



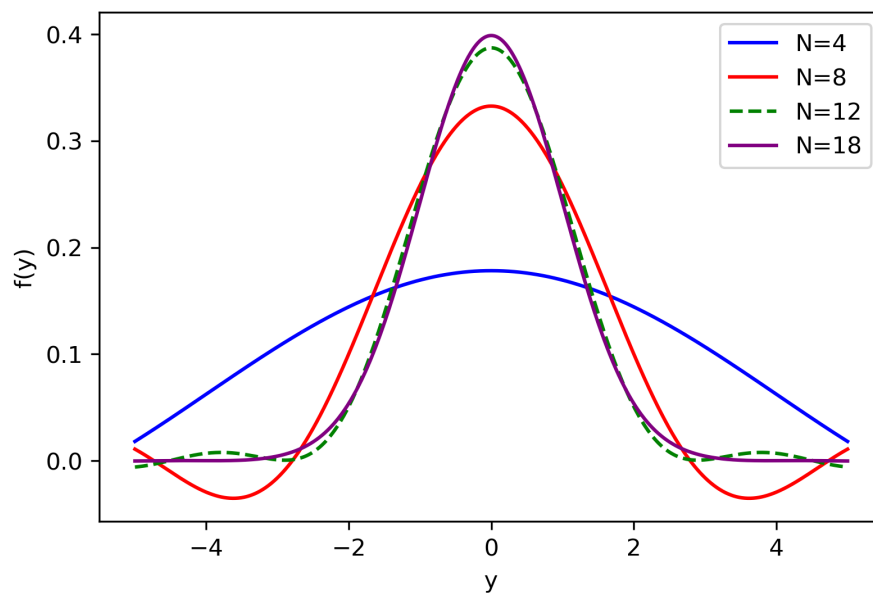
Universiteit Utrecht

Opleiding Wiskunde en Toepassingen

Optiewaardering en copulamodellen

BACHELOR SCRIPTIE

Emma Scheepstra



Begeleider:

Prof. dr. ir. C.W. (Kees) Oosterlee

Departement Wiskunde

14 juni

Samenvatting

In deze scriptie bekijken we copula's, die een benadering geven van de afhankelijkheid tussen aandelen, indien we deze niet kennen. Verder bekijken we de COS-methode, die volgt uit een aantal benaderingen van een optiewaarderingsformule en het daarbij toepassen van een cosinus Fourierreeks. We benaderen met deze methode kansdichtheidsfuncties en bepalen ook in één en twee dimensies eerlijke prijzen voor optiecontracten op begintijdstip t_0 . Optiecontracten geven het recht (maar niet de verplichting) om in de toekomst een aandeel te verhandelen tegen een eerder afgesproken prijs [15]. We concluderen vervolgens dat de COS-methode een eenvoudig doch nauwkeurig model geeft voor zowel het benaderen van kansdichtheidsfuncties als het modelleren van optiewaardering. Vervolgens laten we zien dat het ook mogelijk is om kansdichtheidsfuncties te benaderen middels copula's. We eindigen met een voorstel hoe we copula's en de COS-methode kunnen combineren. Hiermee kunnen we aandelen modelleren als we alleen op de hoogte zijn van hun marginale distributiefuncties en niets weten over hun afhankelijkheid. Het is nog niet gelukt een werkend model te presenteren, in de toekomst is dit echter zeer wenselijk.

Inhoudsopgave

Inleiding	4
1 Basis	5
1.1 Brownse Bewegingen	5
1.2 Risico-neutrale kansmaten	6
1.3 Opties	8
1.3.1 Europese put- en call-optie	8
1.3.2 Basket-opties	9
2 Copula's	11
2.1 Copula's	11
2.2 Stelling van Sklar	13
3 COS-methode	15
3.1 Één dimensionale COS-methode	15
3.2 Twee-dimensionale COS-methode	19
3.3 COS-methode voor het benaderen van kansdichtheden	23
4 Modelleren	25
4.1 Benaderen kansdichtheidfuncties	25
4.1.1 Één dimensie	25
4.1.2 Twee dimensies	26
4.2 Één-dimensionale COS-methode	27
4.3 Twee-dimensionale COS-methode	30
4.3.1 Coëfficiënten H_{n_1, n_2} voor model 1	30
4.3.2 Coëfficiënten H_{n_1, n_2} voor model 2	32
4.3.3 Model en resultaten	33
5 Combineren copula's en de COS-methode	36
5.1 Benaderen kansdichtheidsfuncties	36
5.2 COS-methode met copula's	38
Conclusie	40
Discussie	40
Bijlagen	41
A Integralen en oplossingen	41
B Uitwerking integraal call-on-max-optie	43
Bibliografie	47

Inleiding

Op de financiële markten wordt dagelijks veel geld verhandeld in een spel van vraag en aanbod. Aandelen spelen hier een grote rol. Beleggers kopen en verkopen aandelen om zo risico uit de weg te gaan en winst te maximaliseren. Een instrument om je investeringen te beschermen tegen onverwachte marktbevingen is een optie. Het is een middel dat je niet het directe eigenaarschap van een aandeel geeft, maar een contract om in de toekomst tegen een afgesproken prijs een aandeel te kopen of verkopen. Een contract als dit kost natuurlijk geld om in handen te krijgen. Maar hoe bepalen we een eerlijke prijs voor dit contract op begintijdstip t_0 ? Dit is precies wat wij in deze scriptie gaan onderzoeken.

We richten ons in deze scriptie op copula's, een hulpmiddel binnen de kansrekening, om de afhankelijkheid tussen aandelen te modelleren. Copula's stellen ons in staat om de relatie tussen de individueel verdeelde variabelen en hun gezamenlijke distributie te scheiden. Met copula's kunnen we de afhankelijkheid tussen aandelen benaderen en zo gebruiken om een model van de echte wereld te schetsen.

Naast het gebruik van copula's, focussen we ons in deze scriptie ook op de COS-methode, een efficiënt benaderingsmodel. De COS-methode is een numerieke methode gebaseerd op Fourierreksen om optiepreizen te bepalen. De COS-methode stelt ons in staat om complexe integralen, die nodig zijn om opties te waarderen, eenvoudig en nauwkeurig te evalueren. Verder is het een mooi instrument om ook kansdichtheidsfuncties mee te benaderen. Dit gaan we ook voorbij zien komen in deze scriptie, gezien het een opstapje vormt voor het implementeren van de copula's in de COS-methode, wat precies het doel van deze scriptie is.

We onderzoeken of we copula's kunnen gebruiken in combinatie met de COS-methode. Op deze wijze krijgen we een methode die optiewaardering kan modelleren zelfs als we de afhankelijkheid tussen de aandelen niet kennen. Dit brengt ons dichterbij de financiële werkelijkheid. We kunnen de afhankelijkheid en toekomstige prijs van aandelen nooit zeker weten, maar aan de hand van het verleden kunnen we een goede inschatting leren maken. De COS-methode met een geïmplementeerde copula kan ons daarbij assisteren. Voor deze scriptie gaan we nog niet gebruik maken van echte data uit het verleden, maar het is een goed opstapje om dat doel in de toekomst te bereiken.

We bekijken in Hoofdstuk 1 eerst de kennis die benodigd is als basis voor de rest van deze scriptie. Zo werken we toe naar de aanname dat aandelen een Geometrische Brownse Beweging volgen en leren we meer over de verschillende opties die op de markten beschikbaar zijn. Vervolgens introduceren we ons in Hoofdstuk 2 aan copula's. Hier speelt de Stelling van Sklar een grote rol om ons later te helpen met het combineren van copula's met de COS-methode. Deze COS-methode zullen we introduceren in Hoofdstuk 3, waar we de methode voor één en twee dimensies afleiden.

We vervolgen de scriptie met de resultaten van een aantal modellen van de COS-methode in Hoofdstuk 4. De modellen van dit hoofdstuk zijn te vinden op de volgende GitHub pagina: <https://github.com/Emma242003/Bachelor-Scriptie-Emma.git>. We beschrijven de resultaten van het benaderen van kansdichtheidsfuncties in dit hoofdstuk, maar ook de COS-methode voor optiewaardering in één en twee dimensies komt aan bod. Tot slot kijken we in Hoofdstuk 5 naar een voorstel hoe we copula's in de COS-methode kunnen implementeren.

Hoofdstuk 1

Basis

Dit hoofdstuk vormt de basis voor deze scriptie. We behandelen een aantal onderwerpen die een bachelor student wiskunde bekend voor zouden moeten komen. Indien dit niet de situatie van de lezer is, geeft dit hoofdstuk de kans deze kennis alsnog te verkrijgen. We starten met een sectie over Brownse Bewegingen waar ook de Geometrische Brownse Beweging aan bod komt. We vervolgen met een sectie over risico-neutrale kansmaten die we bijvoorbeeld in Hoofdstuk 3 terug gaan zien. We eindigen met een sectie over opties, dit zijn contracten waarmee we in de toekomst recht hebben een aandeel te kopen of verkopen tegen een eerder afgesproken prijs. Ook opties gaan we weer tegenkomen in Hoofdstuk 3.

1.1 Brownse Bewegingen

We gaan in deze sectie Brownse Bewegingen introduceren en bekijken ook kort de Geometrische Brownse Bewegingen. We doen in deze scriptie de aanname dat de aandelenkoers een Geometrische Brownse Beweging volgt en daarom is het zeer relevant om naar deze bewegingen te kijken. Ook zullen we filtratie definiëren en in het bijzonder kijken naar de filtratie voor Brownse Bewegingen.

We starten direct met de definitie van een Brownse Beweging.

Definitie 1.1.1 (Brownse Beweging). [12, p.89] Zij $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ een kansruimte. Laat voor alle $\omega \in \Omega$ de functie $W(t)$ een continue functie, met $t \geq 0$, die voldoet aan de voorwaarde $W(0) = 0$ en afhankelijk is van ω . Dan is $\{W(t) : t \geq 0\}$, een Brownse beweging als voor alle $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m$ de toenames

$$W(t_1) - W(t_0), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_m) - W(t_{m-1}),$$

onafhankelijk zijn van elkaar en ieder van deze toenames normaal verdeeld is met

$$\mathbb{E}[W(t_{i+1}) - W(t_i)] = 0,$$

en

$$\text{Var}[W(t_{i+1}) - W(t_i)] = t_{i+1} - t_i.$$

◇

We zijn ook geïnteresseerd in de filtratie van een Brownse Beweging. Voor we die definitie introduceren, hebben we eerst nog een aantal andere begrippen nodig. We gaan in deze sectie en ook in de rest van dit hoofdstuk veel σ -algebra's tegenkomen. We herinneren ons dan ook aan de definitie van een σ -algebra, zie hiervoor Definitie 1.1.2.

Definitie 1.1.2 (σ -algebra). [12, p.3] Zij Ω een niet-lege verzameling en zij \mathcal{F} een collectie van deelverzamelingen van Ω . We noemen \mathcal{F} een σ -algebra als de volgende eigenschappen gelden:

- (a) de lege verzameling \emptyset behoort tot \mathcal{F} ,
 - (b) als een verzameling A tot \mathcal{F} behoort, dan behoort zijn complement A^c ook tot \mathcal{F} en
 - (c) als een reeks verzamelingen A_1, A_2, \dots tot \mathcal{F} behoort, dan behoort hun vereniging $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ ook tot \mathcal{F} .
- ◇

Opmerking 1.1.3. Als we spreken over een sub- σ -algebra A van een σ -algebra \mathcal{F} , dan betekent dit dat A ook een σ -algebra en $A \subseteq \mathcal{F}$.

We gebruiken σ -algebra's bijvoorbeeld om te bepalen welke gebeurtenissen in een kansruimte meetbaar zijn en waar we dus een kans aan kunnen hangen. We laten X een kansvariabele gedefinieerd op de niet-lege

verzameling Ω en \mathcal{G} een σ -algebra van deelverzamelingen van Ω . We noemen X dan \mathcal{G} -meetbaar indien iedere verzameling in $\sigma(X)$ ook bevat is in \mathcal{G} . De tot nu toe in deze sectie geïntroduceerde begrippen leiden ons naar de definitie van filtratie voor Brownse Bewegingen, zie Definitie 1.1.4.

Definitie 1.1.4 (Filtratie voor Brownse Beweging). [12, p.92] Zij $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ een kansruimte waarop de Brownse Beweging $W(t)$ is gedefinieerd voor $t \geq 0$. Een filtratie voor deze Brownse Beweging is een collectie van σ -algebra's $\mathcal{F}(t)$, $t \geq 0$, die voldoet aan:

1. (Informatie hoopt zich op) Voor $0 \leq s < t$, is iedere verzameling in $\mathcal{F}(s)$ ook bevat in $\mathcal{F}(t)$.
2. (Adaptiviteit) Voor iedere $t \geq 0$ is de Brownse Beweging $W(t)$, op tijdstip t , $\mathcal{F}(t)$ -meetbaar.
3. (Onafhankelijkheid toekomstige toenames) Voor $0 \leq t < u$ is de toename $W(u) - W(t)$ onafhankelijk van $\mathcal{F}(t)$. \diamond

We gaan filtraties later nogmaals tegenkomen als we gaan kijken naar martingalen. Tot slot kijken we in deze sectie ook nog naar Geometrische Brownse Bewegingen. Gezien we de aanname maken dat de aandelenkoers een Geometrische Brownse Beweging volgt, kunnen we de prijsdynamiek van aandelen modelleren middels de Geometrische Brownse Beweging die we definiëren in Definitie 1.1.5.

Definitie 1.1.5 (Geometrische Brownse Beweging). [12, p.100] Laat $\alpha \in \mathbb{R}$ en $\sigma > 0$ constanten. De Geometrische Brownse Beweging $\{S(t) : 0 \leq t \leq T\}$ wordt gegeven door:

$$S(t) = S(0) \exp \left\{ \sigma W(t) + \left(\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t \right\},$$

met $\{W(t) : t \geq 0\}$ een Brownse beweging. Een stochastisch proces $S(t)$ volgt een Geometrische Brownse Beweging als deze voldoet aan de volgende stochastische differentiaalvergelijking [12, p.143]:

$$dS(t) = \alpha S(t) dt + \sigma S(t) dW(t).$$

\diamond

We hebben in deze sectie een korte introductie gekregen van Brownse Bewegingen en hun filtratie. Ook hebben we het concept Geometrische Brownse Bewegingen geïntroduceerd. We kunnen hier nog veel meer over vertellen, maar deze beknopte introductie van de begrippen is voldoende voor deze scriptie.

1.2 Risico-neutrale kansmaten

Deze sectie gaat over risico-neutrale kansmaten. We herinneren ons zo aan de definitie van een kansmaat, maar we bespreken eerst waarom we in deze sectie kijken naar risico-neutrale kansmaten. Het wisselen van de eerdere kansmaat naar een risico-neutrale kansmaat zorgt er bijvoorbeeld voor dat berekeningen omtrent de financiële markt eenvoudiger worden. Het is daarbij belangrijk om te benoemen dat de risico-neutrale kansmaat nog steeds goed werkt voor het modelleren van een markt waar duidelijk risico's aan onderhevig zijn [12, p.34]. We veranderen onze kijk op de wereld en haar mogelijkheden namelijk niet. We herinneren ons nu eerst aan de precieze definitie van een kansmaat, zie Definitie 1.2.1.

Definitie 1.2.1 (Kansmaat). [12, p.2] Zij Ω een niet-lege verzameling en \mathcal{F} een σ -algebra van deelverzamelingen van Ω . Een kansmaat \mathbb{P} is een functie die aan iedere verzameling $A \in \mathcal{F}$ een waarde geeft in $[0, 1]$. Dit noemen we de kans van A en schrijven we met $\mathbb{P}(A)$. We vereisen:

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, en
2. als A_1, A_2, \dots een reeks is van disjuncte verzamelingen in \mathcal{F} , dan

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

We noemen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ de kansruimte. \diamond

We hebben in Definitie 1.1.4 al filtratie gezien voor een Brownse Beweging. Ook in deze sectie gaan we het begrip filtratie gebruiken, we gebruiken daarentegen de algemene definitie.

Definitie 1.2.2 (Filtratie). [12, p.48] Zij Ω een niet-lege verzameling. Laat T een vast positief getal en neem aan dat er voor iedere $t \in [0, T]$ een σ -algebra $\mathcal{F}(t)$ bestaat. Neem verder aan dat voor $s \leq t$, iedere verzameling $\mathcal{F}(s)$ ook bevat is in $\mathcal{F}(t)$. Dan noemen we de collectie van σ -algebra's $\{\mathcal{F}(t) : 0 \leq t \leq T\}$, een filtratie. \diamond

We werken toe naar de definitie van een martingaal die veel toepassingen heeft in de financiële wiskunde. Daarvoor hebben we de zojuist gedefinieerde filtratie nodig, maar ook het concept: aangepaste stochastische processen. Deze definiëren we hieronder daarom eerst in Definitie 1.2.3.

Definitie 1.2.3 (Aangepast stochastisch proces). [12, p.51] Zij Ω een niet-lege verzameling met filtratie $\{\mathcal{F}(t) : 0 \leq t \leq T\}$. Laat $X(t)$ een collectie van kansvariabelen geïndexeerd door $t \in [0, T]$. We noemen deze collectie kansvariabelen een aangepast stochastisch proces als voor elke t de kansvariabele $X(t)$, $\mathcal{F}(t)$ -meetbaar is. \diamond

Nu hebben we alle benodigde voorkennis om te kijken naar martingalen. We hebben martingalen zo nodig om een risico-neutrale kansmaat te definiëren.

Definitie 1.2.4 (Martingaal). [12, p.71] Zij $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ een kansruimte. Laat T een vast positief getal en laat $\{\mathcal{F}(t) : 0 \leq t \leq T\}$, een filtratie van sub- σ -algebra's van \mathcal{F} . Beschouw een aangepast stochastisch proces $M(t)$ met $0 \leq t \leq T$. We noemen dit proces een martingaal als voor alle $0 \leq t \leq T$ geldt:

$$\mathbb{E}[M(t)|\mathcal{F}(s)] = M(s).$$

\diamond

We bekijken nu een aandelenkoers die het stochastische proces $S(t)$, met $t \geq 0$, volgt. Dan wordt de afgeprijsde aandelenkoers $DS(t)$ gegeven door

$$DS(t) = e^{-rt}S(t),$$

met r het rentetarief [12, p.144]. We bekijken de afgeprijsde aandelenkoers onder een andere kansmaat die we $\tilde{\mathbb{P}}$ noemen. Deze nieuwe kansmaat $\tilde{\mathbb{P}}$ en de oude kansmaat \mathbb{P} willen we equivalent aan elkaar hebben, zie Definitie 1.2.5.

Definitie 1.2.5 (Equivalentie van kansmaten). [12, p.33] Zij Ω een niet-lege verzameling en \mathcal{F} een σ -algebra van deelverzamelingen van Ω . Twee kansmaten \mathbb{P} en $\tilde{\mathbb{P}}$ op (Ω, \mathcal{F}) zijn equivalent indien ze het eens zijn over welke verzamelingen in \mathcal{F} een kans gelijk aan nul hebben. \diamond

Zij nu inderdaad \mathbb{P} en $\tilde{\mathbb{P}}$ beide kansmaten met equivalentie. We willen weten wanneer de wisseling naar kansmaat $\tilde{\mathbb{P}}$ er voor zorgt dat we een risico-neutrale kansmaat hebben. We gebruiken de zojuist gedefinieerde equivalentie van kansmaten en martingalen om tot een definitie voor een risico-neutrale kansmaat te komen.

Definitie 1.2.6 (Risico-neutrale kansmaat). [12, p.203] Zij \mathbb{P} en $\tilde{\mathbb{P}}$ kansmaten. Als \mathbb{P} equivalent is aan $\tilde{\mathbb{P}}$ en de afgeprijsde aandelenkoers is een martingaal onder $\tilde{\mathbb{P}}$, dan spreken we over $\tilde{\mathbb{P}}$ als risico-neutrale kansmaat. \diamond

Nu is de vraag hoe we makkelijk een risico-neutrale kansmaat $\tilde{\mathbb{P}}$ kunnen construeren als we de kansmaat \mathbb{P} kennen. We kunnen een risico-neutrale kansmaat opstellen aan de hand van de Stelling van Girsanov.

Stelling 1.2.7 (Girsanov, 1 dimensie). [12, p.199] Zij $\{W(t) : 0 \leq t \leq T\}$, een Brownse Beweging op een kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ en zij $\{\mathcal{F}(t) : 0 \leq t \leq T\}$, een filtratie voor deze Brownse Beweging. Laat $\Theta(t)$, $0 \leq t \leq T$ een aangepast proces. Definieer nu

$$Z(t) := \exp \left\{ - \int_0^t \Theta(u) dW(u) - \frac{1}{2} \int_0^t \Theta^2(u) du \right\},$$

$$\tilde{W}(t) = W(t) + \int_0^t \Theta(u) du,$$

en neem aan dat

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T \Theta^2(u) Z^2(u) du \right] < \infty.$$

We nemen $Z = Z(T)$. Dan volgt dat $\mathbb{E}(Z) = 1$ en onder de kansmaat $\tilde{\mathbb{P}}$ gegeven door:

$$\tilde{\mathbb{P}}(A) = \int_A Z(\omega) d\mathbb{P}(\omega),$$

is het proces $\{\tilde{W}(t) : 0 \leq t \leq T\}$ een Brownse Beweging.

