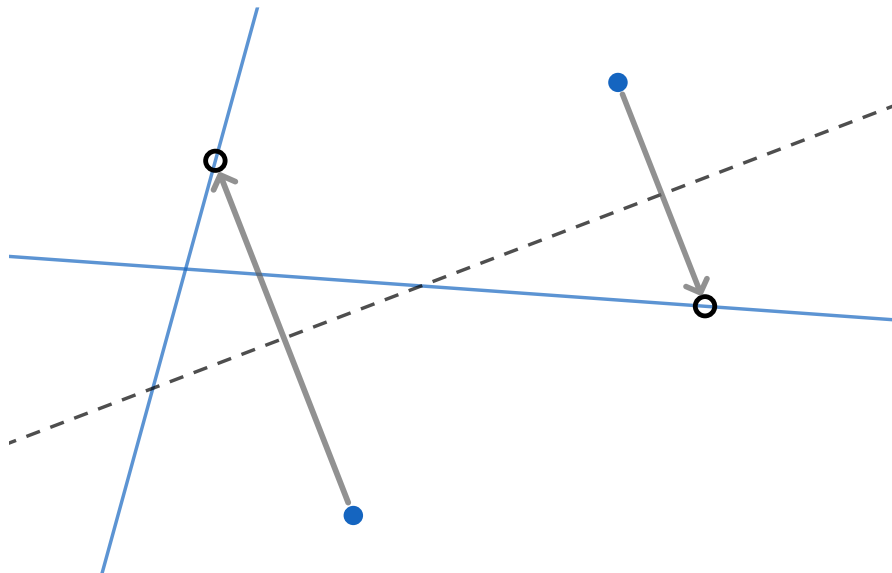


Construeerbare Getallen in Origami

Op de grens tussen Algebra en Meetkunde

Alieke van de Weerd



Bachelorscriptie Wiskunde

Begeleider: Martijn Kool

Universiteit Utrecht

7 juni 2024



**Universiteit
Utrecht**

Inhoudsopgave

Inleiding	2
1 Theorie	3
1.1 Algebra	3
1.2 Meetkunde	9
2 Passer en Latje	15
2.1 Constructies	15
2.2 Lichaam	17
2.3 Hoofdstelling	20
2.4 Klassieke Constructieproblemen	22
3 1-vouw Origami	25
3.1 Axioma's	26
3.2 Volledigheid	29
3.3 Lichaam	34
3.4 Vergelijkingen	36
3.5 Hoofdstelling	41
3.6 Uitvoerbaarheid	46
3.7 Gevouwen Beelden	49
3.8 Klassieke Constructieproblemen	53
4 2-vouw Origami	55
4.1 Uitlijningen	55
4.2 Axioma's	59
4.3 Constructies	62
5 Slotopmerkingen	69
5.1 n -vouw Origami	69
5.2 Kegelsneden	69
5.3 Andere Definities	70
A Appendix	71
A.1 Matlabcodes	71
A.2 Gröbner Vergelijkingen	74
Bibliografie	76

Inleiding

Het construeren van getallen is een eeuwenoud probleem. De Grieken waren er vroeger al druk mee. Hoewel dit in eerste instantie een meetkundige bezigheid was, bleek de ontwikkeling van de theorie van lichamen aan het begin van de achttiende eeuw [8] een essentiële stap om te bepalen wat construeerbaar is. Sinds de vorige eeuw is er ook interesse in het construeren van getallen met origami, dus door middel van het vouwen van papier. Ook hier speelt algebra een grote rol in.

In deze scriptie zullen we eerst de theorie bespreken die we nodig zullen hebben. Hierbij bekijken we eerst de algebra met kennis uit het vak ‘Lichamen en Galoistheorie’ en de theorie van de Gröbner-basis, wat geen stof uit de bachelor is. Vervolgens zullen we ons richten op de meetkunde en dan in het bijzonder op Lill’s Methode. Daarna begint het echte werk. We zullen eerst kijken naar de constructies met passer en latje, vervolgens naar 1-vouw origami en tot slot naar 2-vouw origami. In de hoofdstukken over passer en latje en 1-vouw origami zullen we toewerken naar een belangrijke stelling, die we in beide gevallen de hoofdstelling noemen.

Voor passer en latje zullen we deze stelling afleiden:

Hoofdstelling. [10, Thm. 3.2.9] *Zij $\alpha \in \mathbb{R}$. Er geldt dat $\alpha \in \mathcal{C}$ dan en slechts dan als er een eindige rij lichamen $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_n \subset \mathbb{R}$ bestaat zodat $\alpha \in F_n$ en $[F_{i+1} : F_i] = 2$ voor alle $i \in \{0, \dots, n-1\}$.*

Voor 1-vouw origami zullen we het volgende concluderen:

Hoofdstelling. [10, Thm. 4.3.9] *Zij $\alpha \in \mathbb{R}$. Er geldt dat $\alpha \in \mathcal{O}$ dan en slechts dan als er een eindige rij lichamen $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_n \subset \mathbb{R}$ bestaat zodanig dat $\alpha \in F_n$ en $[F_i : F_{i-1}] = 2$ of $[F_i : F_{i-1}] = 3$ voor alle $i \in \{1, \dots, n\}$.*

Ik heb geprobeerd de hoofdstukken zo gelijk mogelijk op te bouwen. We zullen steeds eerst kijken naar wat de constructies precies zijn, vervolgens zullen we kijken naar wat we kunnen zeggen over de verzameling van construeerbare getallen en werken we naar de hoofdstelling toe en tot slot kijken we naar constructieproblemen.

De constructies met passer en latje hebben al lange tijd mijn interesse. Ik heb me bijvoorbeeld lange tijd vermaakt met de app ‘Euclidea’ en ook op andere momenten ben ik er hobbymatig mee bezig geweest. Daarnaast is origami al jarenlang een van mijn hobby’s. Toen ik in de voorbereiding van mijn scriptie het onderwerp van origamiconstructies tegenkwam in het boek *Geometric Folding Algorithms* [4], was ik direct verkocht. Ook na er weken mee bezig geweest te zijn, is mijn enthousiasme zeker niet afgenomen. Het blijft ook interessant om heen en weer te springen tussen de meetkunde met plaatjes en het heel theoretische van de algebra. Ik hoop u met deze scriptie iets te laten zien van wat dit onderwerp zo leuk en interessant maakt.

Hoofdstuk 1

Theorie

Zoals de ondertitel van deze scriptie al aangeeft, begeven we ons op de grens tussen algebra en meetkunde. Om genoeg voorkennis te hebben en omdat we sommige algemene lemma's vaak nodig zullen hebben, zullen we in dit hoofdstuk de algemene theorie voor zowel de algebra als de meetkunde bespreken.

1.1 Algebra

In deze scriptie zal gebruik gemaakt worden van bepaalde begrippen uit de algebra. Voor degenen die hier niet helemaal in thuis zijn of even een herinnering nodig hebben, zullen we deze begrippen hier uitleggen en beschrijven. Hierbij zullen we de meeste bewijzen weglaten en alleen de stellingen benoemen die we nodig hebben. Daarnaast zullen we de theorie van de Gröbner-basis bespreken, wat voor de gemiddelde wiskundestudent geen bekende stof is. Voor de bewijzen en verdere informatie verwijzen we naar hoofdstuk 13 van Dummit en Foote [5] en hoofdstuk 2 van Cox, Little en O'Shea [3].

1.1.1 Lichamen en Lichaamsuitbreidingen

Lichamen zullen een belangrijke plaats innemen in dit verslag. Om uit te leggen wat een lichaam is, hebben we eerst de definities van groepen en ringen nodig.

Definitie 1.1. [5, §1.1] Een **groep** G is een verzameling samen met een binaire operatie \star die voldoen aan de volgende axioma's:

- (i) \star is associatief: $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$ voor alle $a, b, c \in G$.
- (ii) Er bestaat een eenheidselement e zodanig dat voor alle $g \in G$ geldt $g \star e = e \star g = g$.
- (iii) Voor elke $g \in G$ bestaat er een element $g^{-1} \in G$, de inverse van g , zodanig dat $g \star g^{-1} = g^{-1} \star g = e$.

De groep (G, \star) heet **abels** of **commutatief** als $a \star b = b \star a$ voor alle $a, b \in G$.

Definitie 1.2. [5, §7.1] Een **ring** R is een verzameling samen met twee binaire operaties $+$ en \times (die we respectievelijk optelling en vermenigvuldiging noemen) die voldoen aan de volgende axioma's:

- (i) $(R, +)$ is een abelse groep (waar we het eenheidselement 0 noemen),
- (ii) \times is associatief: $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ voor alle $a, b, c \in R$,
- (iii) de distributieve regels gelden in R :

$$(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$$

en

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c).$$

De ring R heet **commutatief** als de vermenigvuldiging commutatief is.

We zeggen dat R een **identiteit** heeft als er een element $1 \in R$ is zodanig dat

$$1 \times a = a \times 1 = a \text{ voor alle } a \in R.$$

Nu we (weer) helder hebben wat een ring is, kunnen we een lichaam definiëren.

Definitie 1.3. [5, §7.1] Een ring R met identiteit 1 , met $1 \neq 0$, heet een **delingsring** als voor elk element $a \in R$ ongelijk aan 0 , geldt dat er een element $b \in R$ bestaat zodat $a \times b = b \times a = 1$. Een commutatieve delingsring heet een **lichaam**.

Definitie 1.4. Een **deellichaam** is een deelverzameling van een lichaam die de elementen 0 en 1 bevat en gesloten is onder optellen en vermenigvuldigen en alle inverse elementen ten opzichte van optellen en vermenigvuldigen bevat, oftewel, gesloten is onder optellen, aftrekken vermenigvuldigen en delen.

We zullen ons nu richten op lichaamsuitbreidingen, elementen van lichaamsuitbreidingen en eigenschappen daarvan. Deze definities, proposities en stellingen zijn gebaseerd op paragraaf 13.1 en 13.2 van Dummit en Foote [5]. Eerst de lichaamsuitbreidingen:

Definitie 1.5. Als K een lichaam is dat het deellichaam F bevat, dan zeggen we dat K een **lichaamsuitbreiding** is van F . De **graad** van een lichaamsuitbreiding K is de dimensie van K als een vectorruimte over F . De graad noteren we met $[K : F]$. De lichaamsuitbreiding noemen we **eindig** als $[K : F]$ eindig is.

Definitie 1.6. Zij $\alpha \in K$ en laat K een lichaamsuitbreiding van F zijn. Het kleinste deellichaam van K dat zowel F als α bevat, noteren we met $F(\alpha)$ en noemen we het **lichaam voortgebracht door** α over F .

Nu komt er een erg belangrijk lemma. Dit lemma zal een grote rol spelen in deze scriptie.

Lemma 1.7. *Als F, K en L lichamen zijn, zodat $F \subset K \subset L$, dan geldt*

$$[L : F] = [L : K][K : F].$$

In de volgende definities en proposities zullen we kijken naar elementen van lichaamsuitbreidingen.

Definitie 1.8. Een element $\alpha \in K$ noemen we **algebraïsch** over F als α de wortel is van een niet-nul polynoom $f(x) \in F[x]$. Als α niet algebraïsch is, dan noemen we α **transcendent** over F .

Propositie 1.9. *Zij α algebraïsch over F . Er is een uniek monisch irreducibel polynoom $m_{\alpha,F}(x) \in F[x]$ zodat α een wortel is van $m_{\alpha,F}(x)$. Een polynoom $f(x) \in F[x]$ heeft α als wortel dan en slechts dan als $m_{\alpha,F}(x)$ een deler is van $f(x)$ in $F[x]$.*

Het polynoom in de propositie zullen we vaker tegenkomen. Het heeft een speciale naam.

Definitie 1.10. Het polynoom $m_{\alpha,F}(x)$ noemen we het **minimaalpolynoom** voor α over F .

We zullen nu nog een aantal proposities bekijken over de graad van lichaamsuitbreidingen.

Propositie 1.11. *Zij α algebraïsch over F . Dan geldt $[F(\alpha) : F] = \deg m_{\alpha,F}(x)$.*

Propositie 1.12. *Laat α een element zijn en F een lichaam.*

- *Er geldt dat α algebraïsch is over F dan en slechts dan als de lichaamsuitbreiding $F(\alpha)$ eindig is.*
- *Als α een element is van een lichaamsuitbreiding van graad n over F , dan is α een wortel van een polynoom over F waarvan de graad hoogstens n is.*
- *Als α een wortel is van een polynoom van graad n over F , dan is $[F(\alpha) : F]$ hoogstens n .*

Propositie 1.13. *Zij $\alpha, \beta \in K$. Dan geldt $[F(\alpha)(\beta) : F] \leq [F(\alpha) : F][F(\beta) : F]$.*

De volgende lemma's zijn gebaseerd op voorbeeld 2.2.9 in *Origami Constructible Numbers* [10].

Lemma 1.14. *Laat K een lichaamsuitbreiding zijn van F en p een priemgetal. Als $[K : F] = p$, dan geldt voor alle $\alpha \in K$ waarvoor geldt $\alpha \notin F$ dat $K = F(\alpha)$.*

Bewijs. Zij $\alpha \in K$ zodat $\alpha \notin F$. Omdat $F \subset F(\alpha) \subset K$, volgt uit lemma 1.7 dat $[K : F] = [K : F(\alpha)][F(\alpha) : F]$. We zien dus dat $[F(\alpha) : F]$ een deler is van $[K : F] = p$. Omdat p een priemgetal is, volgt dat 1 en p de enige delers zijn. Uit $\alpha \notin F$ volgt $[F(\alpha) : F] \neq 1$, dus $[F(\alpha) : F] = p$ en $[K : F(\alpha)] = 1$. Er geldt dus dat $K = F(\alpha)$. \square

Lemma 1.15. *Laat K een lichaamsuitbreiding zijn van F zodat $[K : F] = 2$, dan bestaat er een element $\beta \in F$ zodat $K = F(\sqrt{\beta})$.*

Bewijs. Zij $\alpha \in K$ zodat $\alpha \notin F$. Omdat $[K : F] = 2$ een priemgetal is zien we met lemma 1.14 dat $K = F(\alpha)$. Omdat $[K : F] = 2$ en $\alpha \in K$ volgt uit propositie 1.12 dat α een wortel is van een polynoom over F van graad hoogstens 2. We zien dat $m_{\alpha,F}(x)$ graad 2 heeft, omdat $\alpha \notin F$. Er geldt dus dat $m_{\alpha,F}(x) = x^2 + bx + c$ met $b, c \in F$. Oplossen geeft $x = \frac{1}{2}(-b \pm \sqrt{b^2 - 4c})$. Omdat α een wortel is van $m_{\alpha,F}(x)$ geldt dus dat $\alpha = \frac{1}{2}(-b \pm \sqrt{b^2 - 4c})$ voor een van beide keuzes van het teken. Vanwege $b, c \in F$ geldt dat $\beta := b^2 - 4c \in F$. Omdat $\alpha \notin F$, volgt dat $\sqrt{\beta} \notin F$. Verder zien we dat $\sqrt{\beta} = \mp(2\alpha + b)$, dus $\sqrt{\beta} \in K$. We hebben nu $\sqrt{\beta} \in K$ en $\sqrt{\beta} \notin F$, dus met lemma 1.14 zien we dat $K = F(\sqrt{\beta})$. \square

1.1.2 Gröbner-basis

In deze scriptie willen we veel stelsels van vergelijkingen oplossen, waarbij regelmatig meerdere variabelen een rol spelen. Het oplossen van dit soort stelsels kan erg ingewikkeld zijn. Het kan hierbij helpen om de Gröbner-basis te bepalen. We zullen niet heel diep ingaan op hoe we deze basis kunnen bepalen, maar we zullen hier wel de belangrijkste ideeën en resultaten bespreken.

We zullen in deze paragraaf toewerken naar het oplossen van een stelsel vergelijkingen $f_1, \dots, f_m \in F[x_1, \dots, x_n]$. Hiervoor zullen we eerst een aantal dingen moeten definiëren.

Bij het delingsalgoritme voor polynomen in één variabele, speelt de volgorde van de machten een grote rol. We zeggen bijvoorbeeld $x^5 > x^3$. Als we kijken naar vergelijkingen met meer variabelen, is deze volgorde niet triviaal. Is $x_1 > x_2$ of misschien wel andersom? En hoe gaat het als deze variabelen machten hebben? We moeten hier een keuze maken. Deze keuze noemen we de monomiale ordening. Stel we hebben een monoom in de polynoomring $F[x_1, \dots, x_n]$, met F een lichaam. Dan kunnen we dit monoom schrijven als $\alpha x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$ met $\alpha \in F$ en $a_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ voor alle $i \in \{1, \dots, n\}$. We zullen dit monoom noteren als αx^a , waarbij $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$.

Definitie 1.16. [3, §2.2] Laat x^a en x^b twee monomen zijn in $F[x_1, \dots, x_n]$ met $a = (a_1, \dots, a_n)$ en $b = (b_1, \dots, b_n)$ in $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$. We zeggen dat $x^a > x^b$ volgens de **lexicografische ordening** als het meest linkse element dat ongelijk is aan nul in $a - b \in \mathbb{Z}^n$ positief is.

Voorbeeld 1.17. We zullen twee voorbeelden bekijken in de polynoomring $\mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$.

- $x_1^3 x_2^5 x_3^2 > x_1^3 x_2^4 x_3$, want $(3, 5, 2) - (3, 4, 1) = (0, 1, 1)$, waarbij het meest linkse element ongelijk aan nul positief is.
- $x_1 x_3^3 < x_1^2 x_2^2$, want $(1, 0, 3) - (2, 2, 0) = (-1, -2, 2)$, waarbij het meest linkse element ongelijk aan nul negatief is.

We zien dat de variabelen x_1, \dots, x_n volgens de lexicografische ordening als volgt geordend zijn: $x_1 > x_2 > \dots > x_n$.

Er bestaan nog meer monomiale ordeningen naast de lexicografische ordening en de theorie die we in deze paragraaf bespreken, werkt ook voor andere monomiale ordeningen. Omdat we in deze scriptie alleen de lexicografische ordening gebruiken, zullen we de andere ordeningen hier niet bespreken.

Definitie 1.18. Zij f een polynoom in $F[x_1, \dots, x_n]$. De **leidende term** van f is de term met het grootste monoom ten opzichte van de gekozen monomiale ordening. We noteren deze term met $LT(f)$.

Voorbeeld 1.19. Voor het polynoom $f = 5x_1 + 2x_2^3 x_3 + 4x_1^2 x_3$ geldt dat $LT(f) = 4x_1^2 x_3$ ten opzichte van de lexicografische ordening.

Nu we weten hoe we de leidende term van een polynoom bepalen, kunnen we dit ook toepassen op verzamelingen en idealen. We zullen eerst de definitie van een ideaal opfrissen. We zullen hierbij alleen kijken naar idealen van commutatieve ringen.

Definitie 1.20. Zij R een ring en $I \subset R$. We noemen I een **ideaal** van R als I een deelring is van R en $\{ra \mid a \in I\} \subset I$ voor alle $r \in R$.

We zullen in het vervolg vooral de volgende idealen tegenkomen:

Definitie 1.21. [3, §1.4] Laat f_1, \dots, f_s polynomen zijn in $F[x_1, \dots, x_n]$. De verzameling

$$\langle f_1, \dots, f_s \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^s h_i f_i \mid h_1, \dots, h_s \in F[x_1, \dots, x_n] \right\}$$

noemen we het **ideaal voortgebracht door** f_1, \dots, f_s .

Definitie 1.22. [3, §2.5] Zij $I \subseteq F[x_1, \dots, x_n]$ een ideaal en kies een monomiale ordening. We definiëren de **verzameling van leidende termen** van I door

$$LT(I) := \{LT(f) \mid f \in I\}.$$

Het ideaal voortgebracht door de elementen van $LT(I)$ noteren we met $\langle LT(I) \rangle$.

Stel $I = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$, dan volgt dat $LT(f_i) \in LT(I) \subseteq \langle LT(I) \rangle$ voor alle $i \in \{1, \dots, m\}$. Dit geeft vervolgens $\langle LT(f_1), \dots, LT(f_m) \rangle \subseteq \langle LT(I) \rangle$. In het algemeen geldt alleen niet dat $\langle LT(f_1), \dots, LT(f_m) \rangle = \langle LT(I) \rangle$, zoals we in het volgende voorbeeld zien.

Voorbeeld 1.23. Zij $I = \langle f_1, f_2 \rangle$ met $f_1 = x_1x_2 + x_2 + 1, f_2 = x_1^2 + x_1 \in F[x_1, x_2]$ met de lexicografische ordening. Dan geldt $x_1 = x_1 \cdot f_1 - x_2 \cdot f_2 \in I$, dus per definitie geldt $x_1 \in LT(I) \subseteq \langle LT(I) \rangle$. Verder zien we dat $x_1 \notin \langle x_1x_2, x_1^2 \rangle = \langle LT(f_1), LT(f_2) \rangle$, dus

$$\langle LT(f_1), LT(f_2) \rangle \neq \langle LT(I) \rangle.$$

Definitie 1.24. [3, §2.5] Zij $I \subseteq F[x_1, \dots, x_n]$ een ideaal en kies een monomiale ordening. Een eindige deelverzameling $G = \{g_1, \dots, g_m\} \subseteq I$ heet een **Gröbner-basis** als

$$\langle LT(g_1), \dots, LT(g_m) \rangle = \langle LT(I) \rangle.$$

Nu we weten wat een Gröbner-basis is, zullen we, zonder dit te bewijzen, het volgende resultaat bekijken uit het boek *Ideals, Varieties and Algorithms*.

Lemma 1.25. [3, §2.5] *Elk ideaal $I \subseteq F[x_1, \dots, x_n]$ heeft een Gröbner-basis voor een gekozen monomiale ordening. Daarnaast geldt voor elke Gröbner-basis $\{g_1, \dots, g_m\}$ van een ideaal I dat $I = \langle g_1, \dots, g_m \rangle$.*

We hebben nu bijna genoeg informatie om iets te kunnen zeggen over het stelsel vergelijkingen $f_1, \dots, f_m \in F[x_1, \dots, x_n]$. We zijn geïnteresseerd in de oplossingen van het stelsel, dus we zijn op zoek naar de punten waarvoor het beeld onder elk van de polynomen nul wordt.

Definitie 1.26. [3, §2.5] Zij $f_1, \dots, f_m \in F[x_1, \dots, x_n]$ en zij $I \subseteq F[x_1, \dots, x_n]$ een ideaal. We definiëren

$$\begin{aligned} V(f_1, \dots, f_m) &:= \{(a_1, \dots, a_n) \in F^n \mid f_i(a_1, \dots, a_n) = 0 \text{ voor alle } i\} \\ V(I) &:= \{(a_1, \dots, a_n) \in F^n \mid f(a_1, \dots, a_n) = 0 \text{ voor alle } f \in I\}. \end{aligned}$$

Lemma 1.27. [3, §2.5] *Stel $I = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$, dan geldt $V(I) = V(f_1, \dots, f_m)$.*

Omdat dit vrij eenvoudig te bewijzen is en dit lemma een cruciale rol speelt, zullen we in dit geval het bewijs niet weglaten.

Bewijs. Zij $(a_1, \dots, a_n) \in V(I)$. Dan geldt $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ voor alle $f \in I$. Omdat $I = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$, volgt dat $f_i \in I$ voor alle $i \in \{1, \dots, m\}$. Er geldt dus dat $f_i(a_1, \dots, a_n) = 0$ voor alle i , dus $(a_1, \dots, a_n) \in V(f_1, \dots, f_m)$. Dit geeft $V(I) \subseteq V(f_1, \dots, f_m)$.

Zij $(b_1, \dots, b_n) \in V(f_1, \dots, f_m)$ en $f \in I = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$. Er bestaan $h_i \in F[x_1, \dots, x_n]$ zodat $f = h_1f_1 + \dots + h_mf_m$. Omdat $f_i(b_1, \dots, b_n) = 0$ voor alle $i \in \{1, \dots, m\}$, volgt dat $f(b_1, \dots, b_n) = 0$. Omdat f willekeurig gekozen was, volgt dat $(b_1, \dots, b_n) \in V(I)$. Dit geeft $V(f_1, \dots, f_m) \subseteq V(I)$.

