofdstuk met de verandering van een variabele x. Hij schrijft dat als een variabele verandert, de waarden van alle functies die van de variabele afhangen, ook veranderen, tenzij "de functie slechts de schijn heeft van een functie van een variabele[16]" [6, §1]. Hiermee legt Euler dus weer de nadruk op het gebruik van een functie als relatie tussen grootheden. Ook zien we dat een functie voor Euler geen constante waarde kan aanhouden.

De vergroting van x noteert Euler in sectie acht met $\Delta x = \omega$. Als y een functie van x is, dan is y^{I} de functie waar $x + \omega$ in gesubstitueerd is. Vervolgens definieert hij de differentiaal, genoteerd met Δy, als $y^{\mathrm{I}} - y$. Dit proces kunnen we herhalen voor hogere differentialen. Zo wordt $y^{\mathrm{II}} = y + \Delta y + \Delta y^{\mathrm{I}}$ [6, §2-13, 25].

In sectie 72 schrijft Euler weer over grootheden. Hij stelt dat elke grootheid vergroot kan worden tot oneindig [6, §72]. Vervolgens behandelt hij de vraag of een oneindige grootheid bestaat. Met het symbool ∞ noteert Euler de grootheid die groter is dan elke eindige en of toewijsbare grootheid [6, §75-82]. Hierna gaat hij over op oneindig kleine grootheden:

"Als een grootheid zo klein is dat het minder is dan elke toegewezen grootheid, dan kan het geen 0 *zijn, want tenzij deze gelijk is aan* 0*, kan er een hoeveelheid gelijk aan worden gewezen, en dat is in tegenspraak met onze hypothese [namelijk dat elke grootheid zo klein gemaakt kan worden dat het verdwijnt]. Aan een ieder die vraagt wat een oneindig kleine grootheid is in de Wiskunde, kunnen we antwoorden dat het echt gelijk is aan* 0*"* [6, §83].

Met deze definitie probeert Euler de infinitesimale grootheid duidelijk te maken. Hij wijkt af

[16] Zo'n functie zouden wij een constante functie noemen.

van al bestaande ideeën over deze oneindige kleinigheid. Zo werd een infinitesimaal door sommigen begrepen als "een grootheid die kleiner is dan elke andere grootheid." Johann Bernoulli gebruikte een axioma door te stellen dat als je een infinitesimaal bij een grootheid optelt, de grootte van deze grootheid onveranderd blijft. Euler maakt de definitie van een infinitesimale grootheid duidelijk door deze aan nul gelijk te stellen [11, p. 103]. De analyse van het oneindige gaat, zo schrijft Euler in [6, §114], precies over deze oneindig kleine grootheden.

In sectie 85 beredeneert Euler dat de verhouding tussen twee nullen alles kan zijn. Hij legt dit uit door te stellen dat uit $n \cdot 0 = 0$ de gelijkheid $n : 1 = 0 : 0$ volgt. In de alinea hierna introduceert Euler de (al gangbare) notatie voor oneindig kleine grootheden, namelijk dx en dy.[17] Hij legt uit dat hoewel $dx = 0$ en $a\ dx = 0$, ook $a\ dx : dx = a : 1$. Op deze manier kunnen we dus de verhouding tussen infinitesimalen bekijken [6, §85-87].

In sectie 118 stelt Euler dat als ω infinitesimaal klein is, we $\omega = dx$ schrijven. Als y een functie is van x, dan is dy de toename van y als x in $x + dx$ verandert. Nu noemt Euler dx en dy de differentialen van respectievelijk x en y [6, §118]. Alle berekeningen met deze differentialen zijn gevat in de differentiaalrekening [6, §115].

We hebben gezien in [6] dat een infinitesimaal voor Euler gelijk is aan nul. Verder hebben we gezien hoe, als y een functie van x is, de differentialen Δy en Δx, of dy en dx bepaald worden. De differentiaalrekening houdt zich bezig met de verhouding tussen deze infinitesimalen, en deze verhouding is niet gelijk aan nul. In [5, §10-11] gebruikt Euler dezelfde notatie in een voorbeeld.

2.5 Bewust een andere definitie?

We hebben gezien dat Euler in 1748 een functie bekeek als analytische uitdrukking. In de Introductio legde hij in de analyse de nadruk op functies, en niet meer op krommen, zoals in de analyse voorheen gebruikelijk was. In dezelfde periode was hij bezig met het probleem van de trillende snaar, waarna hij concludeerde dat krommen met een knik erin ook beschouwd moeten worden. Het is aannemelijk dat Euler daarom in het tweede deel van Introductio de discontinue kromme introduceert. Hier gaat hij er nog steeds vanuit dat functies gegeven worden door een analytische uitdrukking. Krommen kunnen vervolgens samengesteld zijn uit verscheidene functies.

In het leerboek over differentiaalrekening lijkt Euler een functie abstracter te definiëren. Stedall schrijft in [18, p. 238-239] dat Euler door het onderzoek over de snaren het concept van een functie veranderde: een functie wordt in de Institutiones gezien als een relatie tussen grootheden. Ook Katz suggereert in [16, p. 622] dat de discussie met D'Alembert ten grondslag ligt aan deze algemenere definitie. Het zou inderdaad goed kunnen dat Euler door de wiskunde in de praktijk toe te passen, vermoedde dat niet alleen het begrip van krommen, maar ook het begrip van functies uitgebreid moest worden. Het is echter opvallend dat Euler dit niet meteen doet in de jaren erna: hij blijft discontinue krommen als lijnen zien die je met de hand kan tekenen. Deze krommen bestaan uit meerdere functies of vergelijkingen. Bovendien gebruikt Euler het abstractere concept van de functie als relatie tussen grootheden alleen in de introductie van de Institutiones. Het is dus ook mogelijk dat hij wiskundige verwoordingen in een introductie expres vermijdt, om deze voor een breed publiek leesbaar te maken. Aan de andere kant worden er in de introductie veel natuurkundige voorbeelden genoemd, waar een functie bij komt kijken. En het zijn precies deze verschijnselen in de natuur die Euler doen aanzetten om discontinue krommen te definiëren.

[17] De 'd' staat voor 'differentiaal' [6, §119].

Eerder zagen we dat Ferraro vermoedt dat Euler een functie niet alleen als een relatie tussen grootheden beschouwde, maar ook als analytische uitdrukking. Dit is een opvatting waar we het mee eens kunnen zijn. Het is goed mogelijk dat Euler in 1767 het functiebegrip kon uitbreiden, juist omdát hij een functie ook als relatie tussen grootheden zag. En aangezien in de natuur relaties voorkomen waaruit een discontinue kromme volgt, kon Euler de brug maken naar discontinue functies in [5]. Of Euler nou wel of niet de algemene verwoording koos in de introductie van Institutiones met de discontinue krommen in gedachten, laten we hier in het midden.

3 Analyse van 'De usu functionum discontinuarum in analysi'

In de appendix is de zelf vertaalde tekst van 'De usu functionum discontinuarum in analysi', [5] (Over het gebruik van discontinue functies in de analyse) te vinden. Voortaan korten we de titel af met De usu functionum. Deze tekst is in 1762 geschreven en in 1767 gepubliceerd in een het tijdschrift "Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae". In dit artikel introduceert Euler zijn begrip van een discontinue functie in de wiskunde. Ook legt hij uit waarom deze functies bij de analyse horen. Met deze tekst wil hij collega wiskundigen hiervan overtuigen.

We zullen de vertaling per sectie doorlopen en opvallende aspecten toelichten. In het bijzonder kijken we naar Eulers functiebegrip en of deze is veranderd ten opzichte van zijn leerboeken [8] en [6]. Dit hoofdstuk staat niet op zichzelf: de vertaling is nodig om de inhoud te snappen. Als we verwijzen naar specifieke verwoordingen, staat het regelnummer erbij dat correspondeert met de uitdrukking in de vertaling. Hierna vatten we kort de belangrijkste punten samen.

3.1 sectie 1-2: de aanloop

Al in de eerste zin noemt Euler iets nieuws: hij schrijft dat functies die door één regel bepaald worden, continu genoemd worden. We hebben gezien dat hij in eerdere werken de krommen onderverdeelde in continu, discontinu en complex, maar hier lijkt hij dit onderscheid voor functies te willen maken. Hij benoemt dat in de Analyse nu enkel uitgegaan wordt van zulke continue functies.

In de rest van de alinea lijkt hij 'oude' kennis te willen herhalen, waarbij hij uitgaat van louter continue functies. Dit zijn de enige functies die door collega wiskundigen beschouwd werden, omdat ze als analytische uitdrukking geschreven kunnen worden. Euler legt eerst uit hoe krommen en functies met elkaar verbonden zijn en dat de aard van een functie weergegeven kan worden door de vergelijking van een kromme. Deze uitspraak is opvallend, want in het tweede deel van de Introductio schreef hij het omgekeerde: daar werd de natuur van een continue kromme uitgedrukt door een functie. Hij schrijft vervolgens dat bij elke functie y van x een kromme getekend kan worden. Een uitgebreidere uitleg hiervan hebben we in het tweede deel van Introductio gelezen. Opnieuw merkt hij op dat in dit geval de kromme de natuur van de functie representeert (en niet andersom). Tot slot schrijft Euler in deze alinea dat bij elke willekeurige kromme lijn een of meerdere functies gevonden kunnen worden die de kromme weergeven. Ook dit is een herhaling van de Introductio.

We belichten ook nog kort een verwoording in deze eerste sectie. Eerder hebben we een onderscheid gemaakt tussen een functie als analytische uitdrukking en een functie als relatie tussen grootheden. In de derde zin legt Euler de nadruk op een functie als relatie: "Hoe deze grootheid y ook wordt bepaald door x, of hoe de functie y van x ook moge zijn (...)" (r. 7-8). Later in de vertaling zullen we merken dat Euler de analytische uitdrukking loslaat, maar dat een functie nog steeds gezien wordt als een relatie tussen grootheden.

Wat in de tweede sectie opvalt, is de hoofdletter bij Geometria (r. 17). Eerder werd bij Analyse ook een hoofdletter gebruikt. Namen van gebieden binnen de wiskunde lijkt Euler dus met een hoofdletter aan te duiden. Verder benoemt Euler hier de 'hogere Meetkunde'. In de achttiende eeuw werd er een onderscheid gemaakt tussen de gewone en de hogere Meetkunde. De gewone Meetkunde behandelt alle figuren en lichamen die voortkomen uit rechte lijnen en cirkels, terwijl in de hogere Meetkunde ook de figuren en lichamen voortkomend uit krommen beschouwd worden [17, p. 174-176]. Euler schrijft in deze sectie dat er gewoonlijk alleen continue krommen in de hogere Meetkunde bekeken worden. Deze krommen worden beschreven door één vergelijking.

In deze alinea maakt Euler voor het eerst een verschil tussen een kromme en een baan. Een hyperbool bestaat uit twee afzonderlijke banen, maar als kromme lijn is deze continu. Een hyperbool wordt immers, net als een parabool of ellips, door één vergelijking beschreven.

3.2 sectie 3: discontinue functies

In de derde sectie geeft Euler aan wat een discontinue functie is: een kromme die niet als één vergelijking te schrijven is, geeft een discontinue functie. Zo zijn alle discontinue krommen te schrijven als een functie, waarmee Euler het functiebegrip uitbreidt. Merk op dat de discontinue functie nu begrepen wordt vanuit het begrip van een kromme. Een discontinue kromme wordt in deze alinea beschreven als een kromme die uit verscheidene vergelijkingen bestaat. Dit verschilt met het tweede deel van de Introductio (en met de herhaling in de eerste sectie van dit vertaalde artikel), waar discontinue krommen uit verscheidene functies bestonden.