De Stelling van Girsanov definieert een kansmaat $\tilde{\mathbb{P}}$. Deze kansmaat voldoet aan de eisen van Definitie 1.2.6 en is daarmee een risico-neutrale kansmaat. Dit gaan we in deze scriptie niet bewijzen, daarvoor verwijs ik u naar het boek ‘Stochastic Calculus for Finance II’ [12].

We hebben in deze sectie een risico-neutrale kansmaat gedefinieerd. Verder hebben we de Stelling van Girsanov gezien en daarmee een methode gevonden om een risico-neutrale kansmaat te vormen. We gaan in deze scriptie geen specifieke risico-neutrale kansmaat opstellen. Wel gaan we het begrip tegenkomen in Hoofdstuk 3 en is het dus zeker belangrijk om te onthouden wat een risico-neutrale kansmaat is.

1.3 Opties

Opties bestaan al langere tijd, maar werden pas op 26 april 1973 voor het eerst verhandeld op de beurs [15, p.28]. Een optie is een contract geschreven door een verkoper, wat de houder van het contract het recht geeft (maar niet de verplichting) om in de toekomst de onderliggende waarde te verhandelen tegen de eerder afgesproken prijs. Opties hebben een risico-aspect waardoor zowel de verkoper als de houder van de optie er hun voordeel mee zouden kunnen doen, maar ook het risico lopen juist meer geld kwijt te zijn. In dit hoofdstuk behandelen we de put- en call-opties en de daarbij horende put-call-parity. Ook bekijken we basket-opties en hun optiewaardering.

1.3.1 Europese put- en call-optie

Opties hebben een expiratedatum, dit is de uiterste datum waarop de optie het recht geeft om de onderliggende waarde te verhandelen tegen de eerder afgesproken prijs. Bij Europese opties is de expiratedatum de enige mogelijke datum om de optie uit te oefenen [15, p.44]. Dit maakt het een eenvoudige categorie van opties om te bestuderen. We bekijken eerst de definitie van een Europese call-optie.

Definitie 1.3.1 (Europese call-optie). [15, p.28] Een Europese call-optie geeft het recht om op expiratedatum T een aandeel te kopen tegen een van tevoren afgesproken prijs K , de uitoefenprijs. De uitbetalingsfunctie van deze call-optie wordt gegeven door

$$c(T) = \max(S(T) - K, 0),$$

waar $S(T)$ de aandelenprijs geeft op expiratedatum T . We noteren de uitbetalingsfunctie ook wel als

$$c(T) = (S(T) - K)^+,$$

waar de plus aangeeft dat het om het maximum gaat. ◇

Een call-optie geeft het recht om een asset te kopen in de toekomst voor een eerder afgesproken prijs. Een put-optie geeft daarentegen het recht om een asset te verkopen in de toekomst voor een eerder afgesproken prijs. Daaruit volgt de volgende definitie voor een Europese put-optie.

Definitie 1.3.2 (Europese put-optie). [15, p.29] Een Europese put-optie geeft het recht om op expiratedatum T een aandeel te verkopen tegen een van tevoren afgesproken prijs K , de uitoefenprijs. De uitbetalingsfunctie van deze put-optie wordt gegeven door

$$p(T) = \max(K - S(T), 0),$$

waar $S(T)$ de aandelenprijs geeft op expiratedatum T . We noteren de uitbetalingsfunctie ook wel als

$$p(T) = (K - S(T))^+,$$

waar de plus aangeeft dat het om het maximum gaat. \diamond

We gaan aan de hand van deze definities toewerken naar de put-call-parity. De put-call-parity geeft ons het voordeel dat we maar één van beide opties, de put- of de call-optie, hoeven te weten en zo makkelijk de andere optiewaarde kunnen bepalen. We bekijken de situatie dat we een Europese call met uitoefenprijs K en expiratedatum T kopen en een Europese put met dezelfde uitoefenprijs en expiratedatum verkopen. Dan is de uitbetaling op tijdstip t gegeven door

$$c(t) - p(t) = \max\{S(t) - K, 0\} - \max\{K - S(t), 0\} = S(t) - K. \quad (1.1)$$

Een portfolio is een verzameling van verschillende beleggingen, zoals aandelen, opties, die een belegger bezit om risico te spreiden en rendement te maximaliseren. We bekijken het portfolio $\Pi_1 = S(t) + p(t) - c(t)$ met de eerder genoemde uitoefenprijs K en expiratedatum T . We gebruiken vergelijking (1.1) om de waarde van dit portfolio op tijdstip T te bepalen, dit portfolio heeft waarde K . We zoeken nu een portfolio die dezelfde waarde heeft op tijdstip T , namelijk K . Als we op tijdstip T een waarde K willen hebben door rentebetaling, met rentetarief r , dan had dit op tijdstip t een waarde $Ke^{-r(T-t)}$. Dit resulteert in het portfolio $\Pi_2 = Ke^{-r(T-t)}$. Beide portfolio's hebben op tijdstip T dezelfde waarde en dit leidt tot de put-call-parity.

Definitie 1.3.3 (Put-call-parity). [15, p.44] Zij $c(t)$ en $p(t)$ de uitbetalingsfuncties van respectievelijk een Europese call-optie en een Europese put-optie met uitoefenprijs K en expiratedatum T . Laat r het rentetarief. Dan geldt de volgende relatie die we de put-call-parity noemen:

$$c(t) - p(t) = S(t) - Ke^{-r(T-t)}. \quad (1.2)$$

\diamond

Deze relatie tussen de Europese put- en call-optie geldt op ieder tijdstip t , anders zouden we te maken krijgen met arbitrage-mogelijkheden. Arbitrage is een handelsstrategie waar we beginnen met nul kapitaal en eindigen met een positief kapitaal zonder het risico op verlies [12, p.175]. Stel namelijk dat één van beide portfolio's goedkoper is dan de ander. Dan verkopen we het duurere portfolio en kopen we het goedkopere portfolio. Op tijdstip T zijn de portfolio's weer gelijk in waarde en hebben we winst gemaakt.

We kunnen nog veel meer verschillende portfolio's samenstellen met de Europese put- en call-optie. Verder bestaan er ook nog veel andere opties. Zo hebben we bijvoorbeeld Amerikaanse opties waar de houder willekeurig gedurende de tijd van aankoop tot de expiratedatum de optie kan uitoefenen en dit ook meestal fysiek plaatsvindt [2, p. 7.2]. Deze opties zullen we verder in deze scriptie niet behandelen of gebruiken. Wel gaan we in de volgende sectie nog kijken naar basket-opties.

1.3.2 Basket-opties

We bekijken nu basket-opties, die ook wel multi-asset opties worden genoemd [15, p.277]. Dit zijn opties die afhangen van de prestaties van meerdere aandelen. Het belangrijkste voordeel van een basket-optie is dat het goedkoper is dan het gebruiken van de individuele portfolio's [2, p. 15.3]. Een basket-optie houdt namelijk rekening met de correlatie tussen de verschillende aandelen. Verder minimaliseren we met een basket-optie ook de transactiekosten. We behandelen de call-on-max- en put-on-min-optie waarvan we de call-on-max-optie nog gebruiken in Sectie 3.2.

Definitie 1.3.4 (Call-on-max-optie). [10, p.20] Een call-on-max-optie geeft het recht om op expiratedatum T een aandeel te kopen tegen een van tevoren afgesproken prijs K , de uitoefenprijs. De uitbetalingsfunctie van deze call-on-max-optie wordt gegeven door

$$cmax(T) = \max(\max\{S_1(T), S_2(T), \dots, S_n(T)\} - K, 0),$$

waar $S_i(T)$ de aandelenprijs geeft voor aandeel i , met $i = 1, \dots, n$, op expiratedatum T . We noteren de uitbetalingsfunctie ook wel als

$$cmax(T) = (\max\{S_1(T), S_2(T), \dots, S_n(T)\} - K)^+,$$

waar de plus aangeeft dat het om het maximum gaat. \diamond

Op dezelfde wijze volgt ook een logische definitie voor de put-on-min-optie.

Definitie 1.3.5 (Put-on-min-optie). [10, p.20] Een put-on-min-optie geeft het recht om op expiratedatum T een aandeel te verkopen tegen een van tevoren afgesproken prijs K , de uitoefenprijs. De uitbetalingsfunctie van deze put-on-min-optie wordt gegeven door

$$pmin(T) = \max(K - \max\{S_1(T), S_2(T), \dots, S_n(T)\}, 0),$$

waar $S_i(T)$ de aandelenprijs geeft voor aandeel i , met $i = 1, \dots, n$, op expiratedatum T . We noteren de uitbetalingsfunctie ook wel als

$$pmin(T) = (K - \max\{S_1(T), S_2(T), \dots, S_n(T)\})^+,$$

waar de plus aangeeft dat het om het maximum gaat. \diamond

De call-on-max- en put-on-min-optie zijn basket-opties, gezien ze zichtbaar afhangen van de prestaties van meerdere aandelen. Er zijn nog vele andere basket-opties die we niet in deze scriptie gaan behandelen. Kijk voor andere basket-opties bijvoorbeeld in de paper van Marjon Ruijter en Kees Oosterlee: ‘Two-dimensional Fourier cosine series expansion method for pricing financial options’ [10].

We hebben in dit hoofdstuk een basis gecreëerd van de kennis die nodig is voor deze scriptie. Brownsne Bewegingen en de bijhorende definities zijn geïntroduceerd. Ook hebben we gezien wat een risico-neutrale kansmaat is en hoe we die kunnen vormen. Tot slot hebben we gekeken naar verschillende opties in zowel één als twee dimensies, waar de put-call-parity ook zeker niet mocht ontbreken. In de volgende hoofdstukken zullen we deze kennis vaak impliciet gebruiken, maar soms zullen we nog teruggrijpen op de definities en vergelijkingen uit dit hoofdstuk.

Hoofdstuk 2

Copula's

In dit hoofdstuk introduceren we het wiskundige concept 'copula'. Indien we de gezamenlijke kansdichtheidsfunctie van twee of meer aandelen niet kennen, kunnen we een copula-structuur opleggen. De copula geeft ons dan een benadering van de gezamenlijke kansverdeling van deze aandelen. Het stelt ons in staat om de relatie tussen de individueel verdeelde variabelen en hun gezamenlijke distributie te scheiden. Binnen de financiële wiskunde gebruiken we dit veel voor bijvoorbeeld het analyseren van risico's. Voor deze scriptie zullen we copula's gebruiken om activa te modelleren over tijd [5].

Verder behandelen we in dit hoofdstuk de Stelling van Sklar. Deze stelling zorgt ervoor dat we een multivariate distributiefunctie kunnen schrijven als de samenstelling van haar marginale distributiefuncties en een copula. We zullen in aanloop naar deze stelling eerst een aantal andere stellingen benoemen. Vervolgens presenteren we de stelling van Sklar en haar bewijs.

2.1 Copula's

Het doel van deze sectie is het geven van de definitie van een copula. We willen de lezer herinneren dan wel introduceren aan de benodigde theorie. We introduceren daarom eerst een aantal begrippen die nodig zijn om de definitie van een copula te begrijpen. We herinneren ons als we een kansruimte hebben met kansvariabele X , dat de distributiefunctie van X dan gegeven wordt door

$$F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \quad F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

Dit kunnen we uitbreiden naar een multivariate distributiefunctie. Laat $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ een kansvector, dan is de multivariate distributiefunctie gegeven door

$$F_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1], \quad F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n).$$

We zijn voor de definitie van een copula, die later volgt, geïnteresseerd in de marginale distributiefunctie. De volgende definitie laat ons zien wat de marginale distributiefunctie is voor een kansvector \mathbf{X} .

Definitie 2.1.1 (Marginale distributiefunctie). [4, p.55] Zij $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ een kansvector. We noemen de distributiefunctie van X_i , d.w.z.,

$$F_{X_i} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \quad F_{X_i}(x) = \mathbb{P}(X_i \leq x)$$

de i -de marginale distributiefunctie van X . ◇

Een marginale distributiefunctie geeft ons voor een variabele de kans dat deze een bepaalde waarde aanneemt, waarbij we niet geïnteresseerd zijn welke waardes de andere variabelen dan aannemen. We herinneren ons dat Borel verzamelingen de elementen zijn van de σ -algebra gegenereerd door de open verzamelingen $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}$ van \mathbb{R}^n , de Borel σ -algebra [11, p.18]. De laatste definitie waar we nu nog in geïnteresseerd zijn voor we echt naar copula's gaan kijken, is het geconcentreerd zijn van een kansvariabele op een verzameling. Zie hiervoor Definitie 2.1.2.

Definitie 2.1.2 (Geconcentreerd). [5, p.8] Als voor een kansvariabele $X \sim F$ een Borel verzameling A bestaat zodanig dat $\mathbb{P}(X \in A) = 1$, dan zeggen we dat X geconcentreerd is op A . ◇

We hebben onszelf herinnerd wat distributiefuncties en hun marginale distributies zijn. Ook weten we nu wat 'geconcentreerd' zijn inhoudt in wiskundige context. Deze begrippen leiden ons tot de definitie van een copula, Definitie 2.1.3.

Definitie 2.1.3 (Copula). [5, p.10][1](p.10) Voor alle $d \geq 2$, een d -dimensionale copula (genoemd d -copula) is een d -dimensionale distributie functie geconcentreerd op $\mathbb{I}^d = [0, 1]^d$, waarvan de univariate marginale distributie functies uniform verdeeld zijn op \mathbb{I} . De verzameling van d -copulas ($d \geq 2$) wordt genoteerd met \mathcal{C}_d . \diamond

Dit is een vrij beknopte definitie met verscheidene wiskundige begrippen. Daarom introduceren we graag een aantal voorbeelden om de copula wat te verduidelijken. We bekijken drie bekende voorbeelden van copula's. Deze copula's worden vaak gecombineerd om zo nieuwe copulastructuren te creëren. We bespreken de volgende copula's: gemeenschappelijke monotoniteit, onafhankelijke en tegengestelde monotoniteit copula.

Voorbeeld 2.1.4 (Gemeenschappelijke monotoniteit copula M_d). [5, p.11] Laat U een kansvariabele gedefinieerd op de kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Zij U uniform verdeeld op \mathbb{I} . Beschouw nu de kansvariabele $\mathbf{U} = (U, \dots, U)$. Dan geldt voor iedere $\mathbf{u} \in \mathbb{I}^d$ dat,

$$\mathbb{P}(\mathbf{U} \leq \mathbf{u}) = \mathbb{P}(U \leq \min\{u_1, \dots, u_d\}) = \min\{u_1, \dots, u_d\}.$$

Dan is de distributiefunctie gegeven voor iedere $\mathbf{u} \in \mathbb{I}^d$ door

$$M_d(u_1, \dots, u_d) := \min\{u_1, \dots, u_d\},$$

een copula die we de gemeenschappelijke monotoniteit copula noemen. In het Engels heet deze copula de '*Comonotonicity copula*'. \blacksquare

Voorbeeld 2.1.5 (Onafhankelijke copula \prod_d). [5, p.11] Laat U_1, \dots, U_d onafhankelijk verdeelde kansvariabelen op de kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Zij iedere U_i uniform verdeeld op \mathbb{I} . Bekijk nu de kansvariabele $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_d)$. Dan hebben we voor iedere $\mathbf{u} \in \mathbb{I}^d$,

$$\mathbb{P}(\mathbf{U} \leq \mathbf{u}) = \mathbb{P}(U_1 \leq u_1) \dots \mathbb{P}(U_d \leq u_d) = \prod_{j=1}^d u_j,$$

waar we door de onafhankelijkheid van de variabelen het product kunnen nemen. Dan is de distributiefunctie gegeven voor iedere $\mathbf{u} \in \mathbb{I}^d$ door

$$\prod_d(u_1, \dots, u_d) := \prod_{j=1}^d u_j,$$

een copula die we de onafhankelijke copula noemen. In het Engels wordt deze copula de '*Independence copula*' genoemd. \blacksquare

Voorbeeld 2.1.6 (Tegengestelde monotoniteit copula W_2). [5, p.11] Laat U een kansvariabele gedefinieerd op de kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Zij U uniform verdeeld op \mathbb{I} . Beschouw de kansvariabele $\mathbf{U} = (U, 1 - U)$. Dan geldt voor iedere $\mathbf{u} \in \mathbb{I}^2$ dat,

$$\mathbb{P}(\mathbf{U} \leq \mathbf{u}) = \mathbb{P}(U \leq u_1, 1 - U \leq u_2) = \max\{0, u_1 + u_2 - 1\}.$$

Dan volgt dat de distributiefunctie gegeven voor alle $\mathbf{u} \in \mathbb{I}^2$ door

$$W_2(u_1, u_2) := \max\{0, u_1 + u_2 - 1\},$$

een copula is, die we de tegengestelde monotoniteit copula noemen. In het Engels heet deze copula de '*Countermonotonicity copula*'. \blacksquare

We hebben nu aan de hand van de definitie en een aantal voorbeelden het wiskundig concept copula's geïntroduceerd. We kunnen copula's gebruiken om een multivariate distributiefunctie te schrijven als de samenstelling van haar marginale distributiefuncties en een copula. Hiervoor hebben we de Stelling van Sklar nodig die we in de volgende sectie introduceren en bewijzen.

2.2 Stelling van Sklar

Voordat we de Stelling van Sklar definiëren en bewijzen hebben we een aantal nieuwe definities nodig. Het bewijs van de Stelling van Sklar is sterk afhankelijk van het wiskundig concept quasi-inverse en de eigenschappen die hier aan verbonden zijn. Het bepalen van inverse functies zou algemeen bekend moeten zijn bij de lezer. Op het moment dat we kijken naar distributiefuncties hebben we daarentegen niet een normale inverse, maar de quasi-inverse nodig. De quasi-inverse en bijbehorende eigenschappen introduceren we hieronder.

Definitie 2.2.1 (Quasi-inverse). [5, p.4] Zij $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{I}$ een distributiefunctie. De functie $F^{(-1)}$ wordt voor elke $t \in (0, 1]$ gegeven door

$$F^{(-1)}(t) := \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq t\},$$

met $F^{(-1)}(0) := \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) > 0\}$. We noemen $F^{(-1)}$ de quasi-inverse van F . \diamond

We hebben een aantal eigenschappen nodig van de quasi-inverse in het bewijs van de Stelling van Sklar. De benodigde eigenschappen komen aan bod in de volgende stelling.

Stelling 2.2.2 (Eigenschappen quasi-inverse). [5, p.4] Zij F een distributiefunctie met quasi-inverse $F^{(-1)}$. Dan:

- (a) $F^{(-1)}$ is stijgend. In het bijzonder, indien F continue is, dan is $F^{(-1)}$ strikt stijgend.
- (b) $F^{(-1)}$ is links-continue op \mathbb{R} .
- (c) Als t bevat is in het beeld van F , $F(F^{(-1)}(t)) = t$. In het bijzonder, indien F continue is, dan $F(F^{(-1)}(t)) = t$ voor alle $t \in \mathbb{I}$.
- (d) $F^{(-1)}(F(x)) \leq x$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. In het bijzonder, indien F is strikt stijgend, dan $F^{(-1)}(F(x)) = x$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.
- (e) Voor alle $x \in \mathbb{R}$ en $t \in \mathbb{I}$, $F(x) \geq t$ dan en slechts dan als $x \geq F^{(-1)}(t)$.

Het bewijs van deze stelling is niet interessant voor deze scriptie. Mocht er interesse zijn in het bewijs, bekijk deze dan vooral op pagina 5 van ‘Principles of Copula Theory’[1]. We gebruiken daarnaast ook nog de volgende stelling, Stelling 2.2.3 in het bewijs van Sklar. Deze stelling vertelt ons meer over de distributiefunctie van een functiecompositie van de quasi-inverse.

Stelling 2.2.3 (Functiecompositie). [5, p.5] Zij X een kansvariabele op een kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ met distributiefunctie F .

- (a) Als F continue is, dan is $F \circ X$ uniform gedistribueerd op \mathbb{I} .
- (b) Als U een uniform gedistribueerde kansvariabele op \mathbb{I} is, dan heeft $F^{(-1)} \circ U$ een distributiefunctie gelijk aan F .

We introduceren nu de Stelling van Sklar. We bekijken het geval dat de marginale distributiefuncties continue zijn. Deze stelling is daarentegen in het algemeen waar voor alle distributiefuncties. Meer hebben we niet nodig voor deze scriptie. We zullen de stelling dan ook formuleren zodanig dat de marginale distributiefuncties continue zijn, maar weet dat dit niet noodzakelijk is.