Uit beide inclusies volgt vervolgens $V(I) = V(f_1, \dots, f_m)$, zoals we wilden. \square

Gevolg 1.28. *Zij $f_1, \dots, f_m \in F[x_1, \dots, x_n]$ een stelsel vergelijkingen. Dan geldt*

$$V(f_1, \dots, f_m) = V(g_1, \dots, g_s)$$

waarbij $\{g_1, \dots, g_s\}$ de Gröbner-basis is van het ideaal $\langle f_1, \dots, f_m \rangle$.

Bewijs. Dit volgt op de volgende manier uit lemma's 1.27 en 1.25:

$$\begin{aligned} V(f_1, \dots, f_m) &= V(\langle f_1, \dots, f_m \rangle) \\ &= V(\langle g_1, \dots, g_s \rangle) \\ &= V(g_1, \dots, g_s). \end{aligned}$$

□

We zien dus dat de oplossingen van het stelsel f_1, \dots, f_m gelijk zijn aan de oplossingen van het stelsel g_1, \dots, g_s .

Nu is natuurlijk de vraag wat het voordeel is van dit nieuwe stelsel. We hebben namelijk nog steeds een stelsel vergelijkingen op te lossen. Het grote voordeel van de Gröbner-basis is dat het het elimineren van variabelen makkelijker maakt. Als we een stelsel hebben met eindig veel oplossingen, bestaat de Gröbner-basis vaak uit vergelijkingen die één voor één de variabelen elimineren. Dit maakt het oplossen van vergelijkingen veel eenvoudiger.

Voorbeeld 1.29. Stel we willen de oplossingen berekenen van de vergelijkingen

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 + 3 &= 0 \\ x + y + z &= 0 \\ z^2 - x + y &= 0 \end{aligned}$$

Rechtstreeks berekenen is nog niet zo eenvoudig. Als we de Gröbner-basis berekenen (bijvoorbeeld met Matlab), krijgen we

$$\begin{aligned} g_1 &= -z^2 + z + 2x \\ g_2 &= z^2 + z + 2y \\ g_3 &= z^3 - 3. \end{aligned}$$

We zien dat g_3 alleen afhankelijk is van z en dat $g_3 = 0$ eenvoudig op te lossen is. We krijgen drie oplossingen voor z :

$$\sqrt[3]{3}, \quad e^{\frac{2}{3}i\pi} \sqrt[3]{3}, \quad e^{-\frac{2}{3}i\pi} \sqrt[3]{3}.$$

We zien dat het invullen van deze oplossingen in $g_1 = 0$ en $g_2 = 0$ lineaire vergelijkingen geeft voor x en y .

1.2 Meetkunde

Nu we de algebra besproken hebben, zijn er nog een aantal onderwerpen uit de meetkunde die onze aandacht verdienen. Eerst zullen we een aantal lemma's bespreken die we later nodig zullen hebben. Daarna zullen we Lill's methode bekijken, die vooral bij de origamiconstructies een interessante rol gaat spelen.

1.2.1 Handige Lemma's

In deze paragraaf zullen we ervan uitgaan dat F een deellichaam is van \mathbb{R} .

We zullen veel met punten en lijnen gaan werken, dus het is handig om de afstand tussen een punt en een lijn te kunnen berekenen.

Lemma 1.30. *De afstand van het punt (p, q) tot de lijn $Kx + Ly + 1 = 0$ met $p, q, K, L \in F$ wordt gegeven door*

$$d = \left| \frac{Kp + Lq + 1}{\sqrt{K^2 + L^2}} \right|.$$

Bewijs. We weten dat $(K, L) \neq (0, 0)$. Zonder verlies van algemeenheid nemen we aan dat $K \neq 0$. Hieruit volgt dat elk punt op de lijn van de vorm $\left(-\frac{Ly+1}{K}, y\right)$ is. Er geldt dus dat de afstand tussen het punt (p, q) en een punt op de lijn gelijk is aan

$$\begin{aligned} d(y) &= \sqrt{\left(p + \frac{Ly + 1}{K}\right)^2 + (q - y)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{L^2}{K^2} + 1\right)y^2 + \left(\frac{2Lp}{K} + \frac{2L}{K^2} - 2q\right)y + p^2 + q^2 + \frac{2p}{K} + \frac{1}{K^2}}. \end{aligned}$$

Omdat we de kortste afstand van het punt tot de lijn willen weten, bepalen we de afgeleide van $d(y)$ en stellen deze gelijk aan 0. Dit geeft $2\left(\frac{L^2}{K^2} + 1\right)y + \frac{2Lp}{K} + \frac{2L}{K^2} - 2q = 0$, waaruit volgt $y = \frac{K^2q - KLp - L}{K^2 + L^2}$. Dit geeft $x = -\frac{Ly+1}{K} = \frac{L^2p - KLq - K}{K^2 + L^2}$. We weten nu dat de afstand van (p, q) tot de lijn $Kx + Ly + 1 = 0$ gelijk is aan de afstand tussen (p, q) en $\left(\frac{L^2p - KLq - K}{K^2 + L^2}, \frac{K^2q - KLp - L}{K^2 + L^2}\right)$. De afstand d tussen deze twee punten wordt gegeven door

$$\begin{aligned} d^2 &= \left(p - \frac{L^2p - KLq - K}{K^2 + L^2}\right)^2 + \left(q - \frac{K^2q - KLp - L}{K^2 + L^2}\right)^2 \\ &= \frac{(K^2p + KLq + K)^2 + (L^2q + KLp + L)^2}{(K^2 + L^2)^2} \\ &= \frac{K^2(Kp + Lq + 1)^2 + L^2(Lq + Kp + 1)^2}{(K^2 + L^2)^2} \\ &= \frac{(Kp + Lq + 1)^2}{K^2 + L^2}. \end{aligned}$$

De afstand is altijd positief, dus we zien dat $d = \left| \frac{Kp + Lq + 1}{\sqrt{K^2 + L^2}} \right|$. □

We zullen ook regelmatig snijpunten van lijnen nodig hebben. Het is daarom praktisch om snijpunten maar een keer te hoeven berekenen.

Lemma 1.31. *Stel we hebben twee lijnen $ax+by+c=0$ en $ix+jy+k=0$ met $a, b, c, i, j, k \in F$ die niet evenwijdig zijn, dan wordt het snijpunt gegeven door*

$$\left(\frac{cj - bk}{bi - aj}, \frac{ak - ci}{bi - aj} \right)$$

Bewijs. Omdat deze lijnen niet evenwijdig zijn, is minimaal een van a en i ongelijk aan nul. Zonder verlies van algemeenheid nemen we aan dat $i \neq 0$. Substitutie van $x = -\frac{iy+k}{i}$ in $ax+by+c=0$ geeft

$$y = \frac{ak - ci}{bi - aj} \text{ waaruit volgt } x = \frac{cj - bk}{bi - aj}.$$

De lijnen zijn niet evenwijdig, dus er geldt $aj \neq bi$. We hebben dus geen problemen met delen door nul. \square

We zullen in deze scriptie ook op een aantal plekken parabolen tegenkomen. De volgende lemma's zijn hiervoor van belang.

Lemma 1.32. *Gegeven een punt en een lijn, dan vormen alle punten met gelijke afstand tot het punt en de lijn een parabool.*

Bewijs. Stel we hebben een punt (p, q) en een horizontale lijn $ay + 1 = 0$. Zij (r, s) een punt met gelijke afstand tot het punt en de lijn. Voor de afstand tussen (p, q) en (r, s) geldt

$$d = \sqrt{(p-r)^2 + (q-s)^2}$$

en voor de afstand tussen (r, s) en $ay + 1 = 0$ volgt uit lemma 1.30

$$d = \left| \frac{as + 1}{\sqrt{0^2 + a^2}} \right|.$$

Het gelijkstellen van de afstanden en kwadrateren geeft $(p-r)^2 + (q-s)^2 = \frac{(as+1)^2}{a^2}$, waaruit volgt

$$\begin{aligned} 0 &= p^2 - 2pr + r^2 + q^2 - 2qs + s^2 - \frac{a^2s^2 + 2as + 1}{a^2} \\ &= a^2(r^2 - 2pr + p^2 + q^2 - 2qs) - 2as - 1. \end{aligned}$$

Dit geeft $(2a^2q + 2a)s = a^2(r^2 - 2pr + p^2 + q^2) - 1$, waaruit volgt dat het punt (r, s) op de parabool

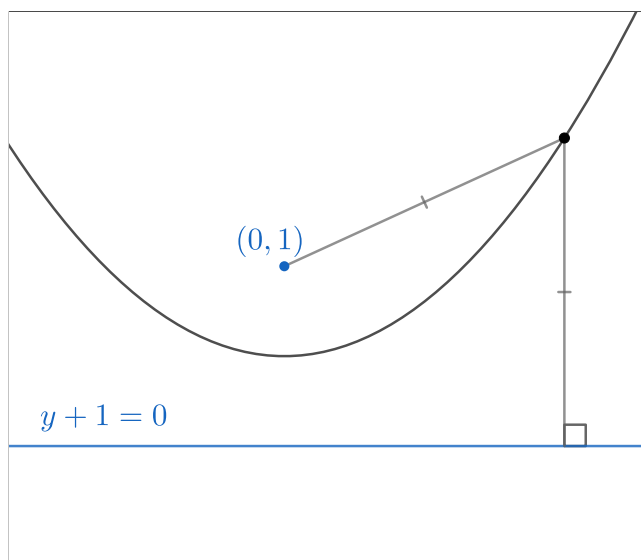
$$y = \frac{a^2}{2a^2q + 2a}x^2 - \frac{2a^2p}{2a^2q + 2a}x + \frac{a^2p^2 + a^2q^2 - 1}{2a^2q + 2a}$$

ligt. \square

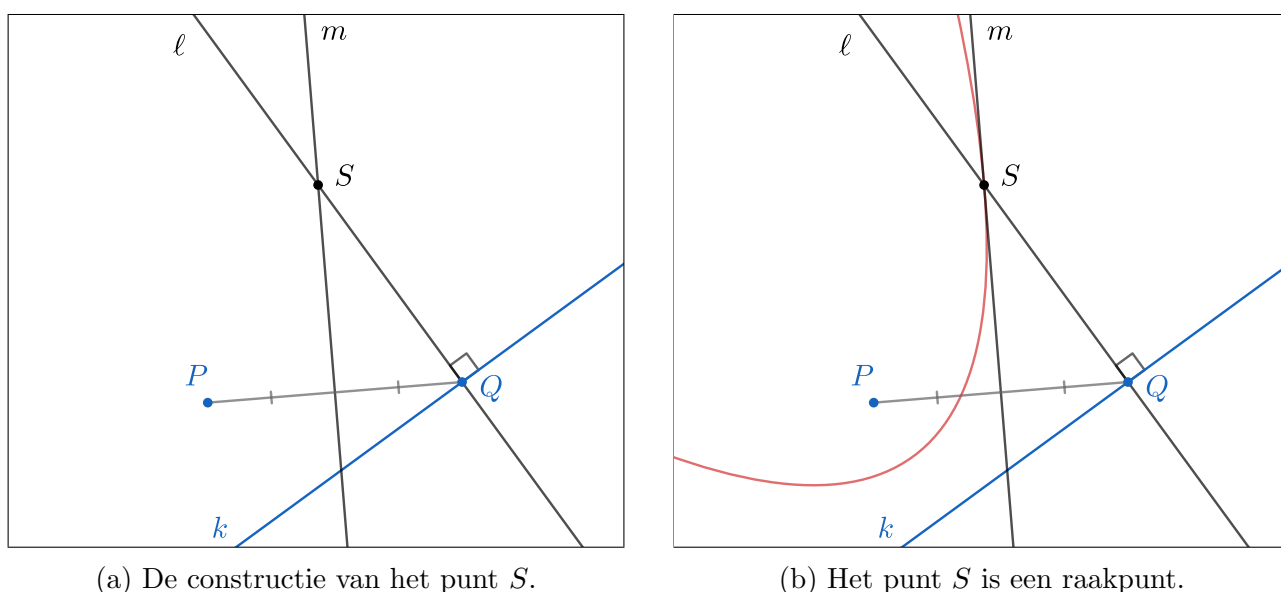
In figuur 1.1 zien we een voorbeeld van lemma 1.32. Merk op dat we in het bewijs gekozen hebben voor een horizontale lijn, zodat de vergelijking die we gevonden hebben herkenbaar is als parabool. Als de lijn niet horizontaal is, vormen de punten met gelijke afstand een geroteerde parabool.

Lemma 1.33. *De middelloodlijn tussen een punt en een punt op een lijn is een raaklijn aan de parabool die gegeven wordt door het eerste punt en de lijn.*

Bewijs. Zij P een punt, k een lijn die niet door P gaat en Q een punt op lijn k . Het snijpunt van de middelloodlijn m van P en Q en de loodlijn ℓ op k door Q noemen we S , zie figuur 1.2a. Omdat S op de middelloodlijn van P en Q ligt, volgt dat de afstand van S tot P gelijk is aan de afstand van S tot Q . Bovendien ligt S op een lijn loodrecht op k door Q , dus is de afstand tussen S en k gelijk aan de afstand tussen S en Q . Er geldt dus dat S even ver van P als van Q ligt, dus uit lemma 1.32 volgt dat S op de parabool gedefinieerd door P en k ligt. Omdat P niet op de lijn k ligt, staat m niet loodrecht op k . Als S een snijpunt is van m en de parabool, dan verwachten we nog een tweede snijpunt. Zij T een punt op de middelloodlijn m ongelijk aan S . Dan geldt dat de afstand tussen T en P gelijk is aan de afstand tussen T en Q , maar dat de afstand tussen T en Q niet gelijk is aan de afstand tussen T en k . Het punt T ligt dus niet op de parabool. Er is dus geen tweede snijpunt. Hieruit volgt dat S een raakpunt is van m en de parabool, dus m is een raaklijn aan de parabool. Zie figuur 1.2b. \square



Figuur 1.1: De punten met gelijke afstand tot een punt en een lijn, vormen een parabool.



(a) De constructie van het punt S .

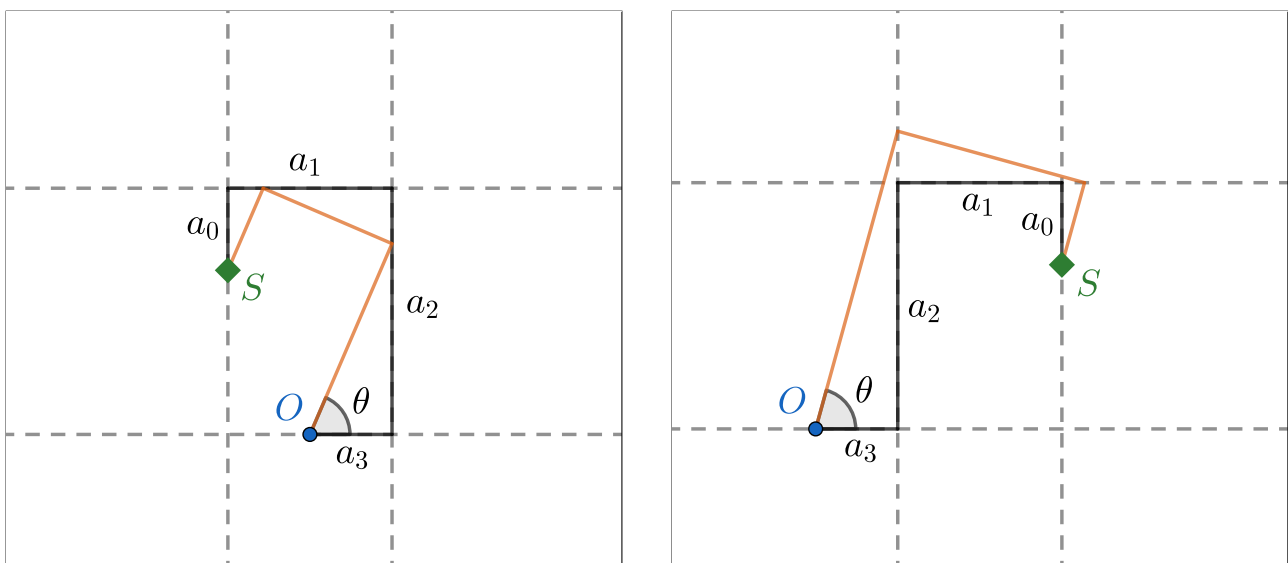
(b) Het punt S is een raakpunt.

Figuur 1.2: De middelloodlijn is een raaklijn aan de parabool.
In blauw de gegeven punten en lijn, in zwart de constructies.

1.2.2 Lill's Methode

Lill's methode zal een belangrijke rol gaan spelen in het bewijs van de hoofdstelling voor 1-vouw origami. We zullen deze methode nu eerst introduceren.

In de 19e eeuw beschreef Eduard Lill een meetkundige methode voor het vinden van de wortels van polynomen. Vaak wordt deze methode uitgelegd met behulp van een schildpad, dus dit zullen we hier ook doen. Stel we hebben een polynoom $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ met reële coëfficiënten waarvan we een reële wortel willen bepalen (als deze bestaat). Lill's methode om dit op te lossen is het volgende. We beginnen met een schildpad in de oorsprong van het reële vlak. De schildpad loopt vervolgens een afstand a_n over de positieve x-as en draait vervolgens 90° tegen de klok in. Vervolgens loopt hij een afstand van a_{n-1} en draait vervolgens weer tegen de klok in, net zolang tot hij de afstand a_0 gelopen heeft. Als een van de coëfficiënten negatief is, loopt hij achteruit en als een van de coëfficiënten nul is, loopt hij niet, maar draait hij wel weer een kwartslag. Als de schildpad op het eindpunt is, wordt in de literatuur gesproken over het 'schieten' van de schildpad. We zullen hier een laserlampje gebruiken om het diervriendelijk te houden. We willen vanaf de oorsprong met een laserlampje de schildpad beschijnen, maar dan wel op een bijzondere manier. We zullen het licht laten 'weerkaatsen' op de lijnstukken van het pad dat de schildpad gelopen heeft, of verlengden daarvan. We schijnen eerst op het lijnstuk van lengte a_{n-1} . Het licht wordt vervolgens weerkaatst onder een hoek van 90° en dan wel zo dat het licht het lijnstuk van lengte a_{n-2} snijdt, of het verlengde ervan. Het licht zal dus soms door de lijn heen weerkaatsen. Dit gaat zo door totdat het licht weerkaatst is door de lijn door het lijnstuk van lengte a_1 . Als het lukt om op deze manier de schildpad te 'beschijnen', oftewel de lichtstraal gaat precies door het punt waar de schildpad zich bevindt, dan heeft het polynoom een reële oplossing. Als dit het geval is, dan definiëren we θ als de hoek tussen de lichtstraal vanuit de oorsprong en het lijnstuk van lengte a_n . Er geldt nu $x = -\tan \theta$ is een wortel van $f(x)$ [7, §4]. Zie figuur 1.3 voor twee voorbeelden. In het tweede voorbeeld hebben we a_1 negatief gekozen. We zien hier hoe de lichtstraal via het verlengde van het pad weerkaatst kan worden. Merk op dat we de wortel voor monische polynomen direct af kunnen lezen. Omdat voor deze polynomen geldt dat $a_n = 1$, volgt dat de afstand tussen de x-as en het punt van weerkaatsen van het licht gelijk is aan $\tan \theta$. Hieruit volgt dat x gelijk is aan deze afstand als θ negatief is. In het andere geval moeten we het negatieve van deze afstand nemen.



(a) Voor $a_3 = 1$, $a_2 = 3$, $a_1 = 2$ en $a_0 = 1$.

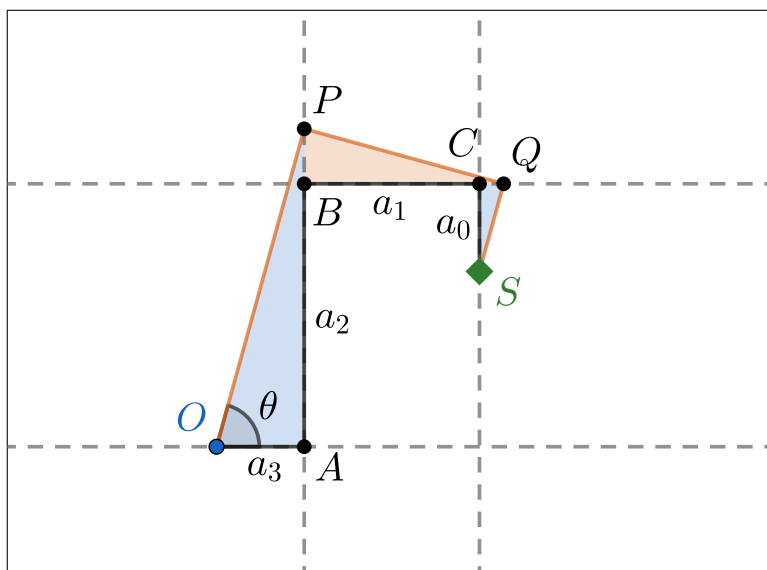
(b) Voor $a_3 = 1$, $a_2 = 3$, $a_1 = -2$ en $a_0 = 1$.

Figuur 1.3: Twee keer Lill's methode voor $a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$.
In zwart het pad van de schildpad en in oranje de lichtstraal.

We zullen nu een bewijsschets geven aan de hand van een voorbeeld. We beginnen met een polynoom $a_3x^3 + a_2x^2 - a_1x + a_0$ zoals in figuur 1.3(b). Vervolgens bekijken we de rechthoekige driehoeken $\triangle OAP$, $\triangle PBQ$ en $\triangle QCS$, zoals aangegeven in figuur 1.4. Omdat de hoeken $\angle OPQ$ en $\angle PQS$ rechte hoeken zijn, volgt dat de drie driehoeken gelijkvormig zijn. Uit $x = -\tan \theta$, volgt dat $AP = -a_3x$. Vanwege gelijkvormigheid geldt $\frac{QC}{CS} = \frac{OA}{AP} = \frac{PB}{BQ}$, waaruit volgt

$$\frac{y}{a_0} = \frac{a_3}{-a_3x} = \frac{-a_3x - a_2}{a_1 + y},$$

waarbij we de afstand QC y noemen. Uit de eerste gelijkheid volgt $y = -\frac{a_0}{x}$ en met de tweede gelijkheid geeft dit $a_3^2x^2 + a_2a_3x - a_1a_3 + \frac{a_0a_3}{x} = 0$. Omdat $a_3 \neq 0$ kunnen we a_3 wegdelen. Verder kunnen we de vergelijking vermenigvuldigen met x om de breuk weg te werken en dit geeft $a_3x^3 + a_2x^2 - a_1x + a_0 = 0$. Er geldt dus dat x een oplossing is van dit polynoom, zoals we wilden.



Figuur 1.4: Bewijs Lill's methode voor $a_3x^3 + a_2x^2 - a_1x + a_0$ met $a_0, \dots, a_3 > 0$.

Dit bewijs is sterk afhankelijk van het teken van de coëfficiënten. We zouden op deze manier nogal wat bewijzen moeten schrijven. Om dit te voorkomen zullen we een ander bewijs geven voor zowel kwadratische als kubische vergelijkingen. Het bewijs voor vergelijkingen van hogere graad volgen op dezelfde manier.

Lemma 1.34. *Lill's methode geeft alle reële oplossingen van kwadratische en kubische vergelijkingen.*

Bewijs. We beginnen met een willekeurige kwadratische vergelijking $a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$. We beginnen weer in de oorsprong en we zien dat $S = (a_2 - a_0, a_1)$. We zullen nu vergelijkingen opstellen voor de lijnen die samen de lichtstraal zullen vormen, waarbij we θ als variabele zien. We weten dat de lichtstraal begint in de oorsprong met helling gelijk aan $\tan \theta$, dus de lijn

$$\ell_1 : y = \tan \theta x.$$

Deze lijn weerkaatst op de lijn door a_1 , dit is de lijn $x = a_2$, in het punt $P_1 = (a_2, a_2 \tan \theta)$. Het volgende lijnstuk staat loodrecht op de eerste, dus heeft helling $-\frac{1}{\tan \theta}$ en gaat door het zojuist gevonden punt. Dit geeft de lijn

$$\ell_2 : y - a_2 \tan \theta = -\frac{1}{\tan \theta}(x - a_2).$$

Deze lijn snijdt de lijn door lijnstuk a_0 , namelijk de lijn $y = a_1$, in het punt $P_2 = (a_2 \tan^2 \theta - a_1 \tan \theta + a_2, a_1)$, zie figuur 1.5a. Het volgt dat de lichtstraal voldoet aan Lill's methode, als P_2 gelijk is aan S . Hieruit volgt $a_2 \tan^2 \theta - a_1 \tan \theta + a_2 = a_2 - a_0$, dus

$$a_2 \tan^2 \theta - a_1 \tan \theta + a_0 = 0.$$

We zien dat de lichtstraal door S gaat dan en slechts dan als $-\tan \theta$ een oplossing is van $a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$.