Euler vervolgt zijn uitleg met banen en krommen. Hij schrijft dat een baan continu kan voortlopen en dus verbonden kan zijn, terwijl deze niet door één vergelijking weergegeven kan worden. Denk aan een baan met een knik erin: de baan loopt continu voort en is verbonden, maar als kromme is de lijn voor Euler discontinu. Zo'n functie is dus ook discontinu. Als voorbeeld geeft Euler de omtrek van veelhoeken. De omtrek geeft een verbonden baan die bestaat uit rechte lijnen, maar de baan wordt niet door één vergelijking gevat. Daarom is de baan een discontinue lijn. Omdat Euler een discontinue functie definieert aan de hand van een discontinue kromme lijn, kunnen we concluderen dat de omtrek van een veelhoek ook een discontinue functie oplevert. Dit roept een aantal vragen op.

Ten eerste is een omtrek van een figuur als functie niet eenduidig. Dit is voor Euler echter geen probleem: in de Introductio schreef hij dat meerwaardige of impliciete vergelijkingen evengoed functies zijn.

Er is nog iets opmerkelijks. Als we een willekeurige kromme tekenen, kan deze gedeeltelijk uit een horizontale lijn bestaan. Dit is bijvoorbeeld het geval bij de omtrek van een vierkant in een assenstelsel. De bijbehorende (discontinue) functie die uit de kromme voortkomt, bestaat dan uit onder andere vergelijkingen in de vorm $y = a$. Zo'n rechte lijn ziet Euler in het eerste deel van de Introductio niet als functie, zoals we gezien hebben in paragraaf 2.1.1, omdat een functie van een variabele grootheid zelf als variabele grootheid gezien wordt. Ook met de uitbreiding van discontinue functies lijken deze rechte lijnen uitgesloten te worden: Euler schrijft immers dat alle discontinue krómme lijnen functies opleveren. In hoofdstuk 2.3.1 liepen we tegen hetzelfde vraagstuk aan, toen Euler in het tweede deel van de Introductio een voorbeeld gaf van een complexe kromme waarvan een deel horizontaal loopt. Hij schreef in de Introductio echter dat de vergelijking waaruit deze complexe kromme voortgebracht wordt, uit meerdere vergelijkingen bestaat; niet uit functies. De term 'vergelijking' was in de Introductio mogelijk bewust gekozen. Vergelijkingen kunnen namelijk wêl een rechte lijn opleveren. Ook in het vertaalde artikel gebruikt Euler de term 'vergelijking' waar nodig: een discontinue kromme bestaat uit meerdere vergelijkingen. Deze vergelijkingen samen geven één discontinue functie. Op deze manier komen er geen constante functies voor in het voorbeeld van de omtrekken, maar enkel vergelijkingen in de vorm $y = a$.

Uit het bovenstaande voorbeeld wordt duidelijk dat een vergelijking voor Euler iets anders is dan een functie. Ook kunnen we opmerken dat Euler de term 'vergelijking' in dit stuk hetzelfde lijkt te gebruiken als in de andere werken die we van hem gelezen hebben. Waar verder in de Introductio een vergelijking, een functie en een kromme drie verschillende objecten waren, worden in het vervolg van het artikel functies en krommen door elkaar gebruikt. Dit laatste merkt ook Ferraro op in [10, p. 126]. Hij benoemt echter niet dat deze objecten voor Euler niet noodzakelijk hetzelfde zijn. Want hoewel Euler in het artikel duidelijk afwijkt van zijn begrip van een functie als analytische uitdrukking, geeft een functie nog steeds de relatie tussen grootheden weer. Een functie kan uit meer dan twee variabelen bestaan, en zo niet meer als kromme weergegeven worden. Een voorbeeld hiervan zullen we later in de vertaling tegenkomen.

Tot slot lichten we nog een verwoording toe. In dit artikel gebruikt Euler vaak de zin 'een kromme (of baan) die vrij met de hand getrokken wordt' als hij discontinue krommen bekijkt (bijvoorbeeld in regel 37-38, of 44-45). We kunnen ons afvragen wat hij hiermee bedoelt. Het is duidelijk dat Euler een functie met een knik als discontinu beschouwt, maar hoe kijkt hij tegen krommen met een sprong aan? Dergelijke krommen kunnen we op papier tekenen, maar niet zonder onze hand van het papier te halen. In eerdere werken waarin Euler discontinue krommen besprak, zoals in artikelen over het probleem van de trillende snaar, zijn we enkel krommen met een knik tegengekomen. Zou 'met de hand getrokken' betekenen dat de kromme verbonden moet zijn? Voor nu vinden we ons antwoord in de derde sectie. Hier staat dat "alle banen die, vrij met de hand op papier getrokken worden, zelfs wanneer ze continu voortlopen, (...) als discontinu worden beschouwd" (r. 44-46). De woorden "zelfs als" ("etiamsi" in het Latijn) zijn dus cruciaal: deze verwoording suggereert dat banen die op papier getekend kunnen worden, niet noodzakelijk continu voortlopen. Dit lijkt te betekenen dat krommen met een sprong wel degelijk een goed gedefinieerde discontinue functie opleveren. Dit is een gewaagde uitspraak, omdat we nog geen voorbeelden van dergelijke krommen zijn tegengekomen. Deze gaan we in dit artikel ook niet terugvinden.

3.3 sectie 4-6: de Analyse zoals het was

In de drie secties die volgen legt Euler uit dat de discontinue functies nog niet bij de Analyse behoren, omdat de Analyse alleen lijnen beschouwt die door één vergelijking gegeven worden. In de vierde sectie verwijst Euler naar het probleem van de trillende snaar. Hij schrijft dat D'Alembert er vanuit ging dat de snaar in het begin een continue kromme moet zijn, terwijl Euler en Lagrange ook discontinue vormen bekeken. Dit hebben we gezien in paragraaf 2.3.2.

Voor Euler is het duidelijk dat de snaren die een discontinue lijn vormen, ook een oplossing zijn van het probleem van de trillende snaar. En omdat dit probleem over grootheden gaat, moeten discontinue functies bij de Analyse horen. Deze zin over grootheden (r. 83-85) lichten we hier toe. Zoals we in hoofdstuk 2.1 zagen, ging de Analyse bij Eulers tijdgenoten voornamelijk over krommen. Variabele meetkundige grootheden waren hierbij het voornaamste aspect [3, p. 76]. We hebben gezien dat voor Euler de Analyse over functies gaat. Hoewel grootheden in het eerste deel van de Introductio niet meer als een meetkundig object gedefinieerd zijn, ziet Euler deze grootheden wel als een belangrijk object. Hij stelt immers eerst wat grootheden zijn, voordat hij aan het functiebegrip begint.

Er moet volgens Euler een speciale soort Analyse gevormd worden, waarin deze discontinue functies gevat zijn. In de huidige Analyse en Algebra (ook dit vakgebied is met een hoofdletter aangeduid) kunnen discontinue functies nog niet toegelaten worden.

3.4 sectie 7-8: klassen van functies

In de zevende en achtste alinea, stelt Euler dat de aard van de functies in klassen op te delen is, op basis van het aantal variabele grootheden. Met "de aard functies" (r. 109), bedoelt

Euler waarschijnlijk hetzelfde als wat in hoofdstuk 2.1.2 de 'natuur van een functie' genoemd werd: de vorm van de vergelijking.

De eerste klasse bestaat uit functies van één variabele. Euler legt nogmaals uit dat de natuur van een functie y van een variabele x uitgedrukt wordt door een kromme (r. 112-115), zoals hij in de eerste sectie ook deed. Verder schrijft hij dat y een waarde krijgt als we een waarde aan x geven. Deze waarde kan eenvoudig (simplex in het Latijn), meervoudig (multiplex) of imaginair zijn (r. 115-117). Het is aannemelijk dat met simplex en multiplex hetzelfde bedoeld wordt als wat in de Introductio uniform en multiform heette.

De tweede klasse bestaat uit functies van twee of meer variabelen, die onafhankelijk van elkaar zijn. Een functie z van twee variabelen x en y ziet Euler zich meetkundig voor: x en y liggen in een vlak en kunnen afzonderlijk alle waarden aannemen, terwijl z loodrecht op dit vlak een waarde aanneemt afhankelijk van wat x en y zijn.

Opvallend bij deze secties zijn de voorbeelden die Euler geeft. Hij legt namelijk uit hoe functies een rol kunnen spelen in de natuurkunde, of waarom het belangrijk is om deze functies te bekijken. De beweging van de maan is bijvoorbeeld een functie van één variabele (de tijd), terwijl de dichtheid van een lichaam van drie variabelen afhangt. We kunnen ons nog afvragen wat Euler met "de aard van massieve lichamen" bedoeld heeft (r. 131-132). Eerder kwamen we al de verwoording 'de aard/natuur van een functie/kromme' tegen. Met deze verwoording lijkt Euler de vergelijking of functie te bedoelen die de beweging van een lichaam weergeeft.

3.5 sectie 9-14: differentialen en integralen voor functies van één variabele

De Analyse deelt Euler op in evenveel delen als er klassen van functies zijn. Het eerste deel van de Analyse behandelt de functies van één variabele. Euler legt in de volgende alinea's uit hoe de differentiaal- en integraalrekening werkt voor dergelijke functies.

Euler begint met een willekeurige functie y van x. Vervolgens bepaalt hij wat differentialen zijn. Dit zijn de verdwijnende toenames van de variabelen x en y. De differentiaalrekening houdt zich bezig met de verhouding tussen deze differentialen. Deze verhouding is, in tegenstelling tot de differentialen zelf, niet oneindig klein. Dit hebben we ook gezien in paragraaf 2.4. Wat opvalt, is dat Euler er vanuit lijkt te gaan dat y een continue functie van x is (of in onze termen: het is een differentieerbare functie). In sectie tien geeft Euler een voorbeeld van een functie, waarna hij de differentialen Δx en Δy bepaalt. Dit voorbeeld geeft inderdaad een continue kromme (in Eulers termen). Euler schrijft dat dit voorbeeld alle twijfels weg moet nemen over oneindige kleinigheid in de Analyse (r. 179-181), maar dat doet het voor ons nu niet.

De verhouding van differentialen geeft weer een functie van x. Vervolgens wordt $\frac{dy}{dx}$ met de letter (of grootheid) p aangeduid. Deze beredenering en notatie zijn analoog aan [7, Vol. 2]. In de laatste zin van alinea elf maakt Euler alvast een tussenstap voor differentiaalvergelijkingen: hij stelt dat de notatie $dy = pdx$ correct is. Dit benoemt hij expliciet, omdat zowel dy als dx oneindig klein is.

In alinea dertien definieert Euler de integraalrekening voor functies van één variabele als het omgekeerde van de differentiaalrekening. Verder valt op dat Euler de termen 'graad' en 'orde' (van differentiaalvergelijkingen) door elkaar heen gebruikt.

In de veertiende sectie legt Euler uit dat er een constante grootheid C aan de oplossing van de differentiaalvergelijking van de eerste graad toegevoegd moet worden om de uitwerking volledig te laten zijn. De waarde van C wordt "volledig aan ons oordeel overgelaten" (r.

247-248). Deze verwoording komt vaker terug en betekent dat C willekeurig gekozen kan worden.

3.6 sectie 15-19: functies van verscheidene variabelen

Het tweede deel van de Analyse gaat over functies van twee of meer variabelen. Euler legt vanaf alinea vijftien uit hoe differentialen en integralen dan gedefinieerd zijn. Merk op dat de fractionele differentialen $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ en $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ breuken (fractiones in het Latijn) genoemd worden (bijvoorbeeld in sectie 16). We kunnen hieruit afleiden dat er nog geen term voor 'differentiaalquotiënt' in gebruik was.

In de achttiende alinea stelt Euler dat er bij integratie van een functie van meerdere variabelen geen willekeurige constanten, maar willekeurige functies aan de oplossing toegevoegd moeten worden. Dit kunnen zelfs discontinue functies zijn. Hierna schrijft Euler dat deze discontinue functies essentieel zijn voor de natuur van integraalrekening. We kiezen immers ook een willekeurige constante in het geval dat de functie uit één variabele bestaat.