Stelling 2.2.4 (Sklar met continue F_i). [5, p.42] Laat $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$ een kansvector gegeven op een kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Zij $H(\mathbf{x}) := \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_d \leq x_d)$ de gezamenlijke distributiefunctie van \mathbf{X} en zij $F_j(x_j) = \mathbb{P}(X_j \leq x_j)$ voor $j = 1, \dots, d$ de marginale distributiefuncties. Laat de marginale distributiefuncties continue zijn. Dan bestaat er een unieke copula $C = C_{\mathbf{X}}$ zodanig dat voor ieder punt $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ geldt:

$$H(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)).$$

Bewijs. We weten dat

$$H(x_1, \dots, x_d) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_d \leq x_d).$$

Wegens Stelling 2.2.2 punt (a) volgt dat $F_j^{(-1)}$ strikt stijgend en uit (d) volgt dan dat $F_j^{(-1)}(F(X_j)) = X_j$ voor alle $j = 1, \dots, d$. We zien nu dat

$$H(x_1, \dots, x_d) = \mathbb{P}\left(F_1^{(-1)}(F(X_1)) \leq x_1, \dots, F_d^{(-1)}(F(X_d)) \leq x_d\right).$$

We kunnen wegens Stelling 2.2.2 punt (e) nu zeggen dat $F_j^{(-1)}(F(X_j)) \leq x_j$ dan en slechts dan als $F(X_j) \leq F(x_j)$. Hieruit volgt nu ook

$$H(x_1, \dots, x_d) = \mathbb{P}\left(F(X_1) \leq F(x_1), \dots, F(X_d) \leq F(x_d)\right).$$

Gezien F_j continue voor alle $j = 1, \dots, d$, volgt nu uit Stelling 2.2.3 punt (a) dat $F_j \circ X$ uniform op \mathbb{I} . Dus de distributiefunctie van $(F_1 \circ X, \dots, F_d \circ X)$ heeft uniforme univariate marginale distributiefuncties en is daarom een copula. We zien dat

$$C(F(x_1), \dots, F(x_d)) = \mathbb{P}\left(F(X_1) \leq F(x_1), \dots, F(X_d) \leq F(x_d)\right) = H(x_1, \dots, x_d).$$

We concluderen zoals gevraagd dat er een unieke copula C bestaat zodanig dat

$$H(x_1, \dots, x_d) = C(F(x_1), \dots, F(x_d)), \tag{2.1}$$

voor ieder punt $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. □

Zoals we eerder al benoemd hebben, kunnen we middels de Stelling van Sklar een multivariate distributiefunctie schrijven als de samenstelling van haar marginale distributiefuncties en een copula. Door middel van een directe berekening volgt dit meteen uit Stelling 2.2.4, zie Opmerking 2.2.5.

Opmerking 2.2.5. *Zij H een multivariate distributiefunctie die voldoet aan vergelijking 2.1. Als H een kansdichtheid h heeft die bekend is, dan voor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$*

$$h(\mathbf{x}) = c(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d))f_1(x_1) \dots f_d(x_d).$$

Hierbij is c de kansdichtheid van een copula C .

We hebben copula's geïntroduceerd en bekeken aan de hand van een aantal voorbeelden. Verder kennen we nu de Stelling van Sklar en haar bewijs. De COS-methode wordt in het volgende hoofdstuk geïntroduceerd. In Hoofdstuk 5 gaan we bespreken hoe we de COS-methode kunnen combineren met copula's en dan in het bijzonder ook hoe we de Stelling van Sklar hiervoor kunnen gebruiken.

Hoofdstuk 3

COS-methode

Dit hoofdstuk staat in het teken van de COS-methode, die zijn naam te danken heeft aan de cosinus Fourierreeks. Deze methode kan gebruikt worden om een kansdichtheidsfunctie te benaderen als we deze niet kennen, maar haar karakteristieke functie wel. Misschien nog wel interessanter is dat we de optiewaardering van een aandeel kunnen modelleren middels de COS-methode. Eerst behandelen we de één-dimensionale COS-methode waar we kijken naar één aandeel. Vervolgens breiden we deze methode uit naar een twee-dimensionale COS-methode om later twee aandelen te kunnen modelleren. Tot slot zullen we zowel de één- als de twee-dimensionale COS-methode op zo een manier schrijven dat we kansdichtheden kunnen benaderen.

3.1 Één dimensionale COS-methode

In deze sectie geven we de afleiding van de één-dimensionale COS-formule. Deze formule geeft ons een methode om middels een cosinus Fourierreeks de optiewaardering van een aandeel te modelleren. Op deze manier kunnen we van aandelen voorspellen wat er in de toekomst met hun waarde gebeurt en zo een eerlijke waarde bepalen voor een optiecontract op tijdstip t_0 . Deze methode is dan ook speciaal ontwikkeld voor de financiële wiskunde om nauwkeurige voorspellingen te doen. We nemen in deze sectie aan dat de kansdichtheidsfunctie niet bekend is, maar haar karakteristieke functie wel.

We bekijken nu Europese opties met starttijd t_0 en expiratedatum T . Zij X een kansvariabele. We stellen dat $X(t) := \log S(t)$ waarden $X(t_0) = x$ en $X(T) = y$ aanneemt. We gebruiken de volgende versimpelde notatie voor de overgangskansdichtheidsfunctie $f_X(y) \equiv f_{X(T)}(y) := f_X(T, y; t_0, x)$. Hier gebruiken we de risico-neutrale kansmaat $\tilde{\mathbb{P}}$. De optiewaarde op tijdstip t_0 wordt dan gegeven door de functie

$$V(t_0, x) = e^{-r\tau} \mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{P}}} [V(T, y) | \mathcal{F}(t_0)] = e^{-r\tau} \int_{\mathbb{R}} V(T, y) f_X(y) dy, \quad (3.1)$$

met $\tau = T - t_0$ en r het rentepercentage [7, p.169]. We gaan deze optiewaarde benaderen om zo de COS-formule te bepalen. Dit doen we door drie benaderingen te maken van vergelijking (3.1).

Voor de eerste benadering gaan we de cosinus Fourierreeks gebruiken. Daarom zullen we deze eerst definiëren en de gebruikte notatie introduceren. We herinneren ons eerst aan de definitie van een Fourierreeks, deze bevat zowel cosinus- als sinustermen.

Definitie 3.1.1 (Fourierreeks). [3, p.114] Zij $f(y)$ een periodieke functie op het interval $[-\pi, \pi]$. Dan wordt de Fourierreeks van f gegeven door,

$$f(y) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(ny) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(ny),$$

met coëfficiënten

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) dy, \\ A_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \cos(ny) dy, \\ B_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \sin(ny) dy. \end{aligned}$$

◇

Ofwel, we zien dat een Fourierreeks de functie beschrijft in termen van oneindige sommen van sinussen en cosinussen. We zijn nu alleen geïnteresseerd in de cosinus Fourierreeks die alleen de cosinus termen behoudt. Herinner daarbij dat de drager van een continue functie $f(y)$, wordt gegeven door de afsluiting van de verzameling $\{y|f(y) \neq 0\}$ [9, p.678].

Definitie 3.1.2. [Cosinus Fourierreeks] [7, p.166] Zij $f(y)$ een functie met als drager het interval $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$. De cosinus Fourierreeks van f wordt dan gegeven door

$$f(y) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(n\pi \frac{y-a}{b-a}\right),$$

met coëfficiënten

$$A_0 = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(y) dy,$$

$$A_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(y) \cos\left(n\pi \frac{y-a}{b-a}\right) dy.$$

◇

Opmerking 3.1.3. Wij zullen voor gemak de notatie \sum' gebruiken om aan te geven dat we de eerste term van de som halveren. De cosinus Fourierreeks wordt in dat geval genoteerd als:

$$f(y) = \sum_{n=0}^{\infty}' A_n \cos\left(n\pi \frac{y-a}{b-a}\right), \quad (3.2)$$

met

$$A_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(y) \cos\left(n\pi \frac{y-a}{b-a}\right) dy.$$

Als eerste benadering trunceren we de integraalgrenzen. De waarde van de kansdichtheidsfunctie $f_X(y)$ neemt snel af tot nul, indien y naar $\pm\infty$ gaat, daarom kunnen we de grenzen trunceren. Het nieuwe integratiebereik wordt $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, zo gekozen dat we geen noemenswaardige nauwkeurigheid verliezen. De keuze van dit nieuwe bereik bespreken we in Hoofdstuk 4. De eerste benadering van de optiewaarde luidt nu

$$V(t_0, x) \approx V_1(t_0, x) = e^{-r\tau} \int_a^b V(T, y) f_X(y) dy, \quad (3.3)$$

met $\tau = T - t_0$ [7, p.170]. We vullen in vergelijking (3.3) de benadering $\hat{f}_X(y)$ van de kansdichtheid $f_X(y)$ middels de cosinus Fourierreeks in. Deze benadering noteren we met $\hat{f}_X(y)$. Wegens Definitie 3.1.2 en de notatie uit Opmerking 3.1.3 volgt

$$\hat{f}_X(y) = \sum_{n=0}^{\infty}' A_n \cos\left(n\pi \frac{y-a}{b-a}\right),$$

met coëfficiënten

$$A_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b \hat{f}_X(y) \cos\left(n\pi \frac{y-a}{b-a}\right) dy.$$

Na herschrijving wordt de eerste benadering van de optiewaarde gegeven door

$$V_1(t_0, x) = e^{-r\tau} \int_a^b V(T, y) \sum_{n=0}^{\infty}' A_n \cos\left(n\pi \frac{y-a}{b-a}\right) dy.$$

Gezien we een integreerbare functie hebben en een oneindige som, kunnen we de sommatie en integratie verwisselen. Dit is een toepassing van de stelling van Fubini. We definiëren H_n als de cosinus Fourierreeks coëfficiënten van de functie $V(T, y)$, ofwel

$$H_n := \frac{2}{b-a} \int_a^b V(T, y) \cos\left(n\pi \frac{y-a}{b-a}\right) dy.$$

De definitieve eerste benadering van de optiewaarde wordt nu gegeven door

$$V_1(t_0, x) = \frac{b-a}{2} e^{-r\tau} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot H_n, \quad (3.4)$$

met de eerder gedefinieerde A_n en H_n .

We maken nu een tweede benadering door ook de grenzen van de sommatie te trunceren. Waarbij we N kiezen zonder noemenswaardige nauwkeurigheid te verliezen, zie hiervoor Hoofdstuk 4. Dan zien we

$$V_2(t_0, x) = \frac{b-a}{2} e^{-r\tau} \sum_{n=0}^{N-1} A_n \cdot H_n. \quad (3.5)$$

Tot slot geven we een derde benadering van vergelijking (3.1). In dit geval betreft het de coëfficiënten A_n die we zullen benaderen. We introduceren eerst de definitie van een Fourierpaar die we zo gaan gebruiken. Daarna introduceren we een propositie en haar bewijs die de coëfficiënten van A_n benadert.

Definitie 3.1.4 (Fourierpaar). Zij $f(y)$ een stuksgewijs continue functie met $\lim_{y \rightarrow \pm\infty} f(y) = 0$ [6, p.186]. Dan worden respectievelijk de voorwaartse en de inverse Fouriertransformatie [3, p.117] gegeven door

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{iky} dy,$$

$$f(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{-iky} dy.$$

De voorwaartse en inverse Fouriertransformatie vormen samen een Fourierpaar. ◇

We introduceren nu de propositie die de coëfficiënten A_n benadert.

Propositie 3.1.5. Voor alle n , geldt $A_n \approx F_n$ waarbij

$$A_n := \frac{2}{b-a} \int_a^b f_X(y) \cos\left(n\pi \frac{y-a}{b-a}\right) dy,$$

en

$$F_n := \frac{2}{b-a} \operatorname{Re} \left\{ \phi_X \left(\frac{n\pi}{b-a} \right) \exp \left(-i \frac{na\pi}{b-a} \right) \right\}.$$

Bewijs. De kansdichtheidsfunctie $f_X(y)$ en haar karakteristieke functie $\phi_X(u)$ vormen een Fourierpaar [7, p.165]. Dus weten we dat geldt

$$\phi_X(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{iyu} f_X(y) dy,$$

en

$$f_X(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-iuy} \phi_X(u) du.$$

We kunnen de karakteristieke functie $\phi_X(u)$ benaderen middels een truncatie die we zullen noteren met $\hat{\phi}_X(u)$. Zij $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ zo gekozen dat de benadering goed is, we hebben dan

$$\hat{\phi}_X(u) = \int_a^b e^{iyu} f_X(y) dy \approx \int_{\mathbb{R}} e^{iyu} f_X(y) dy = \phi_X(u). \quad (3.6)$$

We substitueren $u = \frac{n\pi}{b-a}$ in vergelijking (3.6) en vermenigvuldigen beide kanten van de linkergelijkheid met $\exp\left(-i \frac{na\pi}{b-a}\right)$ zodat we krijgen

$$\hat{\phi}_X \left(\frac{n\pi}{b-a} \right) \exp \left(-i \frac{na\pi}{b-a} \right) = \int_a^b \exp \left(iy \frac{n\pi}{b-a} - i \frac{na\pi}{b-a} \right) f_X(y) dy. \quad (3.7)$$

De Euler-formule luidt $e^{iu} = \cos(u) + i \sin(u)$ en daarom geldt $\operatorname{Re} \{e^{iu}\} = \cos(u)$. Als we nu dus het reële deel bekijken van vergelijking (3.7) volgt

$$\operatorname{Re} \left\{ \hat{\phi}_X \left(\frac{n\pi}{b-a} \right) \exp \left(-i \frac{na\pi}{b-a} \right) \right\} = \int_a^b \cos \left(n\pi \frac{y-a}{b-a} \right) f_X(y) dy. \quad (3.8)$$

Aan de rechterkant van vergelijking (3.8) herkennen we nu A_n zodat

$$A_n = \frac{2}{b-a} \operatorname{Re} \left\{ \hat{\phi}_X \left(\frac{n\pi}{b-a} \right) \exp \left(-i \frac{na\pi}{b-a} \right) \right\}.$$

We hebben al gezien dat $\hat{\phi}_X(u) \approx \phi_X(u)$ en dus volgt nu inderdaad dat $A_n \approx F_n$. \square

Wegens Propositie 3.1.5 kunnen we nu in vergelijking (3.5) de coëfficiënten A_n vervangen door F_n om een derde benadering te krijgen. De derde benadering wordt dan gegeven door:

$$V_3(t_0, x) = e^{-r\tau} \sum_{n=0}^{N-1} \operatorname{Re} \left\{ \phi_X \left(\frac{n\pi}{b-a} \right) \exp \left(-in\pi \frac{a}{b-a} \right) \right\} \cdot H_n. \quad (3.9)$$

Deze vergelijking wordt de COS-formule genoemd voor algemene processen. Formeel gezien kunnen we deze methode schrijven als Definitie 3.1.6.

Definitie 3.1.6 (COS-formule). [7, p.171] Zij $X(t)$ een functie van $S(t)$ en laat dan $x = X(t_0)$ en $y = X(T)$. Laat de optiewaarde gegeven zijn door

$$V(t_0, x) = e^{-r\tau} \mathbb{E}^{\mathbb{P}} [V(T, y) | \mathcal{F}(t_0)] = e^{-r\tau} \int_{\mathbb{R}} V(T, y) f_X(y) dy,$$

met $\tau = T - t_0$ en r het rentepercentage. Dan wordt de COS-formule gegeven door

$$V(t_0, x) \approx V_3(t_0, x) = e^{-r\tau} \sum_{n=0}^{N-1} \operatorname{Re} \left\{ \phi_X \left(\frac{n\pi}{b-a} \right) \exp \left(-in\pi \frac{a}{b-a} \right) \right\} \cdot H_n, \quad (3.10)$$

met karakteristieke functie $\phi_X(u) = \phi_X(u; t_0, T) \equiv \phi_X(u, x; t_0, T)$ en

$$H_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b V(T, y) \cos \left(n\pi \frac{y-a}{b-a} \right) dy.$$

\diamond

Het is hier goed om te benoemen dat geldt:

$$\phi_X(u) := e^{iuX(t_0)} \varphi_X(u, t),$$

waarbij $\varphi_X(y, t)$ niet een conditionele karakteristieke functie, ook wel de overgangskansdichtheidsfunctie genoemd, maar een tijdsafhankelijke karakteristieke functie zoals we een karakteristieke functie meestal gebruiken.

Opmerking 3.1.7. We kunnen $V(T, y)$ van de coëfficiënten H_n bepalen afhankelijk van de optie waar we mee te maken hebben. In het geval van Europese opties, hebben we de uitbetalingsfuncties al gezien in Definitie 1.3.1 en Definitie 1.3.2. We kunnen deze uitbetaling ook anders noteren zodat deze voldoet aan de voorwaarden van de COS-formule. Zij

$$y(T) = \log \left(\frac{S(T)}{K} \right),$$

dan

$$V(T, y) := [c \cdot K(e^y - 1)]^+ \text{ met } c = \begin{cases} 1 & \text{voor een call} \\ -1 & \text{voor een put.} \end{cases}$$

De coëfficiënten H_n zijn verschillend voor andere optieconstructies, wij zijn hier voor nu niet in geïnteresseerd.

We hebben in deze sectie een afleiding gezien van de COS-formule in 1 dimensie. Deze volgt uit drie benaderingen waarvan we de afleiding besproken hebben. In de volgende sectie zullen we deze methode uitbreiden naar twee dimensies. Met een één-dimensionale COS-methode kunnen we maar één aandeel modelleren. De twee-dimensionale COS-methode zal ons helpen twee aandelen te kunnen modelleren die ook nog afhankelijk van elkaar kunnen zijn.

3.2 Twee-dimensionale COS-methode

In deze sectie zullen we op dezelfde wijze als eerder de één-dimensionale COS-methode, nu de twee-dimensionale COS-methode afleiden. We zijn in de economie natuurlijk geïnteresseerd in meerdere aandelen en ook welke invloed ze op elkaar hebben. De twee-dimensionale COS-methode kunnen we gebruiken om twee aandelen te modelleren. De één-dimensionale COS-methode volstaat in dit geval niet en we zullen hem moeten uitbreiden. We houden het voor nu op twee aandelen en dus twee dimensies, maar dit kan natuurlijk nog naar meer dimensies dan twee dimensies uitgebreid worden. We nemen in deze sectie aan dat de bivariate kansdichtheidsfunctie niet bekend is, maar haar bivariate karakteristieke functie wel.

We bekijken Europese opties met starttijd t_0 en expiratedatum T . Laat $X(t) = (X_1(t), X_2(t))$ een kansvector. We stellen dat $X(t) := \log S(t)$ waarden $X(t_0) = \mathbf{x}$ en $X(T) = \mathbf{y}$ aanneemt. We zullen net als eerder de volgende versimpelde notatie voor de overgangskansdichtheidsfunctie van $X(T)$ gebruiken, $f_X(\mathbf{y}) \equiv f_{X(T)}(\mathbf{y}) := f_X(T, \mathbf{y}; t_0, \mathbf{x})$. We gebruiken de risico-neutrale kansmaat $\tilde{\mathbb{P}}$. De optiewaarde wordt nu gegeven door

$$V(t_0, \mathbf{x}) = e^{-r\tau} \mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{P}}} [V(T, \mathbf{y}) | \mathcal{F}(t_0)] = e^{-r\tau} \iint_{\mathbb{R}^2} V(T, \mathbf{y}) f_X(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad (3.11)$$

met $\tau = T - t_0$ en r het rentepercentage. We maken nu drie keer een benadering zodat we uitkomen op de twee-dimensionale COS-formule voor algemene processen.

In deze benaderingen gebruiken we een cosinus Fourierreeks voor een twee-dimensionale functie. Deze gaan we eerst definiëren en we introduceren de gebruikte notatie, waarna we starten met benaderen van vergelijking 3.11. We hebben in in Sectie 3.1 gezien hoe uit de Fourierreeks de cosinus Fourierreeks volgt. Op dezelfde wijze geldt dit ook voor twee dimensies en dus is de cosinus Fourierreeks voor een twee-dimensionale functie gegeven door Definitie 3.2.1.

Definitie 3.2.1 (Cosinus Fourierreeks twee-dimensionale functie). [10, p.5] Zij $f(y_1, y_2)$ een functie met als drager het cartesische product van intervallen $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$. De cosinus Fourierreeks van f wordt dan gegeven door

$$f(\mathbf{y}) = \sum'_{n_1=0}^{\infty} \sum'_{n_2=0}^{\infty} A_{n_1, n_2}(\mathbf{y}) \cos\left(n_1 \pi \frac{y_1 - a_1}{b_1 - a_1}\right) \cos\left(n_2 \pi \frac{y_2 - a_2}{b_2 - a_2}\right) \quad (3.12)$$

met coëfficiënten

$$A_{n_1, n_2}(\mathbf{y}) = \frac{2}{b_1 - a_1} \frac{2}{b_2 - a_2} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(\mathbf{y}) \cos\left(n_1 \pi \frac{y_1 - a_1}{b_1 - a_1}\right) \cos\left(n_2 \pi \frac{y_2 - a_2}{b_2 - a_2}\right) d\mathbf{y}.$$

◇

Opmerking 3.2.2. We gebruiken in Definitie 3.2.1 de notatie \sum' . Hiermee geven we aan dat we de eerste term van de som halveren waardoor de cosinus Fourierreeks in notatie een stuk compacter wordt.