Voor de kubische vergelijking beginnen we met $b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0 = 0$. Ook hier beginnen we in de oorsprong en we zien dat $S = (b_3 - b_1, b_2 - b_0)$. Substitutie van $a_i = b_{i+1}$ voor $0 \leq i \leq 2$ in het bewijs voor de kwadratische vergelijking geeft de lijnen

$$\begin{aligned} \ell_1 : y &= b_3 \tan \theta && \text{door het punt } P_1 = (b_3, b_3 \tan \theta) \\ \ell_2 : y - b_3 \tan \theta &= -\frac{1}{\tan \theta}(x - b_3) && \text{door het punt } P_2 = (b_3 \tan^2 \theta - b_2 \tan \theta + b_3, b_2). \end{aligned}$$

We hoeven nu alleen de laatste lijn nog op te stellen. Deze staat weer loodrecht op de vorige, dus heeft helling $\tan \theta$ en gaat door het laatst gevonden punt. Dit geeft de lijn

$$\ell_3 : y - b_2 = \tan \theta(x - b_3 \tan^2 \theta + b_2 \tan \theta - b_3).$$

Deze lijn snijdt de lijn door lijnstuk b_0 , namelijk de lijn $x = b_3 - b_1$, in het punt $P_3 = (b_3 - b_1, (b_3 - b_1) \tan \theta - b_3 \tan^3 \theta + b_2 \tan^2 \theta - b_3 \tan \theta + b_2)$, zie figuur 1.5b. Deze lichtstraal voldoet aan Lill's methode, als dit laatste punt gelijk is aan S , dus als

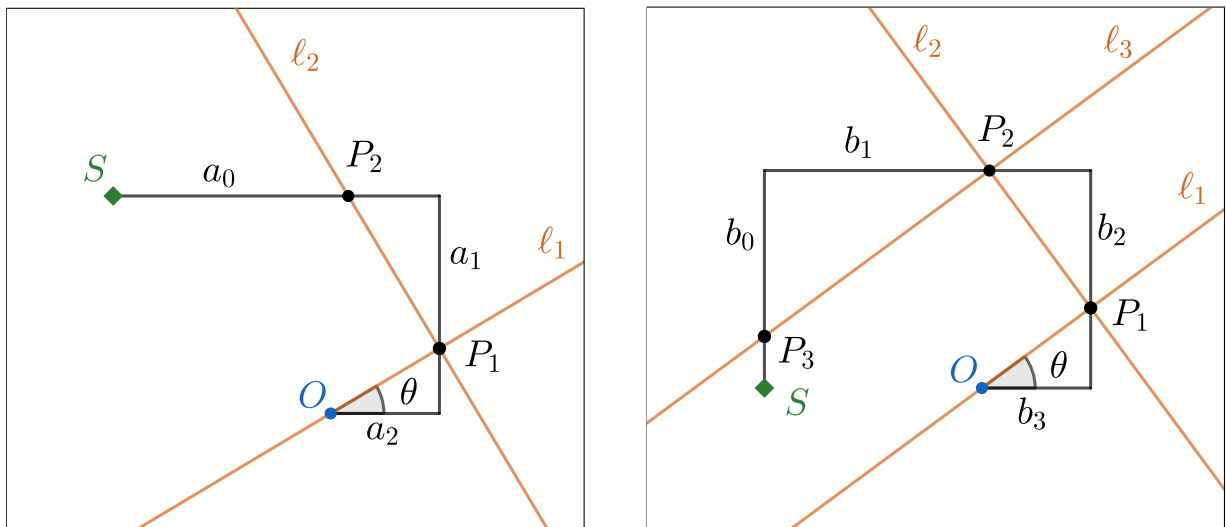
$$(b_3 - b_1) \tan \theta - b_3 \tan^3 \theta + b_2 \tan^2 \theta - b_3 \tan \theta + b_2 = b_2 - b_0,$$

wat gelijk is aan

$$-b_3 \tan^3 \theta + b_2 \tan^2 \theta - b_1 \tan \theta + b_0 = 0.$$

We zien ook hier dat de lichtstraal door S gaat dan en slechts dan als $-\tan \theta$ een oplossing is van $b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0 = 0$.

Omdat $\tan \theta$ een afstand is, vinden we op deze manier alle reële oplossingen van de vergelijkingen. \square



(a) Lichtstraal voor $a_2 x^2 + a_1 x + a_0$.

(b) Lichtstraal voor $b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$.

Figuur 1.5: Visualisatie bij het bewijs voor kwadratische en kubische vergelijkingen.

Hoofdstuk 2

Passer en Latje

De Grieken waren vroeger al gefascineerd door constructies met passer en latje. Ze ontdekten dat er veel te construeren was, maar liepen hierbij ook tegen problemen aan. Het was namelijk niet duidelijk of je een hoek in drieën kon delen. Ook vroegen ze zich af of een vierkant met dezelfde oppervlakte als een gegeven cirkel construeerbaar is en of je een kubus kunt construeren met dubbel zoveel inhoud als een gegeven kubus. Lang was onduidelijk of deze constructies mogelijk waren of niet. Door de ontwikkeling van de theorie van lichamen werd het mogelijk om dit te bepalen.

In dit hoofdstuk zullen we onderzoeken welke getallen construeerbaar zijn door alleen gebruik te maken van een passer en een latje. We zullen hiervoor eerst concreet maken wat we met de constructies bedoelen, vervolgens zullen we laten zien dat de construeerbare getallen een lichaam vormen, waarna we kunnen bepalen welke getallen construeerbaar zijn met passer en latje. Tot slot zullen we bepalen of de drie klassieke constructieproblemen mogelijk zijn of niet.

2.1 Constructies

Deze paragraaf is gebaseerd op §13.3 van Dummit en Foote. Om iets te kunnen zeggen over wat we kunnen construeren, is het belangrijk dat we precies maken wat we bedoelen met passer en latje constructies. Ten eerste is het belangrijk dat we het hebben over een latje en niet over een liniaal. We kunnen dus geen afstanden meten. De passer en het latje hebben beide maar één functie. Met het latje maak je een lijn door twee punten en met de passer maak je cirkels met een gegeven middelpunt en straal. Dit maken we als volgt precies. Er zijn twee mogelijke constructies, namelijk:

C1) *De lijn door twee gegeven punten is construeerbaar.*

C2) *De cirkel met gegeven middelpunt door een tweede gegeven punt is construeerbaar.*

Door het snijden van de verschillende constructies zijn nieuwe punten te construeren. Dit kan op drie manieren:

S1) Het snijden van twee lijnen.

S2) Het snijden van een lijn en een cirkel.

S3) Het snijden van twee cirkels.

Verder beginnen we altijd met twee gegeven punten, waarvan we de afstand ertussen 1 noemen. We zullen in lemma 2.3 zien dat we met passer en latje loodlijnen kunnen construeren, waarmee

we de assen van het reële vlak \mathbb{R}^2 maken. Met behulp van de gegeven afstand 1 kunnen we de schaal van de assen bepalen. We zullen onze constructies beschouwen in \mathbb{R}^2 . Het is belangrijk om de volgende begrippen goed uit elkaar te houden:

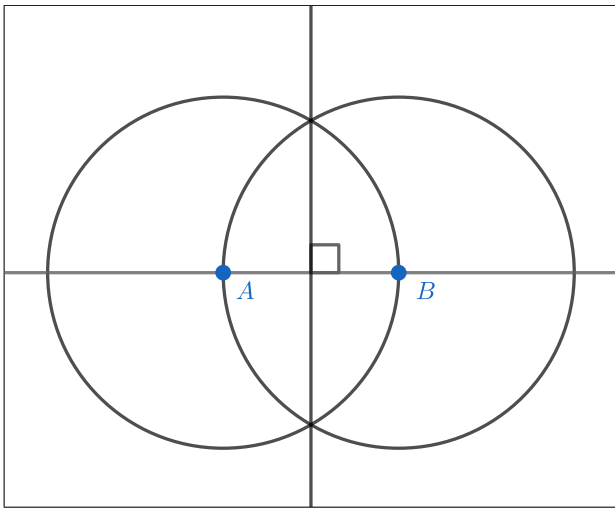
Definitie 2.1. Met een **construeerbaar getal** bedoelen we een getal in \mathbb{R} waarvan de absolute waarde de afstand is tussen twee snijpunten van constructies, waarbij we eindig veel constructies toestaan.

Definitie 2.2. Een punt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ is een **construeerbaar punt** dan en slechts dan als de coördinaten x en y construeerbare getallen zijn.

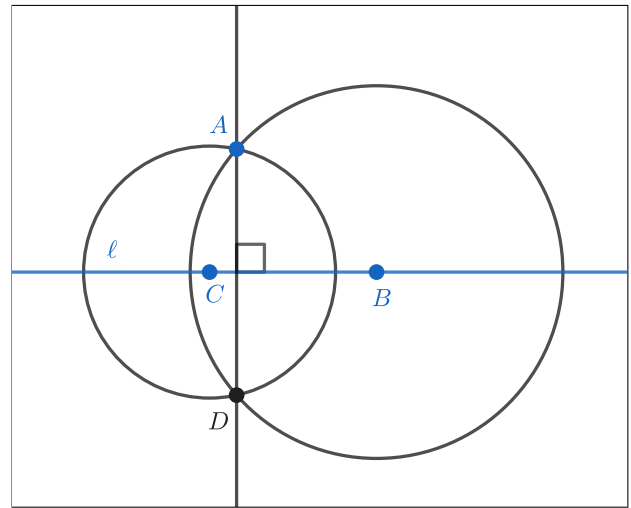
Dan nu de beloofde loodlijnen:

Lemma 2.3. *De volgende loodlijnen zijn construeerbaar:*

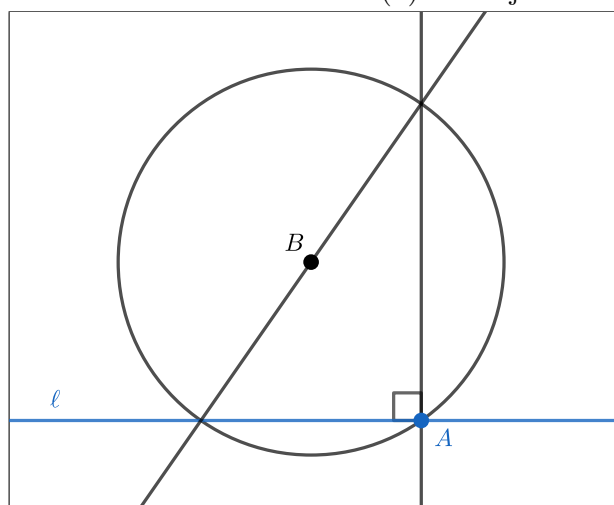
- De middelloodlijn van de construeerbare punten A en B
- De loodlijn op de construeerbare lijn ℓ door het construeerbare punt A .



(a) Middelloodlijn van A en B .



(b) Loodlijn door een punt niet op de lijn.



(c) Loodlijn door een punt op de lijn.

Figuur 2.1: Loodlijn constructies. In blauw de gegeven punten en lijnen, in zwart de constructies.

Bewijs. Voor de middelloodlijn maken we twee cirkels, ieder met het ene punt als middelpunt waarbij de cirkel door het andere punt gaat. Doordat de snijpunten van deze cirkels ieder even ver van A als van B liggen, liggen ze op de middelloodlijn. De lijn door de snijpunten van de cirkels is daarom de middelloodlijn van A en B . Zie figuur 2.1a.

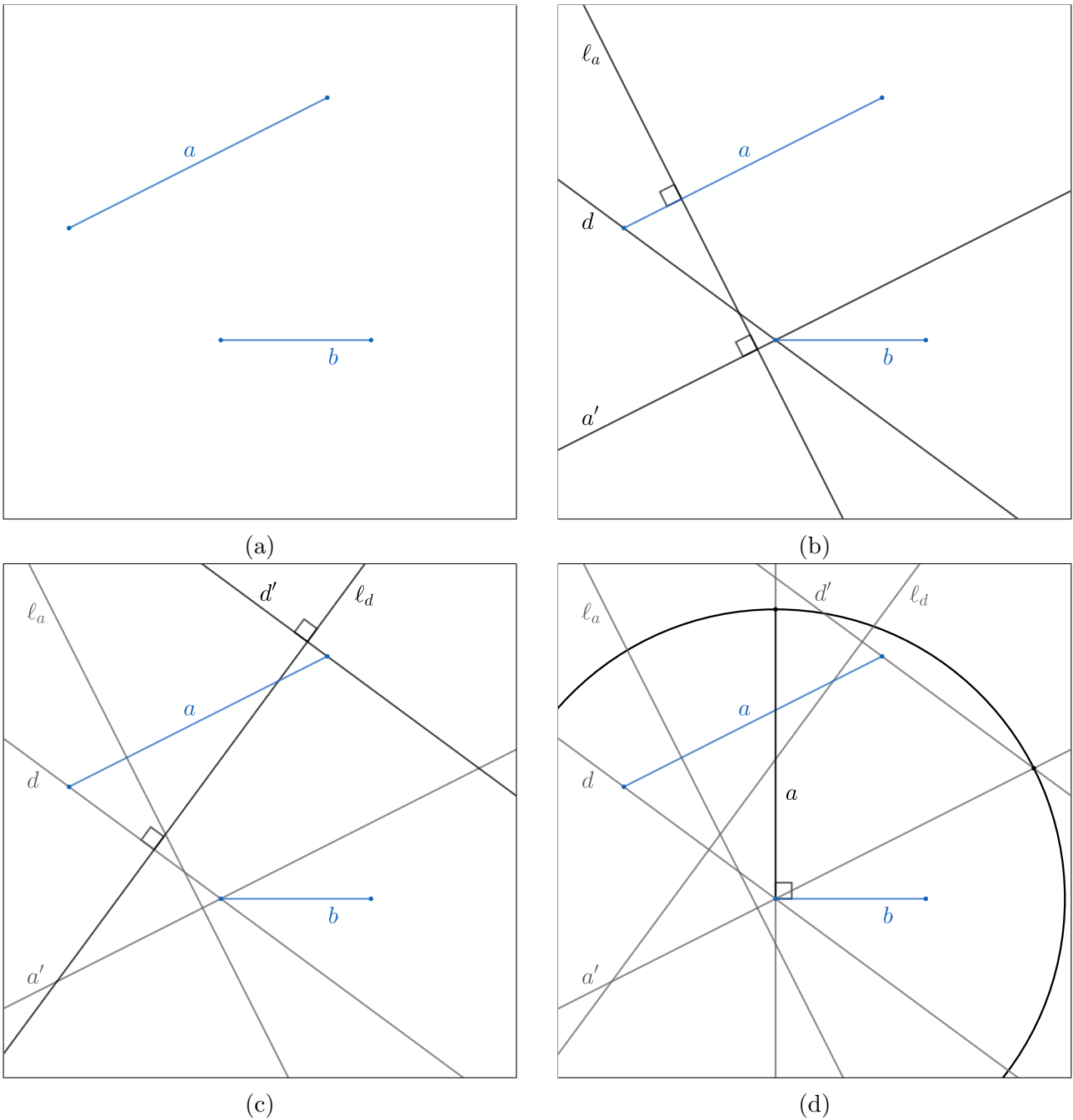
Voor de loodlijn op een construeerbare lijn door een gegeven punt hebben we twee gevallen. Als het punt A niet op de lijn ligt gaan we als volgt te werk. Omdat de lijn construeerbaar is, moeten er twee construeerbare punten B en C op de lijn liggen. We tekenen nu twee cirkels, een met middelpunt B en een met middelpunt C , waarbij beide cirkels door het punt A gaan. Als we het tweede punt waar de cirkels elkaar snijden D noemen, dan zien we dat de driehoeken ABC en DBC congruent zijn en elkaars spiegelbeeld zijn in de lijn ℓ . De lijn door A en D staat daarom loodrecht op ℓ . Zie figuur 2.1b.

In het geval dat het punt A op lijn ℓ ligt, moeten we een andere methode gebruiken. We hebben hiervoor een construeerbaar punt B naast de lijn nodig. Als dit punt nog niet bestaat, kunnen we deze altijd construeren door twee cirkels te tekenen zoals we voor de middelloodlijn gedaan hebben, waarbij we twee construeerbare punten van de lijn ℓ gebruiken. Een van de snijpunten van deze cirkels kunnen we nu B noemen. Vervolgens tekenen we een cirkel met middelpunt B door het punt A en daarna een lijn door B en het tweede snijpunt van de cirkel met lijn ℓ . Tot slot tekenen we de lijn door A en het snijpunt van de cirkel met de laatste lijn. Dit is een loodlijn op ℓ door A vanwege de stelling van Thales. Zie figuur 2.1c. \square

2.2 Lichaam

Nu we weten wat construeerbare getallen zijn, kunnen we ons afvragen of de verzameling van construeerbare getallen specifieke eigenschappen heeft. We zullen zien dat deze verzameling een lichaam vormt.

Vanwege de definitie van een construeerbaar getal, namelijk de afstand tussen twee snijpunten van constructies, is het lastig om in het algemeen constructies te maken die afhankelijk zijn van twee construeerbare getallen. Deze lijnstukken kunnen zich namelijk op willekeurige plekken in het reële vlak bevinden. We hebben daarom eerst een standaard uitgangspunt nodig. We beginnen met twee lijnstukken van respectievelijk lengte a en b , waarbij a en b construeerbare getallen zijn, zoals in figuur 2.2a. Het is door middel van constructies mogelijk kopieën van deze lijnstukken te construeren die hetzelfde beginpunt hebben en loodrecht op elkaar staan. De eerste stap hiervoor is het construeren van een lijn van een van de eindpunten van a naar een van de eindpunten van b . Deze lijn noemen we d . Vervolgens maken we een loodlijn op a met behulp van lemma 2.3. Deze lijn noemen we ℓ_a . De volgende stap is het maken van een loodlijn op ℓ_a die door het eindpunt van b gaat met behulp van hetzelfde lemma. Deze nieuwe lijn noemen we a' , omdat deze evenwijdig is aan a , zie figuur 2.2b. Op dezelfde manier maken we een lijn d' evenwijdig aan d die door het eindpunt van a gaat, zodat we het parallellogram $ada'd'$ krijgen, zoals in figuur 2.2c. Door nu een loodlijn op b door het snijpunt van b en d te maken en een cirkel met hetzelfde punt als middelpunt met straal a' te tekenen, hebben we a en b in de oriëntatie die we wilden, zie figuur 2.2d.

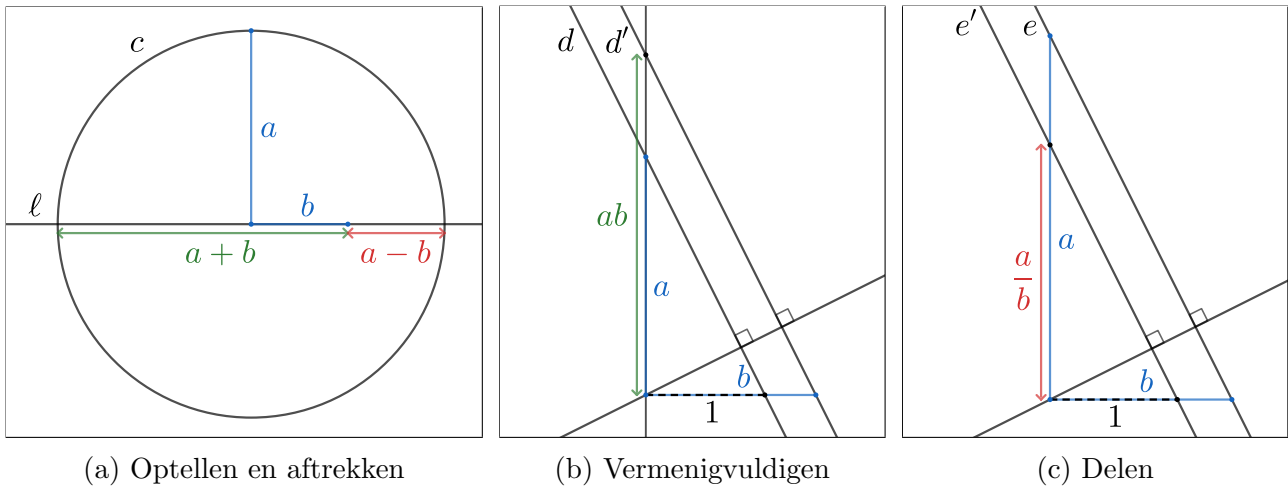


Figuur 2.2: De constructie van het standaard uitgangspunt voor constructies met passer en latje.

Nu we een goed uitgangspunt gevonden hebben, kunnen we onderzoeken of de verzameling van construeerbare getallen gesloten is onder de operaties van het lichaam van de reële getallen.

Lemma 2.4. *De verzameling van construeerbare getallen is gesloten onder optellen en aftrekken.*

Bewijs. De eerste stap is het verlengen van lijnstuk b tot een lijn die we ℓ noemen. Vervolgens construeren we de cirkel c met als middelpunt het snijpunt van a en b en met straal a . De afstand tussen het rechter eindpunt van b en het linker snijpunt van c met ℓ in figuur 2.3a is nu gelijk aan $a + b$ en de afstand tussen het rechter eindpunt van b en het rechter snijpunt van c met ℓ is gelijk aan $a - b$. We zien dat het optellen en aftrekken van construeerbare getallen opnieuw construeerbare getallen oplevert. \square



Figuur 2.3: Constructies voor optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen.

Lemma 2.5. *De verzameling van construeerbare getallen is gesloten onder vermenigvuldigen en delen.*

Bewijs. We construeren eerst de afstand 1 op het lijnstuk b . Dit doen we op een zelfde manier als de constructie voor het standaard uitgangspunt.

Voor het vermenigvuldigen trekken we een lijn d van het uiteinde van a naar het uiteinde van 1 en we verlengen het lijnstuk a . Vervolgens maken we een lijn d' evenwijdig aan d door het uiteinde van b door middel van twee loodlijnen, zie figuur 2.3b. We hebben nu twee gelijkvormige rechthoekige driehoeken: een met rechthoekszijden a en 1 en een met rechthoekszijden b en een te bepalen lengte. De horizontale zijde van de grote driehoek is b keer zo groot als die van de kleine, dus de verticale zijde van de grote driehoek is heeft lengte ab , zoals in figuur 2.3b.

Voor het delen beginnen we weer in de uitgangspositie. Dit keer verbinden we het uiteinde van a met het uiteinde van b met de lijn e en maken we een lijn e' evenwijdig aan e door het uiteinde van 1, zoals in figuur 2.3c. We hebben opnieuw twee gelijkvormige driehoeken. Door de lengte van de horizontale zijde van de grote driehoek door b te delen krijgen we de lengte van de horizontale zijde van de kleine driehoek. Hieruit volgt dat de verticale zijde van de kleine driehoek lengte $\frac{a}{b}$ heeft, zoals in figuur 2.3c.

Hieruit volgt dat het vermenigvuldigen en delen van construeerbare getallen opnieuw construeerbare getallen geeft. \square

Uit lemma's 2.4 en 2.5 volgt nu:

Stelling 2.6. *De verzameling van construeerbare getallen vormt een deellichaam van \mathbb{R} .*

Bewijs. De verzameling van construeerbare getallen bevat 0 en 1, namelijk de afstand van een punt tot zichzelf en de initiële afstand 1. Daarnaast volgt uit lemma's 2.4 en 2.5 dat de verzameling gesloten is onder optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Uit definitie 1.4 volgt nu dat de verzameling construeerbare getallen een deellichaam van \mathbb{R} is. \square

We zullen het lichaam van construeerbare getallen in het vervolg noteren met \mathcal{C} .

2.3 Hoofdstelling

Nu we weten dat \mathcal{C} een lichaam is, zijn we ook geïnteresseerd in hoe ‘groot’ de verzameling \mathcal{C} is. Omdat 1 een construeerbaar getal is en \mathcal{C} gesloten is onder optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen, volgt direct dat $\mathbb{Q} \subset \mathcal{C}$. Om meer te kunnen zeggen over de construeerbare getallen, zullen we nu preciezer gaan kijken naar de constructies en de snijpunten hiervan. We zullen in grote lijnen de aanpak van paragraaf 13.3 in Dummit en Foote volgen.