De reden dat de Analyse met discontinue functies uitgebreid moet worden, is voor Euler het voorkomen van functies in de natuur. In sectie negentien haalt hij het voorbeeld van de trillende snaar weer aan. Hier kan de initiële toestand van de snaar een discontinue kromme vormen. De Analyse moet dus wel deze discontinue functies bevatten, aldus Euler.

We zijn nu niet te weten gekomen of en hoe Euler discontinue functies differentieert of integreert. Hier zullen we later op terugkomen.

3.7 sectie 20-23: voorbeeld

Het artikel wordt afgesloten met een voorbeeld. Euler stelt een probleem op waarin duidelijk wordt dat discontinue krommen niet uitgesloten kunnen worden. Misschien geeft dit voorbeeld wel antwoord op onze eerder gestelde vraag: kunnen discontinue functies een sprong bevatten?

Euler zoekt lichamen waarvan de afstand van het oppervlak tot aan een bepaalde basis even lang zijn. Als voorbeeld geeft hij een cilinder. Deze heeft een grondvlak en een as. De lijnen tussen de as en de buitenkant van de cilinder zijn overal even lang. Euler merkt op dat deze as niet noodzakelijk recht is: het kan elke willekeurige kromme zijn, dus ook een discontinue functie.

Hierna geeft Euler twee manieren om de vraag op te lossen. In sectie 21 bekijkt hij de oplossing analytisch, met behulp van differentialen en integralen. De functie Ω van ω is hier de willekeurige functie die zelfs discontinu kan zijn. In de oplossing wordt deze functie geïntegreerd. We weten nu dat als de kromme een telbaar aantal sprongen heeft, deze integreerbaar is. Deze theorie was voor Euler nog onbekend.

In alinea 22 is een constructie van de oplossing te vinden. Hier is de kromme EMF de cilinderas die discontinu kan zijn. Deze lijn correspondeert met de functie Ω. Euler benadrukt in regels 423-424 en 435-436 nogmaals dat de kromme EMF willekeurig getrokken kan worden. Hierdoor moet Ω wel discontinu kunnen zijn. Deze discontinue functies moeten dus wel bij de Analyse horen, zo concludeert Euler in de laatste sectie. In de afbeelding in sectie 22 is de kromme daarentegen continu.

Als de kromme een sprong zou bevatten, is het gevormde figuur (afhankelijk van de straal) mogelijk niet meer één lichaam. In het geval dat de kromme bijvoorbeeld uit twee rechte lijnen met een sprong bestaat, krijgen we twee cilinders. Euler benoemt deze mogelijkheid niet en lijkt er ook niet vanuit te gaan. Hij zoekt immers één lichaam dat aan zijn vraag voldoet. Of hij met de uitspraak 'met de hand getrokken krommen' bedoelt dat deze verbonden zijn, weten we niet, maar het is waarschijnlijk dat hij wel aan verbonden lijnen dacht met zijn verwoording.

3.8 De belangrijkste opmerkingen

We vatten hier de belangrijkste bevindingen samen. We zien ten eerste dat in [5] Eulers functiebegrip veranderd is. In [5] is een functie voor Euler niet per definitie een analytische uitdrukking. Een functie kan namelijk gegeven worden door verscheidene vergelijkingen, waardoor deze niet meer te schrijven is als één machtreeks.

Ook de definitie van een discontinue kromme is hier anders dan in de Introductio. Waar in de Introductio een discontinue kromme beschreven werd als samenstelling van verschillende functies, is hier een discontinue functie gedefinieerd aan de hand van een discontinue kromme. Zo'n discontinue kromme wordt door meerdere vergelijkingen beschreven. Een continue functie wordt dus door één (niet-constante) vergelijking gegeven, terwijl een discontinue functie uit verscheidene vergelijkingen bestaat.

In de Introductio schreef Euler dat elke functie een kromme definieert, maar andersom was dit niet het geval. In [5] schrijft Euler dat dit wel kan: elke kromme die je met de hand kan tekenen, geeft een functie weer.

Een functie geeft nog steeds de relatie tussen grootheden weer. Ook bepaalde eigenschappen van functies die we in de Introductio gezien hebben, lijken behouden te blijven. Zo is een functie van een variabele grootheid nog steeds een variabele grootheid. Waarschijnlijk ziet Euler nog steeds een vergelijking in de vorm $y = a$ niet als functie. Uit het voorbeeld van de veelhoeken blijkt dat een functie nog steeds meerwaardig kan zijn en/of impliciet gegeven kan worden.

Euler introduceert de discontinue functie bij het integreren van een functie van twee of meer variabelen. Om een oplossing volledig te maken, moet er een willekeurige functie, die mogelijk discontinu is, aan de oplossing toegevoegd worden. Dat deze oplossingen met discontinue functies ook echt bestaan, blijkt uit het probleem van de trillende snaar. Naar dit probleem verwijst Euler in het artikel in secties vier en negentien.

We vroegen ons af of krommen met een sprong een discontinue functie geven. Eerder stelden we in 2.3.1 de vraag of zo'n kromme door Euler überhaupt wel als discontinue kromme gezien wordt. We hebben hier geen duidelijk antwoord op gevonden. Een verwoording uit de derde alinea lijkt te suggereren dat krommen met een sprong als discontinu gezien worden. Aan de andere kant zijn we geen voorbeeld tegen gekomen waarin Euler discontinue krommen of functies met sprongen bekeek. Ook in het voorbeeld dat Euler in de laatste secties geeft, lijkt hij uit te gaan van louter verbonden krommen en functies. In de literatuur zijn we nog geen auteurs tegengekomen die dezelfde vraag stellen of beantwoorden.

Opvallend is verder dat Euler in sectie 21 de willekeurige functie Ω integreert. Hij legt niet uit hoe hij dit doet in het geval dat deze functie discontinu is. Euler schrijft in het vertaalde artikel ook niet over differentialen van discontinue functies. Mogelijk bepaalt hij deze stuksgewijs, maar dit benoemt hij niet expliciet. Hoewel we weten dat Ferraro het artikel gelezen heeft, schrijft hij hier niets over. In het volgende hoofdstuk zullen we het leerboek van Euler over integralen behandelen, om mogelijk antwoorden op deze vragen te vinden.

4 Integratie in 'Institutiones calculi integralis'

Euler schreef ook een leerboek over Integratie. Het driedelige boek 'Institutiones calculi integralis' is in 1763 geschreven en de delen zijn tussen 1768 en 1770 uitgegeven. In het boek over differentialen, [6], ging Euler er duidelijk vanuit dat alle functies (in Eulers termen) continu waren: de verhouding tussen differentialen kan dan altijd bepaald worden, dus de functies zijn differentieerbaar. Aangezien het leerboek over integralen uitgebracht is na het artikel dat we vertaald hebben, kunnen we ons afvragen of Euler er nu niet meer vanuit gaat dat deze verhoudingen noodzakelijk bestaan. Ook kijken we of Euler willekeurige functies introduceert bij de integralen van functies van hogere orden, zoals hij in De usu functionum deed.

4.1 De definitie van een integraal

Het boek over integralen, [7], is een vervolg op het boek over differentialen. In het eerste hoofdstuk van het eerste boek herhaalt Euler enkele concepten uit zijn eerder verschenen boek. Zo legt hij nogmaals uit dat bij een functie y van x zowel dy als dx gelijk zijn aan nul, maar dat de verhouding tussen deze twee differentialen dit niet is. De integraalrekening definieert Euler vervolgens, net zoals Leibniz en Johann Bernoulli, als het tegenovergestelde van differentiatie: als de verhouding $dy : dx$ tussen de differentialen bekend is, kan je met integraalrekening de relatie tussen y en x vinden [7, §1-5, Vol. I] [11, p. 107]. Opvallend is dat Euler hier de woorden 'relatie tussen grootheden' gebruikt (in bijvoorbeeld secties 1 en 4). Hij stelt dus niet dat je de vergelijking tussen x en y kan vinden, maar de relatie tussen deze grootheden. Zou hij hier een functie dus weer als een relatie tussen grootheden zien, en niet noodzakelijk als analytische uitdrukking?

In sectie tien gebruikt Euler wel de term 'functie'. Nadat Euler het symbool $\int$ geïntroduceerd heeft, geeft hij wat voorbeelden. Hij stelt dat van bijvoorbeeld de functie $y = x^2$ de differentiaal bekend is, dus $\int 2xdx = x^2$. In het vervolg komt de term 'functie' vaker voor. Zo is y in voorbeelden een functie van x, of z een functie van x en y [7, §9-22, Vol. I].

Alle keren dat Euler een voorbeeldfunctie gebruikt, is deze functie (in onze termen) continu differentieerbaar. Euler geeft dus geen voorbeelden van integralen van, in zijn woorden, discontinue functies. Eerder hebben we in paragraaf 3.2 gezien hoe Euler een discontinue functie definieerde als een samenstelling van twee of meer vergelijkingen. Deze vergelijkingen zijn stuk voor stuk wél integreerbaar op de manier die Euler in het eerste deel van [7] beschrijft. Als je een discontinue functie van één variabele stuksgewijs per vergelijking integreert, zoals wij dit zouden doen, kan je deze discontinue functies integreren. Elke vergelijking is dan een bekende differentiaal. Euler gebruikt echter geen grenzen bij het integreren, waardoor hij vermoedelijk de functies niet stuksgewijs integreert. Omdat een discontinue functie geen bekende differentiaal is, zou dit betekenen dat Euler discontinue functies niet integreert.

4.2 Een volledige integraal

In sectie 36 van [7] stelt Euler het volgende:

"Er wordt gezegd dat de volledige integraal wordt weergegeven als de gezochte functie wordt weergegeven met elke uitbreiding en met een willekeurige constante" [7, §36, Vol. I].

Hier introduceert Euler de willekeurige constante, zoals hij dit ook in [5, §14] doet. In de alinea erna geeft hij een voorbeeld en schrijft hij dat de volledige integraal van de differentiaal

xdx gelijk is aan $\frac{1}{2}xx + C$. Als C een specifieke waarde heeft, wordt de integraal particulier genoemd [7, §36-37, Vol. I].

In het derde boek behandelt Euler functies van meerdere variabelen. In secties zeven en elf benoemt Euler dat de constante C die aan de oplossing toegevoegd moet worden om de integraal volledig te maken, een functie kan zijn. Vanaf sectie 33 wordt Euler duidelijker over deze constante. Hier zoekt hij een oplossing voor de differentiaalvergelijking $\left(\frac{dz}{dx}\right) = a$ in het geval dat z een functie is van de variabelen x en y. De notatie voor de partiële differentiaal is hier hetzelfde als in [5, §16]. Als antwoord geeft Euler de oplossing $z = ax + f : y$, waarbij f een functie van y aanduidt, "die op zichzelf op geen enkele manier kan worden bepaald, maar volledig afhangt van onze keuze" [7, §33, Vol. III]. In sectie 37 schrijft Euler over de keuze van f het volgende:

"Hier wordt uiteraard elke functie van y ingevoerd, waarvan de aard op geen enkele manier door zichzelf kan worden bepaald. (...) Het is ook niet nodig dat deze kromme regelmatig is en door een of andere vergelijking wordt beschreven; elke kromme die met de vrije hand wordt getekend, garandeert hetzelfde effect, ook al is deze extreem onregelmatig en bestaat deze uit verschillende delen van verschillende krommen. Dergelijke onregelmatige functies kunnen discontinu worden genoemd of achtergelaten van continuïteit; vandaar dat het de moeite waard is om op te merken dat, aangezien de integraties van de eerste soort [namelijk de integratie van functies van één variabele] geen andere functies toelaten dan continue functies, hier ook discontinue functies worden onderworpen aan de calculus[18], waarvan verschillende eminente Wiskundigen hebben gedacht dat ze zo in strijd zijn met de principes van de berekening" [7, §37, Vol. 3].