We trunceren de integraalgrenzen gezien de waarde van de kansdichtheidsfunctie $f_X(\mathbf{y})$ snel afneemt tot nul, indien \mathbf{y} naar $\pm\infty$ gaat. We kiezen het nieuwe integratiebereik zo dat we geen noemenswaardige nauwkeurigheid verliezen. De keuze van dit nieuwe bereik bespreken we in Hoofdstuk 4. Het nieuwe bereik wordt nu gegeven door $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$. De eerste benadering van de optiewaarde wordt nu gegeven door

$$V(t_0, \mathbf{x}) \approx V_1(t_0, \mathbf{x}) = e^{-r\tau} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} V(T, \mathbf{y}) f_X(\mathbf{y}) d\mathbf{y},$$

met $\tau = T - t_0$. We benaderen nu ook nog de kansdichtheid $f_X(\mathbf{y})$ met haar cosinus Fourierreeks, we noteren deze met $\hat{f}_X(\mathbf{y})$. Wegens Definitie 3.2.1 volgt

$$\hat{f}_X(\mathbf{y}) = \sum_{n_1=0}^{\infty'} \sum_{n_2=0}^{\infty'} A_{n_1, n_2}(\mathbf{y}) \cos\left(n_1 \pi \frac{y_1 - a_1}{b_1 - a_1}\right) \cos\left(n_2 \pi \frac{y_2 - a_2}{b_2 - a_2}\right)$$

met coëfficiënten

$$A_{n_1, n_2}(\mathbf{y}) = \frac{2}{b_1 - a_1} \frac{2}{b_2 - a_2} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f_X(\mathbf{y}) \cos\left(n_1 \pi \frac{y_1 - a_1}{b_1 - a_1}\right) \cos\left(n_2 \pi \frac{y_2 - a_2}{b_2 - a_2}\right) d\mathbf{y}.$$

Hieruit volgt dat we de eerste benadering kunnen schrijven als

$$V_1(t_0, \mathbf{x}) = e^{-r\tau} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} V(T, \mathbf{y}) \sum_{n_1=0}^{\infty'} \sum_{n_2=0}^{\infty'} A_{n_1, n_2}(\mathbf{y}) \cos\left(n_1 \pi \frac{y_1 - a_1}{b_1 - a_1}\right) \cos\left(n_2 \pi \frac{y_2 - a_2}{b_2 - a_2}\right) d\mathbf{y}.$$

Net als in het geval van de één-dimensionale COS-methode, kunnen we ook nu sommatie en integratie verwisselen. We definiëren H_{n_1, n_2} als de cosinus Fourierreeks coëfficiënten van $V(T, \mathbf{y})$, ofwel

$$H_{n_1, n_2} := \frac{2}{b_1 - a_1} \frac{2}{b_2 - a_2} e^{-r\tau} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} V(T, \mathbf{y}) \cos\left(n_1 \pi \frac{y_1 - a_1}{b_1 - a_1}\right) \cos\left(n_2 \pi \frac{y_2 - a_2}{b_2 - a_2}\right) d\mathbf{y}.$$

De herschreven eerste benadering van de optiewaarde wordt nu gegeven door

$$V_1(t_0, \mathbf{x}) = \frac{b_1 - a_1}{2} \frac{b_2 - a_2}{2} e^{-r\tau} \sum_{n_1=0}^{\infty'} \sum_{n_2=0}^{\infty'} A_{n_1, n_2}(\mathbf{y}) H_{n_1, n_2}, \quad (3.13)$$

met eerder genoemde A_{n_1, n_2} en H_{n_1, n_2} .

Nu maken we een tweede benadering door de grenzen van de sommaties te trunceren. We kiezen N zo dat we geen noemenswaardige nauwkeurigheid verliezen, zie hiervoor Hoofdstuk 4. Dan volgt de tweede benadering

$$V_2(t_0, \mathbf{x}) = \frac{b_1 - a_1}{2} \frac{b_2 - a_2}{2} e^{-r\tau} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} A_{n_1, n_2}(\mathbf{y}) H_{n_1, n_2}. \quad (3.14)$$

Tot slot geven we ook de afleiding van de derde benadering. We zullen nu de coëfficiënten A_{n_1, n_2} benaderen. Voordat we deze afleiding doen, introduceren we eerst een propositie en haar bewijs.

Propositie 3.2.3. *Voor alle n , geldt $A_{n_1, n_2}(\mathbf{y}) \approx F_{n_1, n_2}(\mathbf{y})$, waarbij*

$$A_{n_1, n_2}(\mathbf{y}) = \frac{2}{b_1 - a_1} \frac{2}{b_2 - a_2} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f_X(\mathbf{y}) \cos\left(n_1 \pi \frac{y_1 - a_1}{b_1 - a_1}\right) \cos\left(n_2 \pi \frac{y_2 - a_2}{b_2 - a_2}\right) d\mathbf{y},$$

en

$$F_{n_1, n_2}(\mathbf{y}) = \frac{1}{2} \frac{2}{b_1 - a_1} \frac{2}{b_2 - a_2} \left[\operatorname{Re} \left\{ \phi_X \left(\frac{n_1 \pi}{b_1 - a_1}, \frac{n_2 \pi}{b_2 - a_2} \right) \exp \left(-ia_1 \frac{n_1 \pi}{b_1 - a_1} - ia_2 \frac{n_2 \pi}{b_2 - a_2} \right) \right\} \right. \\ \left. + \operatorname{Re} \left\{ \phi_X \left(\frac{n_1 \pi}{b_1 - a_1}, -\frac{n_2 \pi}{b_2 - a_2} \right) \exp \left(-ia_1 \frac{n_1 \pi}{b_1 - a_1} + ia_2 \frac{n_2 \pi}{b_2 - a_2} \right) \right\} \right].$$

Bewijs. Laat $X = (X_1, X_2)$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ en $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$. We hebben de verkorte notatie van de kansdichtheidfunctie gezien en de verkorte notatie van de karakteristieke functie wordt gegeven door $\phi_X(\mathbf{y}) \equiv \phi_{X(T)}(\mathbf{y}) := \phi_X(T, \mathbf{y}; t_0, \mathbf{x})$. We hebben in Definitie 3.1.4 gezien hoe we voor één dimensie een Fourierpaar

definiëren. We kunnen hetzelfde ook doen voor twee dimensies. Ook dan geldt dat de kansdichtheidsfunctie en karakteristieke functie een Fourierpaar vormen [10, p.4], zodat:

$$\phi_X(\mathbf{u}) = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{iu_1 y_1 + iu_2 y_2} f_X(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

De karakteristieke functie $\phi_X(\mathbf{u})$ kunnen we benaderen door een truncatie van haar intervalgrenzen. De benadering zullen we noteren met $\hat{\phi}_X(\mathbf{u})$. Laat $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$ zodat de benadering goed is, we hebben dan

$$\hat{\phi}_X(\mathbf{u}) = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} e^{iu_1 y_1 + iu_2 y_2} f_X(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \approx \iint_{\mathbb{R}^2} e^{iu_1 y_1 + iu_2 y_2} f_X(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \phi_X(\mathbf{u}). \quad (3.15)$$

We vermenigvuldigen nu eerst de linkergelijkheid van vergelijking (3.15) met $\exp\left(-ia_1 \frac{n_1 \pi}{b_1 - a_1} - ia_2 \frac{n_2 \pi}{b_2 - a_2}\right)$ en substitueren $\mathbf{u} = \left(\frac{n_1 \pi}{b_1 - a_1}, \frac{n_2 \pi}{b_2 - a_2}\right)$ zodat geldt

$$\hat{\phi}_X\left(\frac{n_1 \pi}{b_1 - a_1}, \frac{n_2 \pi}{b_2 - a_2}\right) \exp\left(-ia_1 \frac{n_1 \pi}{b_1 - a_1} - ia_2 \frac{n_2 \pi}{b_2 - a_2}\right) = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} e^{in_1 \pi \frac{y_1 - a_1}{b_1 - a_1} + in_2 \pi \frac{y_2 - a_2}{b_2 - a_2}} f_X(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (3.16)$$

Vanwege de Euler-formule weten we dat $\operatorname{Re}\{e^{iu}\} = \cos(u)$. We bekijken nu het reële deel van vergelijking (3.16) en zien dat

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left\{\hat{\phi}_X\left(\frac{n_1 \pi}{b_1 - a_1}, \frac{n_2 \pi}{b_2 - a_2}\right) \exp\left(-ia_1 \frac{n_1 \pi}{b_1 - a_1} - ia_2 \frac{n_2 \pi}{b_2 - a_2}\right)\right\} \\ = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} \cos\left(n_1 \pi \frac{y_1 - a_1}{b_1 - a_1} + n_2 \pi \frac{y_2 - a_2}{b_2 - a_2}\right) f_X(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Nu vermenigvuldigen we de linkergelijkheid van vergelijking (3.15) met $\exp\left(-ia_1 \frac{n_1 \pi}{b_1 - a_1} + ia_2 \frac{n_2 \pi}{b_2 - a_2}\right)$ en substitueren $\mathbf{u} = \left(\frac{n_1 \pi}{b_1 - a_1}, -\frac{n_2 \pi}{b_2 - a_2}\right)$ zodat

$$\hat{\phi}_X\left(\frac{n_1 \pi}{b_1 - a_1}, -\frac{n_2 \pi}{b_2 - a_2}\right) \exp\left(-ia_1 \frac{n_1 \pi}{b_1 - a_1} + ia_2 \frac{n_2 \pi}{b_2 - a_2}\right) = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} e^{in_1 \pi \frac{y_1 - a_1}{b_1 - a_1} - in_2 \pi \frac{y_2 - a_2}{b_2 - a_2}} f_X(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (3.18)$$

Ook nu gebruiken we dat geldt $\operatorname{Re}\{e^{iu}\} = \cos(u)$ en zien

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left\{\hat{\phi}_X\left(\frac{n_1 \pi}{b_1 - a_1}, -\frac{n_2 \pi}{b_2 - a_2}\right) \exp\left(-ia_1 \frac{n_1 \pi}{b_1 - a_1} + ia_2 \frac{n_2 \pi}{b_2 - a_2}\right)\right\} \\ = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} \cos\left(n_1 \pi \frac{y_1 - a_1}{b_1 - a_1} - n_2 \pi \frac{y_2 - a_2}{b_2 - a_2}\right) f_X(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

We tellen nu vergelijkingen (3.17) en (3.19) bij elkaar op zodat we krijgen

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left\{\hat{\phi}_X\left(\frac{n_1 \pi}{b_1 - a_1}, \frac{n_2 \pi}{b_2 - a_2}\right) \exp\left(-ia_1 \frac{n_1 \pi}{b_1 - a_1} - ia_2 \frac{n_2 \pi}{b_2 - a_2}\right)\right\} \\ + \operatorname{Re}\left\{\hat{\phi}_X\left(\frac{n_1 \pi}{b_1 - a_1}, -\frac{n_2 \pi}{b_2 - a_2}\right) \exp\left(-ia_1 \frac{n_1 \pi}{b_1 - a_1} + ia_2 \frac{n_2 \pi}{b_2 - a_2}\right)\right\} \\ = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} \left[\cos\left(n_1 \pi \frac{y_1 - a_1}{b_1 - a_1} + n_2 \pi \frac{y_2 - a_2}{b_2 - a_2}\right) \right. \\ \left. + \cos\left(n_1 \pi \frac{y_1 - a_1}{b_1 - a_1} - n_2 \pi \frac{y_2 - a_2}{b_2 - a_2}\right) \right] f_X(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

We zullen deze vergelijking herschrijven zodat we A_{n_1, n_2} en F_{n_1, n_2} gaan herkennen. We gebruiken $2 \cos(\alpha) \cos(\beta) = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$ om de cosinussen te herschrijven in vergelijking (3.20). Dan krijgen we

$$\cos\left(n_1\pi \frac{y_1 - a_1}{b_1 - a_1} + n_2\pi \frac{y_2 - a_2}{b_2 - a_2}\right) + \cos\left(n_1\pi \frac{y_1 - a_1}{b_1 - a_1} - n_2\pi \frac{y_2 - a_2}{b_2 - a_2}\right) = \cos\left(n_1\pi \frac{y_1 - a_1}{b_1 - a_1}\right) \cos\left(n_2\pi \frac{y_2 - a_2}{b_2 - a_2}\right).$$

We hebben in vergelijking 3.15 al gezien dat $\hat{\phi}_X(\mathbf{u}) \approx \phi_X(\mathbf{u})$ en als we dit nu ook gebruiken in vergelijking 3.20 volgt direct $A_{n_1, n_2}(\mathbf{y}) \approx F_{n_1, n_2}(\mathbf{y})$. \square

We kunnen nu wegens Propositie 3.2.3 de coëfficiënten A_{n_1, n_2} in vergelijking (3.14) vervangen door F_{n_1, n_2} om een derde benadering te krijgen. Deze derde benadering wordt dan gegeven door

$$V_3(t_0, \mathbf{x}) = \frac{b_1 - a_1}{2} \frac{b_2 - a_2}{2} e^{-r\tau} \sum'_{n_1=0}^{N-1} \sum'_{n_2=0}^{N-1} F_{n_1, n_2}(\mathbf{y}) H_{n_1, n_2},$$

met de eerder genoemde F_{n_1, n_2} . Deze vergelijking noemen we de twee-dimensionale COS-formule voor algemene processen. We kunnen deze methode formeel schrijven als Definitie 3.2.4.

Definitie 3.2.4 (Twee-dimensionale COS-formule). [10, p.6] Zij $X(t) = (X_1(t), X_2(t))$ een functie van $S(t)$ en laat $\mathbf{x} = X(t_0)$ en $\mathbf{y} = X(T)$. Laat de optiewaarde gegeven zijn door

$$V(t_0, \mathbf{x}) = e^{-r\tau} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[V(T, \mathbf{y}) | \mathcal{F}(t_0)] = e^{-r\tau} \iint_{\mathbb{R}^2} V(T, \mathbf{y}) f_X(\mathbf{y}) d\mathbf{y},$$

met $\tau = T - t_0$ en r het rentepercentage. Dan wordt de twee-dimensionale COS-formule gegeven door

$$V_3(t_0, \mathbf{x}) = \frac{b_1 - a_1}{2} \frac{b_2 - a_2}{2} e^{-r\tau} \sum'_{n_1=0}^{N-1} \sum'_{n_2=0}^{N-1} F_{n_1, n_2}(\mathbf{y}) H_{n_1, n_2},$$

met coëfficiënten

$$F_{n_1, n_2}(\mathbf{y}) = \frac{1}{2} \frac{2}{b_1 - a_1} \frac{2}{b_2 - a_2} \left[\operatorname{Re} \left\{ \phi_X \left(\frac{n_1\pi}{b_1 - a_1}, \frac{n_2\pi}{b_2 - a_2} \right) \exp \left(-ia_1 \frac{n_1\pi}{b_1 - a_1} - ia_2 \frac{n_2\pi}{b_2 - a_2} \right) \right\} \right. \\ \left. + \operatorname{Re} \left\{ \phi_X \left(\frac{n_1\pi}{b_1 - a_1}, -\frac{n_2\pi}{b_2 - a_2} \right) \exp \left(-ia_1 \frac{n_1\pi}{b_1 - a_1} + ia_2 \frac{n_2\pi}{b_2 - a_2} \right) \right\} \right].$$

en

$$H_{n_1, n_2} := \frac{2}{b_1 - a_1} \frac{2}{b_2 - a_2} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} V(T, \mathbf{y}) \cos\left(n_1\pi \frac{y_1 - a_1}{b_1 - a_1}\right) \cos\left(n_2\pi \frac{y_2 - a_2}{b_2 - a_2}\right) d\mathbf{y}.$$

Hierbij is de karakteristieke functie $\phi_X(\mathbf{u})$ een verkorte notatie, namelijk $\phi_X(\mathbf{u}) = \phi_X(\mathbf{u}; t_0, T) \equiv \phi_X(\mathbf{u}, x; t_0, T)$ \diamond

Hierbij is het goed om te noemen dat het volgende geldt:

$$\phi_X(\mathbf{u}) = e^{iu_1 X_1(t_0) + iu_2 X_2(t_0)} \varphi_X(\mathbf{u}, t),$$

waarbij $\varphi_X(\mathbf{u}, t)$ niet een conditionele karakteristieke functie, die we ook wel de overgangskansdichtheidsfunctie noemen, maar een tijdsafhankelijke bivariate karakteristieke functie zoals we een karakteristieke functie meestal gebruiken.

Opmerking 3.2.5. In de coëfficiënten H_{n_1, n_2} hebben we $V(T, \mathbf{y})$, die we bepalen afhankelijk van de optie waar we mee te maken hebben. We hebben al een aantal uitbetalingsfuncties gezien in Hoofdstuk 1.3. We bekijken ook nu de call-on-max optie (Definitie 1.3.4) en de put-on-min optie (Definitie 1.3.5). Laat $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ en $\mathbf{S}(t) = (S_1(t), S_2(t))$. Zij

$$\mathbf{y}(T) = \log \mathbf{S}(T),$$

dan

$$V(T, \mathbf{y}) := \begin{cases} [\max\{e^{y_1}, e^{y_2}\} - K]^+ & \text{voor een call-on-max optie} \\ [K - \min\{e^{y_1}, e^{y_2}\}]^+ & \text{voor een put-on-min optie.} \end{cases}$$

De coëfficiënten H_{n_1, n_2} zijn verschillend voor andere optieconstructies, voor nu geven deze twee optieconstructies een goed genoeg beeld hoe de uitbetalingsfuncties zo geschreven kunnen worden dat we ze voor de COS-formule kunnen gebruiken.

We hebben nu een afleiding gezien van de COS-formule in 2 dimensies. Deze methodes kunnen we gebruiken om in één of twee dimensies een eerlijke prijs te bepalen voor een optiecontract op tijdstip t_0 . Ook kunnen we een versimpelde versie van de één- en twee-dimensionale COS-methode bekijken om kansdichtheidsfuncties te benaderen, dit doen we in de volgende sectie.

3.3 COS-methode voor het benaderen van kansdichtheden

In de afgelopen twee secties hebben we de COS-methode afgeleid voor één en twee dimensies. Deze methode kunnen we gebruiken om aandelen te modelleren. We kunnen daarentegen ook een versimpelde versie van de COS-methode bekijken om middels een cosinus Fourierreeks een benadering van een kansdichtheidsfunctie te geven als deze niet bekend is, maar we de karakteristieke functie wel kennen. In deze sectie gaan we de versimpelde methode opstellen voor zowel één als twee dimensies. In Hoofdstuk 4 gaan we deze methodes daadwerkelijk modelleren.

Één-dimensionale benadering kansdichtheidsfunctie

We gaan nu op zoek naar de versimpelde COS-formule om een benadering van een één-dimensionale kansdichtheidsfunctie te maken. We hebben in Definitie 3.1.2 de cosinus Fourierreeks gedefinieerd, zie daarvoor ook de notatie van vergelijking (3.2). Dit kunnen we ook doen voor de kansdichtheidsfunctie $f_X(y)$ met karakteristieke functie $\varphi_X(y)$, waarbij X een kansvariabele. We benaderen deze kansdichtheidsfunctie vervolgens met $\hat{f}_X(y)$, door eerst de sommatiegrenzen van de cosinus Fourierreeks aan te passen zodat

$$\hat{f}_X(y) = \sum_{n=0}^{N-1} A_n \cos\left(n\pi \frac{y-a}{b-a}\right),$$

waarbij N slim gekozen. We komen in Sectie 4.1 terug op het verstandig kiezen van deze N -waarde. Vervolgens gebruiken we Propositie 3.1.5 waar we stellen dat $A_n \approx F_n$ zodat

$$\hat{f}_X(y) = \sum_{n=0}^{N-1} F_n \cos\left(n\pi \frac{y-a}{b-a}\right), \quad (3.21)$$

met

$$F_n := \frac{2}{b-a} \operatorname{Re} \left\{ \varphi_X \left(\frac{n\pi}{b-a} \right) \exp \left(-i \frac{na\pi}{b-a} \right) \right\}.$$

Vergelijking (3.21) is precies de versimpelde COS-formule waarmee we de kansdichtheidsfunctie $f_X(y)$ kunnen benaderen. We gaan hetzelfde ook doen voor het benaderen van een bivariate kansdichtheidsfunctie met een versimpelde versie van de twee-dimensionale COS-methode.