Zij F een willekeurig deellichaam van \mathbb{R} . We zullen bekijken welke lichaamsuitbreidingen de constructies met passer en latje kunnen geven. Daarvoor zullen we eerst de vergelijkingen van de constructies op moeten stellen. De constructie C1) is een lijn door twee gegeven punten. Laat (k, l) en (m, n) twee punten zijn met $k, l, m, n \in F$. Dan is de bekende vergelijking van de lijn door deze punten gelijk aan $y - l = \frac{n-l}{m-k}(x - k)$ als de lijn geen horizontale lijn is. Herschrijven geeft $-(n-l)x + (m-k)y + (n-l)k - (m-k)l = 0$, wat ook de juiste vergelijking is voor horizontale lijnen. De algemene vergelijking voor deze lijn is dus $ax + by + c = 0$ met $a, b, c \in F$. De constructie C2) is de cirkel met middelpunt (s, t) en straal r , die gegeven wordt door $(x - s)^2 + (y - t)^2 = r^2$ met $r, s, t \in F$.

Lemma 2.7. *Het snijden van twee lijnen (S1) geeft geen lichaamsuitbreidingen.*

Bewijs. Laat $ax + by + c = 0$ en $ix + jy + k = 0$ met $a, b, c, i, j, k \in F$ twee geconstrueerde lijnen zijn. Uit lemma 1.31 volgt dat

$$\left(\frac{cj - bk}{bi - aj}, \frac{ak - ci}{bi - aj} \right) \quad (2.1)$$

het snijpunt is van deze lijnen. Omdat F een lichaam is, zien we dat F beide coördinaten bevat, dus S1 geeft geen lichaamsuitbreidingen. \square

Lemma 2.8. *Het snijden van een lijn en een cirkel (S2) geeft hooguit een kwadratische lichaamsuitbreiding.*

Bewijs. Stel we hebben een lijn $ax + by + c = 0$ en een cirkel $(x - s)^2 + (y - t)^2 = r^2$ met $a, b, c, r, s, t \in F$. Omdat $(a, b) \neq (0, 0)$ kiezen we zonder verlies van algemeenheid $a \neq 0$. Dit geeft $x = -\frac{by+c}{a}$. Substitueren in de vergelijking van de cirkel geeft

$$\left(-\frac{by+c}{a} - s \right)^2 + (y - t)^2 = r^2.$$

We zien dat y gegeven wordt door een kwadratische vergelijking en dat x lineair van y afhangt. Hieruit volgt dat de coördinaten van de snijpunten hooguit een kwadratische uitbreiding van F geven. \square

Lemma 2.9. *Het snijden van twee cirkels (S3) geeft hooguit een kwadratische lichaamsuitbreiding.*

Bewijs. Stel we hebben twee cirkels $(x - s)^2 + (y - t)^2 = r^2$ en $(x - u)^2 + (y - v)^2 = w^2$ met $r, s, t, u, v, w \in F$. Door deze vergelijkingen van elkaar af te trekken, krijgen we

$$2x(u - s) + 2y(v - t) = r^2 + u^2 + v^2 - s^2 - t^2 - w^2,$$

wat de vergelijking is van een lijn met coëfficiënten in F . Deze lineaire vergelijking geeft samen met een van de cirkelvergelijkingen dezelfde oplossingen als de twee cirkelvergelijkingen. Omdat we nu net als in lemma 2.8 snijpunten zoeken van een cirkel en een lijn met coëfficiënten in F , zien we dat de coördinaten van de snijpunten hooguit een kwadratische uitbreiding van F geven. \square

Nu we weten welke lichaamsuitbreidingen ten hoogste mogelijk zijn door middel van constructies met passer en latje, hebben we genoeg informatie voor de volgende belangrijke stap.

Propositie 2.10. [5, §13.3 Prop. 23] *Als een getal $\alpha \in \mathbb{R}$ verkregen is uit een lichaam $F \subset \mathbb{R}$ door een reeks van passer en latje constructies, dan geldt $[F(\alpha) : F] = 2^n$ voor een geheel getal $n \geq 0$.*

Bewijs. Vanwege definitie 2.1 staan we alleen eindig veel constructies toe. Uit lemma's 2.7, 2.8 en 2.9 volgt dat elke constructie hooguit een kwadratische lichaamsuitbreiding geeft. We zien dus dat er een eindige reeks lichamen F_i bestaat waarvoor geldt $F = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_m$, zodat $\alpha \in F_m$ en $[F_i : F_{i-1}] = 2$ voor alle $i \in \{1, \dots, m\}$. Herhaald toepassen van lemma 1.7 geeft

$$[F_m : F] = [F_m : F_{m-1}][F_{m-1} : F_{m-2}] \dots [F_1 : F] = 2^m.$$

Verder geldt dat $F \subseteq F(\alpha) \subseteq F_m$, dus met hetzelfde lemma volgt dat

$$[F_m : F] = [F_m : F(\alpha)][F(\alpha) : F].$$

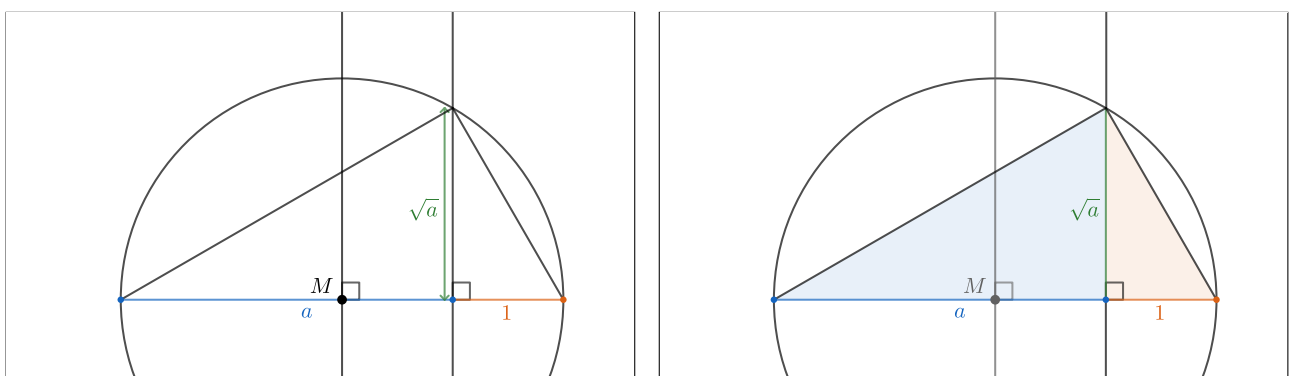
We zien dat $[F(\alpha) : F]$ een deler is van 2^m , dus er bestaat een geheel getal $n \geq 0$ zodat $[F(\alpha) : F] = 2^n$. \square

We hebben al gezien dat $\mathbb{Q} \subseteq \mathcal{C}$. Hieruit volgt dat elk construeerbaar getal verkregen is uit \mathbb{Q} door een eindig aantal passer en latje constructies. Daarom volgt nu direct het volgende:

Gevolg 2.11. [10, Cor. 3.2.10] *Als $\alpha \in \mathcal{C}$, dan geldt $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 2^n$ voor een geheel getal $n \geq 0$.*

Gevolg 2.11 is al een goed begin voor het bepalen van de verzameling van construeerbare getallen. Het geeft namelijk een bovengrens. Het is nu alleen nog niet duidelijk of een getal die ontstaat door middel van kwadratische uitbreidingen ook construeerbaar is. Hiervoor is het nodig om te weten of de wortel van een construeerbaar getal altijd construeerbaar is.

Lemma 2.12. *De verzameling van construeerbare getallen is gesloten onder wortel trekken.*



(a) De constructie van \sqrt{a} met passer en latje.

(b) Gelijkvormige driehoeken.

Figuur 2.4: De wortel van een construeerbaar getal is construeerbaar.

Bewijs. We beginnen met een lijnstuk van lengte $a \in \mathcal{C}$. Uit het standaard uitgangspunt met $b = 1$ lemma 2.4 volgt dat we een lijnstuk van lengte $a + 1$ kunnen construeren. Vervolgens bepalen we het midden M van dit lijnstuk met behulp van de middelloodlijn zoals in lemma 2.3. Nadat we de cirkel met middelpunt M en straal $\frac{a+1}{2}$ geconstrueerd hebben, maken we met behulp van lemma 2.3 een loodlijn door de gemeenschappelijke eindpunten van de lijnstukken a en 1 zoals in figuur 2.4a. Het volgt nu dat het deel van deze loodlijn dat tussen het lijnstuk en de cirkel ligt, een lengte heeft van \sqrt{a} . Dit volgt uit de gelijkvormige driehoeken zoals aangegeven in figuur 2.4b. Deze driehoeken zijn gelijkvormig, omdat ze beide rechthoekig zijn en de driehoeken samen weer een rechthoekige driehoek vormen vanwege de stelling van Thales. Er geldt dus dat het trekken van de wortel van een construeerbaar getal een construeerbaar getal oplevert. \square

Dan zijn we nu klaar voor de belangrijkste stelling van dit hoofdstuk.

Stelling 2.13. [10, Thm. 3.2.9] *Zij $\alpha \in \mathbb{R}$. Er geldt dat $\alpha \in \mathcal{C}$ dan en slechts dan als er een eindige rij lichamen $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_n \subset \mathbb{R}$ bestaat zodat $\alpha \in F_n$ en $[F_{i+1} : F_i] = 2$ voor alle $i \in \{0, \dots, n-1\}$.*

Bewijs. Als $\alpha \in \mathcal{C}$, dan volgt direct uit gevolg 2.11 en het bewijs van propositie 2.10 dat de gezochte eindige rij lichamen bestaat.

Voor de andere implicatie volgen we het bewijs van *Origami-Constructible Numbers* [10]. Als er een eindige reeks lichamen $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_n$ bestaat zodanig dat $\alpha \in F_n$ en $[F_{i+1} : F_i] = 2$ voor alle $i \in \{0, \dots, n-1\}$, dan volgt uit lemma 1.15 dat er een $b_i \in F_i$ bestaat, zodat $F_{i+1} = F_i(\sqrt{b_i})$. Voor de rest van dit bewijs maken we gebruik van inductie. We weten dat alle elementen van $F_0 = \mathbb{Q}$ construeerbaar zijn. Stel dat alle elementen van F_j construeerbaar zijn voor een bepaalde j . Dan volgt dat b_j construeerbaar is, dus uit lemma 2.12 volgt dat $\sqrt{b_j}$ construeerbaar is. We kunnen concluderen dat $F_{j+1} = F_j(\sqrt{b_j}) \subset \mathcal{C}$. Met inductie volgt nu dat F_n uit construeerbare elementen bestaat. Omdat $\alpha \in F_n$, zien we dat $\alpha \in \mathcal{C}$, zoals we wilden. \square

2.4 Klassieke Constructieproblemen

Nu we in de voorgaande paragrafen een hoop theorie verzameld hebben, zullen we in deze paragraaf kijken hoe we dit in de praktijk kunnen gebruiken. Zoals we in de inleiding al kort benoemd hebben, zijn er drie beroemde klassieke constructieproblemen waar de Grieken zich al over bogen, namelijk

- **Verdubbeling van een kubus:** Is het mogelijk om met een passer en latje een kubus te construeren met dubbel zoveel inhoud als dat van een gegeven kubus?
- **Driedeling van een hoek:** Is het mogelijk om met passer en latje een gegeven hoek in drie gelijke delen te verdelen?
- **Kwadratuur van een cirkel:** Is het mogelijk om met passer en latje een vierkant te construeren waarvan de oppervlakte gelijk is aan dat van een gegeven cirkel?

We zullen nu per klassiek constructieprobleem bekijken of deze constructie in het algemeen mogelijk is met passer en latje. Dit doen we op basis van stelling 24 van §13.3 uit Dummit en Foote [5], waarbij we het daar gegeven beknopte bewijs uitgebreider uitwerken en verdelen in verschillende lemma's.

Propositie 2.14. *De verdubbeling van de kubus is niet construeerbaar met passer en latje.*

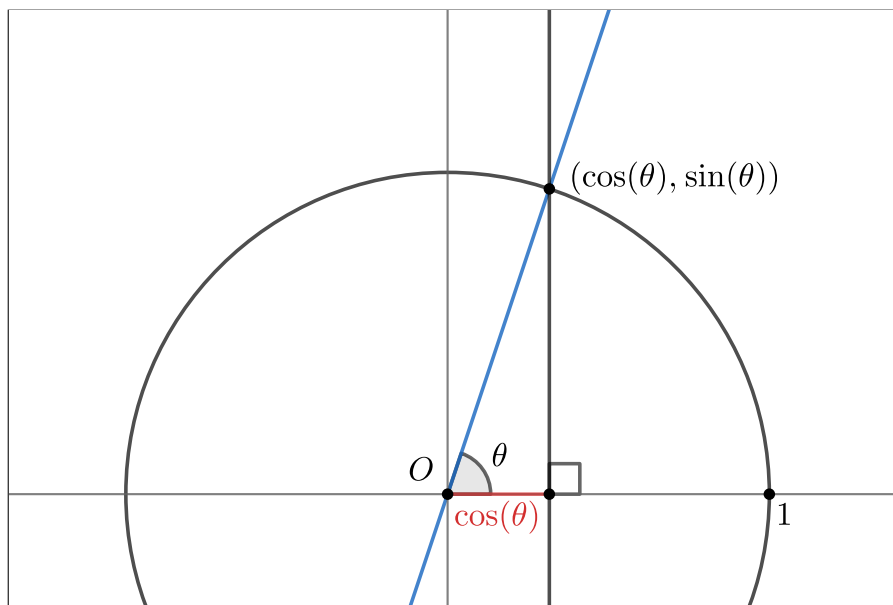
Bewijs. Stel we hebben een kubus met inhoud 1 en we willen een kubus construeren met een inhoud van 2. Dan volgt dat de te construeren kubus ribben heeft van lengte $\sqrt[3]{2}$. Het minimaalpolynoom van $\sqrt[3]{2}$ is gelijk aan $x^3 - 2$, dus met lemma 1.11 volgt dat $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 3$. Omdat 3 geen macht is van 2, volgt uit gevolg 2.11 dat het niet mogelijk is om $\sqrt[3]{2}$ te construeren. \square

Voordat we beginnen aan de driedeling van een hoek, hebben we eerst de volgende lemma's nodig.

Lemma 2.15. *Een hoek θ is construeerbaar dan en slechts dan als $\cos(\theta)$ construeerbaar is.*

Bewijs. Stel de hoek θ is construeerbaar, dat wil zeggen, we kunnen twee lijnen construeren die elkaar snijden onder een hoek van θ . Dan is het punt op afstand 1 van de oorsprong en onder hoek θ van de positieve x -as construeerbaar. Met een loodlijn op de x -as door dit punt construeren we de x -coördinaat $\cos(\theta)$. Er volgt dat $\cos(\theta)$ construeerbaar is, zoals in figuur 2.5.

Stel dat $\cos(\theta)$ construeerbaar is. Dan kunnen we een loodlijn construeren op de positieve x -as op afstand $\cos(\theta)$ van de oorsprong. De cirkel met straal 1 en de oorsprong als middelpunt snijdt deze loodlijn in het punt $(\cos(\theta), \sin(\theta))$, zie figuur 2.5, en de lijn tussen de oorsprong en dit punt maakt een hoek van θ met de positieve x -as. \square

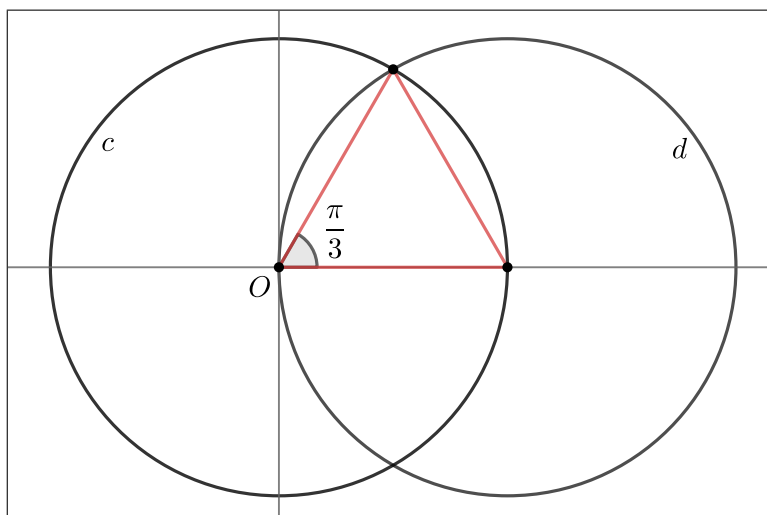


Figuur 2.5: De construeerbaarheid van hoek θ en lengte $\cos(\theta)$ zijn equivalent.

Lemma 2.16. *Een hoek van $\frac{\pi}{3}$ is construeerbaar met passer en latje.*

Bewijs. We maken twee cirkels met straal 1. De eerste cirkel noemen we c en heeft de oorsprong als middelpunt. De tweede noemen we d en heeft als middelpunt het snijpunt van c met de positieve x -as. De driehoek die we nu krijgen zoals aangegeven in figuur 2.6 is een gelijkzijdige driehoek met hoeken van $\frac{\pi}{3}$. \square

Nu hebben we genoeg informatie voor het volgende klassieke constructieprobleem.



Figuur 2.6: De constructie van een hoek van $\frac{\pi}{3}$.

Propositie 2.17. *Het construeren van de driedeling van een hoek is niet mogelijk met passer en latje.*

Bewijs. Stel een hoek θ is gegeven en we willen deze in drie gelijke delen verdelen. Vanwege lemma 2.15 volgt dat dit probleem equivalent is met het construeren van $\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)$ als $\cos(\theta)$ gegeven is. Uit lemma 2.16 volgt dat een hoek van $\frac{\pi}{3}$ construeerbaar is. We zullen laten zien dat het construeren van $\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)$ voor $\theta = \frac{\pi}{3}$ niet mogelijk is. De derdehoekregel voor de cosinus geeft $\cos(\theta) = 4\cos^3\left(\frac{\theta}{3}\right) - 3\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)$. Omdat $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, volgt nu $\frac{1}{2} = 4\cos^3\left(\frac{\pi}{9}\right) - 3\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$, oftewel $8\cos^3\left(\frac{\pi}{9}\right) - 6\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) - 1 = 0$. Substitutie van $\alpha = 2\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$ geeft $\alpha^3 - 3\alpha - 1 = 0$. Dit is een irreducibel polynoom, dus $m_{\alpha, \mathbb{Q}}(x) = x^3 - 3x - 1$. Dus $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 3$ vanwege lemma 1.11. Omdat 3 geen macht van 2 is, zien we met gevolg 2.11 dat het niet mogelijk is om α te construeren. Omdat $\alpha = 2\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$, volgt nu ook dat $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$ niet construeerbaar is. Hieruit volgt met lemma 2.15 dat we geen hoek kunnen construeren van $\frac{\pi}{9}$. We kunnen een hoek van $\frac{\pi}{3}$ dus niet in drie gelijke delen verdelen. \square

Tot slot het derde klassieke constructieprobleem.

Propositie 2.18. *De kwadratuur van een cirkel is niet construeerbaar met passer en latje.*

Bewijs. Van een cirkel met straal 1 weten we dat deze een oppervlakte heeft van π . Als we nu een vierkant willen construeren met een oppervlakte van π , dan heeft deze zijden van $\sqrt{\pi}$. Omdat we construeerbare getallen kunnen vermenigvuldigen volgens lemma 2.5 en de wortel kunnen trekken van construeerbare getallen volgens lemma 2.12, volgt dat de vraag of we $\sqrt{\pi}$ kunnen construeren equivalent is met de vraag of we π kunnen construeren. Het voert nu te ver om te bewijzen dat π geen nulpunt is van een niet-nul polynoom van eindige graad met rationale coëfficiënten en dus een transcendent getal is. Een bewijs hiervoor is gegeven door Lindemann in 1882 [12]. Hieruit volgt dat $[\mathbb{Q}(\pi) : \mathbb{Q}]$ niet eindig is en daarmee dus ook geen macht van 2. Uit gevolg 2.11 volgt nu dat π geen construeerbaar getal is, dus $\sqrt{\pi}$ is niet construeerbaar. We kunnen concluderen dat we geen vierkant kunnen construeren met een oppervlakte van π . \square

We zien dus dat het met de theorie die we ontwikkeld hebben vrij eenvoudig is om te bewijzen dat alle drie de klassieke constructieproblemen niet construeerbaar zijn met passer en latje, zolang we aannemen dat π transcendent is.

Hoofdstuk 3

1-vouw Origami

Origami wordt ook wel Japanse vouwkunst genoemd. Het is niet helemaal duidelijk is hoe oud de traditionele Japanse vouwkunst is. Er zijn aanwijzingen dat er in de Muromachi periode (1330-1573) al vormen van origami bestonden, terwijl in het Westen het vouwen van papier mogelijk terug gaat tot de zestiende eeuw [6]. Hoewel deze traditie dus al een aantal eeuwen bestaat, is het construeren van getallen met origami pas in de vorige eeuw echt op gang gekomen. Dit is dus een relatief recente ontwikkeling. Dit hoofdstuk heet 1-vouw origami. Daarmee bedoelen we dat we één vouw tegelijk maken. Dit is de traditionele manier van vouwen. Door meerdere vouwen tegelijk uit te voeren, en de plaats van deze vouwen van elkaar af te laten hangen, krijgen we andere constructies. Dit noemen we n -vouw origami. Hier zullen we in het volgende hoofdstuk verder op ingaan. In dit hoofdstuk zullen we de termen origami en 1-vouw origami door elkaar gebruiken.

Net als bij de passer en latje constructies, zullen we in dit hoofdstuk kijken naar welke getallen construeerbaar zijn met origami. Hiervoor zullen we eerst onderzoeken welke constructies er mogelijk zijn. Vervolgens zullen we laten zien dat de construeerbare getallen een lichaam vormen, waarna we kunnen bepalen welke getallen origamiconstrueerbaar zijn. Omdat niet alle constructies altijd uitvoerbaar zijn, zullen we de uitvoerbaarheid ook onderzoeken. Daarnaast zullen we de vergelijkingen die volgen uit de constructies ook op een algemenere manier bepalen, zodat we dit in het volgende hoofdstuk kunnen uitbreiden naar 2-vouw origami. Tot slot zullen we de klassieke constructieproblemen opnieuw bekijken.

3.1 Axioma's

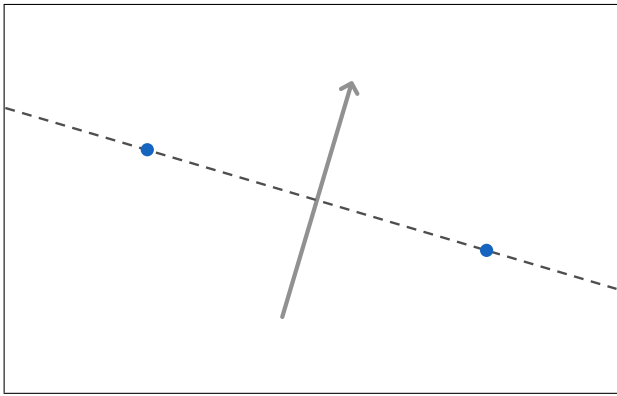
Bij de passer en latje constructies hadden we twee basisconstructies: een cirkel tekenen met een passer en een lijn tekenen met een latje. Bij origami hebben we ook zulke basisconstructies. Deze constructies worden axioma's genoemd. Elk axioma construeert een lijn, namelijk een vouw in een stuk papier. De punten die we construeren zijn de snijpunten van lijnen. We zullen de axioma's nu een voor een bekijken. Deze lijst hebben we gemaakt op basis van de beschrijving van Demain en O'Rourke [4, §19.2]. Zie figuur 3.1 voor een visuele weergave van de axioma's.