Dit is een belangrijk citaat. Ten eerste zien we dat Euler de discontinue functie introduceert op dezelfde manier als in De usu functionum: de functies die bij integratie van functies van twee of meer variabelen aan de oplossing toegevoegd worden, kunnen discontinu zijn. Euler lijkt hier met een discontinue functie bovendien hetzelfde te bedoelen als in [5]. Daarbij schrijft hij dat bij het integreren van functies van één variabele louter uitgegaan wordt van continue functies. Euler integreert dus geen discontinue functies van één variabele. Uit de voorbeelden die hij verder in het boek geeft, volgt dat Euler ook geen discontinue functies integreert. Met deze uitspraak bedoelt hij dus dat de discontinue functie alleen gebruikt wordt om de oplossing van een differentiaalvergelijking volledig te maken. Dit is anders dan in sectie 21 van [5], waar Euler wél een discontinue kromme integreert.

In sectie 45 schrijft Euler dat de differentiaal van $f : y$ genoteerd wordt met $dyf' : y$. Hoe deze differentiaal gedefinieerd is in het geval dat $f : y$ discontinu is, legt hij niet uit. Misschien bestaat deze voor Euler alleen als $f : y$ continu is. In sectie 110 schrijft Euler echter nadrukkelijk op dat $f : q$ discontinu kan zijn, nadat hij $f' : q$ in een uitwerking noteerde. Het zou ook kunnen dat Euler de afgeleide functie op een punt met een knik beschouwt zoals bij het probleem van de trillende snaar: de knik kan op een infinitesimaal klein gebied rond gemaakt worden. Voor discontinue functies met een sprong erin, als deze functies voor Euler bestaan, kan dit niet. Dat de functie stuksgewijs gedifferentieerd kan worden, benoemt Euler niet.

Het lijkt erop dat Euler de discontinue functies een speciale rol geeft in de Analyse. Ze komen voor in de natuur en bij volledige integraties, maar ze zijn niet integreerbaar. Mogelijk zijn ze ook niet differentieerbaar, maar dit weten we na het bestuderen van 'Institutiones calculi integralis' niet zeker. Toch vullen deze functies wel de analyse aan, zoals Euler in [5] uitlegt. Ook hebben we gezien dat Euler in [7] de discontinue functies op dezelfde manier introduceert

[18] Het woord 'calculus' kan ook met 'berekening' vertaald worden.

als in De usu functionum.

5 Conclusie

We vroegen ons af hoe het functiebegrip van Euler veranderd is nadat Euler de discontinue functies in de analyse introduceerde. Dit hebben we gedaan door twee leerboeken van Euler te bestuderen, 'Introductio in Analysin infinitorum' en 'Institutiones calculi differentialis', en deze te vergelijken met 'De usu functionum discontinuarum in analysi'.

Deze scriptie begonnen we met het bestuderen van 'Introductio in Analysin infinitorum', Eulers leerboek over de Analyse. Hier zet Euler de functie centraal, die hij als analytische uitdrukking definieert. Dit houdt in dat voor Euler een functie als eindige of oneindige machtreeks geschreven kan worden. Ook hoeft een functie niet eenduidig te zijn of expliciet gegeven te worden: een vergelijking waarin variabelen voorkomen zodanig dat de variabelen afhankelijk zijn van elkaar, geeft een functie weer. Doordat Euler een functie van een variabele grootheid als variabele grootheid ziet, volgt dat constante functies uitgesloten zijn voor Euler.

Het tweede deel van de Introductio gaat over de toepassingen van de analyse in de meetkunde. Euler legt uit hoe een functie een kromme bepaalt. Vervolgens maakt Euler een verschil tussen continue krommen en discontinue krommen. Een kromme is discontinu als verschillende delen gegeven worden door verschillende functies, waarbij een functie hier nog steeds een analytische uitdrukking is. Zo kon Euler krommen met een knik erin beschouwen, waarmee Euler meer krommen beschouwde dan enkel de krommen die door één vergelijking gegeven worden. Dit bleek nodig te zijn bij het probleem van de trillende snaar. Voor Euler kan de snaar in het begin namelijk de vorm aannemen van een discontinue kromme.

In 'Institutiones calculi differentialis' lijkt Euler een functie abstracter te definiëren, namelijk als relatie tussen grootheden. Er is in deze verwoording geen analytische uitdrukking meer nodig. We vermoeden dat Euler een functie niet alleen ziet als een analytische uitdrukking, maar ook als relatie tussen grootheden. In de natuur komen deze relaties tussen grootheden voor. Het is goed mogelijk dat Euler de stap naar discontinue functies kon maken, omdat hij een functie ook als relatie tussen grootheden zag.

In 'De usu functionum discontinuarum in analysi' laat Euler de definitie van een functie als analytische uitdrukking los. Hij maakt een onderscheid tussen continue en discontinue functies. De continue wordt gegeven door één vergelijking, terwijl een discontinue functie niet als één vergelijking te schrijven is. Het begrip van discontinue krommen verandert nu ook: deze zijn niet meer gedefinieerd door middel van functies, maar door vergelijkingen. Een discontinue kromme bestaat niet uit één vergelijking.

Vermoedelijk introduceert Euler de discontinue functie vanwege observaties in de natuur. Bij het probleem van de trillende snaar bijvoorbeeld, kan de snaar de vorm aannemen van een discontinue kromme. Voor Euler hoort dit probleem bij de analyse. Omdat de analyse over functies gaat, moet zo'n discontinue kromme voor Euler door één (discontinue) functie geschreven kunnen worden. We zien dus ook dat de definitie van discontinue krommen een opstapje is voor discontinue functies. Eerst behandelt Euler de discontinue krommen, waarbij het functiebegrip intact blijft. Later past hij dit begrip aan door discontinue functies te beschouwen.

Euler introduceert de discontinue functie aan de hand van integratie: bij integraties van functies van twee of meer variabelen moet er een willekeurige functie, die discontinu kan zijn, aan de oplossing worden toegevoegd om deze volledig te maken. In 'Institutiones calculi integralis' beschrijft Euler dit op dezelfde manier.

Uit de vergelijking van Eulers leerboeken en De usu functionum kunnen we zien dat Euler de definitie van een functie als analytische uitdrukking (of machtreeks) loslaat zodra hij de discontinue functie bekijkt. Voor Euler is een functie ook een relatie tussen grootheden, waarbij mogelijk geen analytische uitdrukking meer nodig is. In De usu functionum blijft deze definitie gelden.

Er blijven ook een aantal vragen open, die we nog niet met andere literatuur beantwoord krijgen. Ten eerste is het niet duidelijk of functies met een sprong als discontinue functies worden beschouwd. De verwoordingen van Euler in de derde alinea van het vertaalde artikel suggereren dat dit het geval is, maar we hebben geen voorbeelden van dergelijke functies gevonden. Alle keren dat Euler een discontinue functie (of kromme) beschrijft, heeft deze enkel een 'knik'. Ten tweede is het nog niet duidelijk of en hoe Euler discontinue functies differentieert. Wel weten we dat Euler in 'Institutiones calculi differentiales', waarin hij uitgaat van louter continue functies, differentialen op dezelfde manier bepaalt als in 'De usu functionum discontinuarum in analysi'. Ten derde is Euler over integratie dubbelzinnig. In 'Institutiones calculi integralis' schrijft hij dat discontinue functies van één variabele niet integreerbaar zijn. In het vertaalde artikel noteert hij echter, zonder verdere uitleg, een mogelijk discontinue functie onder het integraalteken.

Al met al hebben we met behulp van 'De usu functionum discontinuarum in analysi' en Eulers leerboeken een goed beeld gekregen van Eulers functiebegrip en hoe Euler dit begrip door de invoering van discontinue functies veranderde. De vragen die open blijven staan, zijn mogelijk te beantwoorden door meer materiaal van Euler zelf te bestuderen. Het helpt wellicht om meer voorbeelden van discontinue functies te zien. In de leerboeken van Euler worden deze nauwelijks gegeven, maar in artikelen en brieven naar andere wiskundigen zijn we vaker afbeeldingen en voorbeelden tegen gekomen.

Referenties

[1] Johann Bernoulli, Opera omnia I, Bousquet, Lausanne/Genève, 1742.

[2] V.J.E. Blåsjö, *Transcendental curves in the Leibnizian calculus*, Thesis Utrecht University, 2016.

[3] H. J. M. Bos, Newton, Leibniz and the Leibnizian Tradition, in: *From the Calculus to Set Theory*, 1630-1910: An Introductory History, hoofdstuk 2, London, 1980.

[4] P. Erdős & U. Dudley, Some Remarks and Problems in Number Theory Related to the Work of Euler, in: *Mathematics Magazine*, Vol. 56, No. 5, 1983.

[5] L. Euler, De usu functionum discontinuarum in analysi, in *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, Vol. 11, pp. 2018-03-27, 1767, via `https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/322/`

[6] L. Euler, *Institutiones Calculi Differentialis*, vertaald door J. D. Blanton, Springer, Berlijn, 2000.

[7] L. Euler, *Institutionum Calculi Integralis*, 1755, vertaald door I. Bruce, via `https://www.17centurymaths.com/contents/integralcalculus.html`.

[8] L. Euler, *Introductio in Analysin infinitorum*, 1748, vertaald door I. Bruce, via `https://www.17centurymaths.com/contents/introductiontoanalysisvol1.htm`.

[9] L. Euler, *Sur le mouvement d'une corde, qui au commencement n'a été ébranlée que dans une partie*, in: Mémoires de l'académie des sciences de Berlin, Vol. 21, pp. 307-334, 1767.

[10] G. Ferraro, Functions, Functional Relations, and the laws of Continuity in Euler, in: *Historia Mathematica*, No. 27, pp. 107-132, 2000.

[11] A.P. Ferzola, *Euler and Differentials*, in: The College Mathematics Journal, Vol. 25, No. 2, pp. 102-111, 1994.

[12] I. Grattan-Guinness, *The development of the foundations of mathematical analysis from Euler to Riemann*, MIT Press, Cambridge, 1970.

[13] H. N. Jahnke, *A History of Analysis*, American Mathematical Society, Providence, 2003.

[14] G. Jouve, *Imprévus et pièges des cordes vibrantes chez D'Alembert (1755-1783):Doutes et certitudes sur les équations aux dérivées partielles, les séries et les fonctions*, Université Claude Bernard - Lyon, 2007.

[15] V.J. Katz, *A History of Mathematics: An Introduction*, Addison-Wesley, Reading, 2009.

[16] V.J. Katz, The Calculus of the Trigonometric Functions, in: *Historica Mathematica*, Vol. 14, pp. 311-324, 1987.

[17] J.L. Stammetz & W. Bordus, *Groot en volledig woordenboek der wiskunde, sterrekunde, meetkunde, rekenkunde, ... benevens andere nuttige kunsten en wetenschappen*, Amsterdam, 1758.

[18] J. Stedall, *Mathematics Emerging: A Sourcebook 1540-1900*, Oxford University Press, Oxford, 2008.

[19] D.J. Struik, *Geschiedenis van de Wiskunde*, Het Spectrum, Nieuwegein, 2001.

[20] H. Pinkster, *Woordenboek Latijn/Nederlands*, Amsterdam University Press, Amsterdam, 2013.

[21] G. F. Wheeler & W.P. Crummett, The vibrating string controversy, in: *American journal of Physics*, Vol. 55, No. 1, pp. 33-37, 1987.