Twee-dimensionale benadering bivariate kansdichtheidsfunctie

We gaan nu op dezelfde wijze op zoek naar de versimpelde COS-formule voor een benadering van een twee-dimensionale bivariate kansdichtheidsfunctie. We hebben in Definitie 3.2.1 de twee-dimensionale cosinus Fourierreeks gedefinieerd, zie vergelijking (3.12). We gebruiken deze definitie voor de bivariate kansdichtheidsfunctie $f_X(y_1, y_2)$ met karakteristieke functie $\varphi_X(y_1, y_2)$, waarbij $X = (X_1, X_2)$ een kansvariabele. We benaderen

deze kansdichtheidsfunctie nu met $\hat{f}_X(y_1, y_2)$, door de sommatiegrenzen van de cosinus Fourrierreeks aan te passen zodat

$$\hat{f}(\mathbf{y}) = \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} A_{n_1, n_2}(\mathbf{y}) \cos\left(n_1 \pi \frac{y_1 - a_1}{b_1 - a_1}\right) \cos\left(n_2 \pi \frac{y_2 - a_2}{b_2 - a_2}\right)$$

waarbij N slim gekozen. We komen in Sectie 4.1 terug op het verstandig kiezen van deze N -waarde. We vervolgen de afleiding met het stellen dat $A_{n_1, n_2} \approx F_{n_1, n_2}$, dit volgt uit Propositie 3.2.3. Dan geldt er nu

$$\hat{f}(\mathbf{y}) = \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} F_{n_1, n_2}(\mathbf{y}) \cos\left(n_1 \pi \frac{y_1 - a_1}{b_1 - a_1}\right) \cos\left(n_2 \pi \frac{y_2 - a_2}{b_2 - a_2}\right), \quad (3.22)$$

met

$$F_{n_1, n_2}(\mathbf{y}) = \frac{1}{2} \frac{2}{b_1 - a_1} \frac{2}{b_2 - a_2} \left[\operatorname{Re} \left\{ \phi_X \left(\frac{n_1 \pi}{b_1 - a_1}, \frac{n_2 \pi}{b_2 - a_2} \right) \exp \left(-ia_1 \frac{n_1 \pi}{b_1 - a_1} - ia_2 \frac{n_2 \pi}{b_2 - a_2} \right) \right\} \right. \\ \left. + \operatorname{Re} \left\{ \phi_X \left(\frac{n_1 \pi}{b_1 - a_1}, -\frac{n_2 \pi}{b_2 - a_2} \right) \exp \left(-ia_1 \frac{n_1 \pi}{b_1 - a_1} + ia_2 \frac{n_2 \pi}{b_2 - a_2} \right) \right\} \right].$$

Vergelijking (3.22) is de versimpelde twee-dimensionale COS-formule waarmee we de bivariate kansdichtheidsfunctie $f_X(y_1, y_2)$ kunnen benaderen. Deze methode kunnen we uitbreiden om een multivariate kansdichtheidsfunctie te benaderen indien deze niet bekend zijn, maar we de multivariate karakteristieke functie wel kennen. Voor deze scriptie houden we het bij twee dimensies.

We hebben dit hoofdstuk zowel de één- als de twee-dimensionale COS-methode afgeleid. Met de één- en twee-dimensionale COS-formule kunnen we optiewaardering van aandelen modelleren voor respectievelijk één of twee aandelen. Verder hebben we gekeken naar een versimpelde variant van de COS-formule waarmee we kansdichtheidsfuncties kunnen benaderen. In het volgende hoofdstuk, Hoofdstuk 4, modelleren we alle methodes die we in dit hoofdstuk hebben gezien.

Hoofdstuk 4

Modelleren

Dit hoofdstuk staat in het teken van het programmeren van de COS-methode in zowel één als twee dimensies. We gebruiken de COS-methode eerst om kansdichtheidsfuncties te benaderen. In het bijzonder kijken we in één en twee dimensies respectievelijk naar de standaard normale verdeling en de bivariate standaard normale verdeling. Vervolgens kijken we naar de COS-methode in één dimensie waar we gebruik maken van de in Hoofdstuk 1.3 gedefinieerde call- en put- opties. Daarna modelleren we de COS-methode in twee dimensies. We gebruiken de in Hoofdstuk 1.3 gedefinieerde call-on-max-optie. In dit hoofdstuk nemen we aan dat de kansdichtheidsfunctie onbekend is, maar we haar karakteristieke functie wel kennen.

Voor we echt naar het modelleren gaan, komen we eerst terug op Hoofdstuk 3, waar is aangegeven in dit hoofdstuk de keuze voor de waarde van N te bespreken. In deze scriptie bekijken we meerdere waarden voor N om te zien wanneer de methodes convergeren. We zullen in dit hoofdstuk dan ook geen definitieve waarde hieraan geven. Wel is na dit hoofdstuk duidelijk in welk bereik N ongeveer moet zitten om convergentie te bereiken. Ook zal het zeker mogelijk zijn om een meest optimale keuze te maken voor N , maar ook hier doen we verder geen onderzoek naar in deze scriptie.

Verder komen we ook terug op Sectie 3.1 en Sectie 3.2 waar beloofd is om in dit hoofdstuk het te hebben over de intervalkeuze $[a, b]$ en $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$. We zullen hier de intervallen bespreken die we voor de rest van deze scriptie gaan gebruiken en waarom deze keuze gemaakt is. In één dimensie zijn er meerdere papers die ons kunnen vertellen wat de beste keuze is voor $[a, b]$, wij kiezen daarentegen niet voor de beste keuze, maar voor een simpeler interval wat uit empirisch onderzoek ook goed blijkt te werken. Dit interval wordt gegeven door $[-L\sqrt{T}, L\sqrt{T}]$, waarbij $L = 8$ goed lijkt te werken [12, p.179]. In twee dimensies gaan we het anders doen. Het interval moet groot genoeg zijn om de belangrijke informatie (de niet-nulpunten) van de benaderde kansdichtheidsfunctie te bevatten. We kiezen de intervallen daarom ruim genoeg om dit te kunnen verzekeren en nemen $[-10, 10] \times [-10, 10]$. Het kan zijn dat we daarom N groter gaan kiezen, we merken snel genoeg of het model dan gaat convergeren. We nemen dus vanaf nu aan dat $a_1 = a_2 = a$ en $b_1 = b_2 = b$, dit heeft weinig invloed op het Pythonscript waar we aan gaan werken.

4.1 Benaderen kansdichtheidfuncties

We willen in deze sectie graag in één dimensie de kansdichtheidsfunctie van de standaard normale verdeling benaderen en in twee dimensies de kansdichtheidsfunctie van de bivariate standaard normale verdeling benaderen. We zijn dus niet op de hoogte van de kansdichtheidsfuncties van deze verdelingen, maar kennen wel hun karakteristieke functies.

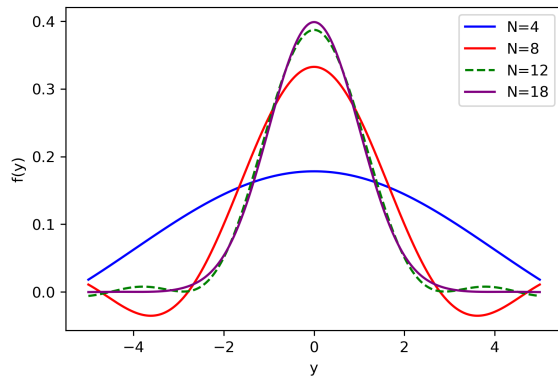
4.1.1 Één dimensie

We gaan nu de standaard normale verdeling benaderen. We hebben in Sectie 3.3 al in vergelijking (3.21) gezien hoe we dit kunnen doen. We gaan voor deze benadering de karakteristieke functie van een normale verdeling gebruiken, deze wordt gegeven door [10, p.16]:

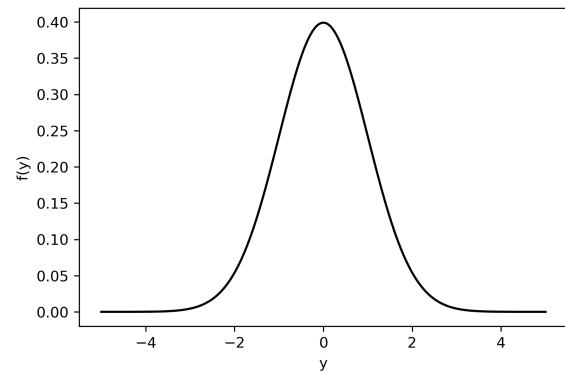
$$\phi_X(y) = e^{\mu iy - \frac{\sigma^2 y^2}{2}}, \quad (4.1)$$

waarbij $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. In het geval van een standaard normale verdeling hebben we $\mu = 0$ en $\sigma = 1$ [4, p.31]. Zie voor de code het volgende bestand in GitHub: ‘Benadering kansdichtheidsfunctie normale verdeling’. De code spreekt door de bijgevoegde opmerkingen vrij voor zich, maar we zullen de structuur en werking hier nog kort toelichten. De code start met het benoemen van alle variabelen en vervolgt met de definitie van de karakteristieke functie zoals we hem net in vergelijking (4.1) hebben gezien. Daarna volgt de benadering van de kansdichtheidsfunctie zoals we dat in vergelijking (3.21) hebben gezien. De code eindigt met het genereren

van de bijbehorende grafiek, deze wordt gegenereerd voor meerdere N -waarden. Verder gebruiken we ook het bestand ‘Kansdichtheidsfunctie normale verdeling’ om de grafiek van de daadwerkelijke (niet-benaderde) kansdichtheidsfunctie van de standaard normale verdeling te genereren. Zie Figuren 4.1 en 4.2 voor de grafieken.



Figuur 4.1: Benadering kansdichtheidsfunctie standaard normale verdeling voor verschillende N -waarden.



Figuur 4.2: Kansdichtheidsfunctie standaard normale verdeling.

We merken op dat des te meer sommatietermen de cosinus Fourierreeks bevat, des te nauwkeuriger de benadering is. Ook zien we dat deze convergentie erg snel is, de grafiek voor $N = 12$ overlapt al veel met de grafiek voor $N = 18$. De grafiek voor $N = 18$ komt zelfs al overeen met de daadwerkelijke kansdichtheidsfunctie voor de standaard normale verdeling. We zouden deze methode voor veel andere continue kansdichtheidsfuncties kunnen gebruiken, indien de karakteristieke functie bekend is. We concluderen dat de COS-methode een eenvoudige, maar nauwkeurige methode is om in één dimensie kansdichtheidsfuncties te benaderen.

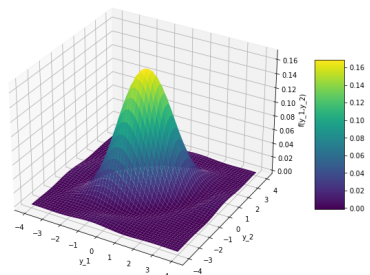
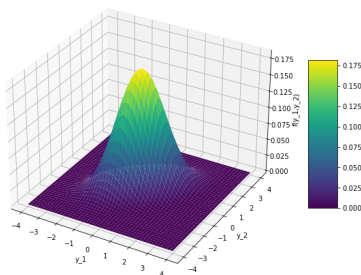
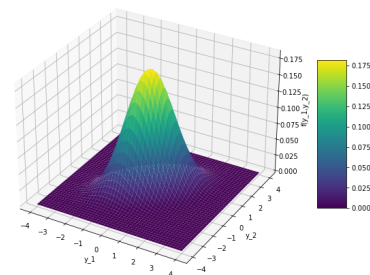
4.1.2 Twee dimensies

We benaderen nu de bivariate standaard normale verdeling. In Sectie 3.3 hebben we in vergelijking (3.22) gezien hoe we deze benadering maken. Voor deze benadering hebben we deze karakteristieke functie van een bivariate normale verdeling nodig. De karakteristieke functie van een bivariate normale verdeling wordt gegeven door [10, p.16]

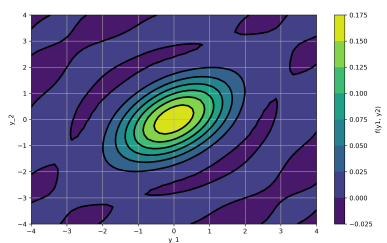
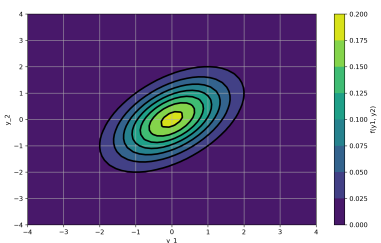
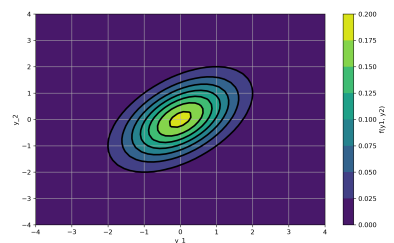
$$\phi_X(y_1, y_2) = e^{\mu_1 i y_1 + \mu_2 i y_2 - \frac{\sigma_1^2 u_1^2}{2} - \frac{\sigma_2^2 u_2^2}{2} - \rho u_1 u_2 \sigma_1 \sigma_2}, \quad (4.2)$$

met $X = (X_1, X_2)$ en ρ de correlatiecoëfficiënt tussen X_1 en X_2 . Verder geldt ook dat $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ en $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. In het geval van de bivariate standaard normale verdeling hebben we $\mu_1 = \mu_2 = 0$ en $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ [13]. In principe mag $\rho \in [-1, 1]$, maar voor deze benadering kijken we naar het geval dat $\rho = 0,5$. Zie voor de Pythoncode van deze benadering het volgende bestand in GitHub: ‘Benadering bivariate kansdichtheidsfunctie normale verdeling 3D-plot en contourplot’. Ook in dit twee-dimensionale geval spreekt de code vrij voor zich, maar we zullen ook hier de structuur en werking van de code kort toelichten.

De code benoemt eerst de benodigde variabelen. Één ding om even uit te lichten van de variabelen, we nemen $r = 0,5$ zodat we krijgen $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Vervolgens definiëren we de bivariate karakteristieke functie zoals we deze gezien hebben in vergelijking (4.2). Daarna volgt een functie voor de coëfficiënten F_{n_1, n_2} en de functie die de kansdichtheid benadert zoals beschreven in vergelijking (3.22). We eindigen de code met het genereren van de bijbehorende 3D-grafiek en een contourplot. Verder gebruiken we ook ‘Bivariate kansdichtheidsfunctie normale verdeling 3D-plot en contourplot’ om de niet-benaderde kansdichtheidsfunctie van de bivariate standaard normale verdeling te genereren, ook hier gaat het om een 3D-grafiek en een contourplot. We hebben nu figuren gemaakt voor de gevallen $N = 16$ en $N = 64$, zie voor deze grafieken Figuren 4.3 tot en met 4.8


 Figuur 4.3: Benadering 3D-plot $N=16$.

 Figuur 4.4: Benadering 3D-plot $N=64$.


Figuur 4.5: Kansdichtheidsfunctie 3D-plot.


 Figuur 4.6: Benadering contour-plot $N=16$.

 Figuur 4.7: Benadering contour-plot $N=64$.


Figuur 4.8: Kansdichtheidsfunctie contourplot.

We merken op dat ook in het twee-dimensionale geval, bij het benaderen van de kansdichtheidsfunctie van de bivariate standaard normaal verdeling, de nauwkeurigheid van de benadering toeneemt naarmate de sinus Fourierreeks meer sommatietermen bevat. Dit is zowel in de 3D-plot als het contourplot goed te zien. Ook hier geldt dat we de methode voor andere continue kansdichtheidsfuncties, waarvan hun karakteristieke functie bekend is, kunnen gebruiken. De COS-methode blijkt ook in twee dimensies een eenvoudige doch snelle en nauwkeurige methode om kansdichtheidsfuncties in twee dimensies te benaderen. We hebben niet naar meer dan twee dimensies gekeken, maar verwachten dezelfde conclusie van de resultaten als we naar meer dimensies zouden kijken.

We hebben in deze sectie gezien hoe we een kansdichtheidsfunctie kunnen benaderen middels de COS-methode indien we haar karakteristieke functie kennen. Hierbij zien we zoals verwacht een betere nauwkeurigheid van de benaderingen naarmate we meer sommatietermen toevoegen, ofwel naarmate we N verhogen. Verder is het goed om te zien dat de benadering al snel lijkt op de echte functie waardoor we een kleine N kunnen kiezen en daarmee een snelle benadering hebben.

4.2 Één-dimensionale COS-methode

Deze sectie staat in het teken van het programmeren van de één-dimensionale COS-methode. We hebben de afleiding van de één-dimensionale COS-formule gezien in Sectie 3.1 en de uiteindelijke definitie van de COS-formule hebben we gezien in vergelijking (3.1.6). We hebben aangenomen dat de aandelen een Geometrische Brownse Beweging volgen. We gebruiken dan ook de karakteristieke functie die behoort bij dit proces. Deze functie is gelijk aan de karakteristieke functie van de normale verdeling die we gezien hebben in vergelijking (4.1) [7, p.180]. Verder modelleren we de COS-methode in deze sectie voor de put- en call-optie en bepalen zo een eerlijke prijs voor een optiecontract op tijdstip t_0 met nog nader te noemen variabelen.

We maken twee verschillende modellen. Voor het eerste model gebruiken we de ‘simps’-functie van SciPy die de Simpson-regel gebruikt en zo numeriek de integraal van de coëfficiënten H_n oplost. Voor het tweede model gaan we de analytische oplossing van de integraal van de coëfficiënten H_n gebruiken. We geven nu eerst de analytische oplossing van de coëfficiënten H_n en zullen daarna vervolgen met de structuur en werking van de

twee modellen.

We zoeken een oplossing voor

$$H_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b [c \cdot K(e^y - 1)]^+ \cos\left(n\pi \frac{y-a}{b-a}\right) dy,$$

waarbij

$$c = \begin{cases} 1 & \text{voor een call,} \\ -1 & \text{voor een put.} \end{cases}$$

We introduceren twee integralen met hun oplossingen, namelijk:

$$\begin{aligned} \chi_n(c, d) &:= \int_c^d e^y \cos\left(n\pi \frac{y-a}{b-a}\right) dy \\ &= \frac{1}{1 + \left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2} \left[\cos\left(n\pi \frac{d-a}{b-a}\right) e^d - \cos\left(n\pi \frac{c-a}{b-a}\right) e^c \right. \\ &\quad \left. + \frac{n\pi}{b-a} \sin\left(n\pi \frac{d-a}{b-a}\right) e^d - \frac{n\pi}{b-a} \sin\left(n\pi \frac{c-a}{b-a}\right) e^c \right], \end{aligned} \quad (4.3)$$

en

$$\begin{aligned} \lambda_n(c, d) &:= \int_c^d \cos\left(n\pi \frac{y-a}{b-a}\right) dy \\ &= \begin{cases} \frac{b-a}{n\pi} \left[\sin\left(n\pi \frac{d-a}{b-a}\right) - \sin\left(n\pi \frac{c-a}{b-a}\right) \right] & n \neq 0, \\ d - c & n = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.4)$$

De berekeningen van de oplossingen van deze integralen tonen we niet in deze scriptie, maar ze volgen uit eenvoudige calculus. We krijgen de volgende analytische oplossing voor H_n :

$$H_n = \begin{cases} \frac{2K}{b-a} (\chi_n(0, b) - \lambda_n(0, b)) & \text{voor een call-optie,} \\ \frac{2K}{b-a} (-\chi_n(a, 0) + \lambda_n(a, 0)) & \text{voor een put-optie.} \end{cases} \quad (4.5)$$

We bekijken nu de twee modellen van de één-dimensionale COS-methode voor de put- en call-optie. Bekijk daarvoor op GitHub de codes ‘1-dimensionale COS-methode met integraal’ en ‘1-dimensionale COS-methode met analytische oplossing’. We starten in beide modellen hetzelfde, we benoemen alle variabelen die we gaan nodig hebben voor het model. Vervolgens definiëren we in beide codes ook de karakteristieke functie van de normale verdeling. Merk op dat we zoals gezien in Sectie 3.1 gebruik maken van

$$\phi_x(u) := e^{iuX(t_0)} \varphi_X(u, t),$$

dit zien we ook terug in beide codes. Nu komt het deel waarop de codes verschillen. In het eerste model definiëren we de put- en call-optie zoals in Hoofdstuk 1.3 en gebruiken we om de coëfficiënten H_n te bepalen zoals eerder gezegd de ‘simps’-functie van SciPy. In het tweede model definiëren we χ_n en λ_n net als in vergelijkingen (4.3) en (4.4) om vervolgens middels de oplossingen van vergelijking (4.5) de coëfficiënten H_n te bepalen. De codes zijn vervolgens weer hetzelfde. De coëfficiënten F_n worden gedefinieerd om zo de COS-formule te definiëren als in vergelijking (3.1.6). Tot slot kunnen we een waarde voor N geven en zo de eerlijke prijs voor een optiecontract op tijdstip t_0 bepalen.