- A1) *De lijn door twee gegeven punten is construeerbaar.*
Het eerste axioma is vrij eenvoudig. Als je twee punten hebt, kun je een vouw maken die door beide punten gaat.
- A2) *De middelloodlijn van twee gegeven punten is construeerbaar.*
Dit axioma wordt gegeven door de vouw die de twee punten op elkaar legt. De vouw die hierbij ontstaat, is de middelloodlijn van de twee punten.
- A3) *De bissectrice van twee gegeven lijnen is construeerbaar.*
Door het papier zo te vouwen dat twee lijnen op elkaar terecht komen, vormt de vouw de bissectrice van de lijnen. Als de lijnen evenwijdig zijn, ontstaat er een vouw midden tussen de lijnen.
- A4) *Als een punt en een lijn gegeven zijn, dan is de loodlijn op deze lijn door het punt construeerbaar.*
Een loodlijn ontstaat door een lijn op zichzelf te vouwen. Door deze vouw te verschuiven tot deze ook door het punt gaat, ontstaat de lijn die we willen.
- A5) *Als twee punten en een lijn gegeven zijn, is de lijn door het eerste punt waardoor het tweede punt op de lijn afgebeeld wordt, construeerbaar.*
Dit axioma is ingewikkelder. We willen hier een vouw maken waardoor een van de punten op de lijn terecht komt. Door het punt vervolgens over de lijn te verschuiven totdat de vouw door het andere punt gaat, krijgen we de bedoelde lijn.
- A6) *Als twee punten en twee lijnen gegeven zijn, dan is de lijn die het eerste punt op de eerste lijn en het tweede punt op de tweede lijn afbeeldt, construeerbaar.*
Dit is het lastigste axioma. Deze lijkt op het vorige, maar hierbij moeten beide punten op de lijnen afgebeeld worden. Om dit voor elkaar te krijgen, leg je eerst een van de punten op een van de lijnen en schuif je vervolgens langs de lijn tot het andere punt op de andere lijn ligt.
- A7) *Als een punt en twee lijnen gegeven zijn, is de loodlijn op de eerste lijn die het punt op de tweede lijn afbeeldt, construeerbaar.*
Het laatste axioma wordt gegeven door de eerste lijn op zichzelf te leggen en vervolgens te schuiven tot het punt op de tweede lijn ligt.

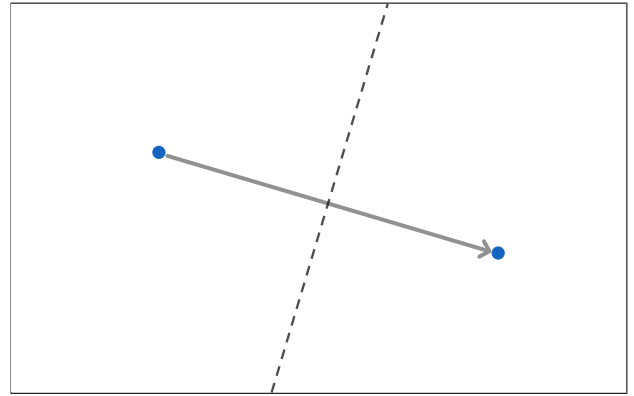
In alle gevallen geldt dat de lijn construeerbaar is, als deze bestaat. We zullen later zien dat er situaties zijn waarin geen enkele lijn voldoet aan de voorwaarden.

Merk op dat de axioma's niet altijd een unieke lijn definiëren. Neem bijvoorbeeld A3. Omdat twee snijdende lijnen twee verschillende bissectrices hebben, definieert A3 twee verschillende lijnen.

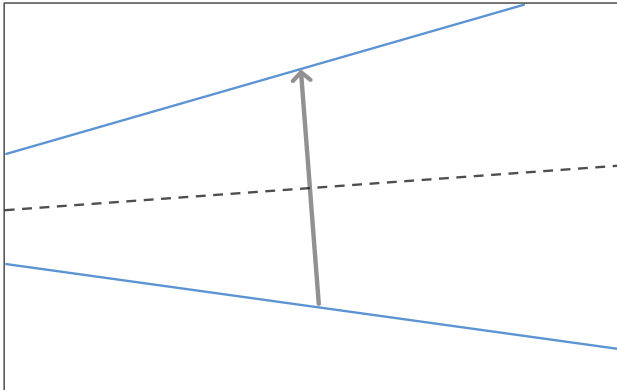
Verder is de opzet van de origamiconstructies analoog aan de constructies met passer en latje. We beginnen ook hier met twee gegeven punten waarvan we de afstand 1 noemen. De



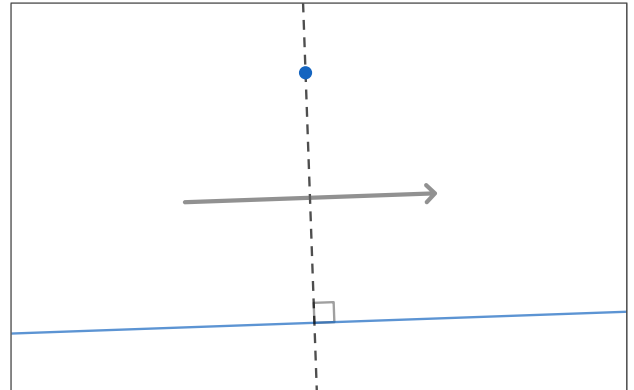
A1



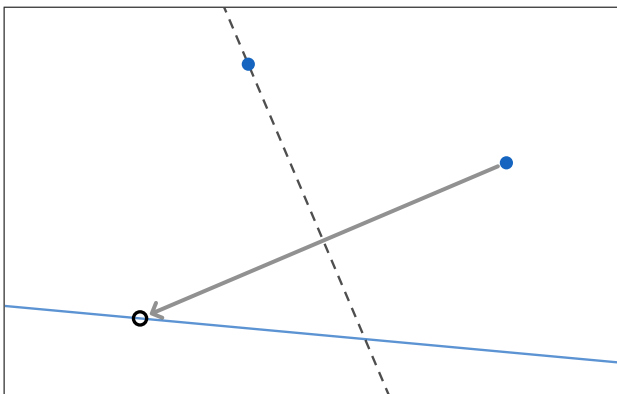
A2



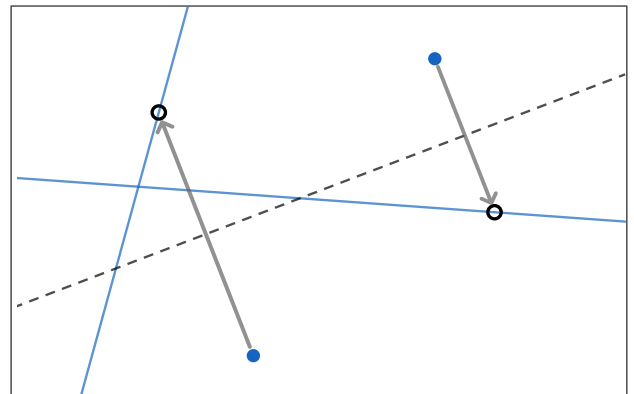
A3



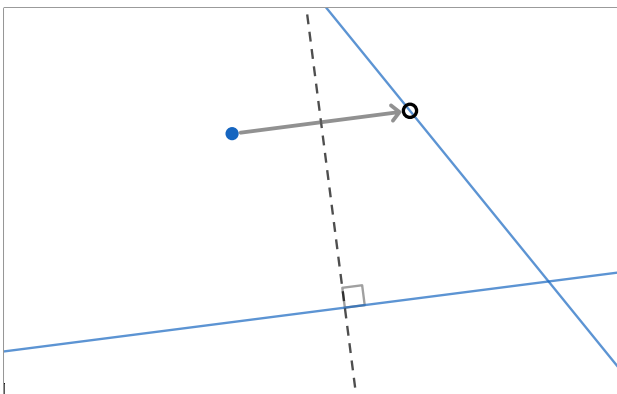
A4



A5



A6



A7

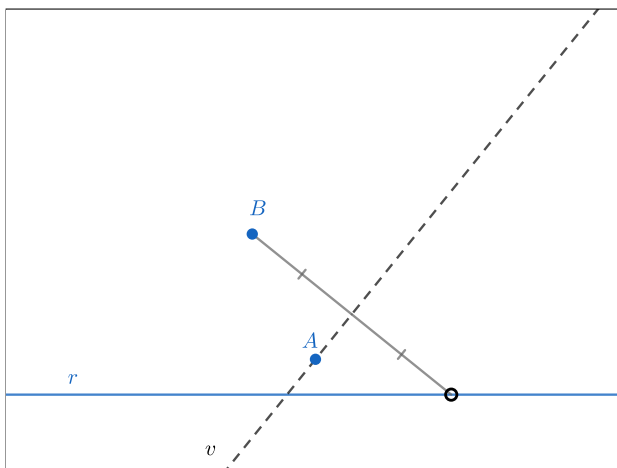


Legenda

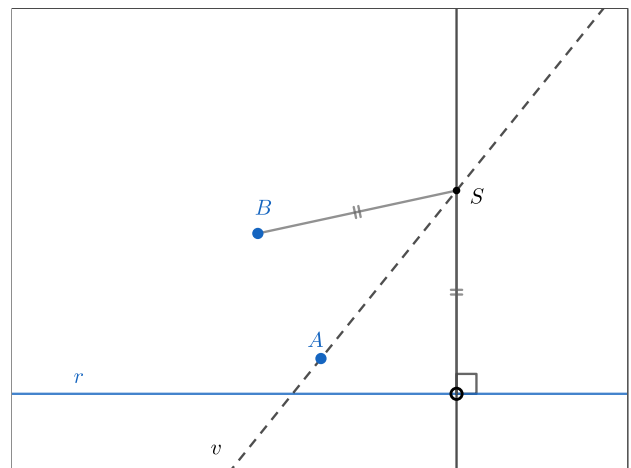
Figuur 3.1: Een visuele weergave van de axioma's.

definities van met origami construeerbare getallen en punten nemen we ook gelijk aan definities 2.1 en 2.2, met het verschil dat we nu de axioma's van origamiconstructies gebruiken in plaats van constructies met passer en latje.

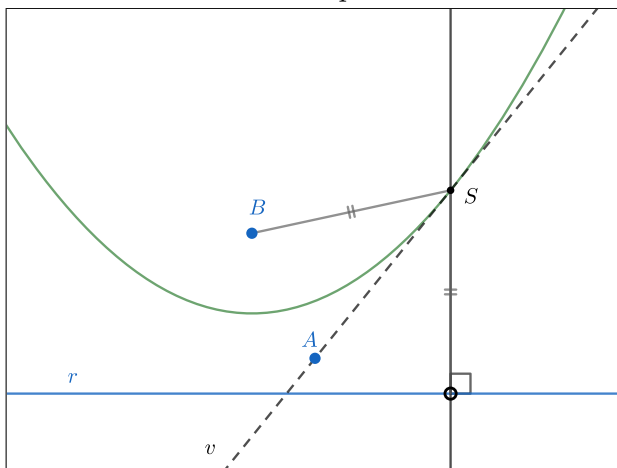
We zullen nog wat extra intuïtie geven bij het vijfde axioma. De vouwlijn v door het punt A beeldt het punt B af op de lijn r . Er geldt dus dat v de middelloodlijn is van B en zijn beeldpunt, zoals in figuur 3.2a. Als we nu een loodlijn tekenen op r door het beeldpunt, ligt het snijpunt S van de loodlijn en v op gelijke afstand van B en het beeldpunt. Hieruit volgt dat de afstand van S tot r gelijk is aan de afstand van S tot B , zie figuur 3.2b. Uit lemma 1.32 volgt dat S op de parabool met brandpunt B en richtlijn r ligt. Bovendien volgt uit lemma 1.33 dat v de raaklijn aan deze parabool is, zie figuur 3.2c. Tot slot zien we dat we vanuit punt A twee raaklijnen aan de parabool kunnen tekenen, zoals in figuur 3.2d.



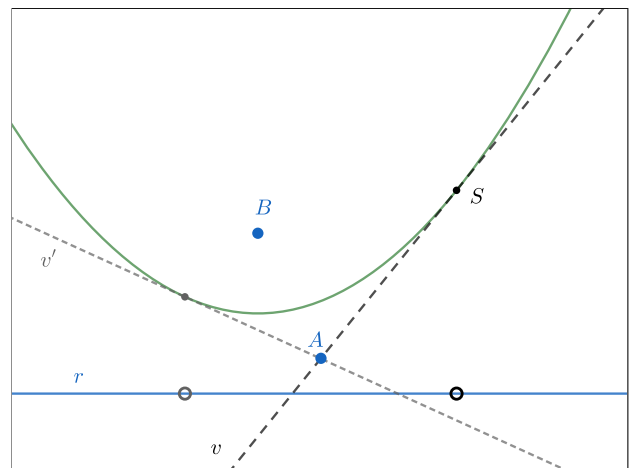
(a) Lijn v is de middelloodlijn van B en het beeldpunt.



(b) De afstand van S tot r is gelijk aan de afstand van S tot B .



(c) De parabool met richtlijn r en brandpunt B .

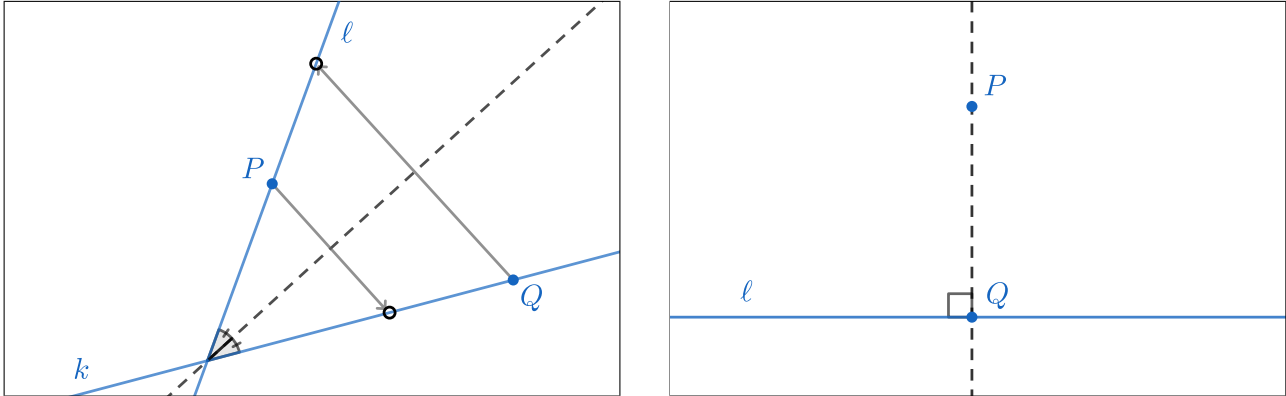


(d) Twee raaklijnen aan de parabool door het punt A .

Figuur 3.2: Extra intuïtie bij het vijfde axioma.

3.2 Volledigheid

Als we twee lijnen ℓ en k hebben, dan geeft A3 de bissectrice. Stel we hebben naast ℓ en k ook het punt P op ℓ en het punt Q op k , dan geeft A6 ook de bissectrice, door P op k en Q op ℓ af te beelden. Net zo geeft A4 de loodlijn op een gegeven lijn ℓ door een gegeven punt P , terwijl A5 met een extra punt Q op ℓ hetzelfde doet door Q op ℓ af te beelden en de vouwlijn door P te laten gaan. Zie figuur 3.3.



(a) A3 en A6 geven dezelfde vouwlijn.

(b) A4 en A5 geven dezelfde vouwlijn.

Figuur 3.3: Afhankelijkheid van de axioma's.

We zien dus dat de axioma's niet onafhankelijk van elkaar zijn. Deze axioma's zijn dus strikt gezien geen echte axioma's, maar omdat deze al lang zo genoemd worden, is ervoor gekozen dit zo te laten. Nu is de vraag, waarom zouden we deze lijst van axioma's dan toch willen gebruiken? We zullen zien dat de lijst van axioma's op een bepaalde manier volledig is. Hierbij zullen we de aanpak van Alperin en Lang [1] volgen. Omdat zij geen berekeningen en bewijzen geven, zullen we deze zelf uitwerken. Hiervoor hebben we eerst een aantal definities nodig. Analoog aan definitie 2.2 hebben we

Definitie 3.1. Een **construeerbaar punt** heeft construeerbare coördinaten. We noteren een punt als (p, q) , dus met kleine letters, waarbij p en q de construeerbare coördinaten zijn.

Bij de constructies met passer en latje zagen we in paragraaf 2.3 dat een construeerbare lijn altijd van de vorm $ax + by + c = 0$ is, met a , b en c construeerbaar. Voor de origamiconstructies gebruiken we de volgende definitie:

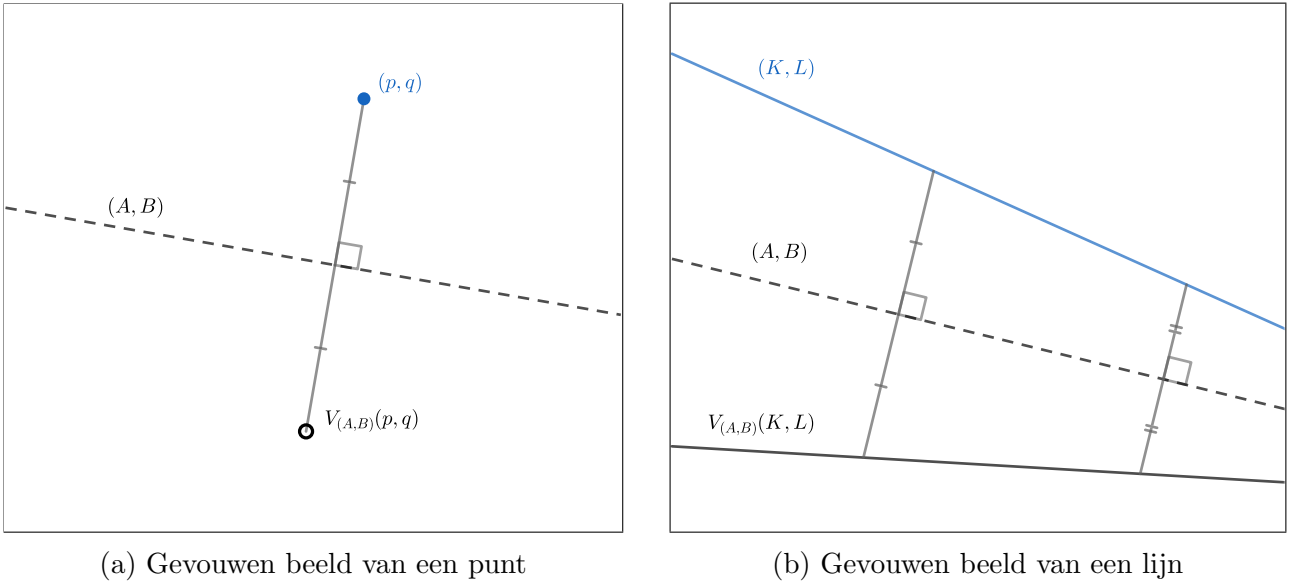
Definitie 3.2. Een **construeerbare lijn** is van de vorm $Ax + By + 1 = 0$, waarbij de coëfficiënten A en B construeerbaar zijn. We noteren een lijn als (A, B) , dus met hoofdletters.

Merk op dat deze definitie niet de lijnen door de oorsprong definieert, maar door translatie van de hele constructie kunnen we altijd de lijn zo kiezen dat deze niet door de oorsprong gaat. We maken deze keuze, zodat we een unieke representatie hebben voor elke lijn, zodat we hier eenvoudiger mee kunnen rekenen.

Naast de definitie van construeerbare punten en lijnen, moeten we ook weten hoe we een vouwlijn construeren uit gegeven punten en lijnen. We definiëren hiervoor eerst het gevouwen beeld van punten en lijnen.

Definitie 3.3. Als een punt (p, q) gegeven is, ontstaat het **gevouwen beeld van het punt** door (p, q) te spiegelen in de vouwlijn (A, B) . We noteren dit punt met $V_{(A,B)}(p, q)$. Zie figuur 3.4a.

Als een lijn (K, L) gegeven is, ontstaat het **gevouwen beeld van de lijn** door (K, L) te spiegelen in de vouwlijn (A, B) . We noteren deze lijn met $V_{(A,B)}(K, L)$. Zie figuur 3.4b.



Figuur 3.4: Gevouwen beelden.

Lemma 3.4. *Het gevouwen beeld van het punt (p, q) wordt gegeven door*

$$V_{(A,B)}(p, q) = \left(-\frac{(A^2 - B^2)p + 2ABq + 2A}{A^2 + B^2}, \frac{(A^2 - B^2)q - 2ABp - 2B}{A^2 + B^2} \right).$$

Het gevouwen beeld van de lijn (K, L) wordt gegeven door

$$V_{(A,B)}(K, L) = \left(-\frac{(A^2 - B^2)K + 2ABL}{A^2 - 2AK - 2BL + B^2}, \frac{(A^2 - B^2)L - 2ABK}{A^2 - 2AK - 2BL + B^2} \right).^1$$

Bewijs. Voor het gevouwen beeld van een punt, kijken we eerst naar de normaalvector met lengte 1 van de lijn (A, B) . Deze wordt gegeven door $\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \right)$. De afstand mét teken in de richting van de normaalvector tussen het punt (p, q) en de lijn (A, B) wordt met lemma 1.30 gegeven door $d = \frac{Ap+Bq+1}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Omdat het gevouwen beeld niets anders is dan het spiegelbeeld van het punt in de lijn, wordt $V_{(A,B)}(p, q)$ gegeven door twee keer de afstand in de richting van de normaalvector van het punt af te halen, namelijk

$$\begin{aligned} V_{(A,B)}(p, q) &= \left(p - 2d \cdot \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, q - 2d \cdot \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \right) \\ &= \left(p - \frac{2(Ap+Bq+1)A}{A^2+B^2}, q - \frac{2(Ap+Bq+1)B}{A^2+B^2} \right) \\ &= \left(\frac{(A^2+B^2)p - 2A^2p - 2ABq - 2A}{A^2+B^2}, \frac{(A^2+B^2)q - 2ABp - 2B^2q - 2B}{A^2+B^2} \right) \\ &= \left(-\frac{(A^2-B^2)p + 2ABq + 2A}{A^2+B^2}, \frac{(A^2-B^2)q - 2ABp - 2B}{A^2+B^2} \right). \end{aligned}$$

Voor het gevouwen beeld van een lijn gaan we er in eerste instantie vanuit dat de lijnen (A, B) en (K, L) niet evenwijdig zijn en dat de lijn (K, L) de x -as snijdt. We noemen het

¹Deze vergelijking komt niet overeen met de vergelijking van Alperin en Lang [1]. Uit het bewijs van lemma 3.4 volgt dat de vergelijking die zij geven in de eerste coëfficiënt een minteken mist. Daarnaast is er iets misgegaan met hoofdletters en kleine letters.

snijpunt van de lijnen S en het snijpunt van de lijn (K, L) met de x -as T . Uit lemma 1.31 volgt

$$S = \left(\frac{L - B}{BK - AL}, \frac{A - K}{BK - AL} \right), \quad T = \left(-\frac{1}{K}, 0 \right).$$

Het is duidelijk dat het spiegelbeeld van S in (A, B) gelijk is aan S . Verder geldt voor het spiegelbeeld van T in (A, B)

$$\begin{aligned} V_{(A,B)}(T) &= V_{(A,B)} \left(-\frac{1}{K}, 0 \right) \\ &= \left(-\frac{(A^2 - B^2) \cdot -\frac{1}{K} + 2AB \cdot 0 + 2A}{A^2 + B^2}, \frac{(A^2 + B^2) \cdot 0 - 2AB \cdot -\frac{1}{K} - 2B}{A^2 + B^2} \right) \\ &= \left(\frac{A^2 - B^2 - 2AK}{(A^2 + B^2)K}, \frac{2AB - 2BK}{(A^2 + B^2)K} \right). \end{aligned}$$

Omdat het gevouwen beeld van (K, L) gelijk is aan de lijn door de spiegelbeelden van S en T in de lijn (A, B) , is de lijn $V_{(A,B)}(K, L)$ gelijk aan de lijn door het punt S en het punt $V_{(A,B)} \left(-\frac{1}{K}, 0 \right)$. We weten dat de lijn door de punten (a, b) en (c, d) gegeven wordt door

$$y - b = \frac{d - b}{c - a}(x - a). \quad (3.1)$$

Substitutie van S voor (a, b) en $V_{(A,B)}(T)$ voor (c, d) geeft

$$\begin{aligned} \frac{d - b}{c - a} &= \frac{\frac{2AB - 2BK}{(A^2 + B^2)K} - \frac{A - K}{BK - AL}}{\frac{A^2 - B^2 - 2AK}{(A^2 + B^2)K} - \frac{L - B}{BK - AL}} \\ &= \frac{(2AB - 2BK)(BK - AL) - (A - K)(A^2 + B^2)K}{(A^2 - B^2 - 2AK)(BK - AL) - (L - B)(A^2 + B^2)K} \\ &= \frac{(A - K)(2B(BK - AL) - (A^2 + B^2)K)}{(A^2 - AK)(BK - AL) + AB^2L - ABK^2 - B^2KL + A^2BK} \\ &= \frac{-(A - K)(A^2K + 2ABL - B^2K)}{(A - K)(A(BK - AL) + B^2L + ABK)} \\ &= \frac{A^2K + 2ABL - B^2K}{A^2L - 2ABK - B^2L}. \end{aligned}$$

Verder invullen van (3.1) geeft

$$y - \frac{A - K}{BK - AL} = \frac{A^2K + 2ABL - B^2K}{A^2L - 2ABK - B^2L} \left(x - \frac{L - B}{BK - AL} \right).$$

Door nu beide kanten te vermenigvuldigen met $(BK - AL)(A^2L - 2ABK - B^2L)$ en vervolgens in de vorm $ax + by + 1 = 0$ te zetten, krijgen we

$$\begin{aligned} &-\frac{(BK - AL)(A^2K + 2ABL - B^2K)}{(A^2K + 2ABL - B^2K)(L - B) - (A^2L - 2ABK - B^2L)(A - K)}x + \\ &\frac{(BK - AL)(A^2L - 2ABK - B^2L)}{(A^2K + 2ABL - B^2K)(L - B) - (A^2L - 2ABK - B^2L)(A - K)}y + 1 = 0 \end{aligned}$$

De noemers kunnen we herschrijven naar $(BK - AL)(A^2 - 2AK - 2BL + B^2)$, dus we krijgen

$$-\frac{A^2L - 2ABK - B^2L}{A^2 - 2AK - 2BL + B^2}x + \frac{A^2L - 2ABK - B^2L}{A^2 - 2AK - 2BL + B^2}y + 1 = 0.$$

Tot slot kunnen we de tellers nog herschrijven, zodat we de gewenste vorm krijgen:

$$-\frac{(A^2 - B^2)L - 2ABK}{A^2 - 2AK - 2BL + B^2}x + \frac{(A^2 - B^2)L - 2ABK}{A^2 - 2AK - 2BL + B^2}y + 1 = 0. \quad (3.2)$$

□

Merk op dat het gevouwen beeld van een punt altijd goed gedefinieerd is, omdat voor alle lijnen geldt $(A, B) \neq (0, 0)$, dus $A^2 + B^2 \neq 0$. Daarentegen is het gevouwen beeld van een lijn alleen goed gedefinieerd als (K, L) geen oplossing is van $A^2 - 2AK - 2BL + B^2 = 0$. Herschrijven van deze vergelijking geeft de reden voor dit probleem. Er geldt namelijk

$$A^2 - 2AK - 2BL + B^2 = -\frac{2A}{A^2 + B^2}K - \frac{2B}{A^2 + B^2}L + 1,$$

dus als $A^2 - 2AK - 2BL + B^2 = 0$, dan ligt het punt $\left(-\frac{2A}{A^2 + B^2}, -\frac{2B}{A^2 + B^2}\right) = V_{(A,B)}(0, 0)$ op de lijn (K, L) . We zien dus dat het gevouwen beeld van de lijn (K, L) in dit geval door de oorsprong gaat, wat niet mogelijk is met onze definitie van een lijn. Herschrijven van de vergelijking 3.2 geeft

$$((A^2 - B^2)L - 2ABK)x + ((A^2 - B^2)L - 2ABK)y + A^2 - 2AK - 2BL + B^2 = 0.$$

We zien dus dat we op deze manier in alle gevallen een vergelijking voor de lijn krijgen, maar dat deze niet altijd in de vorm $ax + by + 1 = 0$ te zetten is. Een translatie van de coördinaten lost dit probleem op.