6 Appendix: Over het gebruik van discontinue functies in de analyse

De vertaling is redelijk letterlijk; wel hebben we geprobeerd deze zo leesbaar mogelijk te maken. Zo zijn zinnen soms opgedeeld in meerdere zinnen. De woorden tussen [ ] zijn zelf toegevoegd om de tekst begrijpbaarder te krijgen. Er zijn verder een aantal keuzes gemaakt bij het vertalen. De volgende vertaalkeuzes komen vaak voor.

- Het gebruik van hoofdletters is overgenomen. Omdat 'calculus' zonder hoofdletter geschreven wordt, is ervoor gekozen om het met 'berekening' te vertalen en niet met 'calculus' of 'infinitesimaalrekening'.
- Het woord 'applicata' is met 'ordinaat' vertaald; 'abscissa' met 'abscis'.
- De woorden 'linea curva' zijn consequent met 'kromme lijn' vertaald. Hier wordt een kromme mee aangeduid.
- De term 'natura' is met 'natuur' vertaald; 'indoles' met 'aard'.
- De wiskundige notatie in de latere secties zijn letterlijk overgenomen. Met $F : \omega$, wordt bedoeld dat F een functie is van ω. Wij zouden dit als $F(\omega)$ noteren.

Andere vertaalkeuzes zijn in voetnoten in de tekst aangegeven.

Over het gebruik van discontinue functies in de analyse.

1. Wat in de Analyse van functies, of grootheden die in elk geval op een bepaalde manier worden bepaald door variabelen, gewoonlijk wordt onderwezen, is beperkt tot slechts die functies, die continu worden genoemd, en waarvan de vormgeving wordt omvat door een bepaalde regel. Dit wordt het best geïllustreerd door de leer van kromme lijnen, waar de ordinaten, voor zover ze door de abscissen bepaald worden, de taak van functies dragen, zodat de aard van alle functies zeer geschikt kan worden weergegeven door kromme lijnen. Op deze manier, hoe deze grootheid y ook wordt bepaald door x, of hoe de functie y van x ook moge zijn, kan er altijd een kromme worden beschreven, waarbij deze abscissen overeen zouden moeten komen met de x uit de eigen ordinaat y, en deze kromme lijn wordt passend geacht om de natuur van deze functie te representeren. Wanneer daarentegen dan ook een zekere kromme lijn voorgesteld wordt, vertonen zijn ordinaten zekere functies van de abscissen, waarvan de natuur betrokken wordt in de natuur van de kromme lijn zelf, want bij elke abscis hoort vanzelfsprekend een zekere ordinaat, waarvan de waarde rechtstreeks wordt berekend als een bepaalde functie van de abscis. En wanneer de ordinaat ofwel imaginair is ofwel tegelijkertijd meerdere waarden aanneemt, wordt deze verscheidenheid het best bekeken vanuit de natuur van de functie.

2. Het is inderdaad al bekend dat in de hogere Meetkunde gebruikelijk geen rekening wordt gehouden met andere kromme lijnen, tenzij de natuur ervan wordt gedefinieerd door een bepaalde vaste relatie tussen de coördinaten, uitgedrukt door een bepaalde vergelijking, zodat al zijn punten worden bepaald door dezelfde vergelijking als regel. Er wordt aangenomen dat deze regel het principe van continuïteit in zich draagt, omdat alle gebogen delen in zo'n nauwe band met elkaar zijn verbonden, dat geen enkele verandering daarin een plaats kan vinden door de behouden verbinding van continuïteit. Om deze reden worden deze kromme lijnen continu genoemd, en het maakt geen verschil of de vergelijking die hun natuur bevat algebraïsch of transcendent is, of bekend of nog onbekend, zolang we inzien dat er een bepaalde vergelijking gegeven kan worden, waarmee de natuur van zulke gebogen lijnen wordt uitgedrukt. Op deze plaats wordt geen rekening gehouden met de continuïteit van de baan, waarlangs de takken van de curven worden uitgebreid: en twee bij elkaar horende hyperbolen bepalen net zo een continue kromme lijn als een parabool of een ellips, ook al zijn beide banen onderling volledig gescheiden van elkaar. Want om deze reden wordt aan deze afzonderlijke hyperbolen continuïteit toegekend, omdat beide in één dezelfde vergelijking worden omvat, waaruit ze kunnen worden gevormd. En vanuit deze bron is het goed om de kwesties die doorgaans vaag worden besproken over de wet van continuïteit, te interpreteren en terug te brengen tot een bepaalde betekenis.

3. Wanneer vastgestelde criterium van continuïteit vastgesteld is, wordt het duidelijk wat een discontinue functie is, of [een functie] die verstoken is van de regel van continuïteit: Want alle kromme lijnen die niet door een zekere vergelijking bepaald worden, die gewoonlijk vrij met de hand getrokken worden, leveren zulke discontinue functies, aangezien het niet mogelijk is om in hen de waarden van de ordinaten te definiëren met een zekere regel voor de abscissen. Dergelijke kromme lijnen, in zoverre ze in tegenstelling zijn met een hogere aard van continuïteit met een vastgestelde regel, worden algemeen mechanisch genoemd, maar geschikter [worden ze] discontinu [genoemd], of [de kromme lijnen] die vrij zijn van een regel met continuïteit: en dit komt niet omdat hun delen niet met elkaar verbonden zijn, maar omdat ze niet worden bepaald door een bepaalde vergelijking. Zo moeten alle banen, die vrij met de hand op papier getrokken worden, zelfs wanneer ze continu voortlopen, volgens deze definitie toch als discontinu worden beschouwd, aangezien het zeker nooit zal gebeuren dat dergelijke banen door een zekere vaste vergelijking omvat worden. En hierbij is het ook goed om te verwijzen naar de lijnen die door iedereen 'gemengd'[19] genoemd worden, wanneer delen van verschillende kromme lijnen met elkaar worden verbonden, of zelfs [wanneer] delen van dezelfde lijn op de een of andere manier worden samengevoegd. Dus evenzo hoort de omtrek van een veelhoek, bestaande uit enkel en alleen rechte lijnen, hierbij, en ook lijnen die gevormd worden uit rechten en uit cirkelbogen, of uit welke andere kromme dan ook. Want hoewel hier ieder deel omvat wordt door een bepaalde vaste vergelijking, kan er toch voor de hele baan geen unieke vergelijking worden gegeven, waarin het karakter van continuïteit moet worden vastgesteld, waardoor alle banen van deze aard als discontinue lijnen moeten worden beschouwd, op dezelfde manier als die [lijnen], die vrij met de hand getekend kunnen worden.

4. Er wordt nu geen plaats gemaakt voor alle dergelijke discontinue lijnen en functies in de wiskundige Analyse, [en] het is op zich duidelijk, aangezien deze hele observatie bezig is met de uit te zoeken eigenschappen van de beschouwde lijnen, dat de taak op geen enkele manier zou kunnen worden aangenomen, tenzij de natuur van de lijnen werd omvat door een zekere vaste regel en vergelijking. Daarom hebben de meeste Wiskundigen, geleid door deze redenering, niet getwijfeld om alle discontinue lijnen en functies helemaal te verbieden uit zowel de Meetkunde als uit de hele Analyse en om ze te degraderen tot de objecten die deze wetenschap verafschuwt. De bekende D'Alembert is heeft deze opvatting zeer openlijk erkend, toen ik de bewegingen van trillende snaren zo in het algemeen had bepaald, dat de oplossing voor alle bewegingen en vormen, die aanvankelijk op de snaar zijn aangebracht, duidelijk werd. Want spoedig maakte de zeer uitmuntende man bezwaar tegen mij, dat die beweging niet duidelijk kan worden gedefinieerd, tenzij de in het begin aangebrachte vorm van de snaar continu is en daarbij ook gevat is door een zekere vaste vergelijking. Als het op een andere manier zou gebeuren, en [als] de vorm van de snaar in het begin discontinu zou zijn, dan zouden de daaropvolgende bewegingen tot het einde op geen enkele manier tot de Analyse behoren, en dus zou het zonde zijn deze te willen onderzoeken. Op dit bezwaar heb ik inderdaad voldoende gereageerd, en onlangs heeft de bekende Lagrange in "Acta Taurinensis" mijn oplossing zo overtuigend verdedigd, dat er verder geen ruimte meer is voor overgebleven twijfel.

5. Hier duikt dus een zeer belangrijke vraag op: wat moet geoordeeld worden over discontinue functies, of lijnen die zonder een zekere regel werden bepaald? En of en in hoeverre kan daaraan een plaats worden toegekend in de Analyse? In het zonet genoemde probleem is er zeker geen twijfel dat de snaar, die in het begin zo uit elkaar getrokken is dat haar figuur door geen enkele vergelijking kan worden bevat, een beweging zal volgen, en dat zij op ieder moment een bepaalde vorm en beweging zal aannemen, waarvan de bepaling duidelijk moet worden teruggebracht tot de Analyse en de wetenschap van de beweging, of de voorgeschreven grenzen van onze kennis nou in staat zijn deze vraag op te lossen, of niet. In beide gevallen zou de vraag altijd al onze aandacht waard zijn, en omdat het over grootheden gaat, moet het zeker beoordeeld worden als horend bij de Analyse. En hier wordt niet gevraagd hoe ver onze slimheid reikt, aangezien er nauwelijks enig wiskundige zal zijn die niet vaak zweet bij vragen die zijn krachten te boven gaan. Daarom is het geenszins zonde om te overwegen om dit soort vragen te behandelen; Sterker nog, hier moet een nog grotere moeite in worden gestoken. Nu ik verder alle moeilijkheden zorgvuldig heb overwogen, durf ik nog altijd te verzekeren, dat mijn oplossing van het probleem van de trillende snaren, in de breedste zin begrepen, correct is, en dat na de succesvolle afloop ervan met discontinue functies rekening gehouden moet worden. Ik erken verder ook dat dit probleem moet worden teruggebracht tot een speciale Analyse, een soort die tot nu toe te weinig gevormd is, waarvan de kracht en de natuur hierin

[19] Een gemengde lijn is hetzelfde als een discontinue lijn, zoals beschreven in deel twee van de Introductio. Zie het eerste citaat in paragraaf 2.3.1.

zo bijeenkomen, dat het noodzakelijkerwijs zelfs discontinue functies in zich bevat.

6. Om dit probleem op te lossen, merk ik op dat noch in de gebruikelijke Algebra, noch in dat deel van de Analyse van het oneindige dat tot nu toe voornamelijk behandeld is, discontinue functies kunnen worden toegelaten. De Analyse van het oneindige moet echter veel breder worden genomen, en het moet zulke delen bevatten die discontinue functies niet alleen niet afwijzen, maar ze zelfs naar hun eigen aard in zich opnemen, tenzij volledig willekeurige, en dus discontinue, functies in hun oplossing zijn geïntroduceerd. Deze delen van de Analyse zijn tot op heden echter nogal onontwikkeld, hoewel er overal uitstekende voorbeelden te vinden zijn; noch lijkt hun ware aard voldoende duidelijk begrepen te zijn. Om deze aard duidelijk uit te leggen, is het daarom noodzakelijk dat ik deze verschillende delen van de Analyses beschrijf en onderscheid van elkaar. Want zoals de Analyse van het oneindige gewoonlijk wordt gedefinieerd, kan men dit onderwerp moeilijk begrijpen, omdat de meeste definities zeer vaag en verwarrend zijn en niet de aard van het onderwerp waarover het gaat duidelijk en onderscheidend uitleggen.