We gebruiken de volgende vaste parametersetting: $S_0 = 100$; $r = 0,1$; $\delta = 0$; $T = 0,1$ en $\sigma = 0,25$. Verder gaan we K als volgt variëren: $K = 80$, $K = 100$, $K = 120$. We bekijken beide modelopties met deze parameters en variëren daarbij de waarde van N om de convergentie te bekijken. Daarnaast bepalen we de uitvoeringstijd van de code. We runnen de code voor iedere parametersetting driemaal en bepalen de gemiddelde uitvoeringstijd,

de code geeft iedere keer dezelfde optiewaarde. We schrijven elke uitkomst van de code als een getal van drie cijfers achter de komma, verwar dit niet met significantie, er is niet altijd sprake van een significantie van drie cijfers. Dit gezien we geldbedragen altijd uitdrukken in een getal met twee cijfers achter de komma en we graag een extra cijfer toevoegen voor de significantie. Dit alles doen we voor zowel de call- als de put-optie. Zie het resultaat in Tabellen 4.1 en 4.2 hieronder.

Tabel 4.1: Call-optie

Model 1	K=80	Tijd (secondes)	K=100	Tijd (secondes)	K=120	Tijd (secondes)
N=16	20,069	0,030476	2,571	0,030904	1,598	0,030511
N=32	21,016	0,057915	3,545	0,057021	0,141	0,060884
N=64	20,780	0,112047	3,659	0,127782	0,044	0,121302
N=128	20,780	0,677659	3,661	0,228701	0,045	0,236312
N=156	20,799	0,294620	3,661	0,320440	0,045	0,469065
Model 2	K=80	Tijd (secondes)	K=100	Tijd (secondes)	K=120	Tijd (secondes)
N=16	20,069	0,000000	2,571	0,000000	1,597	0,000000
N=32	21,016	0,000000	3,545	0,000000	0,141	0,000000
N=64	20,780	0,000000	3,659	0,000699	0,044	0,001946
N=128	20,799	0,002375	3,660	0,004748	0,045	0,002741
N=156	20,799	0,002818	3,660	0,002971	0,045	0,003194

Tabel 4.2: Put-optie

Model 1	K=80	Tijd (secondes)	K=100	Tijd (secondes)	K=120	Tijd (secondes)
N=16	-0,599	0,091477	3,781	0,027117	18,074	0,029597
N=32	0,032	0,059600	2,777	0,052231	18,785	0,055793
N=64	0,003	0,119085	2,666	0,128615	18,851	0,130338
N=128	0,003	0,234737	2,665	0,261801	18,851	0,266790
N=156	0,003	0,299413	2,665	0,299690	18,851	0,313720
Model 2	K=80	Tijd (secondes)	K=100	Tijd (secondes)	K=120	Tijd (secondes)
N=16	-0,599	0,000197	3,781	0,000000	18,074	0,000000
N=32	0,032	0,000000	2,777	0,000000	18,785	0,000340
N=64	0,003	0,000336	2,665	0,000000	18,851	0,000000
N=128	0,003	0,000174	2,665	0,003022	18,851	0,001897
N=156	0,003	0,001199	2,665	0,006744	18,851	0,002958

Wat opvalt is dat zowel voor de call- als de put- optie de optiewaarde tot $N = 64$ nog wel een beetje schommelt, maar daarna snel convergeert. Verder zijn beide modellen vrij snel, al zit er wel degelijk een groot verschil in de snelheid tussen model 1 en model 2. Model 1 kan tot zeker 150 keer langzamer zijn dan model 2. De berekeningen die we nu doen zijn zo klein dat we dit verschil nog niet echt merken. Zodra je daarentegen vele berekeningen tegelijk wil uitvoeren, is het slimmer om te werken met het analytische model, model 2. Ook valt het op dat de modellen niet naar precies dezelfde waarden convergeren. De orde van grootte is zeker gelijk en de verwachting is dat het aan de nauwkeurigheid ligt van de numerieke benadering van H_n met de Simpson-regel. Model 2 is dus niet alleen sneller maar ook nauwkeuriger met de huidige variabele keuze.

Opmerking 4.2.1. Herinner dat de put-call-parity gegeven is door:

$$c(t) - p(t) = S(t) - Ke^{-r(T-t)}.$$

Merk op dat we ook numeriek zien dat deze put-call-parity geldt. Neem bijvoorbeeld model 2, $K = 80$ en $N = 156$. We zien:

$$c(0) = p(0) + S(0) - Ke^{-r(T-t)} = 0.003213 + 100 - 80e^{-0.1(0.1-0)} = 20,79923.$$

Dit is precies de waarde die we numeriek ook gevonden hebben met de COS-methode. Deze relatie zien we ook voor $K = 100$ en $K = 120$.

We hebben in deze sectie twee modellen geïntroduceerd om optiewaardering te modelleren in één dimensie. Beide modellen convergeren snel en naar de waarden die we zijn tegen gekomen in ‘Mathematical Modeling and Computation in Finance’ van Cornelis W. Oosterlee en Lech A. Grzelak [7]. In de volgende sectie zullen we hetzelfde doen voor de twee-dimensionale COS-methode.

4.3 Twee-dimensionale COS-methode

We gaan in deze sectie de twee-dimensionale COS-methode programmeren zoals we deze hebben afgeleid in Sectie 3.2 en hebben gedefinieerd in vergelijking (3.2.4). We hebben aangenomen dat de aandelen een Geometrische Brownse Beweging volgen. We gebruiken dan ook de karakteristieke functie die behoort bij dit proces. Deze functie is gelijk aan de karakteristieke functie van de bivariate normale verdeling die we gezien hebben in vergelijking (4.2) [10, p.16]. We modelleren de twee-dimensionale COS-methode voor de call-on-max-optie, zie Hoofdstuk 1.3, om een eerlijke prijs te bepalen voor een optiecontract op tijdstip t_0 .

We maken twee modellen die verschillen in hoe ze de coëfficiënten H_{n_1, n_2} programmeren. Gezien we hebben aangenomen dat $a_1 = a_2 = a$ en $b_1 = b_2 = b$ volgt voor de call-on-max optie dat:

$$H_{n_1, n_2} := \frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b [\max\{e^{y_1}, e^{y_2}\} - K]^+ \cos\left(n_1 \pi \frac{y_1 - a}{b - a}\right) \cos\left(n_2 \pi \frac{y_2 - a}{b - a}\right) dy. \quad (4.6)$$

Het eerste model maakt nog steeds gebruik van integralen, alleen we zorgen ervoor dat deze geen maximumfuncties meer bevatten om de snelheid van de code te verhogen. Het tweede model maakt gebruik van een volledig analytische oplossing van de coëfficiënten H_{n_1, n_2} . We bepalen eerst de coëfficiënten H_{n_1, n_2} voor het eerste model en daarna voor het tweede model. Vervolgens bespreken we de structuur en werking van de code van deze modellen en presenteren we een aantal resultaten waar we ook de verschillen tussen de modellen zullen bespreken.

4.3.1 Coëfficiënten H_{n_1, n_2} voor model 1

We gaan vergelijking (4.6) schrijven zonder maximumfuncties. We gaan eerst kijken hoe we dit doen voor de coëfficiënten H_{n_1, n_2} , maar dan zonder cosinussen. Ook de constante term voor de integraal laten we voor nu weg en we noemen de resterende integraal v_{n_1, n_2} . Dan krijgen we:

$$v_{n_1, n_2} = \int_a^b \int_a^b \max\{\max(e^{y_1}, e^{y_2}) - K, 0\} dy_2 dy_1.$$

We bekijken deze integraal voor de volgende drie gevallen:

1. $K \leq e^a$,
2. $e^a < K < e^b$,
3. $e^b \leq K$.

In het resterende deel van deze paragraaf zullen we in ieder van deze gevallen beide maximumfuncties uit de dubbele integraal halen.

$K \leq e^a$

Omdat $y_1, y_2 \in [a, b]$, volgt indien $K \leq e^a$ nu

$$\max\{\max(e^{y_1}, e^{y_2}) - K, 0\} = \max(e^{y_1}, e^{y_2}) - K.$$

We kunnen de integraal daarom als volgt schrijven

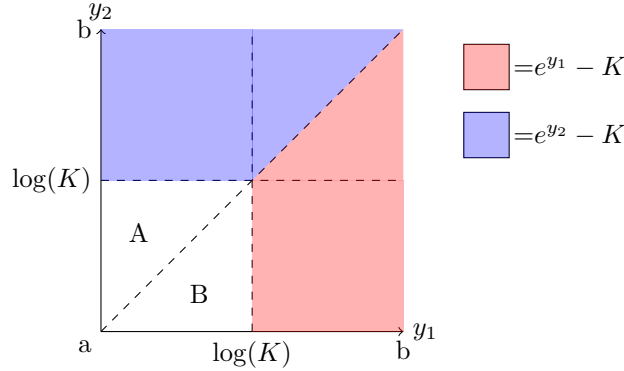
$$\int_a^b \int_a^b \max\{\max(e^{y_1}, e^{y_2}) - K, 0\} dy_2 dy_1 = \int_a^b \int_a^b (\max(e^{y_1}, e^{y_2}) - K) dy_2 dy_1.$$

Ook het tweede maximum kan uit de integraal gehaald worden zodat we krijgen:

$$\int_a^b \int_a^b \max \{ \max(e^{y_1}, e^{y_2}) - K, 0 \} dy_2 dy_1 = \int_a^b \left[\int_a^{y_1} (e^{y_1} - K) dy_2 + \int_{y_1}^b (e^{y_2} - K) dy_2 \right] dy_1.$$

$$e^a < K < e^b$$

We nemen voor het gemak even aan dat $K > 0$, gezien ons dat ook het meest interesseert. Als het maximum van e^{y_1} en e^{y_2} nu kleiner is dan K , dan wordt de integraal gelijk aan nul. We maken dan ook eerst een schets van de situatie, zie daarvoor figuur 4.9 hieronder.



Figuur 4.9: Situatieschets $a < K < b$

We zijn geïnteresseerd in de gearceerde gebieden, in de andere gevallen is de integrand gelijk aan nul. We gaan de integraal opstellen door eerst te kijken naar het hele gebied $[a, b] \times [a, b]$, en we halen daar de gebieden A en B vanaf. We herschrijven de integraal in dit geval dus als volgt:

$$\begin{aligned} & \int_a^b \int_a^b \max \{ \max(e^{y_1}, e^{y_2}) - K, 0 \} dy_2 dy_1 \\ &= \int_a^b \int_a^b (\max(e^{y_1}, e^{y_2}) - K) dy_2 dy_1 - \int_a^{\log(K)} \int_a^{\log(K)} (\max(e^{y_1}, e^{y_2}) - K) dy_2 dy_1. \end{aligned}$$

We kunnen het resterende maximum ook uit de integraal krijgen en herschrijven de integraal om zodanig dat:

$$\begin{aligned} & \int_a^b \int_a^b \max \{ \max(e^{y_1}, e^{y_2}) - K, 0 \} dy_2 dy_1 \\ &= \int_a^b \left[\int_a^{y_1} (e^{y_1} - K) dy_2 + \int_{y_1}^b (e^{y_2} - K) dy_2 \right] dy_1 - \int_a^{\log(K)} \left[\int_a^{y_1} (e^{y_1} - K) dy_2 + \int_{y_1}^{\log(K)} (e^{y_2} - K) dy_2 \right] dy_1. \end{aligned}$$

$$e^b \leq K$$

Het laatste geval waar we naar kijken is als $e^b \leq K$. Gezien $y_1, y_2 \in [a, b]$, merken we op dat nu $\max(e^{y_1}, e^{y_2}) \leq b \leq K$. Ofwel de integrand is in deze situatie altijd gelijk aan nul, $\max \{ \max(e^{y_1}, e^{y_2}) - K, 0 \} = 0$. Dit geval is daarom snel klaar en we concluderen dat

$$\int_a^b \int_a^b \max \{ \max(e^{y_1}, e^{y_2}) - K, 0 \} dy_2 dy_1 = 0.$$

We hebben nu laten zien hoe we het dubbele maximum, middels het veranderen van de integralen, uit de coëfficiënten v_{n_1, n_2} kunnen halen. Op dezelfde wijze kunnen we dit ook doen voor H_{n_1, n_2} , ofwel vergelijking (4.6). We behouden dezelfde drie gevallen en krijgen de volgende herschreven integralen voor H_{n_1, n_2} .

$\mathbf{K} \leq e^a$

$$\begin{aligned}
 H_{n_1, n_2} &= \frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b \left[\int_a^{y_1} (e^{y_1} - K) \cos\left(n_1 \pi \frac{y_1 - a}{b-a}\right) \cos\left(n_2 \pi \frac{y_2 - a}{b-a}\right) dy_2 \right. \\
 &\quad \left. + \int_{y_1}^b (e^{y_2} - K) \cos\left(n_1 \pi \frac{y_1 - a}{b-a}\right) \cos\left(n_2 \pi \frac{y_2 - a}{b-a}\right) dy_2 \right] dy_1.
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

$e^a < \mathbf{K} < e^b$

$$\begin{aligned}
 H_{n_1, n_2} &= \frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b \left[\int_a^{y_1} (e^{y_1} - K) \cos\left(n_1 \pi \frac{y_1 - a}{b-a}\right) \cos\left(n_2 \pi \frac{y_2 - a}{b-a}\right) dy_2 \right. \\
 &\quad \left. + \int_{y_1}^b (e^{y_2} - K) \cos\left(n_1 \pi \frac{y_1 - a}{b-a}\right) \cos\left(n_2 \pi \frac{y_2 - a}{b-a}\right) dy_2 \right] dy_1 \\
 &\quad - \int_a^{\log(K)} \left[\int_a^{y_1} (e^{y_1} - K) \cos\left(n_1 \pi \frac{y_1 - a}{b-a}\right) \cos\left(n_2 \pi \frac{y_2 - a}{b-a}\right) dy_2 \right. \\
 &\quad \left. + \int_{y_1}^{\log(K)} (e^{y_2} - K) \cos\left(n_1 \pi \frac{y_1 - a}{b-a}\right) \cos\left(n_2 \pi \frac{y_2 - a}{b-a}\right) dy_2 \right] dy_1.
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

$e^b \leq \mathbf{K}$

$$H_{n_1, n_2} = 0. \tag{4.9}$$

We hebben nu de coëfficiënten H_{n_1, n_2} bepaald voor model 1.

4.3.2 Coëfficiënten H_{n_1, n_2} voor model 2

We bepalen de coëfficiënten H_{n_1, n_2} voor model 2 en dus gaan we de oplossing van de dubbele integraal van vergelijking (4.6) analytisch bepalen. We bekijken vergelijking (4.6) zonder constante term voor de dubbele integraal en noemen dit V_{n_1, n_2} . Dus geldt:

$$V_{n_1, n_2} := \int_a^b \int_a^b [\max\{e^{y_1}, e^{y_2}\} - K]^+ \cos\left(n_1 \pi \frac{y_1 - a}{b-a}\right) \cos\left(n_2 \pi \frac{y_2 - a}{b-a}\right) dy_2 dy_1. \tag{4.10}$$

We halen eerst één van de maxima uit de integraal door vergelijking (4.6) te schrijven als:

$$\begin{aligned}
 V_{n_1, n_2} &= \int_a^b \int_a^b \max(e^{y_1} - K, 0) \cos(u_1(y_1 - a)) \cos(u_2(y_2 - a)) \mathbb{1}_{y_1 \geq y_2}(y_1, y_2) dy_2 dy_1 \\
 &\quad + \int_a^b \int_a^b \max(e^{y_2} - K, 0) \cos(u_1(y_1 - a)) \cos(u_2(y_2 - a)) \mathbb{1}_{y_1 < y_2}(y_1, y_2) dy_2 dy_1 \\
 &= I_1 + I_2.
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Merk op dat het volgende geldt:

$$\begin{aligned}
 \int_a^b \int_a^b \mathbb{1}_{y_1 \geq y_2}(y_1, y_2) dy_2 dy_1 &= \int_a^b \int_a^{\min(y_1, b)} dy_2 dy_1; \\
 \int_a^b \int_a^b \mathbb{1}_{y_1 < y_2}(y_1, y_2) dy_1 dy_2 &= \int_a^b \int_a^{\min(y_2, b)} dy_1 dy_2.
 \end{aligned}$$

We kunnen nu V_{n_1, n_2} schrijven als

$$\begin{aligned}
 V_{n_1, n_2} &= \int_a^b \int_a^{\min(y_1, b)} \max(e^{y_1} - K, 0) \cos(u_1(y_1 - a)) \cos(u_2(y_2 - a)) dy_2 dy_1 \\
 &+ \int_a^b \int_a^{\min(y_2, b)} \max(e^{y_2} - K, 0) \cos(u_1(y_1 - a)) \cos(u_2(y_2 - a)) dy_1 dy_2 \\
 &= I_1 + I_2.
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

We gaan deze integralen nu oplossen voor de volgende situaties:

1. $n_1 = n_2 = 0$,
2. $n_1 = 0$ en $n_2 \neq 0$,
3. $n_1 \neq 0$ en $n_2 = 0$,
4. $n_1, n_2 \neq 0$.

Voor de uitwerking van deze integralen zijn een aantal simpelere integralen en hun oplossingen nodig. Deze integralen met oplossingen zijn te vinden in de bijlagen, om precies te zijn Bijlage A. We gaan nu kijken naar de oplossing van de integraal in de vier eerder genoemde situaties. In dit hoofdstuk geven we alleen de oplossingen, in Bijlage B kunt u zien hoe deze oplossingen bereikt zijn.

1. $\mathbf{n_1 = n_2 = 0}$

$$V_{n_1, n_2} = \frac{1}{u_2} [\rho(b|u_1, a, u_2, a, K) - \rho(a|u_1, a, u_2, a, K)] + \frac{1}{u_1} [\rho(b|u_2, a, u_1, a, K) - \rho(a|u_2, a, u_1, a, K)]. \tag{4.13}$$

2. $\mathbf{n_1 = 0}$ en $\mathbf{n_2 \neq 0}$

$$V_{n_1, n_2} = \frac{1}{u_2} [\phi(b|u_2, a, K) - \phi(a|u_2, a, K)] + f(b|u_2, a, K) - f(a|u_2, a, K) - a[\psi(b|u_2, a, K) - \psi(a|u_2, a, k)]. \tag{4.14}$$

3. $\mathbf{n_1 \neq 0}$ en $\mathbf{n_2 = 0}$

$$V_{n_1, n_2} = f(b|u_1, a, K) - f(a|u_1, a, K) - a[\psi(b|u_1, a, K) - \psi(a|u_1, a, k)] + \frac{1}{u_1} [\phi(b|u_1, a, K) - \phi(a|u_1, a, K)]. \tag{4.15}$$

4. $\mathbf{n_1, n_2 \neq 0}$

$$V_{n_1, n_2} = 2(g(b|K) - g(a|K) - a[h(b|K) - h(a|K)]) \tag{4.16}$$

Hieruit volgen vervolgens de coëfficiënten H_{n_1, n_2} voor model 2. Deze worden gegeven door

$$H_{n_1, n_2} = \frac{4}{(b-a)^2} V_{n_1, n_2}. \tag{4.17}$$

4.3.3 Model resultaten

We bekijken de twee modellen van de twee-dimensionale COS-methode voor de call-on-max-optie. Verder berekenen we een aantal prijzen voor optiecontracten. Ook bespreken we wat opvalt aan de twee codes en welke van de twee handiger is in het gebruik.

Beide modellen starten en eindigen met dezelfde code, alleen de coëfficiënten H_{n_1, n_2} verschillen. Bekijk op GitHub voor model 1 de code ‘2-dimensionale COS-methode met integraal zonder maximumfunctie’ en voor

model 2 de code ‘2-dimensionale COS-methode met analytische oplossing’. We lopen de structuur en werking van beide codes kort door.

In beide modellen starten we met het benoemen van alle benodigde variabelen. Vervolgens definiëren we de karakteristieke functie van de bivariate normale verdeling zoals we deze gezien hebben in vergelijking (4.2). Merk op dat we zoals we eerder gezien hebben in Sectie 3.2, geïnteresseerd zijn in

$$\phi_X(\mathbf{u}) = e^{iu_1X_1(t_0)+iu_2X_2(t_0)}\varphi_X(\mathbf{u}, t),$$

wat we ook terugzien in de code. Daarna volgt de definitie van de coëfficiënten F_{n_1, n_2} zoals we deze gedefinieerd hebben in de COS-formule in Definitie 3.2.4. De codes definiëren nu op hun eigen manier de coëfficiënten H_{n_1, n_2} . In model 1 definiëren we in een aantal definities de integranden van de integralen die we bepaald hebben in Subsectie 4.3.1. Vervolgens krijgen we een definitie voor de coëfficiënten die middels integratie over de juiste grenzen de coëfficiënten H_{n_1, n_2} bepaald voor model 1. We hebben in Subsectie 4.3.2 gezien hoe we de coëfficiënten H_{n_1, n_2} bepalen voor model 2. We hebben eerst een aantal integralen en hun oplossingen nodig die we gedefinieerd hebben in Bijlage A en nu ook definiëren in de code. Vervolgens definiëren we de coëfficiënten H_{n_1, n_2} zoals we deze gezien hebben in vergelijkingen (4.13) tot en met (4.17).