Daarnaast hebben we in het bewijs voor het gevouwen beeld van een lijn gebruikt dat de lijn (K, L) niet evenwijdig is aan de vouwlijn en de x -as snijdt. Het blijkt dat de gevonden vergelijking voor het gevouwen beeld ook werkt voor lijnen evenwijdig aan de vouwlijn en lijnen die de x -as niet snijden, zolang de lijn niet voldoet aan $A^2 - 2AK - 2BL + B^2 = 0$.

Nu we weten wat de gevouwen beelden precies zijn en hoe we hiermee kunnen rekenen, kunnen we kijken naar hoe we dit kunnen gebruiken voor het definiëren van de axioma's.

Definitie 3.5. We definiëren drie soorten uitlijningen:

- **punt-punt uitlijning:** Als (p, q) en (r, s) gegeven zijn, voldoet vouwlijn (A, B) aan de vergelijking $V_{(A,B)}(p, q) = (r, s)$.
- **lijn-lijn uitlijning:** Als (K, L) en (M, N) gegeven zijn, voldoet vouwlijn (A, B) aan de vergelijking $V_{(A,B)}(K, L) = (M, N)$.
- **punt-lijn uitlijning:** Als het punt (p, q) en de lijn (K, L) gegeven zijn, voldoet vouwlijn (A, B) aan de vergelijking $K(V_{(A,B)}(p, q))_1 + L(V_{(A,B)}(p, q))_2 + 1 = 0$.

Hierbij bedoelen we met $(V_{(A,B)}(p, q))_i$ de i -de coördinaat van het punt. Merk op dat de punt-lijn uitlijning gelijk is aan een lijn-punt uitlijning. We zullen deze uitlijning ook wel noteren met $V_{(A,B)}(p, q) \in (K, L)$.

We hebben nu eindelijk genoeg gedefinieerd om te kunnen zeggen wat een 1-vouw axioma precies is. Namelijk:

Definitie 3.6. [1, def. 8] Een **1-vouw axioma** is een minimale verzameling van uitlijningen die eindig veel vouwlijnen definiëren op een eindig stuk papier.

Hierbij benadrukken we dat een axioma eindig veel vouwlijnen definieert. We weten bijvoorbeeld dat twee snijdende lijnen twee verschillende bissectrices hebben, waardoor A3 twee lijnen definieert. We willen voorkomen dat een axioma oneindig veel lijnen zou definiëren, zoals de lijn door een gegeven punt. Daarnaast willen we met eindig papier werken. In theorie zou er bijvoorbeeld een axioma kunnen zijn die een evenwijdige lijn definieert, maar hiervoor is een oneindig groot papier nodig om er zeker van te zijn dat de lijnen elkaar niet snijden.

Het volgende lemma geeft aan waarom de zeven axioma's een goede keuze zijn om mee te werken.

Lemma 3.7. *De axioma's A1 tot en met A7 vormen een volledige lijst van 1-vouw axioma's.*

Bewijs. Omdat we lijnen definiëren als (A, B) , zien we dat een lijn twee vrijheidsgraden heeft. Om een 1-vouw axioma te definiëren, dus eindig veel vouwlijnen, hebben we daarom twee onafhankelijke vergelijkingen nodig.

De volgende verschillende uitlijningen zijn mogelijk

- $P_1 - P_1$
- $L_1 - L_1$
- $P_1 - L_1$
- $P_1 - P_2$
- $L_1 - L_2$

waarbij P_1 en P_2 verschillende punten zijn en L_1 en L_2 verschillende lijnen. Stel we hebben $P_1 = (p, q)$ en $P_2 = (r, s)$. Dan volgen uit $V_{(A,B)}(P_1) = P_2$ de vergelijkingen

$$\begin{aligned} r &= -\frac{(A^2 - B^2)p + 2ABq + 2A}{A^2 + B^2} \\ s &= \frac{(A^2 - B^2)q - 2ABp - 2B}{A^2 + B^2}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

die onafhankelijk zijn. De uitlijning $P_1 - P_2$ geeft dus twee onafhankelijke vergelijkingen en definieert daarmee een 1-vouw axioma. Op dezelfde manier zien we dat $L_1 - L_2$ twee onafhankelijke vergelijkingen geeft en daarmee een 1-vouw axioma definieert. We zien dat $P_1 - P_2$ equivalent is met A2 en dat $L_1 - L_2$ equivalent is met A3.

Voor $P_1 - P_1$ geldt dat $V_{(A,B)}(p, q) = (p, q)$ de volgende vergelijkingen geeft:

$$\begin{aligned} p &= -\frac{(A^2 - B^2)p + 2ABq + 2A}{A^2 + B^2} \\ q &= \frac{(A^2 - B^2)q - 2ABp - 2B}{A^2 + B^2}. \end{aligned}$$

Herschrijven geeft respectievelijk

$$\begin{aligned} 2A(Ap + Bq + 1) &= 0 \\ 2B(Bq + Ap + 1) &= 0, \end{aligned} \tag{3.4}$$

die duidelijk afhankelijk zijn. Op een zelfde manier volgt dat $L_1 - L_1$ twee afhankelijke vergelijkingen geeft. Daarnaast geeft de uitlijning $P_1 - L_1$ per definitie één vergelijking, dus deze drie uitlijningen kunnen geen 1-vouw axioma definiëren. Door steeds twee van de drie uitlijningen te combineren, krijgen we wel genoeg vergelijkingen om een 1-vouw axioma te kunnen definiëren. In tabel 3.1 zien we hoe de combinaties van uitlijningen axioma's geven. De combinatie van $L_1 - L_1$ met $L_2 - L_2$ geeft geen axioma. Dit komt door het volgende. Als de lijnen niet evenwijdig zijn, is het onmogelijk om beide lijnen op zichzelf uit te lijnen. Zijn de lijnen wel evenwijdig, dan zijn er oneindig veel mogelijke uitlijningen. In beide gevallen wordt er dus geen axioma gedefinieerd. Door de informatie uit tabel 3.1 te combineren met wat we al wisten over de uitlijningen $P_1 - P_2$ en $L_1 - L_2$, volgt uit tabel 3.2 dat de axioma's A1 tot en met A7 alle mogelijke 1-vouw axioma's zijn die gedefinieerd worden door uitlijningen. \square

	$P_2 - P_2$	$L_2 - L_2$	$P_2 - L_2$
$P_1 - P_1$	A1	A4	A5
$L_1 - L_1$	A4	-	A7
$P_1 - L_1$	A5	A7	A6

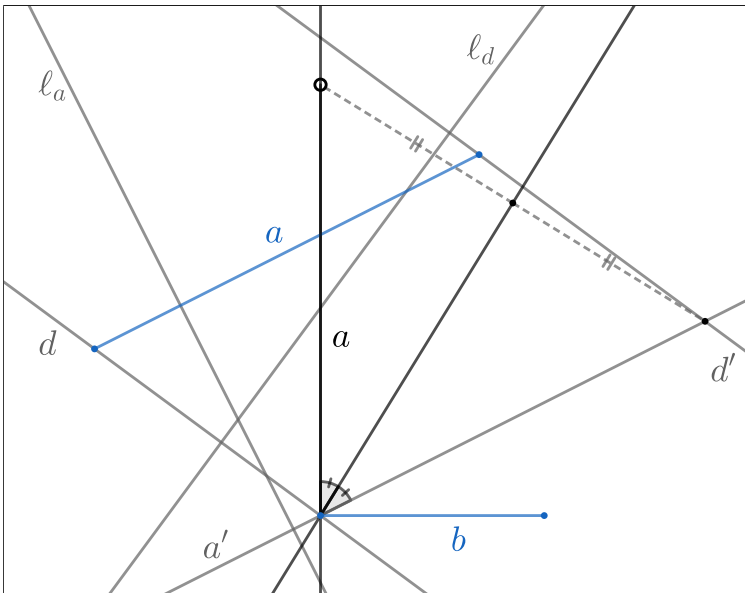
Tabel 3.1: Combinaties van uitlijningen
geven axioma's.

Axioma	Uitlijningen	
A1	$P_1 - P_1$	$P_2 - P_2$
A2	$P_1 - P_2$	
A3	$L_1 - L_2$	
A4	$P_1 - P_1$	$L_2 - L_2$
A5	$P_1 - P_1$	$P_2 - P_2$
A6	$P_1 - L_1$	$P_2 - L_2$
A7	$L_1 - L_1$	$P_2 - L_2$

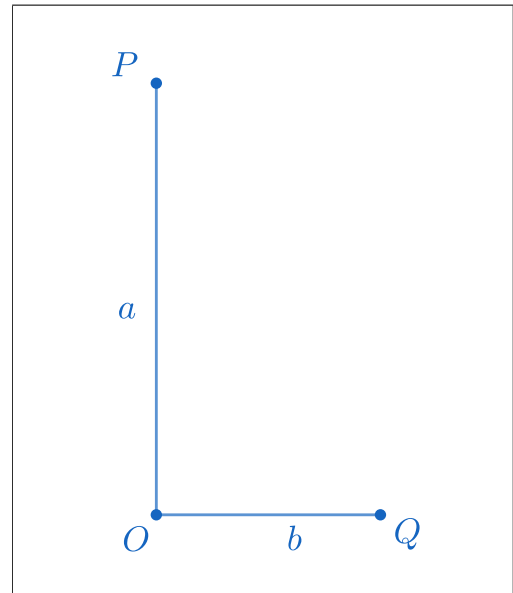
Tabel 3.2: Uitlijningen per axioma.

3.3 Lichaam

Net als bij de passer en latje constructies, willen we ook voor origamiconstructies onderzoeken of de verzameling van construeerbare getallen een lichaam is. Ook hier liggen de lijnstukken die construeerbare getallen representeren op willekeurige plekken in het reële vlak. We zullen dus opnieuw een standaard uitgangspunt moeten construeren. We beginnen opnieuw met twee lijnstukken van respectievelijk lengte a en b , waarbij a en b origamiconstrueerbaar zijn. De constructie van het standaard uitgangspunt is identiek aan de constructie van het standaard uitgangspunt voor passer en latje in figuur 2.2, op de laatste stap in figuur 2.2d na. We kunnen met origami namelijk geen cirkel tekenen. In plaats van de cirkel maken we met A3 een bissectrice van de lijn a' en de lijn loodrecht op lijnstuk b . Het snijpunt van a' en d' geeft een beeldpunt op de loodlijn op afstand a van lijnstuk b , zie figuur 3.5. We hoeven nu alleen nog aan te tonen dat beeldpunten construeerbare punten zijn.



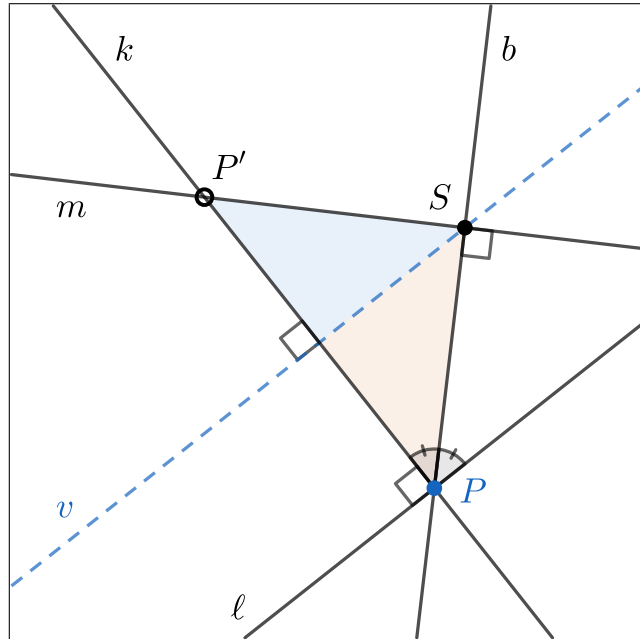
Figuur 3.5: Laatste constructiestap voor het
standaard uitgangspunt met origami.



Figuur 3.6: Het standaard
uitgangspunt voor de
origamiconstructies in deze
paragraaf.

Lemma 3.8. *Een beeldpunt is een origamiconstrueerbaar punt.*

Bewijs. Gegeven een punt P en een vouwlijn v , kunnen we twee loodlijnen construeren. Met het vierde axioma maken we een loodlijn k op v door P en vervolgens een loodlijn ℓ op k door P . Vervolgens gebruiken we het derde axioma om een bissectrice b van k en ℓ te maken. Het snijpunt van b en v noemen we S . Tot slot maken we met A4 een loodlijn m op b door S . De lijn m snijdt de lijn k in het punt P' , zie figuur 3.7. Vanwege congruentie van de gekleurde driehoeken in figuur 3.7 geldt dat de afstand van P tot v gelijk is aan de afstand van P' tot v . Hieruit volgt dat P' het beeldpunt is van P onder v . \square



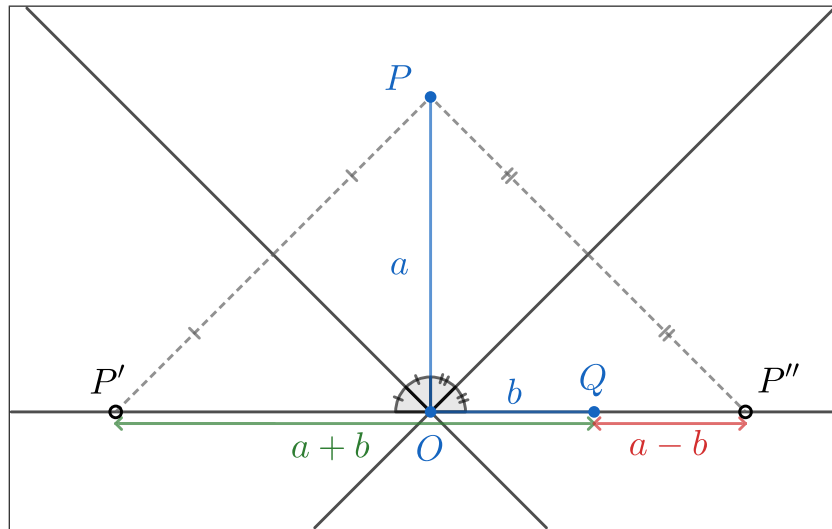
Figuur 3.7: Het construeren van een beeldpunt.

We zien dus dat we van elke twee lijnstukken een constructie kunnen maken waarbij we lijnstukken van dezelfde lengte krijgen die een eindpunt delen en loodrecht op elkaar staan. We zullen het gezamenlijke eindpunt O noemen, het eindpunt van a noemen we P en het eindpunt van b noemen we Q , zie figuur 3.6.

Nu we een goed uitgangspunt hebben, kunnen we onderzoeken of de verzameling van origamiconstrueerbare getallen een lichaam vormt.

Lemma 3.9. *De verzameling van origamiconstrueerbare getallen is gesloten onder optellen en aftrekken.*

Bewijs. We beginnen vanuit het standaard uitgangspunt met het verlengen van lijnstuk b door het eerste axioma toe te passen op O en Q . Vervolgens construeren we met het derde axioma beide bissectrices van de lijnstuk a en het verlengde van lijnstuk b . Dit geeft beeldpunten P' en P'' op het verlengde van lijnstuk b . Uit lemma 3.8 volgt dat dit construeerbare punten zijn. Als we het linkse beeldpunt P' noemen en het rechtse beeldpunt P'' , dan geldt dat de afstand tussen P' en Q gelijk is aan $a + b$ en de afstand tussen Q en P'' gelijk is aan $a - b$, zie figuur 3.8. De verzameling van origamiconstrueerbare getallen is dus gesloten onder optellen en aftrekken. \square



Figuur 3.8: De constructie van $a + b$ en $a - b$.

Lemma 3.10. *De verzameling van origamiconstrueerbare getallen is gesloten onder vermenigvuldigen en delen.*

Bewijs. Dit bewijs is vrijwel identiek aan dat van lemma 2.5. Voor de loodlijnen gebruiken we nu niet lemma 2.3, maar het vierde axioma. \square

Uit deze lemma's volgt nu

Stelling 3.11. *De verzameling van origamiconstrueerbare getallen vormt een deellichaam van \mathbb{R} .*

Bewijs. De verzameling van origamiconstrueerbare getallen bevat 0 en 1, namelijk de afstand van een punt tot zichzelf en de initiële afstand 1. Daarnaast volgt uit lemma's 3.9 en 3.10 dat de verzameling gesloten is onder optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Uit de definitie van een deellichaam (def. 1.4) volgt nu dat de verzameling origamiconstrueerbare getallen een deellichaam van \mathbb{R} is. \square

We zullen het lichaam van origamiconstrueerbare getallen in het vervolg noteren met \mathcal{O} .

3.4 Vergelijkingen

We willen, net als voor de constructies met passer en latje, onderzoeken welke getallen origamiconstrueerbaar zijn. Hiervoor zullen we eerst de vergelijkingen van de lijnen op moeten stellen die gedefinieerd worden door de zeven axioma's. We zullen later, in lemma 3.12, zien dat we vanwege translaties en transformaties zonder verlies van algemeenheid aan kunnen nemen dat $(0, 1)$ een van de punten is en dat $y + 1 = 0$ een van de lijnen is. We nemen aan dat F een deellichaam van \mathbb{R} is en nemen $K, L, p, q \in F$. We zullen ons nog niet zo druk maken over speciale gevallen waarin de lijnen niet gedefinieerd zijn of een noemer gelijk is aan nul. Dit zullen we verder bespreken in paragraaf 3.6. Verder zullen we de vouwlijnen aanduiden met $(A, B)_i$ waarbij i het nummer van het axioma is. Nadat we alle vergelijkingen gevonden hebben, zullen we deze overzichtelijk weergeven in paragraaf 3.4.6.

3.4.1 De vergelijkingen van A1, A2 en A4

De vergelijkingen van de vouwlijnen gedefinieerd door de axioma's A1, A2 en A4 zijn vrij eenvoudig.

Voor het eerste axioma moeten we de lijn bepalen door de punten $(0, 1)$ en (p, q) . Het is duidelijk dat deze lijn gegeven wordt door

$$y - 1 = \frac{q - 1}{p - 0}(x - 0),$$

wat we kunnen herschrijven naar

$$\frac{q - 1}{p}x - y + 1 = 0,$$

waaruit volgt dat $(A, B)_1 = \left(\frac{q-1}{p}, -1\right)$.

Het tweede axioma geeft de middelloodlijn van de punten $(0, 1)$ en (p, q) . De helling van de lijn door deze twee punten is gegeven door $\frac{q-1}{p-0}$. Omdat de middelloodlijn hier loodrecht op staat, volgt dat de helling van de lijn $(A, B)_2$ gelijk is aan $-\frac{p}{q-1}$. Daarnaast gaat de middelloodlijn precies midden tussen de twee punten door, dus gaat deze door het punt $\left(\frac{0+p}{2}, \frac{1+q}{2}\right)$. Hieruit volgt

$$y - \frac{1+q}{2} = -\frac{p}{q-1}\left(x - \frac{p}{2}\right).$$

Als we dit herschrijven krijgen we

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{p}{q-1}x + y - \frac{(1+q)(q-1) + p^2}{2(q-1)} \\ &= \frac{2p}{1-p^2-q^2}x + \frac{2(q-1)}{1-p^2-q^2}y + 1 = 0. \end{aligned}$$

We zien dus dat $(A, B)_2 = \left(\frac{2p}{1-p^2-q^2}, \frac{2(q-1)}{1-p^2-q^2}\right)$.

Voor het vierde axioma willen we de vergelijking bepalen van de loodlijn op een gegeven lijn door een gegeven punt. Als we hier weer het punt $(0, 1)$ en de lijn $y + 1 = 0$ nemen, volgt dat de vouwlijn door het punt $(0, 0)$ gaat, wat niet mogelijk is met onze definitie van de lijn. We zullen daarom de vergelijking opstellen van de loodlijn op de lijn $Kx + Ly + 1 = 0$ door het punt $(0, 1)$. Uit $Kx + Ly + 1 = 0$ volgt direct dat de loodlijn van de vorm $Lx - Ky + c = 0$ is, waarbij we c nog moeten bepalen. Omdat de lijn door het punt $(0, 1)$ moet gaan, volgt dat $c = K$. Er geldt dus $(A, B)_4 = \left(\frac{L}{K}, -1\right)$.