7. De hele kracht van de Analyse van het oneindige kan het best uitgelegd worden vanuit het begrip en de aard van functies, die het gemakkelijkst ingedeeld kunnen worden in klassen op basis van het het aantal variabele grootheden, waarmee ze op een zekere vaste manier bepaald worden. Zo zal de eerste klasse functies van één enkele variabele grootheid bevatten. Dergelijke functies zijn ordinaten van zekere lijnen, met betrekking tot de abscissen. Dus als de abscis $= x$ en de ordinaat $= y$, zal y een functie zijn van de variabele x, waarvan de natuur wordt uitgedrukt door de kromme lijn, ofwel door een vergelijking die wordt gegeven tussen x en y. Hierdoor zal, zodra een bepaalde waarde aan de abscis x wordt gegeven, ook de ordinaat y een bepaalde waarde krijgen, of deze nu eenvoudig, meervoudig of zelfs imaginair is. Daaruit wordt begrepen dat de abscis x ook omgekeerd als een functie van de ordinaat y kan worden beschouwd. Op dezelfde manier moet, als een lichaam langs een bepaalde lijn beweegt, zijn snelheid in elk punt worden teruggebracht tot een functie van één enkele variabele; het is immers een functie van zijn variabele grootheid, waardoor de punten van zijn lijn voortdurend worden bepaald. In deze klasse moeten de meeste tot nu toe besproken vragen worden behandeld, ook al worden er vaak meerdere variabelen in de berekening opgenomen, omdat ze uiteindelijk allemaal worden bepaald door één enkele [variabele]. Als bijvoorbeeld de beweging van de maan wordt onderzocht, wordt voorgesteld om op elk gegeven moment zijn lengte, breedte en afstand tot de aarde te zoeken; Maar omdat deze individuele elementen uiteindelijk moeten worden bepaald door alleen de tijd, zal niet alleen de lengte maar ook de breedte en de afstand, afzonderlijk als een functie van de tijd kunnen worden beschouwd, en dus van één enkele variabele.

8. Maar functies van twee of meer variabelen worden bepaald door dergelijke twee of meer variabelen, die op geen enkele manier van elkaar afhankelijk zijn, en waarvan het mogelijk is om aan elk afzonderlijk alle mogelijke waarden toe te kennen. Zulke functies komen voor wanneer de aard van massieve [lichamen] en oppervlakten onderzocht wordt. Dit gebeurt meestal aan de hand van de drie coördinaten x, y en z, waarvan er twee x en y in een bepaald vlak zijn genomen, terwijl de derde, z, zich loodrecht op dit vlak naar het oppervlak uitstrekt. Omdat bij elk punt van de basis, dat wordt gedefinieerd door het paar variabelen x en y, een bepaalde loodrechte z staat, zal z zeker een functie zijn van het paar variabelen x en y, die op geen enkele manier van elkaar afhankelijk zijn. Want als we alle punten van het oppervlak willen vastleggen, moeten zowel x als y afzonderlijk exact alle waarden krijgen, zodat op deze manier die loodrechte [lijnen] voor alle punten van de basis kunnen worden verkregen. Vervolgens, als het lichaam uit heterogene deeltjes bestaat, zodat elk punt binnen het lichaam zijn eigen dichtheid heeft, wordt in eerste instantie de positie van elk punt bepaald door drie coördinaten x, y en z, die geheel onafhankelijk zijn van elkaar, omdat om alle punten binnen het lichaam te verkrijgen, aan deze drie coördinaten alle mogelijke waarden achtereenvolgens moeten worden toegewezen. Als de dichtheid op een elk punt daarom wordt aangegeven met de hoeveelheid v, moet deze worden gezien als een functie van de drie variabelen x, y en z. En als de deeltjes van dit lichaam ergens naartoe worden verplaatst, zal de beweging van elk punt niet alleen afhangen van zijn positie bepaald door de drie coördinaten, maar ook van de tijd, zodat de beweging moet worden gezien als een functie van vier variabelen.

9. Met deze vastgestelde definitie en verdeling van functies kunnen de grondslagen van de Analyse van het oneindige zeer duidelijk worden uiteengezet, omdat deze discipline het makkelijkst wordt verdeeld in zoveel delen als er gegeven klassen van functies zijn, omdat elk van hen moet worden opgebouwd volgens specifieke beginselen en voorschriften. Het eerste deel, dat nog steeds er weinig ontwikkeld is, en waar de beginselen van differentiaal- en integraalrekening speciaal voor zijn aangepast, houdt zich bezig met functies van één enkele variabele. Als y daarom eerst een willekeurige functie is van één variabele x, is het gebruikelijk om de toename of afname van die functie y te beschouwen, terwijl de grootheid x toeneemt met welke toename dan ook. Vervolgens wordt deze toename [van x] doorlopend verminderd, totdat deze uiteindelijk helemaal verdwijnt, in welk geval zelfs de toename van de functie y tot niets leidt. Deze verdwijnende toenames worden differentialen genoemd. Het is duidelijk dat ze van elke hoeveelheid zijn verlaten, en dus gelijk zijn aan niets, zodat er geen vraag kan worden gesteld naar hun hoeveelheid. Evenmin is de differentiaalrekening druk bezig met het onderzoeken van de hoeveelheid van de differentialen, die nul is, maar hun onderlinge verhouding moet gedefinieerd worden; deze verhouding krijgt zeker een bepaalde grootheid. Van de functie y wordt duidelijk niet zozeer de differentiaal dy zelf, maar de verhouding ervan tot de differentiaal dx onderzocht, vanzelfsprekend de waarde van de fractie $\frac{dy}{dx}$, die in elk geval een bepaalde hoeveelheid aanneemt, en zelf als een nieuwe functie van x kan worden beschouwd.

10. Laten we dan een functie voorstellen als $y = axx + bx + c$, en laten we eerst kijken hoeveel toename deze functie ondergaat, wanneer een willekeurige toename ω wordt gegeven aan de hoeveelheid x; en door $x + \omega$ in plaats van x te plaatsen, gaat onze functie naar $axx + 2ax\omega + a\omega\omega + bx + b\omega + c$, zodat de groei $= 2ax\omega + a\omega\omega + b\omega$ is, wat we zullen aanduiden met het symbool Δy, en op soortgelijke wijze zal de grootheid ω, als toename van x, ook worden aangegeven met dit teken Δx.

Omdat $\Delta x = \omega$ en $\Delta y = 2ax\omega + a\omega\omega + b\omega$, zal $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2ax\omega + a\omega^2 + b\omega}{\omega} = 2ax + a\omega + b$ zijn, en er is dus een verhouding tussen de stappen van Δx en Δy, die waar is, hoezeer de hoeveelheid x ook toeneemt met ω. Dus deze verhouding zal ook overeenkomen met de waarheid als ω volledig verdwijnt. In dat geval zullen deze toenames Δx, Δy met deze tekens dx en dy worden aangeduid en gewoonlijk differentialen worden genoemd. Dus het is duidelijk dat, met $\omega = 0$, $\frac{dx}{dy} = 2ax + b$ tevoorschijn komt, en dat deze verhouding waar is, zelfs als de termen, waaruit hij bestaat, verdwijnen. Dit enkele voorbeeld lijkt voldoende te zijn om alle twijfels weg te nemen, waarmee de algemene notie van oneindige kleinigheid in de Analyse gewoonlijk wordt aangevallen, en om deze berekening te zuiveren van alle verdenkingen.

11. Aangezien deze verhouding $\frac{dy}{dx}$ van de differentialen weer een functie van x zelf is, kan, als deze wordt aangegeven door de letter p, de verhouding van zijn differentialen dp tot dx, of de fractie $\frac{dp}{dx}$, op een soortgelijke manier worden gedefinieerd. Om te voorkomen dat er een nieuwe letter in de berekening geïntroduceerd wordt, wordt $p = \frac{dy}{dx}$ gewoonlijk aangeduid met de notatie $\frac{ddy}{dx^2}$, waarvan wordt gezegd dat het differentialen van de tweede graad omvat. En zo verder voortgaand, worden differentialen in deze vormen $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$ etc. de ingrediënten van de derde, vierde en hogere orde genoemd, waarvan de betekenis, zoals eerder aangetoond bij de eerste orde, altijd wordt teruggebracht tot de verhouding tussen differentialen van twee grootheden, waarvan de een een functie is van de ander. En op deze manier vallen alle controverses die eens zijn gekomen over de differentialen van alle orden en hun natuur, vanzelf weg, omdat alles wat in deze berekening wordt gedefinieerd altijd wordt teruggebracht tot de verhouding van de differentialen, waarvan de realiteit zonder enig twijfel is. En er worden verder geen waarheden weggegooid in deze berekening[20]. Ze kunnen op geen enkele manier achtergesteld worden voor de Wiskunde. Ik ontken niet dat dergelijke berekeningen in deze disclipline worden aanvaard, die lijken te resulteren in zeer kleine hoeveelheden van de differentialen, maar aangezien de betekenis altijd moet worden geïnterpreteerd vanuit vaste principes, is het passend om dergelijke vormen te tolereren, hoewel ze minder geschikt lijken. Bovendien wordt, aangezien de uitdrukking $p = \frac{dy}{dx}$ precies echt is, zelfs deze gelijkheid $dy = pdx$ terecht aanvaard, hoewel er in geen van beide delen een grootheid wordt herkend.

12. Deze definitie van de differentiaalrekening is daarom niet langer in onduidelijkheid gehuld. Het wordt daarom een methode genoemd, om gegeven elke functie van een of meer variabelen, de verhoudingen tussen differentialen van zowel de eerste als hogere orde te onderzoeken. Van de functies van één enkele variabele, waar ik hier alleen nog maar rekening mee houd, is deze definitie het duidelijkst: want als y een willekeurige functie van x zou zijn, leert de differentiaalrekening hoe de waarde van de breuk $\frac{dy}{dx}$ moet worden verkregen. En dezelfde regel waarmee dit wordt gegarandeerd, geldt ook voor hogere differentialen. Wanneer $\frac{dy}{dx} = p$, wordt uit deze functie van x de waarde van $\frac{dp}{dx}$ of $\frac{ddy}{dx^2}$ met dezelfde methode verkregen. En als verder $\frac{dp}{dx} = \frac{ddy}{dx^2} = q$ wordt bepaald, en ook $\frac{dq}{dx} = \frac{d^3y}{dx^3} = r$, dan $\frac{dr}{dx} = \frac{d^4y}{dx^4} = s$ etc., dan is dezelfde methode voldoende om al deze waarden van q, r, s, etc. te vinden. En hier moet worden gebracht wat vaak wordt gegeven over differentiaalrekening, differentialen en hogere differentialen, die, als ze juist worden begrepen, zeker niets bevatten dat in strijd is met de eerste principes van onze kennis. Wanneer zelfs in de elementen van de differentiaalrekening vaak verschillende variabele grootheden voorkomen, en de voorschriften lijken te verwijzen naar die delen die ik hieronder uiteenzet, wordt er toch altijd een duidelijke verbinding in hen toegelaten, zodat ze uiteindelijk allemaal kunnen worden gezien als functies van één enkele variabele. Ondertussen verschillen de regels voor differentiatie van de volgende delen echter niet van de eerste.

13. Ik definieer de integraalrekening in het algemeen op deze manier zodat het een methode is om de aard van functies te vinden uit een gegeven relatie van differentialen; deze definitie zal ik voor het geval van functies van één enkele variabele duidelijker uiteenzetten voordat ik verder ga met functies van meerdere variabelen. Uiteraard stellen we dat voor een functie van één variabele $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{dp}{dx} = q$, $\frac{dq}{dx} = r$, etc.. Als er een willekeurige vergelijking wordt gegeven waarin, naast de grootheden x en y ook deze p, q, r, etc. die uit de differentialen zijn ontstaan, voorkomen, dan is het de taak van de integraalrekening, om uit deze vergelijking of relatie tussen de differentialen de gegeven natuur van de functie y te vinden, hoe deze ook wordt bepaald door x. De bewerking wordt gewoonlijk integratie genoemd. Maar er is nog veel te doen, want deze methode is nog niet voldoende uitgewerkt. En als we alle vragen die ermee te maken hebben grondig onderzoeken, kunnen we er maar heel weinig oplossen met de hulp ervan. En voor zover het is uitgewerkt, is het vastgelegd in verschillende voorschriften voor de orde van de differentialen die in de gegeven relatie aangaan. Dus als een willekeurige relatie wordt voorgesteld tussen de grootheden x, y en $p = \frac{dy}{dx}$, wat een differentiaalvergelijking van de eerste graad wordt genoemd, slaagt integratie in de meeste gevallen. Maar als deze relatie bovendien de grootheid q bevat, wordt de vergelijking een differentiaal van de tweede orde

[20]of: calculus

genoemd, en is er een dubbele integratie nodig, voordat de gewenste relatie tussen x en y wordt bereikt, waardoor de relatie van deze functie y duidelijk wordt. Hier zijn er veel minder gevallen waarin het doel wordt bereikt; en tegelijkertijd is het duidelijk hoe er moet worden geoordeeld over differentiaalvergelijkingen van de derde en hogere orde.