De code eindigt in beide modellen weer hetzelfde. We definiëren de twee-dimensionale COS-formule aan de hand van de zojuist gedefinieerde coëfficiënten F_{n_1, n_2} en H_{n_1, n_2} . Tot slot kunnen we een waarde voor N geven en zo de eerlijke prijs voor een optiecontract op tijdstip t_0 bepalen.

We gaan nu daadwerkelijk optiewaardering voor de call-on-max-optie modelleren en gebruiken daarbij de volgende vaste parametersetting: $S_1(0) = S_2(0) = 40$; $r = 0,048790$; $\delta_1 = \delta_2 = 0$; $\sigma_1 = 0,2$; $\sigma_2 = 0,3$; $\rho = 0,5$; $t_0 = 0$ en $T = \frac{7}{12}$. Verder gaan we K als volgt variëren: $K = 20$, $K = 40$ en $K = 60$. We bekijken beide modelopties en variëren de waarde van N om de mate van convergentie te bekijken. Verder bepalen we de uitvoeringstijd van de code. Voor model 1 runnen we de code eenmaal omdat het runnen vrij langzaam blijkt te gaan. Model 2 blijkt meteen al sneller en zullen we dus net als in Sectie 4.2 driemaal runnen. We schrijven elke uitkomst van de code als een getal van drie cijfers achter de komma, verwar dit niet met significantie, er is niet altijd sprake van een significantie van drie cijfers. We doen dit gezien geldbedragen altijd geschreven zijn als een getal met twee cijfers achter de komma en we een extra getal voor de significantie willen. Zie het resultaat in Tabel 4.3.

Tabel 4.3: Call-on-max-optie

Model 1	K=20	Tijd (minuten)	K=40	Tijd (minuten)	K=60	Tijd (minuten)
N=16	286,069	0,161539	268,732	0,171399	257,908	0,179899
N=32	-12,582	2,951857	-30,616	3,260850	-38,138	3,430286
N=64	22,923	55,37349	4,665	62,88347	-0,660	161,8463
Model 2	K=20	Tijd (secondes)	K=40	Tijd (secondes)	K=60	Tijd (secondes)
N=16	293,005	0,007023	280,567	0,011493	268,130	0,005924
N=32	-5,545	0,027883	-17,930	0,032073	-30,314	0,031373
N=64	29,989	0,112736	17,617	0,123835	5,245	0,125951
N=128	30,864	0,464494	18,493	0,475790	6,122	0,429485
N=156	30,849	0,646744	18,478	0,669317	6,107	0,684510

Het eerste wat misschien opvalt is dat model 1 maar kijkt tot een waarde $N = 64$ in plaats van $N = 156$. Dit komt omdat model 1 echt veel langzamer blijkt dan model 2. Zelfs zo langzaam dat het uren duurt om voor $N = 64$ waarden te genereren, terwijl dit voor model 2 een kwestie is van seconden. We hebben daarom besloten niet meer waarden te genereren. Model 2 heeft daarentegen veel handwerk vooraf gekost, maar de Pythoncode geeft wel erg snel resultaten.

Niet alleen de snelheid van de code is natuurlijk interessant, maar we zijn vooral geïnteresseerd in de waarden die daaruit komen. We zien dat model 1 en 2 het zelfde pad volgen wat betreft de optiewaarden als we de N -waarde verhogen, ze geven daarentegen niet exact dezelfde waarden. De convergentie checken voor model

1 duurt te lang. Daarom volgt eigenlijk dat model 1 niet te gebruiken is zonder de code te optimaliseren of een grotere rekenkracht te gebruiken. We zien daarentegen dat model 2 wel convergeert in optiewaarden. We hebben een langzamere convergentie dan we gezien hebben in Sectie 4.2. Daar hadden we tussen $N = 64$ en $N = 156$ al dezelfde waardes voor de drie cijfers achter de komma waarin we geïnteresseerd waren. In Tabel 4.3 hebben we dit daarentegen niet. Wel hebben we de Pythoncode nog een aantal keer laten runnen voor steeds grotere N en dan zien we wel degelijk de waardes voor steeds meer significante cijfers convergeren. Zie hiervoor tabel 4.4.

Tabel 4.4: Call-on-max-optie voor grotere N

Model 2	K=20	Tijd (secondes)	K=40	Tijd (secondes)	K=60	Tijd (secondes)
N=168	30,849	0,827173	18,478	0,875307	6,106	0,870471
N=200	30,848	1,226282	18,477	1,154162	6,106	1,131842
N=232	30,848	1,490018	18,477	1,579575	6,106	1,559149

We hebben twee modellen geïntroduceerd om de twee-dimensionale COS-methode te programmeren om optiewaardering te modelleren. Het eerste model bleek erg langzaam en daardoor eigenlijk niet bruikbaar. Het tweede model gedroeg zich als verwacht en convergeerde snel naar logische waarden voor de optiecontracten op tijdstip t_0 .

In dit hoofdstuk hebben we meerdere modellen bekeken die de COS-methode gebruiken als basis. We hebben eerst gezien hoe we op eenvoudige wijze, nauwkeurige benaderingen kunnen krijgen van kansdichtheidsfuncties indien we hun karakteristieke functies wel kennen. In één dimensie zagen we dat $N = 18$ een voldoende nauwkeurige benadering gaf, in twee dimensies was dit het geval voor een waarde van $N = 64$. Voor andere kansdichtheidsfuncties kan dit verschillen, maar we zien dat we met een kleine N al snel een goede benadering krijgen.

Vervolgens hebben we gekeken naar de COS-methode om een eerlijke waarde te bepalen voor een optiecontract op begintijdstip t_0 . Hier zagen we dat de COS-methode uitstekend werkt, indien we zelf analytisch de oplossingen van de integralen vooraf bepalen. De COS-methode vergt hier iets meer termen voor de benadering, maar een waarde van maximaal $N = 200$ in twee dimensies geeft de convergentie in de significantie die we willen. Dit is nog steeds een waarde waarbij de COS-methode snel en nauwkeurig kan werken. In dit hoofdstuk hebben we aangenomen dat de karakteristieke functie bekend was. In het volgende hoofdstuk bekijken we het combineren van de COS-methode en de copula's, in het geval deze karakteristieke functie dus niet bekend is, maar de marginale distributiefuncties wel.

Hoofdstuk 5

Combineren copula's en de COS-methode

We hebben in het afgelopen hoofdstuk, Hoofdstuk 4 gekeken naar het modelleren van de COS-methode. Hierbij hebben we aangenomen dat we niet op de hoogte waren van de gezamenlijke kansdichtheidsfunctie, maar wel van haar karakteristieke functie die de prijsdynamiek van de aandelen weergeeft. Stel nu dat zowel de kansdichtheidsfunctie als haar karakteristieke functie niet bekend zijn, maar we alleen de univariate marginale distributiefuncties kennen van de aandelen. In dit geval is de COS-methode zoals eerder behandeld niet toereikend. We gaan in dit hoofdstuk laten zien dat we dan copula's en de COS-methode kunnen combineren om toch optiewaardering te modelleren. We bekijken daarvoor eerst hoe we kansdichtheidsfuncties benaderen met behulp van copula's. Vervolgens omschrijven we hoe we dit kunnen uitbreiden middels de COS-methode naar een model voor optiewaardering.

5.1 Benaderen kansdichtheidsfuncties

We kunnen met behulp van copula's en de Stelling van Sklar, kansdichtheidsfuncties benaderen. In deze sectie benaderen we de bivariate normale verdeling. De univariate marginale verdelingsfuncties zijn daarbij bekend. We gaan voor deze benadering de kansdichtheidsfunctie van een Gaussische copula gebruiken.

De definitie van een copula hebben we gezien in Hoofdstuk 2 en hier hebben we een aantal eenvoudige voorbeelden behandeld. De Gaussische copula is daar niet behandeld en haar kansdichtheidsfunctie zullen we hier nog introduceren, zie Definitie 5.1.1.

Definitie 5.1.1 (Gaussische copula). [1] Zij $X = (X_1, \dots, X_n)$ een kansvector die een multivariate normale verdeling $N(\mu, \Sigma)$ heeft. Hierbij is Σ een covariantiematrix. Dan wordt de kansdichtheidsfunctie van de Gaussische copula gegeven door

$$c^{Ga}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{|\mathcal{P}(\Sigma)|^{1/2}} \exp \left(-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \phi^{-1}(x_1) \\ \vdots \\ \phi^{-1}(x_n) \end{pmatrix}^T (\mathcal{P}(\Sigma)^{-1} - I) \begin{pmatrix} \phi^{-1}(x_1) \\ \vdots \\ \phi^{-1}(x_n) \end{pmatrix} \right), \quad (5.1)$$

waarbij $\mathcal{P}(\Sigma)$ de correlatiematrix die door Σ wordt bepaald. Verder is ϕ^{-1} de inverse cumulatieve distributiefunctie van de standaard normale verdeling, gegeven door

$$\phi(x)^{-1} = \sqrt{2} \operatorname{erf}^{-1}(2x - 1), \quad (5.2)$$

afhankelijk van de inverse errorfunctie. \diamond

We bekijken een bivariate verdeling met onderlinge correlatie ρ . Merk op dat de Gaussische copula dan gegeven is door:

$$c^{Ga}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} \exp \left(-\frac{1}{2(\rho^2 - 1)} \left(2\rho\phi^{-1}(x_1)\phi^{-1}(x_2) - \rho^2\phi^{-1}(x_1) - \rho^2\phi^{-1}(x_2) \right) \right). \quad (5.3)$$

We herinneren ons nu aan de Stelling van Sklar, Stelling 2.2.4. Laat $f(x_1, x_2)$ de kansdichtheidsfunctie van de bivariate normale verdeling die we proberen te benaderen, dan volgt wegens de Stelling van Sklar dat er een unieke copula C met kansdichtheid c bestaat zodanig dat

$$f(x_1, x_2) = c(F_1(x_1), F_2(x_2))f_1(x_1)f_2(x_2),$$

waarbij F_i de marginale distributiefuncties en f_i de bijbehorende marginale kansdichtheidsfuncties voor $i = 1, 2$. We benaderen $f(x_1, x_2)$ nu met de copula \hat{C} zo gekozen dat de benadering goed is, de benadering geven we weer

met $\hat{f}(x_1, x_2)$. We gaan zien dat de Gaussische copula een goede benadering geeft voor de kansdichtheidsfunctie van de bivariate normale verdeling.

Laat $X_1 \sim N(\mu, \sigma_1)$ en $X_2 \sim N(\mu, \sigma_2)$. De benadering van de kansdichtheidsfunctie van een bivariate normale verdeling met correlatie ρ wordt dan gegeven door

$$\hat{f}(x_1, x_2) = c^{Ga}(F_1(x_1), F_2(x_2))f_1(x_1)f_2(x_2), \quad (5.4)$$

met F_i de marginale distributiefuncties en f_i de bijbehorende marginale kansdichtheidsfuncties van de bivariate normale verdeling $N(\mu, \Sigma)$ voor $i = 1, 2$. Deze zijn gegeven door:

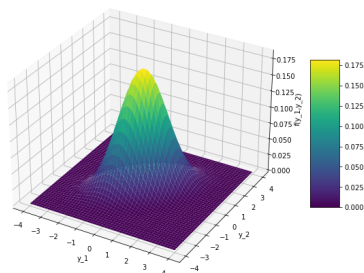
$$F_i(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{x - \mu}{\sigma_i \sqrt{2}} \right) \right),$$

$$f_i(x) = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma_i^2} \right),$$

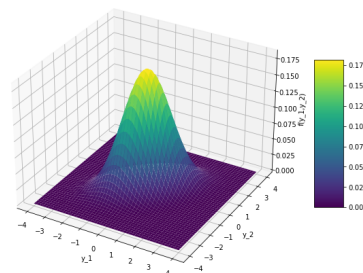
met de errorfunctie [14]. Verder is C^{Ga} zoals gegeven in vergelijking (5.3).

We hebben nu een model om een kansdichtheidsfunctie van een bivariate normale verdeling te benaderen. Voor dit model is er ook een Pythoncode, zie het bestand ‘Copula voor benaderen bivariate normale verdeling’. De code spreekt redelijk voor zich, maar we nemen de hoofdlijnen hier kort door. We benoemen eerst de benodigde variabelen. Vervolgens definiëren we de benodigde functies voor vergelijking (5.4), waarna de definitie van die vergelijking zelf volgt. Tot slot maken we een 3D-plot en een contourplot van de situatie.

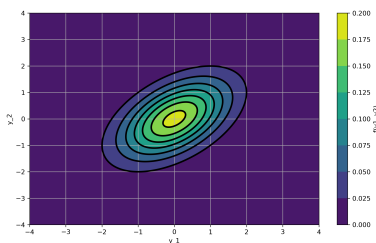
We gebruiken we net als eerder in Sectie 4.1 de code ‘Bivariate kansdichtheidsfunctie normale verdeling 3D-plot en contourplot’ om de echte kansdichtheidsfunctie weer te geven. We hebben voor een aantal verschillende parametersettings een benadering van de kansdichtheidsfunctie gemaakt. Zie hiervoor figuren 5.1 t/m 5.8 met de bijbehorende parametersettings in de bijschriften.



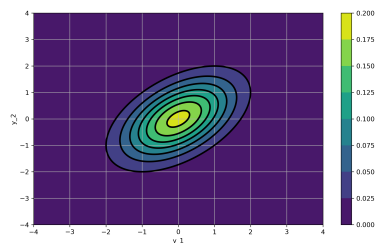
Figuur 5.1: Benadering 3D-plot voor $\mu = 0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ en $\rho = 0.5$.



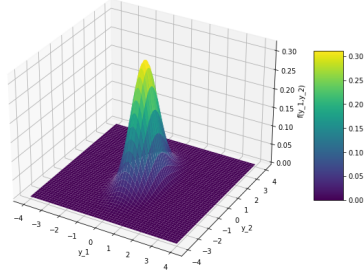
Figuur 5.2: Kansdichtheidsfunctie 3D-plot voor $\mu = 0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ en $\rho = 0.5$.



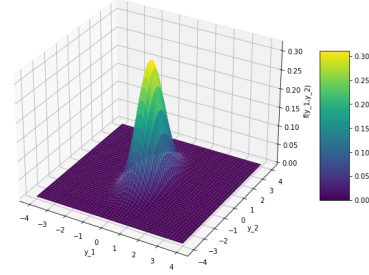
Figuur 5.3: Benadering contourplot voor $\mu = 0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ en $\rho = 0.5$.



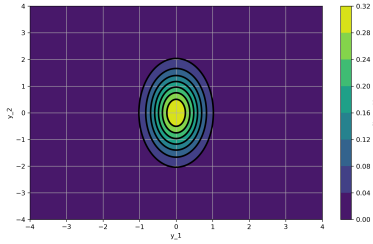
Figuur 5.4: Kansdichtheidsfunctie contourplot voor $\mu = 0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ en $\rho = 0.5$.



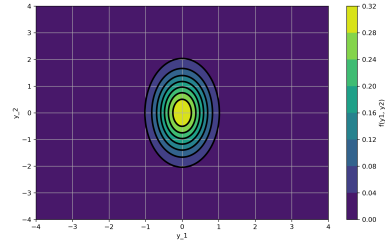
Figuur 5.5: Benadering 3D-plot voor $\mu = 0$, $\sigma_1 = 0.5$, $\sigma_2 = 1$ en $\rho = 0$.



Figuur 5.6: Kansdichtheidsfunctie 3D-plot voor $\mu = 0$, $\sigma_1 = 0.5$, $\sigma_2 = 1$ en $\rho = 0$.



Figuur 5.7: Benadering contourplot voor $\mu = 0$, $\sigma_1 = 0.5$, $\sigma_2 = 1$ en $\rho = 0$.



Figuur 5.8: Kansdichtheidsfunctie contourplot voor $\mu = 0$, $\sigma_1 = 0.5$, $\sigma_2 = 1$ en $\rho = 0$.

Wat meteen opvalt is dat de benadering erg accuraat is. In beide parametersettings zijn de grafieken in hoeverre dit met het blote oog zichtbaar is exact hetzelfde. We kunnen hieruit concluderen dat de Gaussische copula een goede benadering geeft van de kansdichtheidsfunctie van twee aandelen indien hun marginale distributiefuncties die van een normale verdeling volgen. Verder wil ik benoemen dat de benadering ook erg snel bepaald was, de code runnen duurde ongeveer 2 seconden.

De juiste copula kiezen voor de benadering was hier vrij simpel, maar kan voor echte data van de aandelen een stuk moeilijker zijn. De benadering zal dan zeker niet zo perfect zijn als nu en we adviseren ten eerste om hier verder onderzoek naar te doen.

5.2 COS-methode met copula's

We bekijken in deze sectie hoe we de copula's kunnen verwerken in de COS-methode. In de één-dimensionale COS-methode hebben we geen afhankelijkheid van aandelen onderling terwijl een copula deze afhankelijkheid juist benadert. We bekijken in deze sectie daarom de twee-dimensionale COS-methode.

We hebben in Hoofdstuk 3 gezien hoe we de COS-methode afleiden door gebruik te maken van de karakteristieke functie. We bekijken nu de situatie dat we de karakteristieke functie niet kennen, maar de marginale distributiefuncties wel. Dit verandert de afleiding van de COS-methode zodra we de copula's gaan implementeren. Als we kijken naar de afleiding van de twee-dimensionale COS-methode in Sectie 3.2, kunnen we de afleiding hetzelfde laten tot en met de tweede benadering, ofwel vergelijking (3.14). Voor de volledigheid:

$$V_2(t_0, \mathbf{x}) = \frac{b_1 - a_1}{2} \frac{b_2 - a_2}{2} e^{-r\tau} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} A_{n_1, n_2}(\mathbf{x}) H_{n_1, n_2}, \quad (5.5)$$

met

$$A_{n_1, n_2}(\mathbf{x}) = \frac{2}{b_1 - a_1} \frac{2}{b_2 - a_2} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f_X(\mathbf{y}) \cos\left(n_1 \pi \frac{y_1 - a_1}{b_1 - a_1}\right) \cos\left(n_2 \pi \frac{y_2 - a_2}{b_2 - a_2}\right) dy,$$

en

$$H_{n_1, n_2} := \frac{2}{b_1 - a_1} \frac{2}{b_2 - a_2} e^{-r\tau} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} V(T, \mathbf{y}) \cos\left(n_1 \pi \frac{y_1 - a_1}{b_1 - a_1}\right) \cos\left(n_2 \pi \frac{y_2 - a_2}{b_2 - a_2}\right) d\mathbf{y}.$$

Merk op dat in de coëfficiënten A_{n_1, n_2} de kansdichtheidsfunctie $f_x(y_1, y_2)$ bevat is. We hebben zojuist in de vorige sectie gezien hoe we een kansdichtheidsfunctie kunnen benaderen middels de Stelling van Sklar en een passende copula. Er is nog geen passend model gemaakt om dit daadwerkelijk mogelijk te maken, maar hier kan zeker aan gewerkt worden.

Wat interessant is, is dat dit zeker niet de enige manier is hoe een copula geïmplementeerd kan worden in de COS-formule. We kunnen een copula ook schrijven als afhankelijkheid van een momentgenererende functie en de marginale distributiefuncties. Dit is te lezen in ‘Computation of copulas by Fourier methods’ van Antonis Papantoleon en te zien in Stelling 5.2.1 [8].

Stelling 5.2.1 (Copula als momentgenererende functie). *Laat $\mathbb{R}_-^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i < 0 \forall i\}$ en $\mathcal{I} = \{R \in \mathbb{R}^n : M_x(R) < \infty \text{ en } M_X(R+i \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^n)\}$. Zij X een kansvariabele die voldoet aan de assumptie $\mathcal{R} := \mathcal{I} \cap \mathbb{R}_-^n \neq \emptyset$. Neem verder aan dat de marginale distributiefuncties F_1, \dots, F_n strikt stijgend en continu differentieerbaar zijn. Dan is de kansdichtsfunctie c van de copula C van X gegeven door*

$$c(\mathbf{u}) = \frac{1}{(2\pi)^n \prod_{i=1}^n f_i(x_i)} \int_{\mathbb{R}_-^n} M_X(R + iv) e^{-\langle R+iv, x \rangle} dv \Big|_{x_i = F_i^{-1}(u_i)}, \quad (5.6)$$

met $\mathbf{u} \in (0, 1)^n$, $\langle \cdot \rangle$ een inproduct en $R \in \mathcal{R}$.

Zie voor het bewijs van deze stelling en verdere toelichting ‘Computation of copulas by Fourier methods’ [8]. Voor deze scriptie gaan we hier niet meer verder op in, maar het is een mooie paper om te lezen en om in de toekomst te gebruiken voor het maken van een werkend model waar copula's zijn geïmplementeerd in de COS-methode.