3.4.2 De vergelijking van A3

De lijn $(A, B)_3$ is de bissectrice van de lijnen $y + 1 = 0$ en $Kx + Ly + 1 = 0$. Omdat snijdende lijnen altijd twee bissectrices hebben, verwachten we twee oplossingen. Als (r, s) een punt op de lijn $(A, B)_3$ is, dan geldt dat de afstand van (r, s) tot de lijn $y + 1 = 0$ gelijk is aan de afstand van (r, s) tot de lijn $Kx + Ly + 1 = 0$. Met lemma 1.30 volgt nu

$$\left| \frac{s + 1}{\sqrt{0^2 + 1^2}} \right| = \left| \frac{Kr + Ls + 1}{\sqrt{K^2 + L^2}} \right|.$$

Omschrijven geeft $(s + 1)\sqrt{K^2 + L^2} = \pm(Kr + Ls + 1)$ en hieruit volgt

$$\frac{\pm K}{\pm 1 - \sqrt{K^2 + L^2}}r + \frac{\pm L - \sqrt{K^2 + L^2}}{\pm 1 - \sqrt{K^2 + L^2}}s + 1 = 0. \quad (3.5)$$

Omdat elk punt van de lijn $(A, B)_3$ voldoet aan (3.5), krijgen we

$$(A, B)_3 = \left(\frac{\pm K}{\pm 1 - \sqrt{K^2 + L^2}}, \frac{\pm L - \sqrt{K^2 + L^2}}{\pm 1 - \sqrt{K^2 + L^2}} \right).$$

3.4.3 De vergelijking van A5

Zoals we in paragraaf 3.1 gezien hebben, is de vouwlijn die geconstrueerd wordt door A5 de raaklijn aan de parabool met richtlijn $y + 1 = 0$ en brandpunt $(0, 1)$. Omdat we over het algemeen twee van zulke raaklijnen kunnen tekenen, verwachten we twee oplossingen voor de vergelijking van $(A, B)_5$. De lijn $(A, B)_5$ is de middelloodlijn van het punt $(0, 1)$ en een punt op de lijn $y + 1 = 0$. Dit punt heeft de vorm $(t, -1)$ voor een $t \in \mathbb{R}$ die we nog moeten bepalen. Omdat A2 de middelloodlijn geeft, kunnen we de vergelijking voor $(A, B)_2$ gebruiken. Hieruit volgt dat de vouwlijn gegeven wordt door de lijn $\left(\frac{2t}{1-t^2-(-1)^2}, \frac{2(-1-1)}{1-t^2-(-1)^2} \right) = \left(-\frac{2}{t}, \frac{4}{t^2} \right)$, oftewel $-\frac{2}{t}x + \frac{4}{t^2}y + 1 = 0$. Dit kunnen we herschrijven naar $-2tx + 4y + t^2 = 0$. Omdat de lijn door het punt (p, q) moet gaan, krijgen we de vergelijking $-2tp + 4q + t^2 = 0$, die kwadratisch is in t . Oplossen geeft $t = p \pm \sqrt{p^2 - 4q}$.

We zien dus dat $(A, B)_5 = \left(-\frac{2}{t}, \frac{4}{t^2} \right)$ met $t = p \pm \sqrt{p^2 - 4q}$.

3.4.4 De vergelijking van A6

Het eerste deel van A6 is gelijk aan dat van A5, namelijk, de vouwlijn is de middelloodlijn van $(0, 1)$ en een punt op de lijn $y + 1 = 0$. Deze lijn wordt gegeven door $-2tx + 4y + t^2 = 0$, waarbij we $t \in \mathbb{R}$ nog moeten bepalen. Om t te bepalen, zullen we eerst kijken naar alle mogelijke punten waar het punt (p, q) terecht komt als we vouwen met de lijn $-2tx + 4y + t^2 = 0$ en deze kromme vervolgens snijden met de lijn $Kx + Ly + 1 = 0$. De bepaling van de kromme is gebaseerd op het bewijs van stelling 4.3.6 van *Origami-Constructible Numbers* [10].

Herschrijven van de lijn $-2tx + 4y + t^2 = 0$ geeft

$$y = \frac{t}{2} \left(x - \frac{t}{2} \right). \quad (3.6)$$

We weten dat de vouwlijn de middelloodlijn moet zijn van het punt (p, q) en het beeldpunt (r, s) . De vouwlijn gaat dus door het middelpunt $\left(\frac{p+r}{2}, \frac{q+s}{2} \right)$ en heeft helling $-\frac{p-r}{q-s}$. Hieruit volgt $\frac{t}{2} = -\frac{p-r}{q-s}$. Substitutie van de helling en het middelpunt in (3.6) geeft

$$\frac{q+s}{2} = -\frac{p-r}{q-s} \left(\frac{p+r}{2} + \frac{p-r}{q-s} \right).$$

Beide kanten vermenigvuldigen met $2(q-s)^2$ geeft

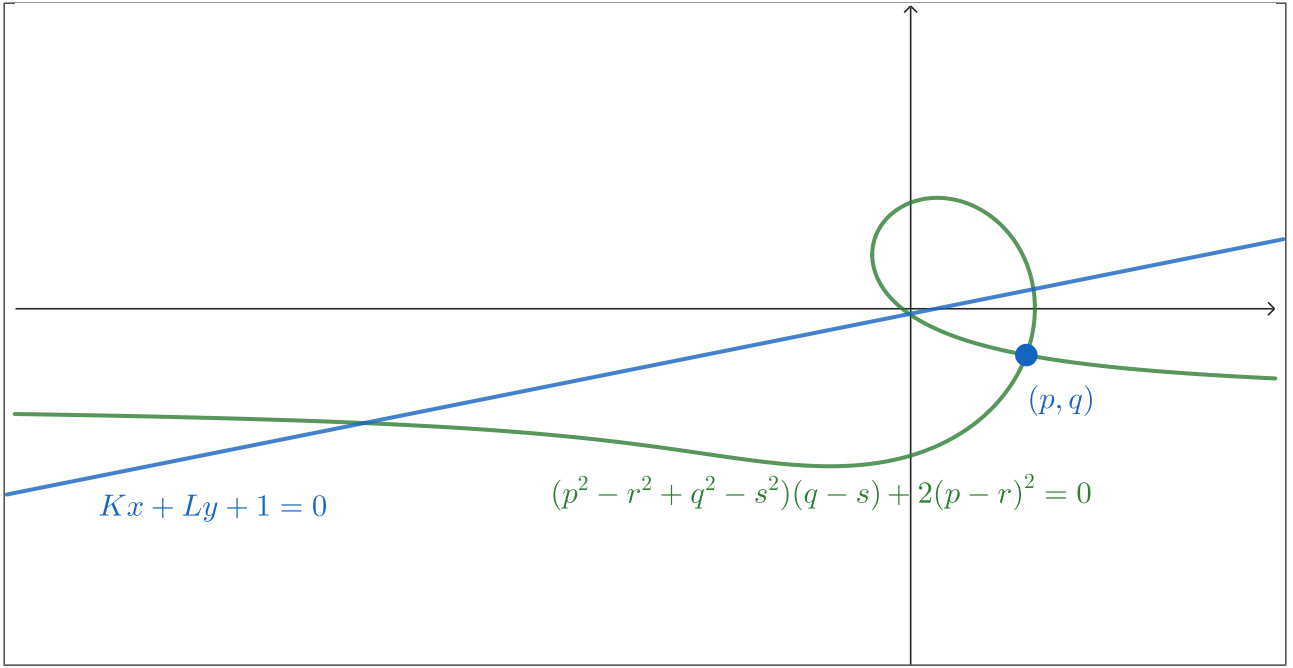
$$(q+s)(q-s)^2 = -2(p-r)(q-s) \left(\frac{p+r}{2} + \frac{p-r}{q-s} \right)$$

waaruit volgt

$$(q^2 - s^2)(q-s) = -(p^2 - r^2)(q-s) - 2(p-r)^2.$$

Dit geeft ten slotte

$$(p^2 - r^2 + q^2 - s^2)(q-s) + 2(p-r)^2 = 0. \quad (3.7)$$



Figuur 3.9: Er zijn drie mogelijke punten waar (r, s) kan liggen, namelijk de snijpunten van de curve en de lijn. In dit voorbeeld hebben we $(p, q) = (5, -2)$ en $(K, L) = (-1, 5)$ gebruikt.

Deze vergelijking geeft alle mogelijke plaatsen waar het beeldpunt (r, s) kan liggen.

We hebben nu een kromme met alle mogelijke plaatsen waar het punt (r, s) terecht kan komen. Omdat dit punt ook op de lijn $Kx + Ly + 1 = 0$ moet liggen, moet gelden dat $Kr + Ls + 1 = 0$. Zie figuur 3.9 voor een voorbeeld van de punten (r, s) die voldoen aan (3.7).

Als $K \neq 0$ volgt dat $r = -\frac{Ls+1}{K}$. Als we dit invullen in (3.7) krijgen we na herschrijven

$$\frac{K^2 + L^2}{K^2}s^3 + \frac{2L + 2L^2 - q(K^2 + L^2)}{K^2}s^2 + \frac{4KLp - K^2(p^2 + q^2) - 2Lq + 4L + 1}{K^2}s + \frac{4Kp - q + 2}{K^2} + p^2q + 2p^2 + q^3 = 0.$$

Als $K = 0$, dan volgt uit $Kr + Ls + 1 = 0$ dat $s = -\frac{1}{L}$ en als we dit invullen in (3.7) volgt na herschrijven

$$\left(2 - q - \frac{1}{L}\right)r^2 - 4pr + (p^2 + q^2)\left(q + \frac{1}{L}\right) + 2p^2 - \frac{Lq + 1}{L^3} = 0.$$

In beide gevallen hebben we $(A, B)_6 = \left(-\frac{2}{t}, \frac{4}{t^2}\right)$ met $\frac{t}{2} = -\frac{p-r}{q-s}$.

Hieruit volgt $(A, B)_6 = \left(\frac{q-s}{p-r}, \frac{(q-s)^2}{(p-r)^2}\right)$ met $r = -\frac{Ls+1}{K}$ en s voldoet aan

$$\frac{K^2 + L^2}{K^2}s^3 + \frac{2L + 2L^2 - q(K^2 + L^2)}{K^2}s^2 + \frac{4KLp - K^2(p^2 + q^2) - 2Lq + 4L + 1}{K^2}s + \frac{4Kp - q + 2}{K^2} + p^2q + 2p^2 + q^3 = 0.$$

voor $K \neq 0$. Voor $K = 0$ geldt $s = -\frac{1}{L}$ en r voldoet aan

$$\left(2 - q - \frac{1}{L}\right)r^2 - 4pr + (p^2 + q^2)\left(q + \frac{1}{L}\right) + 2p^2 - \frac{Lq + 1}{L^3} = 0.$$

3.4.5 De vergelijking van A7

We zijn nu op zoek naar de lijn loodrecht op $y + 1 = 0$ die het punt $(0, 1)$ afbeeldt op de lijn $Kx + Ly + 1 = 0$. De loodlijn is van de vorm $x + c = 0$, waarbij we c nog moeten bepalen. Er geldt dat de lijn door $(0, 1)$ en het beeldpunt loodrecht op de vouwlijn staat, dus evenwijdig is aan de lijn $y + 1 = 0$. Dit geeft de lijn $-y + 1 = 0$. Snijden met $Kx + Ly + 1 = 0$ geeft $Kx + L + 1 = 0$, dus $x = -\frac{L+1}{K}$. Het beeldpunt is dus het punt $(-\frac{L+1}{K}, 1)$ en de vouwlijn $(A, B)_7$ gaat door het punt $(\frac{0-\frac{L+1}{K}}{2}, \frac{1+1}{2}) = (-\frac{L+1}{2K}, 1)$. Invullen in $x + c = 0$ geeft $c = \frac{L+1}{2K}$, waaruit volgt $(A, B)_7 = (\frac{2K}{L+1}, 0)$.

3.4.6 Overzicht

De vouwlijn (A, B) gedefinieerd door een 1-vouw axioma wordt gegeven door

A1) $(A, B)_1 = (\frac{q-1}{p}, -1)$ voor de punten $(0, 1)$ en (p, q) .

A2) $(A, B)_2 = (\frac{2p}{1-p^2-q^2}, \frac{2(q-1)}{1-p^2-q^2})$ voor de punten $(0, 1)$ en (p, q) .

A3) $(A, B)_3 = (\frac{\pm K}{\pm 1 - \sqrt{K^2 + L^2}}, \frac{\pm L - \sqrt{K^2 + L^2}}{\pm 1 - \sqrt{K^2 + L^2}})$ voor de lijnen $y + 1 = 0$ en $Kx + Ly + 1 = 0$.

A4) $(A, B)_4 = (\frac{L}{K}, -1)$ voor het punt $(0, 1)$ en de lijn $Kx + Ly + 1 = 0$.

A5) $(A, B)_5 = (-\frac{2}{t}, \frac{4}{t^2})$ met $t = p \pm \sqrt{p^2 - 4q}$ voor de punten (p, q) en $(0, 1)$ en de lijn $y + 1 = 0$.

A6) $(A, B)_6 = (\frac{q-s}{p-r}, \frac{(q-s)^2}{(p-r)^2})$ met

- $r = -\frac{Ls+1}{K}$ en s voldoet aan

$$\frac{K^2 + L^2}{K^2} s^3 + \frac{2L + 2L^2 - q(K^2 + L^2)}{K^2} s^2 + \frac{4KLp - K^2(p^2 + q^2) - 2Lq + 4L + 1}{K^2} s + \frac{4Kp - q + 2}{K^2} + p^2q + 2p^2 + q^3 = 0$$

als $K \neq 0$

- $s = -\frac{1}{L}$ en r voldoet aan

$$\left(2 - q - \frac{1}{L}\right) r^2 - 4pr + (p^2 + q^2) \left(q + \frac{1}{L}\right) + 2p^2 - \frac{Lq + 1}{L^3} = 0$$

als $K = 0$

voor de punten $(0, 1)$ en (p, q) en de lijnen $y + 1 = 0$ en $Kx + Ly + 1 = 0$.

A7) $(A, B)_7 = (\frac{2K}{L+1}, 0)$ voor het punt $(0, 1)$ en de lijnen $y + 1 = 0$ en $Kx + Ly + 1 = 0$.

3.5 Hoofdstelling

We zullen nu analoog aan paragraaf 2.3 onderzoeken welke getallen origamiconstrueerbaar zijn. Net als bij de construeerbare getallen met passer en latje constructies, volgt uit $1 \in \mathcal{O}$ en het gegeven dat de verzameling \mathcal{O} gesloten is onder optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen, dat $\mathbb{Q} \subset \mathcal{O}$. We willen ook nu weer weten welke lichaamsuitbreidingen mogelijk zijn met origami constructies. We zullen hiervoor de gevonden vergelijkingen uit paragraaf 3.4 gebruiken waarbij F weer een willekeurig deellichaam van \mathbb{R} is.

Lemma 3.12. *Zij $Kx + Ly + 1 = 0$ een lijn met $K, L \in F$. De lijn die ontstaat door een translatie en een lineaire transformatie met coëfficiënten in F is van de vorm $Ax + By + C = 0$ met $A, B, C \in F$.*

Bewijs. Omdat de nieuwe coëfficiënten van de lijn na translatie en transformatie lineaire combinaties zijn van de originele coëfficiënten en de coëfficiënten van de translatie en transformatie, volgt direct dat de nieuwe coëfficiënten bevat zijn in F . □

We zien dus dat we de gevonden lijnen in de vorige paragraaf kunnen transformeren naar algemene vouwlijnen, zonder dat deze afhankelijk zijn van het punt $(0, 1)$ of de lijn $y + 1 = 0$ en met de mogelijkheid dat de vouwlijn door de oorsprong gaat.

Verder zien we dat de vouwlijnen van A1, A2, A4 en A7 ook na translatie en transformatie coëfficiënten hebben in F . Voor A3 geldt dat deze coëfficiënten heeft in het lichaam $F(\sqrt{K^2 + L^2})$ en de vergelijking voor A5 heeft coëfficiënten in het lichaam $F(\sqrt{p^2 - 4q})$. Voor zowel A3 als A5 geldt dat de coëfficiënten bevat zijn in een lichaamsuitbreiding van F van graad 2. Voor A6 hebben we twee gevallen. Als de lijnen evenwijdig zijn, volgt dat de vouwlijn coëfficiënten heeft in $F(r)$ met $[F(r) : F] = 2$. Als de twee lijnen elkaar snijden, heeft de algemene vouwlijn van A6 coëfficiënten in $F(s)$ waarbij $[F(s) : F] = 3$.

Lemma 3.13. *Het snijden van twee lijnen, elk gedefinieerd door een axioma, geeft een punt met coördinaten in F' , waarvoor geldt $[F' : F] = 2^k 3^\ell$ met gehele getallen $k, \ell \geq 0$ en $k + \ell \leq 2$.*

Bewijs. Zij $ax + by + c = 0$ en $ux + vy + w = 0$ twee lijnen. Volgens lemma 1.31 is het snijpunt van deze lijnen het punt $S = \left(\frac{cv - bw}{bu - av}, \frac{aw - cu}{bu - av} \right)$.

We zullen nu onderzoeken in welk lichaam de coördinaten van S bevat zijn per combinatie van axioma's.

Stel $a, b, c \in F(\alpha_1)$ en $u, v, w \in F(\alpha_2)$. Dan geldt dat de coördinaten van S bevat zijn in $F' = F(\alpha_1)(\alpha_2)$.

Als een van de lijnen gegeven wordt door A1, A2, A4 of A7, dan geldt $[F(\alpha_i) : F] = 1$, waarbij we met i aangeven of het om de eerste of de tweede lijn gaat. Als een van de lijnen gegeven wordt door A6 met evenwijdige lijnen of door A3 of A5, dan geldt $[F(\alpha_i) : F] = 2$. Wanneer een van de lijnen gegeven wordt door A6 met snijdende lijnen, dan volgt dat $[F(\alpha_i) : F] = 3$. In alle gevallen geldt dus $[F(\alpha_i) : F] \in \{1, 2, 3\}$.

Hieruit volgt met propositie 1.13 dat

$$[F' : F] = [F(\alpha_1)(\alpha_2) : F] \leq [F(\alpha_1) : F][F(\alpha_2) : F] = 2^u 3^v$$

met gehele getallen $u, v \geq 0$ en $u + v \leq 2$. Daarnaast volgt uit lemma 1.7 dat

$$[F(\alpha_1)(\alpha_2) : F] = [F(\alpha_1)(\alpha_2) : F(\alpha_1)][F(\alpha_1) : F],$$

dus $[F(\alpha_1) : F]$ is een deler van $[F' : F]$. Vanwege $F(\alpha_1)(\alpha_2) = F(\alpha_2)(\alpha_1)$, geldt hetzelfde voor $[F(\alpha_2) : F]$. Hieruit volgt dat $[F' : F] = 2^k 3^\ell$ met gehele getallen $k, \ell \geq 0$ en $k + \ell \leq 2$. □

We zullen nu analoog aan de aanpak voor passer en latje door Dummit en Foote onderzoeken welke getallen origamiconstrueerbaar zijn.

Propositie 3.14. *Als een getal $\alpha \in \mathbb{R}$ verkregen is uit een lichaam $F \subset \mathbb{R}$ door een reeks van origamiconstructies, dan geldt $[F(\alpha) : F] = 2^n 3^m$ voor gehele getallen $n, m \geq 0$.*

Bewijs. Uit lemma 3.13 volgt dat elke constructie in de reeks een lichaamsuitbreiding van graad $2^k 3^\ell$ geeft met gehele getallen $k, \ell \geq 0$ waarvoor geldt $k + \ell \leq 2$. Omdat we alleen eindig veel constructies toelaten, volgt dat er een eindige reeks lichamen F_i bestaat waarvoor geldt $F = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_j$ zodat $\alpha \in F_j$ en $[F_i : F_{i-1}] = 2^{k_i} 3^{\ell_i}$ voor alle $i \in \{1, \dots, j\}$. Herhaald toepassen van lemma 1.7 geeft nu dat

$$[F_j : F] = [F_j : F_{j-1}][F_{j-1} : F_{j-2}] \dots [F_1 : F] = 2^r 3^s,$$

met $r = \sum_{i=1}^j k_i$ en $s = \sum_{i=1}^j \ell_i$. Verder geldt dat $F \subset F(\alpha) \subset F_j$, dus volgt opnieuw uit lemma 1.7 dat

$$[F_j : F] = [F_j : F(\alpha)][F(\alpha) : F].$$

Er geldt dus dat $[F(\alpha) : F]$ een deler is van $[F_j : F] = 2^r 3^s$, dus bestaan er gehele getallen $n, m \geq 0$ zodat $[F(\alpha) : F] = 2^n 3^m$. \square

We hebben al gezien dat $\mathbb{Q} \subset \mathcal{O}$. Elk origami construeerbaar getal is dus verkregen uit \mathbb{Q} door een eindig aantal origamiconstructies. Hieruit volgt nu direct

Gevolg 3.15. *Als $\alpha \in \mathcal{O}$, dan geldt $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 2^n 3^m$ voor gehele getallen $n, m \geq 0$.*

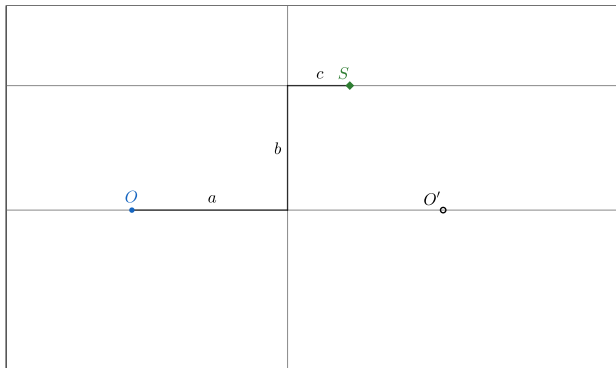
Om bij passer en latje tot de hoofdstelling te komen, hebben we gebruikt dat voor een lichaamsuitbreiding K van F met $[K : F] = 2$ er een element $\beta \in F$ bestaat zodat $K = F(\sqrt{\beta})$ (lemma 1.15). Als we voor lichaamsuitbreidingen van graad 3 zouden kunnen bewijzen dat er een element $\gamma \in F$ bestaat zodat $K = F(\sqrt[3]{\gamma})$, dan kunnen we het bewijs van de hoofdstelling voor origami op dezelfde manier uitwerken als voor passer en latje. Dit is wat er in *Origami Constructible Numbers* [10] gedaan wordt, maar er wordt geen bewijs gegeven dat dit inderdaad geldt voor lichaamsuitbreidingen van graad 3. Je kunt je zelfs afvragen of dit zo is, maar het is helaas lastig om dit te bewijzen of een tegenvoorbeeld te vinden. We zullen hier daarom de hoofdstelling op een andere manier bewijzen.

We zullen voor het bewijs van de hoofdstelling nodig hebben dat we de reële oplossingen van kwadratische en kubische vergelijkingen kunnen construeren. Om dit te bewijzen zullen we Lill's methode gebruiken. Het idee om vergelijkingen met origami op deze manier op te lossen komt van Alperin en Lang [1, Fig. 3].