14. Maar wat betreft deze integraties, die dienen om functies met slechts één enkele variabele te onderzoeken, moet een bijzondere eigenschap, waarin de aard van deze methode ligt, goed worden opgemerkt. Deze eigenschap bestaat hieruit. De geïntegreerde vergelijking ontvangt altijd een nieuwe constante grootheid, waarvan geen spoor te zien is in de differentiaalvergelijking. Deze constante grootheid wordt volledig aan ons oordeel overgelaten. Dus als we deze differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} = 2ax + b$, of $dy = 2axdx + bdx$ hebben, waarbij de letters a en b inderdaad gegeven constante grootheden aanduiden, dan is de geïntegreerde vergelijking altijd als volgt: $y = axx + bx + C$, waarbij C een constante grootheid aanduidt die helemaal niet afhankelijk is van het voorgaande, en waarvan de waarde volledig aan ons oordeel wordt overgelaten. En geen enkele integratie van welke differentiaalvergelijking dan ook mag als volledig en perfect worden beschouwd, tenzij een dergelijke willekeurige constante grootheid is voorgesteld. Op dezelfde manier, als de gegeven relatie differentialen van de tweede graad omvat, vereist een volledige oplossing twee dergelijke willekeurige constanten, aangezien een dubbele integratie nodig is. En als differentiaalvergelijkingen van de derde graad perfect worden opgelost, zijn natuurlijk drie van dergelijke constanten nodig. Van deze constanten is het bijzonder opmerkelijk dat ze zeer nauw verbonden zijn met de natuur van de problemen. En alle problemen waarvan de oplossing tot differentiaalvergelijkingen leidt, zijn zo geregeld, dat na voltooiing van de integratie de constanten hun bepaling verkrijgen uit de natuur van de zaak zelf en de bijbehorende omstandigheden.

15. Nu is dus het eerste deel van de Analyse van het oneindige bekend, dat zich bezig houdt met functies van slechts één enkele variabele, en hieruit zal veel gemakkelijker worden begrepen wat we moeten weten over de rest van de delen, waar functies van twee of meer variabelen aanwezig zijn. Nu wordt in de differentialen echter een andere verhouding ontdekt, aangezien het niet mogelijk is om ze absoluut met elkaar te vergelijken. Als z immers een willekeurige functie is van twee variabelen x en y, moet de vraag naar differentialen in twee delen gesteld worden: eerst wordt gezocht naar het differentiaal van z zelf, terwijl y dezelfde waarde behoudt, en de andere variabele x met het differentiaal dx groeit, zodat de waarde van de breuk $\frac{dz}{dx}$ verkregen wordt. Op dezelfde manier, wanneer x als constante behandeld wordt, wordt aangenomen dat de andere [variabele] y met dy toeneemt. En door de toename dz te verzamelen, waarmee de functie z groeit, drukt de breuk $\frac{dz}{dy}$ de differentiaalverhouding uit die wordt veroorzaakt door de variabiliteit van alleen de grootheid y. Beide breuken $\frac{dz}{dx}$ en $\frac{dz}{dy}$ zullen, zoals in het vorige geval, zich beperken tot eindige termen, en beide kunnen worden beschouwd als nieuwe functies van de twee variabelen x en y. Nadat deze twee waarden zijn gevonden, wordt de ware verhouding van differentialen van de gegeven functie z duidelijk; want uit deze verbinding wordt dan pas duidelijk hoe de differentiaal van z zich verhoudt tot de variabiliteit van beide grootheden x en y. De natuur van de zaak zelf vereist dit onderscheid, zonder welke de verhouding van differentialen van dergelijke functies niet eens zou kunnen worden begrepen, maar dat is nu vanzelfsprekend.

16. Maar om deze breuken niet te verwarren met de voorgaande, worden ze tussen haakjes geplaatst, en op deze manier worden ze gewoonlijk genoteerd als $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ en $\left(\frac{dz}{dy}\right)$. Als we deze breuken aanduiden met de letters p en q, zal het volledige differentiaal van functie z zeker $dz = pdx + qdy$ zijn. En aangezien p en q opnieuw gezien kunnen worden als functies van x en y zelf, wordt ook begrepen wat deze formules betekenen: $\left(\frac{dp}{dx}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{dp}{dy}\right) =$

$\left(\frac{ddz}{dxdy}\right)$; $\left(\frac{dq}{dx}\right) = \left(\frac{ddz}{dxdy}\right)$ en $\left(\frac{dq}{dy}\right) = \left(\frac{ddz}{dy^2}\right)$, die differentialen van de twede graad in zich omvatten, en op een vergelijkbare manier wordt de ontwikkeling gedaan voor differentialen van hogere graden. Dus gegeven een willekeurige functie z van twee variabelen x en y, schrijft de differentiaalrekening regels voor, waarme de waarden van al deze formules van differentalen gevonden kunnen worden: eerst natuurlijk die van de eerste graad, die zijn $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ en $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, vervolgens die van de tweede graad, die zijn $\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{ddz}{dxdy}\right)$ en $\left(\frac{ddz}{dy^2}\right)$, en vervolgens die van de derde graad, namelijk $\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right)$, $\left(\frac{d^3z}{dx^2dy}\right)$, $\left(\frac{d^3z}{dxdy^2}\right)$, $\left(\frac{d^3z}{dy^3}\right)$, en zo verder. Hier moet worden opgemerkt dat deze methode zelf, het bepalen/definiëren van deze formules/vormen, niet verschilt van die in het eerste deel, aangezien bij elke differentiatie slechts één enkele grootheid als variabele wordt beschouwd. Het zou overbodig zijn om dezelfde betekenissen over de functies van drie of meer variabelen uit te leggen, aangezien ze al voldoende duidelijk zijn gemaakt door wat al eerder besproken is.

17. Het werk van de integraalrekening bestaat hieruit, dat gegeven een willekeurige functie tussen de grootheiden x, y, z en de zojuist ingevoerde formules van differentialen, de natuur van de functie z, zoals die wordt samengesteld uit de variabelen x en y, wordt onderzocht. Deze gegeven relatie wordt uitgedrukt door een vergelijking, die als deze alleen de formules van differentialen van de eerste orde $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ en $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ naast de grootheden x, y, en z zelf bevat, een differentiaalvergelijking van de eerste graad genoemd wordt. Maar als in deze [vergelijking] bovendien formules van differentialen van de tweede orde $\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{ddz}{dxdy}\right)$, $\left(\frac{ddz}{dy^2}\right)$, of zelfs van de derde of hogere orden worden ingevoerd, dan wordt deze vergelijking een van dezelfde orde differentiaal genoemd. En dit is de algemene vorm van de integraalerkening, zoals het is toegepast op functies van twee variabelen. Hieruit wordt tegelijkertijd begrepen hoe de andere delen van de Analyse van het oneindige, waar functies van drie of meerdere variabelen worden behandeld, moeten worden gedefinieerd. Maar de integraalrekening aangepast aan functies van twee variabelen, verschilt sterk van de gewone integraalrekening, waar alleen functies van één enkele variabele voorkomen. En het vereist geheel uitzonderlijke regels, behalve dat alle technieken van het eerste deel er in gebruik worden genomen. Maar het is nog niet zo lang geleden dat dit eerste deel van de Analyse begonnen is te ontwikkelen, zodat de eerste elementen ervan nauwelijks voldoende uitgewerkt zijn. Er zijn nu namelijk overal uitzondelijke voorbeelden van dit soort berekeningen te vinden, maar hun behandeling is minder beperkt tot de voorschriften van de gewone berekening. Vandaar dat er een zeer breed veld wordt geopend, waarin de grootste talentenhun kracht kunnen inzetten voor de maximale vooruitgang in de wetenschap.

18. Maar de kracht en het specifieke karakter van deze nieuwe berekening lijkt voor dit doel nog niet voldoende begrepen te worden. Want zoals de kracht van de gewone integraalrekening hieruit bestaat dat bij elke integratie een nieuwe constante grootheid door ons arbitrair wordt geïntroduceerd in de berekening, zo wordt in dit deel, dat zich bezig houdt met functies van twee variabelen, bij elke integratie niet alleen een nieuwe constante grootheid, maar zelfs een nieuwe volledig onbepaalde functie van een zekere variabele in de berekening gebracht, die zo afhankelijk is van ons arbitraire oordeel dat zelfs discontinue functies kunnen worden aangenomen. Daarom wordt het gebruik van discontinue functies niet alleen niet uitgesloten door deze nieuwe soort berekening, maar lijkt het [gebruik] zelfs in zekere zin essentieel te zijn voor de natuur ervan. Ook mag geen enkele integratie in deze berekening als volledig en absoluut worden beschouwd, tenzij in de integraalvergelijking een volledig willekeurige functie van deze soort is ingevoerd. En als een differentiaalvergelijking van de tweede of een hogere graad is gegeven, waarbij twee of meer integraties nodig zijn, is het noodzakelijk dat er net zo veel arbitraire functies in de laatste integraalvergelijking worden gevonden. Anders kan niet alleen het integraal niet als volledig worden beschouwd, maar ook de regeling in de integraalrekening, waarbij de invoering van willekeurige constanten wordt genegeerd. Wanneer echter functies van drie variabelen die in de berekening worden behandeld, wordt bij elke integratie een willekeurige functie van twee variabelen in de berekening geïntroduceerd. Door deze omstandigheden onderscheidt deze berekening zich zozeer van de voorgaande dat het als een apart soort moet worden onderzocht, aangezien de natuur van elke soort het meest geschikt wordt bepaald uit de aard van de arbitraire grootheid, die door integratie wordt ingevoerd. En als het gaat om functies van vier variabelen, moet deze geïntroduceerde arbitraire grootheid bij elke integratie een functie van drie variabelen worden, enzovoort.