We hebben gezien hoe we met copula's multivariate kansdichtheidsfuncties kunnen benaderen indien we de marginale distributiefuncties kennen. De benadering is zeer nauwkeurig, indien we de copula verstandig kiezen. Dit kan met echte data nog een grote klus zijn en het vereist extra onderzoek naar dit onderwerp, om te onderzoeken hoe we de juiste copula kiezen voor de benadering van de afhankelijkheid tussen aandelen. Verder hebben we een voorstel gedaan hoe een copula geïmplementeerd kan worden in de COS-methode. Er is nog veel werk te verrichten, en het ontwikkelen van een daadwerkelijk werkend model is binnen de beschikbare tijd voor deze scriptie niet gelukt. In de toekomst zou dit echter zeer wenselijk zijn.

Conclusie

Deze scriptie heeft zowel copula's als de COS-methode behandeld. Copula's leggen een structuur om zo de afhankelijkheid tussen aandelen te benaderen indien we deze afhankelijkheid niet kennen. We hebben gezien dat we met copula's kansdichtheidsfuncties kunnen benaderen, indien we de marginale distributiefuncties van de individuele aandelen kennen. Van deze methode hebben we een model gemaakt en gezien dat de Pythoncode een hoge snelheid heeft. Indien we een passende copula kunnen vinden voor de kansdichtheidsfunctie die we willen benaderen, krijgen we een nauwkeurige benadering.

Verder hebben we gezien dat de COS-methode ook goed werkt om kansdichtheidsfuncties te benaderen, waarbij we de multivariate karakteristieke functie gebruiken. Deze methode is gebaseerd op een cosinus Fourierreeks waardoor we het aantal sommatie termen N kunnen variëren. Dit model voor het benaderen van kansdichtheidsfuncties bleek in zowel één als twee dimensies snel te convergeren naarmate we N vergroten en daarnaast heeft de Pythoncode een erg hoge snelheid.

Verder hebben we gezien dat de COS-methode in zowel één als twee dimensies een snelle methode kan zijn om een eerlijke waarde van een optiecontract op begintijdstip t_0 te bepalen. Vaak vergt dit een analytische berekening vooraf, die zeker tijdrovend kan zijn, maar daarna volgt een snelle convergentie en ook een hoge snelheid van de Pythoncode. Tot slot hebben we een voorstel gedaan voor het combineren van copula's en de COS-methode. We hebben gezien waar we de afleiding van de COS-methode gaan aanpassen om zo copula's in het model te kunnen implementeren.

Discussie

In dit hoofdstuk bespreken we de dingen die we nog hadden willen doen voor deze scriptie indien er meer tijd was geweest. Zo hebben we voor het modelleren in twee dimensies de intervallen $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ zo gekozen dat de code convergeerde. Indien er meer tijd was geweest, was het ook interessant geweest om te zoeken naar een paper waarin het onderzoek staat naar de meeste efficiënte intervalkeuze voor COS-methode. Het verschil in snelheid tussen een arbitrair gekozen interval en het meest efficiëntste interval was een interessante vraag geweest om dan een antwoord op te kunnen geven.

Verder hebben we in het laatste hoofdstuk, Hoofdstuk 5, een voorstel gedaan hoe we de copula's en de COS-methode kunnen combineren. Er is nog gewerkt dit in een werkend model te verifiëren, dit is alleen niet op tijd gelukt. Het zou in het vervolg goed zijn dit verder uit te werken naar een ander model. Ook meer onderzoek naar het schrijven van copula's op andere manieren zou hiervoor een goede stap kunnen zijn.

Dankwoord

Tot slot bedank ik graag nog mijn begeleider Kees Oosterlee voor de begeleiding van mijn bachelorscriptie.

Bijlage A

Integralen en oplossingen

$$\rho(x|u, a, c, d, K) := \int \max(e^x - K, 0) \cos(u(x-a)) \sin(c(x-d)) dx$$

$$= \begin{cases} \frac{(4Ku^2 + K - 4u^2e^x) \cos(2u(a-x)) - 2ue^x \sin(2u(a-x))}{4(4u^3 + u)} & \text{als } e^x > K, u = c; \\ -\frac{(4Ku^2 + K - 4u^2e^x) \cos(2u(a-x)) - 2ue^x \sin(2u(a-x))}{4(4u^3 + u)} & \text{als } e^x > K, u = -c; \\ \frac{1}{2} \left(-e^x \frac{\sin(u(x-a) + c(d-x)) + (c-u) \cos(u(x-a) + c(d-x))}{c^2 - 2cu + u^2 + 1} \right. \\ \quad \left. + e^x \frac{\sin(u(x-a) + c(x-d)) - (c+u) \cos(u(x-a) + c(x-d))}{c^2 + 2cu + u^2 + 1} \right. \\ \quad \left. + \frac{K \cos(u(x-a) + c(d-x))}{c+u} \right. \\ \quad \left. + \frac{K \cos(u(x-a) + c(x-d))}{c+u} \right) & \text{als } e^x > K, u \neq c, u \neq -c; \\ 0 & \text{als } e^x \leq K. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

$$\phi(x|u, a, K) := \int \max(e^x - K, 0) \sin(u(x-a)) dx$$

$$= \begin{cases} \frac{(Ku^2 + K - u^2e^x) \cos(u(a-x)) - ue^x \sin(u(a-x))}{u^3 + u} & \text{als } e^x > K; \\ 0 & \text{anders.} \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

$$\psi(x|u, a, K) := \int \max(e^x - K, 0) \cos(u(x-a)) dx$$

$$= \begin{cases} \frac{(Ku^2 + K - u^2e^x) \sin(u(a-x)) + ue^x \cos(u(a-x))}{u^3 + u} & \text{als } e^x > K; \\ 0 & \text{anders.} \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

$$f(x|u, a, K) := \int x \max(e^x - K, 0) \cos(u(x-a)) dx$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{(u^3 + u)^2} \left(u(u^2e^x(u^2x + x - 2) - K(u^2 + 1)^2x) \sin(u(a-x)) \right. \\ \quad \left. + (K(u^2 + 1)^2 - u^2e^x(u^2(x+1) + x - 1)) \cos(u(a-x)) \right) & \text{als } e^x > K; \\ 0 & \text{anders.} \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned} g(x|K) &:= \int x \max(e^x - K, 0) dx \\ &= \begin{cases} e^x(x-1) - \frac{Kx^2}{2} & \text{als } e^x > K \\ 0 & \text{anders.} \end{cases} \end{aligned} \tag{A.5}$$

$$\begin{aligned} h(x|K) &:= \int x \max(e^x - K, 0) dx \\ &= \begin{cases} e^x - Kx & \text{als } e^x > K \\ 0 & \text{anders.} \end{cases} \end{aligned} \tag{A.6}$$

Bijlage B

Uitwerking integraal call-on-max-optie

We lossen de volgende integraal op in 4 situaties:

$$\begin{aligned} V_{n_1, n_2} &= \int_a^b \int_a^{\min(y_1, b)} \max(e^{y_1} - K, 0) \cos(u_1(y_1 - a)) \cos(u_2(y_2 - a)) dy_2 dy_1 \\ &+ \int_a^b \int_a^{\min(y_2, b)} \max(e^{y_2} - K, 0) \cos(u_1(y_1 - a)) \cos(u_2(y_2 - a)) dy_1 dy_2 \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned} \tag{B.1}$$

B.1 $n_1 = n_2 = 0$

We bekijken eerst I_1 van vergelijking (B.1) en schrijven deze tot

$$I_1 = \int_a^b \max(e^{y_1} - K, 0) \cos(u_1(y_1 - a)) \left[\int_a^{\min(y_1, b)} \cos(u_2(y_2 - a)) dy_2 \right] dy_1.$$

We kunnen de integraal in de blokhaken oplossen zodat we nu krijgen

$$I_1 = \frac{1}{u_2} \int_a^b \max(e^{y_1} - K, 0) \cos(u_1(y_1 - a)) \sin(u_2(\min(y_1, b) - a)) dy_1.$$

Aan de hand van de integraalgrenzen kunnen we zien dat $y_1 \in [a, b]$ waardoor $\min(y_1, b) = y_1$. Ofwel

$$I_1 = \frac{1}{u_2} \int_a^b \max(e^{y_1} - K, 0) \cos(u_1(y_1 - a)) \sin(u_2(y_1 - a)) dy_1.$$

We gebruiken nu vergelijking (A.1) en krijgen als oplossing van I_1 nu

$$I_1 = \frac{1}{u_2} [\rho(b|u_1, a, u_2, a, K) - \rho(a|u_1, a, u_2, a, K)].$$

We bekijken nu de tweede dubbele integraal, I_2 , waar de oplossing ongeveer op dezelfde wijze zal volgen. We schrijven I_2 als volgt:

$$I_2 = \int_a^b \max(e^{y_2} - K, 0) \cos(u_2(y_2 - a)) \left[\int_a^{\min(y_2, b)} \cos(u_1(y_1 - a)) dy_1 \right] dy_2.$$

We lossen de integraal in de blokhaken op en krijgen

$$I_2 = \frac{1}{u_1} \int_a^b \max(e^{y_2} - K, 0) \cos(u_2(y_2 - a)) \sin(u_1(\min(y_2, b) - a)) dy_2.$$

We merken door de integraalgrenzen nu op dat $y_2 \in [a, b]$ zodat $\min(y_2, b) = y_2$. We zien dan

$$I_2 = \frac{1}{u_1} \int_a^b \max(e^{y_2} - K, 0) \cos(u_2(y_2 - a)) \sin(u_1(y_2 - a)) dy_2.$$

We gebruiken nu vergelijking (A.1) en krijgen als oplossing van I_2 dan

$$I_2 = \frac{1}{u_1} [\rho(b|u_2, a, u_1, a, K) - \rho(a|u_2, a, u_1, a, K)].$$

En dus is V_{n_1, n_2} gegeven door

$$V_{n_1, n_2} = \frac{1}{u_2} [\rho(b|u_1, a, u_2, a, K) - \rho(a|u_1, a, u_2, a, K)] + \frac{1}{u_1} [\rho(b|u_2, a, u_1, a, K) - \rho(a|u_2, a, u_1, a, K)]. \tag{B.2}$$

B.2 $n_1 = 0$ en $n_2 \neq 0$

We kijken ook nu naar vergelijking (B.1). Merk op dat voor $n_1 = 0$ geldt

$$\cos(u_1(y_1 - a)) = \cos\left(n_1\pi\frac{y_1 - a}{b - a}\right) = 1.$$

We kunnen V_{n_1, n_2} nu als volgt schrijven:

$$\begin{aligned} V_{n_1, n_2} &= \int_a^b \int_a^{\min(y_1, b)} \max(e^{y_1} - K, 0) \cos(u_2(y_2 - a)) dy_2 dy_1 \\ &+ \int_a^b \int_a^{\min(y_2, b)} \max(e^{y_2} - K, 0) \cos(u_2(y_2 - a)) dy_1 dy_2 \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned} \tag{B.3}$$

We zoeken eerst de oplossing van de eerste dubbele integraal, I_1 . We kunnen I_1 schrijven als

$$I_1 = \int_a^b \max(e^{y_1} - K, 0) \left[\int_a^{\min(y_1, b)} \cos(u_2(y_2 - a)) dy_2 \right] dy_1.$$

We lossen de integraal in de blokhaken op en krijgen

$$I_1 = \frac{1}{u_2} \int_a^b \max(e^{y_1} - K, 0) \sin(u_2(\min(y_1, b) - a)) dy_1.$$

Wegens de integraalgrenzen $y_1 \in [a, b]$ volgt $\min(y_1, b) = y_1$ en dus

$$I_1 = \frac{1}{u_2} \int_a^b \max(e^{y_1} - K, 0) \sin(u_2(y_1 - a)) dy_1.$$

We gebruiken vergelijking (A.2) en krijgen

$$I_1 = \frac{1}{u_2} [\phi(b|u_2, a, K) - \phi(a|u_2, a, K)].$$

Nu gaan we op zoek naar een oplossing van de tweede integraal, namelijk I_2 . We werken de binnenste integraal uit en krijgen

$$I_2 = \int_a^b (\min(y_2, b) - a) \max(e^{y_2} - K, 0) \cos(u_2(y_2 - a)) dy_2.$$

Ook hier weer merken we op dat $\min(y_2, b) = y_2$ gezien $y_2 \in [a, b]$ en dus

$$I_2 = \int_a^b y_2 \max(e^{y_2} - K, 0) \cos(u_2(y_2 - a)) dy_2 - a \int_a^b \max(e^{y_2} - K, 0) \cos(u_2(y_2 - a)) dy_2.$$

We gebruiken vergelijkingen (A.3) en (A.4) en krijgen de volgende oplossing voor I_2 :

$$I_2 = f(b|u_2, a, K) - f(a|u_2, a, K) - a[\psi(b|u_2, a, K) - \psi(a|u_2, a, k)].$$

En dus is V_{n_1, n_2} gegeven door

$$V_{n_1, n_2} = \frac{1}{u_2} [\phi(b|u_2, a, K) - \phi(a|u_2, a, K)] + f(b|u_2, a, K) - f(a|u_2, a, K) - a[\psi(b|u_2, a, K) - \psi(a|u_2, a, k)]. \tag{B.4}$$

B.3 $n_1 \neq 0$ en $n_2 = 0$

We kijken ook nu naar vergelijking (B.1). Merk op dat voor $n_2 = 0$ geldt

$$\cos(u_2(y_2 - a)) = \cos\left(n_2\pi\frac{y_2 - a}{b - a}\right) = 1.$$

We kunnen V_{n_1, n_2} nu als volgt schrijven:

$$\begin{aligned} V_{n_1, n_2} &= \int_a^b \int_a^{\min(y_1, b)} \max(e^{y_1} - K, 0) \cos(u_1(y_1 - a)) dy_2 dy_1 \\ &+ \int_a^b \int_a^{\min(y_2, b)} \max(e^{y_2} - K, 0) \cos(u_1(y_1 - a)) dy_1 dy_2 \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned} \tag{B.5}$$

Eerst kijken we naar I_1 . We werken de binnenste integraal uit en krijgen

$$I_1 = \int_a^b (\min(y_1, b) - a) \max(e^{y_1} - K, 0) \cos(u_1(y_1 - a)) dy_1.$$

Ook hier weer merken we op dat $\min(y_1, b) = y_1$ gezien $y_1 \in [a, b]$ en dus

$$I_1 = \int_a^b y_1 \max(e^{y_1} - K, 0) \cos(u_1(y_1 - a)) dy_1 - a \int_a^b \max(e^{y_1} - K, 0) \cos(u_1(y_1 - a)) dy_1.$$

We gebruiken vergelijkingen (A.3) en (A.4) en krijgen de volgende oplossing voor I_1 :

$$I_1 = f(b|u_1, a, K) - f(a|u_1, a, K) - a[\psi(b|u_1, a, K) - \psi(a|u_1, a, k)].$$

Nu gaan we op zoek naar een oplossing van de tweede integraal, namelijk I_2 . We schrijven de integraal nu als

$$I_2 = \int_a^b \max(e^{y_2} - K, 0) \left[\int_a^{\min(y_2, b)} \cos(u_1(y_1 - a)) dy_1 \right] dy_2.$$

We lossen de integraal in de blokhaken op en krijgen

$$I_2 = \frac{1}{u_1} \int_a^b \max(e^{y_2} - K, 0) \sin(u_1(\min(y_2, b) - a)) dy_2.$$

Wegens de integraalgrenzen $y_2 \in [a, b]$ volgt $\min(y_2, b) = y_2$ en dus

$$I_2 = \frac{1}{u_1} \int_a^b \max(e^{y_2} - K, 0) \sin(u_1(y_2 - a)) dy_2.$$

We gebruiken vergelijking (A.2) en krijgen

$$I_2 = \frac{1}{u_1} [\phi(b|u_1, a, K) - \phi(a|u_1, a, K)].$$

En dus is V_{n_1, n_2} gegeven door

$$V_{n_1, n_2} = f(b|u_1, a, K) - f(a|u_1, a, K) - a[\psi(b|u_1, a, K) - \psi(a|u_1, a, k)] + \frac{1}{u_1} [\phi(b|u_1, a, K) - \phi(a|u_1, a, K)]. \tag{B.6}$$

B.4 $n_1, n_2 \neq 0$

We kijken weer naar vergelijking (4.11). We merken op dat voor $n_1 = 0$ en $n_2 = 0$ geldt dat

$$\cos(u_1(y_1 - a)) = \cos(u_2(y_2 - a)) = 1.$$

Dus schrijven we V_{n_1, n_2} nu als volgt:

$$V_{n_1, n_2} = \int_a^b \int_a^{\min(y_1, b)} \max(e^{y_1} - K, 0) dy_2 dy_1 + \int_a^b \int_a^{\min(y_2, b)} \max(e^{y_2} - K, 0) dy_1 dy_2 = I_1 + I_2. \quad (\text{B.7})$$

We zoeken de oplossing van de eerste dubbele integraal, I_1 , waar we nu eerst de binnenste integraal oplossen zo dat

$$I_1 = \int_a^b (\min(y_1, b) - a) \max(e^{y_1} - K, 0) dy_1.$$

Ook hier weer merken we op dat $\min(y_1, b) = y_1$ gezien $y_1 \in [a, b]$ en dus

$$I_1 = \int_a^b y_1 \max(e^{y_1} - K, 0) dy_1 - a \int_a^b \max(e^{y_1} - K, 0) dy_1.$$

We gebruiken nu vergelijkingen (A.5) en (A.6) en zien

$$I_1 = g(b|K) - g(a|K) - a[h(b|K) - h(a|K)].$$

We kijken nu naar de tweede dubbele integraal, I_2 . Ook hier werken we eerst de binnenste integraal uit en zien we

$$I_2 = \int_a^b (\min(y_2, b) - a) \max(e^{y_2} - K, 0) dy_2.$$

Ook hier weer merken we op dat $\min(y_2, b) = y_2$ gezien $y_2 \in [a, b]$ en dus

$$I_2 = \int_a^b y_2 \max(e^{y_2} - K, 0) dy_2 - a \int_a^b \max(e^{y_2} - K, 0) dy_2.$$

En ook nu gebruiken we vergelijkingen (A.5) en (A.6) en krijgen

$$I_2 = g(b|K) - g(a|K) - a[h(b|K) - h(a|K)].$$

Dan zien we nu dat V_{n_1, n_2} gegeven is door

$$V_{n_1, n_2} = 2 (g(b|K) - g(a|K) - a[h(b|K) - h(a|K)]). \quad (\text{B.8})$$

Bibliografie

- [1] Philipp Arbenz. “Bayesian Copulae Distributions, with Application to Operational Risk Management—Some Comments”. In: *Methodology and Computing in Applied Probability* (apr 2011).
- [2] Maxime de Bellefroid. *The Derivatives Academy*. Geraadpleegd op 28 mei, 2024. n.d. URL: https://bookdown.org/maxime_debellefroid/MyBook/multi-asset-options.html.
- [3] Umberto Cherubini. *Fourier Transform Methods in Finance*. Chichester: John Wiley en Sons, 2014.
- [4] Sjoerd Dirksen. *Inleiding Kansrekening en Statistiek Dictaat*. Digitally available and sold via A–Eskwadraat for students of the course. Nov 2021.
- [5] Fabrizio Durante en Carlo Sempi. *Principles of Copula Theory*. CRC Press, 2016.
- [6] Mark H. Holmes. *Introduction to the Foundations of Applied Mathematics*. 2nd edition. Springer, 2009.
- [7] Cornelis W. Oosterlee en Lech A. Grzelak. *Mathematical Modeling and Computation in Finance*. London: World Scientific Publishing Europe, 2020.
- [8] Antonis Papapantoleon. “Computation of Copulas by Fourier Methods”. In: *Innovations in Quantitative Risk Management*, p. 347–354 Springer Proceedings in Mathematics and Statistics (jun 2014).
- [9] Andrea Pascucci. *PDE and Martingale Methods in Option Pricing*. Springer, 2011.
- [10] Marjon Ruijter en Cornelis W. Oosterlee. “Two-dimensional Fourier Cosine Series Expansion Method for Pricing Financial Options”. In: *SIAM Journal on Scientific Computing* CPB Discussion Paper - 225 (okt 2012).
- [11] René L. Schilling. *Measures, Integrals and Martingales*. 2nd edition. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 2014.
- [12] Steven E. Shreve. *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*. 1st edition. Springer, 2004.
- [13] Eric W. Weisstein. *Bivariate Normal Distribution*. From MathWorld—A Wolfram Web Resource. Geraadpleegd op 3 juni, 2024. URL: <https://mathworld.wolfram.com/BivariateNormalDistribution.html>.
- [14] Eric W. Weisstein. *Normal Distribution*. From MathWorld—A Wolfram Web Resource. Geraadpleegd op 13 juni, 2024. URL: <https://mathworld.wolfram.com/NormalDistribution.html>.
- [15] Paul Wilmott. *Paul Wilmott Introduces Quantitative Finance*. 2nd edition. Chichester: John Wiley en Sons, 2007.