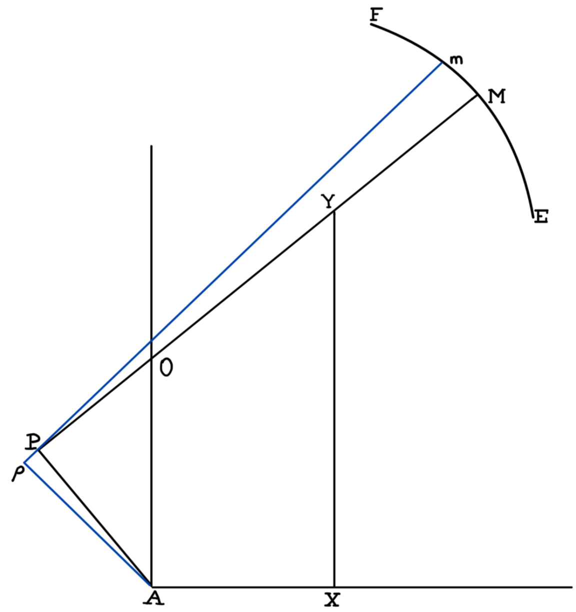
19. Deze zaken mogen echter geenszins worden toegeschreven aan enige irritatie van de berekening, die verlaten is van enig nut en alleen dient voor nietige speculaties, maar eerder zijn ze sterk gebaseerd op de natuur van dingen, en sluiten ze op een zeer mooie manier aan bij de werkelijke aaneenschakeling [van gebeurtenissen]. Want zoals alle vraagstukken over functies van één enkele variabele, waarvan bijna alle die in de Analyse tot nu toe behandeld zijn van deze soort zijn, niet volledig worden opgelost, tenzij bij elke integratie een nieuwe constante grootheid wordt geïntroduceerd, die vervolgens moet worden bepaald uit de omstandigheden van het probleem: zo zijn ook zijn alle problemen waarvan de oplossing wordt geleid naar functies van twee variabelen, op een zodanige manier geordend dat, tenzij bij elke integratie een nieuwe willekeurige of onbepaalde functie van één variabele wordt geïntroduceerd, op geen enkele manier kan worden voldaan aan alle voorwaarden die het probleem bepalen. Een uitstekend voorbeeld hiervan is te zien in het probleem van vibrerende snaren. Want als voor elk punt van een snaar, dat met een interval $= x$ verwijderd is van het andere uiteinde gedurende een tijdsperiode t, de uitrekking van de as, of de toestand van het evenwicht, genoteerd als z, is het duidelijk dat z een functie is van de twee variabelen t en x, omdat deze uitrekking zeker varieert, zowel voor verschillende punten op de snaar als voor de tijd die verstrijkt. Aangezien dus bij tijdstip $t = 0$ de toestand van de snaar moet optreden, die zelf in het begin werd geïntroduceerd, en waarbij de afwijking z gelijk was aan een functie van een bepaald gegeven interval x, kan deze oplossing niet perfect zijn, tenzij een dergelijke ongedefinieerde functie wordt opgenomen, die vervolgens kan worden gedefinieerd uit de initiële toestand van de snaar. En omdat deze toestand zo afhangt van onze arbitraire keuze, zodat elk onregelmatig en discontinu figuur van de snaar kan worden geïntroduceerd, moet de functie die door de Analyse wordt geïntroduceerd, zo ruim mogelijk zijn, zodat deze zelfs discontinue [functies] omvat, die afwijken van de regel van continuïteit.

20. Maar om hier geen ruimte voor twijfel te laten bestaan, zal ik zo'n probleem ontwikkelen, waarvan de oplossing zo gemakkelijk uit de elementen kan worden afgeleid, en dat zo is gerangschikt dat daarin discontinue functies, of kromme lijnen die naar believen zijn getrokken, noodzakelijkerwijs moeten worden toegelaten. Vervolgens zal ik hetzelfde probleem analytisch behandelen, zodat de noodzaak van willekeurige functies die door integratie worden geïntroduceerd, duidelijk wordt uit de overeenstemming met de vorige oplossing. Het probleem is als volgt: dat alle solide [lichamen], waarvan de getrokken normalen op hun oppervlakken in elk punt van gelijke grootte zijn. Als het om lijnen gaat, is het bekend dat er, behalve een cirkel geen kromme lijn kan worden gegeven, waarvan alle normalen gelijk zijn aan elkaar. Maar als deze gelijkheid van normalen wordt uitgebreid tot solide [lichamen], zodat alle rechten die vanuit een gegeven vlak als basis normaal naar het oppervlak worden getrokken, gelijk aan elkaar moeten zijn, kunnen oneindig veel solide [lichamen] worden gepresenteerd waarop deze eigenschap geldt. In de eerste plaats gebeurt dit duidelijk in een hemisfeer of zelfs een sfeer, waarvan het centrum in dat vlak of basis is gelegen, terwijl alle normaallijnen samen stralen van de sfeer zijn. Vervolgens, als een cilinder zo wordt geplaatst dat zijn as op de basis valt, worden ook alle normalen als gelijk aan elkaar beschouwd. Hieruit concluderen we echter dat de oplossing veel breder is, omdat met behoud van deze eigenschap, de as van de cilinder op welke manier dan ook gebogen kan worden. Het kan dat de algemene oplossing op de volgende manier weergeven wordt. Een willekeurige kromme lijn wordt beschreven op een vast vlak, ofwel continu, ofwel discontinu. Op basis hiervan wordt er een solide [lichaam] op geconstrueerd, waarvan alle doorsneden die normaal op die lijn zijn gemaakt, halve cirkels zijn met centra die op die lijn vallen. Dus, tenzij de analytische oplossing even breed is, zodat deze een willekeurig getrokken lijn in zich bevat, of wat op hetzelfde neerkomt, een onbepaalde functie, kan deze [Analyse] zeker niet als perfect en absoluut worden beschouwd.

21. Dus als we twee coördinaten x en y in een vast vlak aannemen, en de loodlijn vanaf daar die het het gezochte oppervlak raakt $= z$, waarbij z wordt beschouwd als een functie van de twee variabelen x en y, dan worden de formules van differentialen $\left(\frac{dz}{dx}\right) = p$ en $\left(\frac{dz}{dy}\right) = q$, zodat $dz = pdx + qdy$. Vanaf hier wordt afgeleid dat de normaal op het oppervlak tot aan het vaste vlak is uitgerekt, gelijk aan $z\sqrt{(1+pp+qq)}$. Aangezien deze een constante grootheid moet zijn, wordt aangenomen dat $z\sqrt{(1+pp+qq)} = a$. En voor z moet een dergelijke functie van de twee variabelen x en y worden onderzocht, zodat deze voorwaarde, namelijk een differentiaalvergelijking van de eerste graad, wordt vervuld. Zodat we gemakkelijker door integratie tot de oplossing komen, gebruiken we deze substituties: laat $p = \frac{\sin\phi\cos\omega}{\cos\phi}$ en $q = \frac{\sin\phi\sin\omega}{\cos\phi}$, zodat $pp + qq = \frac{\sin\phi^2}{\cos\phi^2}$ wordt, en dan $\frac{z}{\cos\phi} = a$, of $z = a\cos\phi$, dus de veronderstelde differentiaalvergelijking wordt hiernaar omgezet: $-ad\phi\sin\phi = \frac{\sin\phi}{\cos\phi}(dx\cos\omega + dy\sin\omega)$ of $-ad\phi\cos\phi = dx\cos\omega + dy\sin\omega$, waarbij wanneer het eerste deel integratie toelaat, het laatste deel ook integreerbaar moet zijn, waardoor een bepaalde relatie tussen de variabelen x, y en ω wordt vastgesteld. Dus door te integreren krijgen we: $-a\sin\phi = x\cos\omega + y\sin\omega - \int dw(y\cos\omega - x\sin\omega)$. Het is duidelijk dat deze integraal niet kan worden uitgedrukt, tenzij de formule $y\cos\omega - x\sin\omega$ een functie van één variabele ω is. Laten we dus stellen: $y\cos\omega - x\sin\omega = F' : \omega$, zodat $\int dw(y\cos\omega - x\sin\omega) = F : \omega$, en dan is $-a\sin\phi = x\cos\phi + y\sin\phi - F : \omega$. Of laat Ω een willekeurige functie van ω zijn, hoe onbepaald dan ook, zodat zelfs discontinue functies er niet van worden uitgesloten, en aangenomen dat $F' : \omega = \Omega$, dan zal $F : w = \int \Omega dw$ zijn. En de oplossing van het probleem vanwege $a\sin\phi = \sqrt{(aa-zz)}$ wordt gegeven door deze vergelijkingen: $y\cos\phi - x\sin\phi = \Omega$, en $\sqrt{(aa-zz)} = \int \Omega d\omega - \cos\omega - y\sin\omega$, waarbij het wortel figuur zowel negatieve als positieve waarden kan aannemen.

22. Laten we nu eens bekijken hoe deze formules kunnen worden toegepast op de constructie. Laat de kaart zelf verwijzen naar het vaste vlak, waarop de basis van het lichaam in kwestie wordt gevormd, waarin de twee coördinaten, $AX = x$ en $XY = y$, liggen, zodat het punt Y loodrecht staat op het derde coördinaat z. In hetzelfde vlak van de as AX wordt de lijn AO normaal getrokken en de lijn AP getrokken, zodat de hoek $OAP = \omega$ is. Hierop wordt vanuit Y de normaal YP getokken, waarbij

$$AP = y\cos\omega - x\sin\omega \text{ en } PY = y\sin\omega + x\cos\omega.$$



Nadat we deze lijnen in de berekening hebben geïntroduceerd, zullen onze beide vergelijkingen als volgt zijn: $AP = \Omega$ en $PY + \sqrt{(aa - zz)} = \int \Omega dw$. Nu wordt de rechte PY tot M uitgebreid, zodat $YM = \sqrt{(aa - zz)}$, en daarom is $PM = \int \Omega dw$, waardoor de relatie tussen de lijnen AP en PM goed onderzocht moet worden. Nu in de nauwe omgeving, namelijk wanneer ik de hoek OAP vergroot met zijn differentiaal $PAp = d\omega$, zal de boog die beschreven is door de straal AP, $Pp = \Omega d\omega$ worden. Deze boog zal tegelijkertijd de differentiaal van de lijn MP weergeven, zodat $pm = PM + Pp$, waaruit begrepen wordt dat de rechte PM wordt beëindigd door het andere punt M in zo'n kromme EMF, waarlangs PM voortdurend normaal is, door welke eigenschap onze gehele analytische oplossing is gevat. Daarom zal de gezochte constructie als volgt worden vergeleken: Nadat naar wens een willekeurige kromme EMF is beschreven, het maakt niet uit of deze nu continu of anders is, worden voor elk van zijn punten M de normalen MP getekend, die aan beide zijden moeten worden geproduceerd. En vanuit deze rechten worden op elk punt Y de loodlijnen $YZ = z$ verticaal getrokken, zodat $YZ^2 + MY^2 = aa$ is, wat gegarandeerd zal zijn als vanuit elk centrum M een cirkel wordt beschreven met straal $= a$, waarvan de normalen gelijk moeten zijn, in de vlakken normaal op de basis en op de kromme EMF zelf. Want de omtrekken van deze cirkels zullen precies op het oppervlak van het gezochte lichaam worden geplaatst, en de rechten normaal op dit oppervlak zullen allemaal $= a$ zijn, en zullen neerkomen op de lijn EMF die naar wens is getekend.

23. Met de minst gebruikte aandacht is het echter duidelijk dat deze constructie die voortkomt uit de analytische oplossing geheel overeenkomt met de vorige constructie, die die alleen gebaseerd was op de beschouwing van de elementen. Het is duidelijk dat het lichaam zo is geplaatst dat al zijn doorsneden normaal op de lijn EMF gelijke cirkels zijn met elkaar, met hun centra op deze lijn. Vanwege de overeenkomst tussen beide oplossingen moet worden opgemerkt dat de analytische oplossing niet volledig zal zijn, tenzij de door integratie verkregen functie Ω zeer breed is, zodat alle waarden, zowel continu als discontinu, zeker worden omvat. De lijn EMF, die correspondeert met de functie Ω, wordt volledig aan ons oordeel overgelaten, zodat we zelfs vrij met de hand getrokken lijnen kunnen gebruiken. Wat over dit probleem is aangetoond, geldt tegelijkertijd voor alle andere van dezelfde soort, waarvan de oplossing functies van twee variabelen impliceert. Hieruit volgt dat de oorspronkelijke vraag over het gebruik van discontinue functies in de Analyse opgelost is op een manier dat in de gewone Analyse, die alleen betrekking heeft op functies van één variabele, dergelijke functies geen plaats moetem hebben. In de hogere delen van de analyse, waar functies van twee of meer variabelen worden behandeld, moeten dergelijke functies echter zo noodzakelijk worden beschouwd voor de essentie van de berekening, dat geen enkele integratie als absoluut en compleet kan worden beschouwd, tenzij tegelijkertijd de meest onbepaalde en zelfs discontinue functie in de berekening wordt geïntroduceerd.