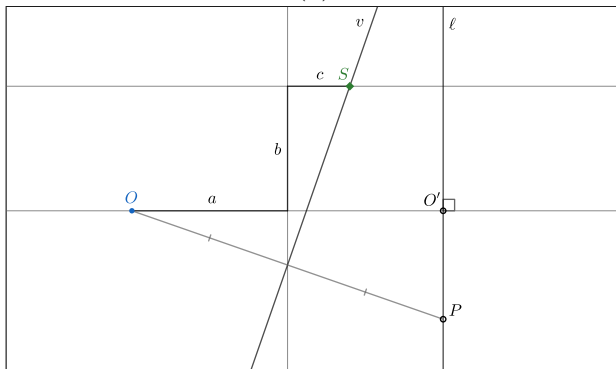
Lemma 3.16. *Elke kwadratische vergelijking met construeerbare coëfficiënten en reële oplossingen is oplosbaar met origamiconstructies.*

Bewijs. Voor de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ met $a, b, c \in F$ en $b^2 - 4ac \geq 0$ construeren we het pad van de schildpad volgens Lill's methode in paragraaf 1.2.2. Deze constructie ontstaat door het herhaald toepassen van het construeren van het standaard uitgangspunt zoals in paragraaf 3.3, waarbij de lijn door lijnstuk b een beeldpunt O' geeft, zoals in figuur 3.10a. Hierbij construeren we altijd de volledige lijnen, ook als de coëfficiënt 0 is, zodat we deze lijnen kunnen gebruiken voor de constructie van de lichtstraal. Vervolgens construeren we met A4 de loodlijn ℓ op de x -as door O' . Tot slot gebruiken we A5 om O op ℓ af te beelden in beeldpunt P , terwijl de vouwlijn v door S gaat, zoals in figuur 3.10b. Omdat de afstand tussen ℓ en O twee keer zo groot is als de afstand tussen b en O , volgt dat het lijnstuk OP en v elkaar precies op b (loodrecht) snijden. Dit geeft precies de lichtstraal van Lill's methode. Als we nu met A4 een loodlijn op de x -as op afstand 1 van O construeren en met A1 de lijn OP maken, hebben

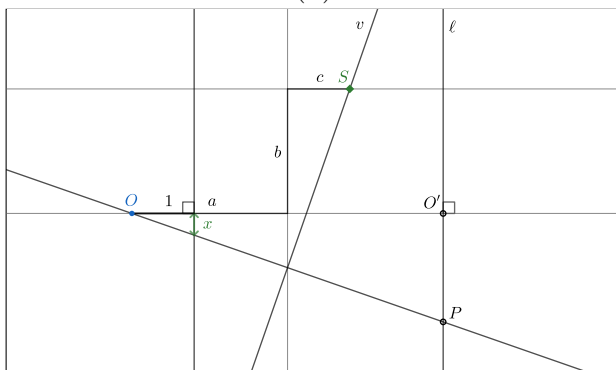
we een van de oplossingen x van de vergelijking geconstrueerd, zoals in figuur 3.10c. Merk op dat we nog wel moeten bepalen of deze oplossing positief of negatief is zoals in paragraaf 1.2.2. Zoals we in paragraaf 3.4.3 gezien hebben, heeft A5 over het algemeen twee oplossingen. We krijgen de tweede oplossing van onze vergelijking door de tweede lijn van A5 te gebruiken. \square



(a)

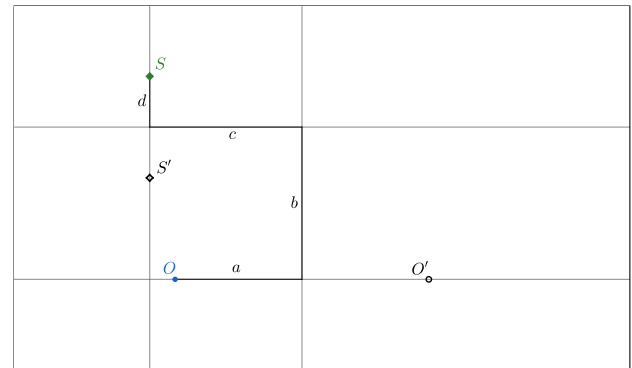


(b)

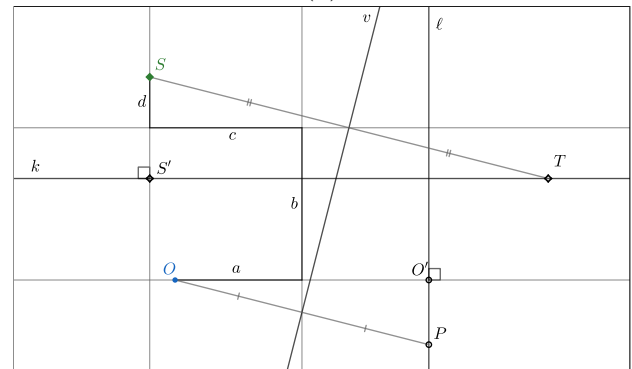


(c)

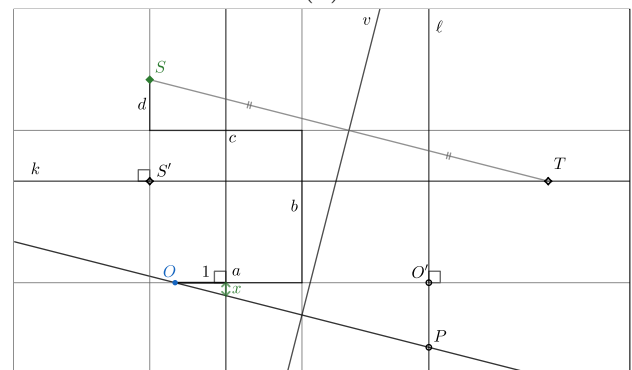
Figuur 3.10: Het oplossen van de kwadratische vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ met $a = 2\frac{1}{2}$, $b = 2$ en $c = -1$.



(a)



(b)



(c)

Figuur 3.11: Het oplossen van de kubische vergelijking $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ met $a = 2\frac{1}{2}$, $b = 3$, $c = 3$ en $d = -1$.

En dan nu de derdegraads vergelijkingen:

Lemma 3.17. *Van elke kubische vergelijking met construeerbare coëfficiënten kunnen we de reële oplossingen vinden met origamiconstructies.*

Bewijs. Voor de vergelijking $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ met $a, b, c, d \in \mathcal{O}$ construeren we net als in het vorige lemma het pad van de schildpad volgens Lill's methode, waarbij lijn b de oorsprong O afbeeldt op beeldpunt O' en lijn c de schildpad S afbeeldt in beeldpunt S' , zoals in figuur

3.11a. Vervolgens construeren we met A4 de loodlijn ℓ op de x -as door O' en de loodlijn k op d door S' . Tot slot gebruiken we A6 om vouwlijn v te construeren die O op ℓ afbeeldt in het beeldpunt P en S op k afbeeldt in het beeldpunt T , zoals in figuur 3.11b. Net als bij de kwadratische vergelijking hebben we dat het lijnstuk OP en v elkaar loodrecht snijden op lijn b . Daarnaast geldt nu dat lijnstuk ST en v elkaar loodrecht snijden op lijn c . Hieruit volgt precies de lichtstraal van Lill's methode. Als we nu weer op afstand 1 van O een loodlijn op de x -as construeren en met A1 de lijn OP , dan hebben we een van de oplossingen x van de vergelijking gevonden, zoals in figuur 3.11c. Omdat A6 tot wel drie verschillende lijnen kan construeren, kunnen we de andere oplossingen vinden door de andere lijnen te gebruiken, als deze bestaan. \square

Nu hebben we genoeg informatie voor de belangrijkste stelling van dit hoofdstuk.

Stelling 3.18. [10, Thm. 4.3.9] *Zij $\alpha \in \mathbb{R}$. Er geldt dat $\alpha \in \mathcal{O}$ dan en slechts dan als er een eindige rij lichamen $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_n \subset \mathbb{R}$ bestaat zodanig dat $\alpha \in F_n$ en $[F_i : F_{i-1}] = 2$ of $[F_i : F_{i-1}] = 3$ voor alle $i \in \{1, \dots, n\}$.*

Bewijs. Als $\alpha \in \mathcal{O}$, dan volgt uit het bewijs van propositie 3.14 en gevolg 3.15 dat er een eindige rij lichamen $\mathbb{Q} = F'_0 \subset F'_1 \subset \dots \subset F'_j$ bestaat zodat $\alpha \in F'_j$ en $[F'_i : F'_{i-1}] = 2^{k_i} 3^{\ell_i}$ voor alle $i \in \{1, \dots, j\}$ met gehele getallen $k_i, \ell_i \geq 0$ en $k_i + \ell_i \leq 2$. Uit lemma 3.13 volgt nu dat er voor elk lichaam F'_i getallen $\beta_1, \beta_2 \in \mathcal{O}$ bestaan zodat $F'_i = F'_{i-1}(\beta_1)(\beta_2)$ waarvoor geldt dat $[F'_{i-1}(\beta) : F'_{i-1}]$ gelijk is aan 1, 2 of 3 voor zowel $\beta = \beta_1$ als $\beta = \beta_2$. Hieruit volgt dat er een eindige rij lichamen $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_n$ bestaat zodat $\alpha \in F_n$ en waarvoor $[F_i, F_{i-1}]$ gelijk is aan 2 of 3 voor alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Tot slot zien we dat $F_n \subset \mathbb{R}$ volgt uit het feit dat alle lichaamsuitbreidingen ontstaan vanuit $\beta_i \in \mathcal{O} \subset \mathbb{R}$.

Stel er bestaat een eindige reeks lichamen $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_n \subset \mathbb{R}$ zodanig dat $\alpha \in F_n$ en $[F_i : F_{i-1}]$ gelijk is aan 2 of 3 voor alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Omdat 2 en 3 beide priem zijn, volgt uit lemma 1.14 dat voor alle i er een $a_i \in F_i \subset \mathbb{R}$ bestaat, zodat $F_i = F_{i-1}(a_i)$ met $\deg m_{a_i, F_{i-1}}(x)$ gelijk aan 2 of 3. Het slot van dit bewijs zal gebruik maken van inductie. Voor de basisstap geldt dat alle elementen van F_0 construeerbaar zijn met origami, want $F_0 = \mathbb{Q} \subset \mathcal{O}$. Stel nu dat alle elementen van F_j origamiconstrueerbaar zijn voor een bepaalde j , dus $F_j \subset \mathcal{O}$. Dan volgt uit lemma's 3.16 en 3.17 dat de reële oplossingen van $m_{a_{j+1}, F_j}(x)$ origamiconstrueerbaar zijn, dus volgt dat a_{j+1} construeerbaar is. Hieruit volgt dat alle elementen van $F_{j+1} = F_j(a_{j+1})$ origamiconstrueerbaar zijn. Met inductie volgt dat alle elementen van F_n construeerbaar zijn. Omdat $\alpha \in F_n$, geldt dat $\alpha \in \mathcal{O}$, zoals we wilden. \square

Voor de volledigheid zullen we nu ook de constructie van wortels en derdemachtswortels met origami laten zien.

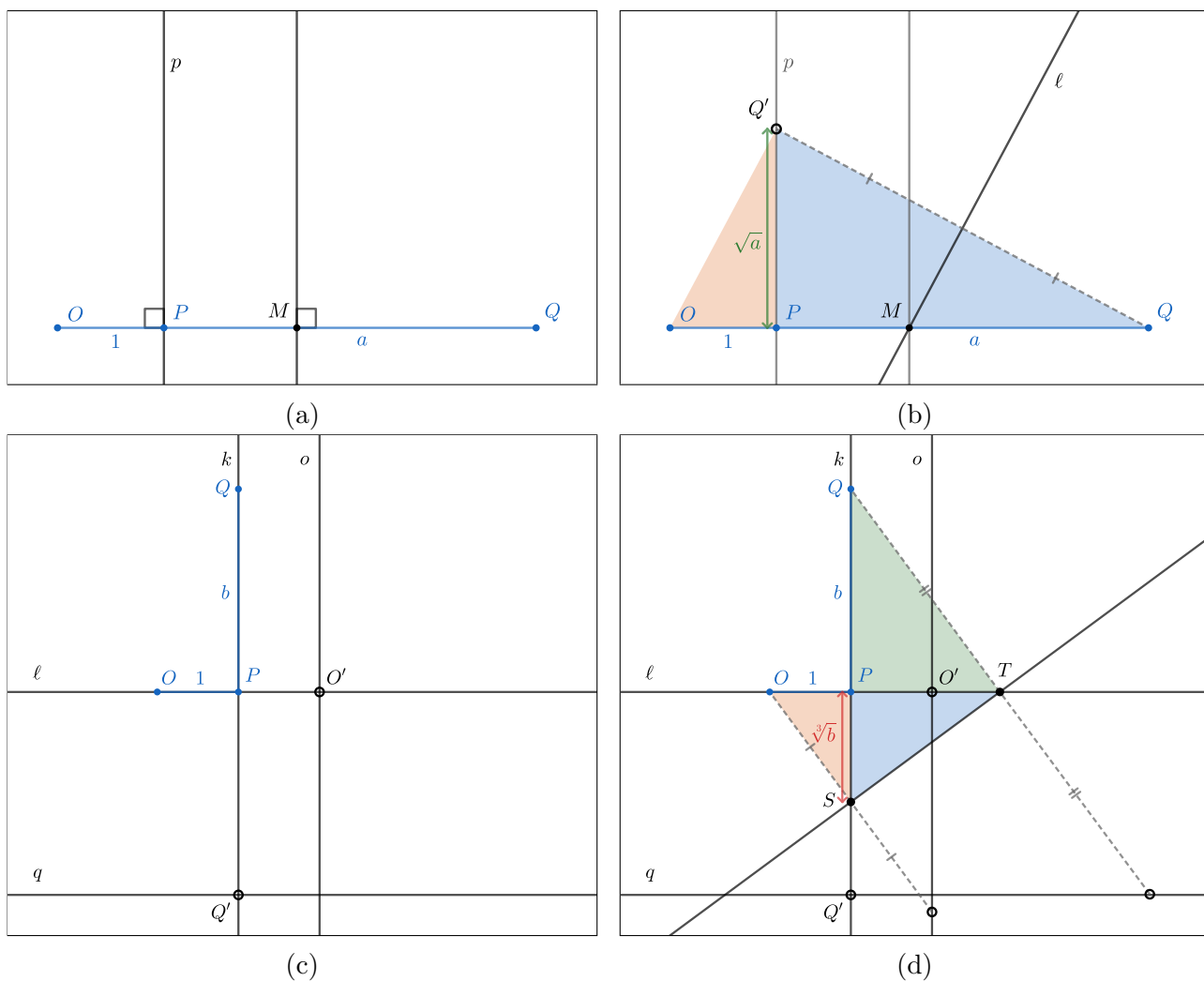
Lemma 3.19. *De verzameling van origami construeerbare getallen is gesloten onder het trekken van wortels en derdemachtswortels.*

Bewijs. Zij $a \in \mathcal{O}$. Ons uitgangspunt is een lijnstuk van lengte $a + 1$. We noemen de uiteinden van dit lijnstuk O en Q en een van de punten die het lijnstuk verdeelt in een stuk van lengte a en een stuk van lengte 1 noemen we P . Door het tweede axioma toe te passen op O en Q krijgen we de middelloodlijn van het lijnstuk en door het vierde axioma toe te passen op het lijnstuk en punt P krijgen we de loodlijn van het lijnstuk door P . Het snijpunt van de middelloodlijn en het lijnstuk noemen we M en de loodlijn door P noemen we p , zie figuur 3.12a. Vervolgens gebruiken we het vijfde axioma met de punten M en Q en de lijn p . Deze lijn noemen we ℓ . Vanwege lemma 3.8 is het beeldpunt Q' een construeerbaar punt. De afstand tussen P en Q' is nu gelijk aan \sqrt{a} . Dit laatste volgt uit de gelijkvormigheid van de driehoeken $\triangle OPR$ en $\triangle RPQ$. Zie figuur 3.12b.

Zij $b \in \mathcal{O}$. Voor de derdemachtswortel van b beginnen we in het standaard uitgangspunt met $a = 1$. We noemen het snijpunt van de lijnstukken P , het eindpunt van het lijnstuk van lengte 1 noemen we O en het eindpunt van het lijnstuk van lengte b noemen we Q . De eerste stap is het verlengen van beide lijnstukken met behulp van het eerste axioma. We noemen de verlenging van het lijnstuk met lengte 1 ℓ en de verlenging van het andere lijnstuk noemen we k . Hierbij zien we dat er beeldpunten O' en Q' van respectievelijk O en Q ontstaan. We hebben eerder gezien dat deze beeldpunten origami construeerbare punten zijn. Vervolgens passen we het vierde axioma toe op zowel lijn ℓ met punt O' als lijn k met punt Q' . Deze loodlijnen noemen we respectievelijk o en q . We hebben nu de situatie zoals in figuur 3.12c. Tot slot passen we het zesde axioma toe op de punten O en Q en de lijnen o en q . Het snijpunt van lijn k met de laatste vouwlijn noemen we S . De afstand tussen P en S is gelijk aan $\sqrt[3]{b}$. Dit volgt uit de gelijkvormigheid van de driehoeken $\triangle OPS$, $\triangle SPT$ en $\triangle TPQ$. Zie figuur 3.12d.

We kunnen concluderen dat zowel de wortel als derdemachtswortel van origami construeerbare getallen origami construeerbare getallen zijn. Er volgt dat \mathcal{O} gesloten is onder het trekken van wortels en derdemachtswortels. \square

Merk op dat de constructie van $\sqrt[3]{a}$ gebruik maakt van Lill's methode, terwijl de constructie van \sqrt{a} equivalent is aan de constructie met passer en latje.



Figuur 3.12: De constructies van \sqrt{a} en $\sqrt[3]{b}$.

3.6 Uitvoerbaarheid

Zoals beloofd zullen we nu bekijken wanneer de axioma's uitvoerbaar zijn. We zullen de axioma's hierbij een voor een langsgaan en gebruik maken van de vergelijkingen die we gevonden hebben in paragraaf 3.4.6. Aan het eind zullen we overzichtelijk weergeven wat we gevonden hebben.

Voor A1 geldt $(A, B)_1 = \left(\frac{q-1}{p}, -1\right)$ voor de punten $(0, 1)$ en (p, q) . We zien dat deze vergelijking niet gedefinieerd is voor $p = 0$. Dit komt doordat beide punten in dit geval op de y -as liggen, waardoor de vouwlijn door de oorsprong gaat, wat in onze definitie niet mogelijk is. Door met een translatie alles 1 naar rechts te verschuiven, krijgen we de punten $(1, 1)$ en $(1, q)$ en de lijn $(A, B)_1 = (-1, 0)$. We zien dat in dit geval de lijn dus wel gedefinieerd is, maar dat we andere coördinaten moeten gebruiken. Verder zien we dat A1 niet gedefinieerd is als beide punten samenvallen. Om een lijn te definiëren hebben we natuurlijk twee verschillende punten nodig.

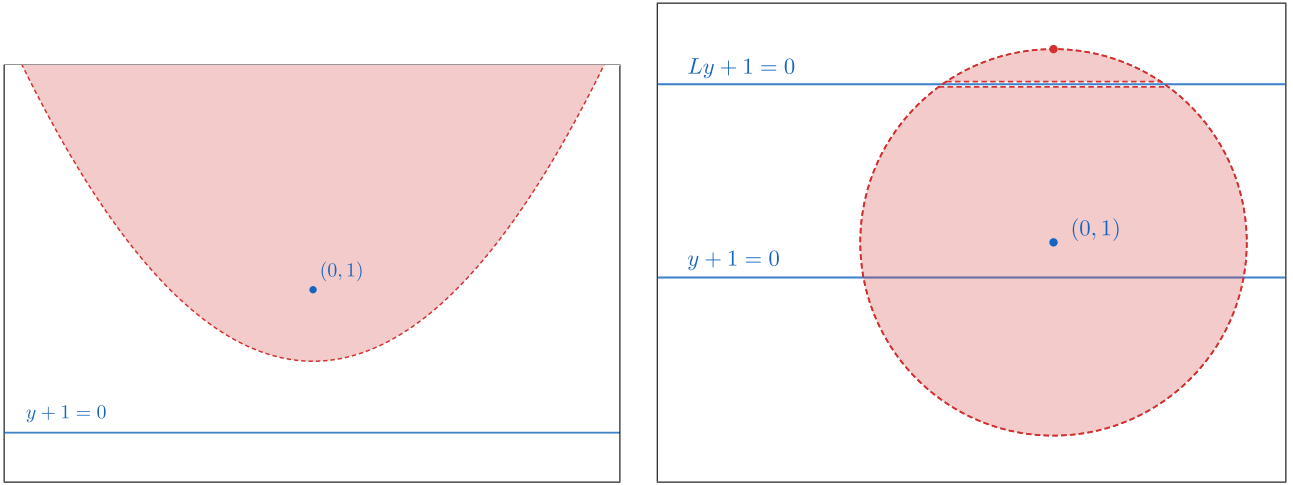
Voor A2 hebben we $(A, B)_2 = \left(\frac{2p}{1-p^2-q^2}, \frac{2(q-1)}{1-p^2-q^2}\right)$ voor de punten $(0, 1)$ en (p, q) . We zien dat de vergelijking niet gedefinieerd is als $1 - p^2 - q^2 = 0$. Hiervoor ligt het punt (p, q) op de cirkel met straal 1 en de oorsprong als middelpunt. Omdat het punt $(0, 1)$ ook op deze cirkel ligt, is de lijn die door A2 gedefinieerd wordt de middelloodlijn van een koorde van deze cirkel. De lijn zal daarom altijd door het middelpunt van de cirkel gaan en daarmee dus door de oorsprong. Ook hier geeft een translatie een oplossing, dus bestaat de vouwlijn voor A2 in alle gevallen, zolang $(0, 1)$ en (p, q) verschillende punten zijn.

Bij het derde axioma vonden we $(A, B)_3 = \left(\frac{\pm K}{\pm 1 - \sqrt{K^2 + L^2}}, \frac{\pm L - \sqrt{K^2 + L^2}}{\pm 1 - \sqrt{K^2 + L^2}}\right)$ voor de lijnen $y+1 = 0$ en $Kx + Ly + 1 = 0$. Hier krijgen we te maken met wortels. Omdat $K^2 + L^2 \geq 0$, zijn de wortels altijd reëel. We hebben nog wel een probleem als $K^2 + L^2 = 1$, omdat we dan delen door 0 voor een van de bissectrices. In dit geval gaat een van beide bissectrices namelijk door de oorsprong. De bekende translatie lost ook hier het probleem op. Een ander mogelijk probleem is dat we $(A, B)_3 = (0, 0)$ kunnen krijgen. Dit is het geval voor $K = 0$. Dit geeft namelijk $(A, B)_3 = \left(\frac{0}{\pm 1 - |L|}, \frac{\pm L - |L|}{\pm 1 - |L|}\right)$, waarbij $L - |L| = 0$ als $L > 0$ en $-L - |L| = 0$ voor $L < 0$. We zien dat we voor $K = 0$ maar één echte oplossing krijgen in plaats van twee. Dit komt doordat de lijnen voor $K = 0$ evenwijdig zijn. De lijn die A3 geeft kan daardoor geen bissectrice zijn, aangezien we geen snijpunt hebben. Doordat A3 de lijnen op elkaar afbeeldt, moet de vouwlijn $(A, B)_3$ de lijn zijn die midden tussen de lijnen ligt. We krijgen dus een evenwijdige lijn. Omdat dit gewoon uitvoerbaar is met origami, hoeven we deze situatie niet uit te sluiten.

Voor A4 hebben we $(A, B)_4 = \left(\frac{L}{K}, -1\right)$ voor het punt $(0, 1)$ en de lijn $Kx + Ly + 1 = 0$ gevonden. We zien dat de vergelijking niet goed gedefinieerd is als $K = 0$. Dit geeft namelijk een horizontale lijn, waardoor de loodlijn door $(0, 1)$ door de oorsprong gaat. Opnieuw geeft een translatie een oplossing voor dit probleem.

Voor het vijfde axioma geldt $(A, B)_5 = \left(-\frac{2}{t}, \frac{4}{t^2}\right)$ met $t = p \pm \sqrt{p^2 - 4q}$ voor de punten (p, q) en $(0, 1)$ en de lijn $y + 1 = 0$. Er zijn twee mogelijke problemen, namelijk de noemer die nul kan worden en de wortel die niet altijd reële oplossingen geeft. Eerst de wortel. Voor $p^2 - 4q < 0$ is de wortel niet reëel en daarmee niet construeerbaar ($\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$). De punten waarvoor geldt $p^2 - 4q < 0$ zijn precies de punten die boven de parabool liggen, dus in het rode gebied in figuur 3.13a. Omdat de lijnen die gegeven worden door A5 altijd raaklijnen aan de parabool zijn, volgt dat deze lijnen nooit het rode gebied doorsnijden. Dit verklaart dat het vouwen van een lijn met A5 niet mogelijk is als het tweede punt boven de parabool ligt die gedefinieerd wordt door het eerste punt en de lijn. Daarnaast zien we dat we maar één oplossing krijgen voor $p^2 - 4q = 0$. Dit komt doordat het punt dan op de parabool ligt. Elk punt op de parabool heeft een unieke raaklijn, dus vinden we maar één oplossing.

Dan nu de noemer. Uit $t = 0$ volgt $p = \mp \sqrt{p^2 - 4q}$, dus $p^2 = p^2 - 4q$. We zien dus dat



(a) Als (p, q) in het rode gebied ligt, is A5 niet uitvoerbaar.

(b) Als $K = 0$ en (p, q) ligt in het rode gebied, dan is A6 niet uitvoerbaar.

Figuur 3.13: Uitvoerbaarheid van A5 en A6.

$q = 0$ voor problemen kan zorgen. Omdat $t = p \pm \sqrt{p^2 - 4 \cdot 0} = p \pm |p|$ zijn er twee gevallen. Voor de punten (p, q) op de positieve x -as of in de oorsprong volgt dat de lijn gegeven door $t = p - |p| = p - p = 0$ niet goed gedefinieerd is. Voor de punten (p, q) op de negatieve x -as geldt dat de lijn gegeven door $t = p + |p| = p - p = 0$ niet goed gedefinieerd is. We hebben gezien dat A5 de raaklijnen aan een parabool definieert. Omdat we hier werken met het brandpunt $(0, 1)$ en de richtlijn $y + 1 = 0$, ligt de top van de parabool precies op de oorsprong. Alle punten op de x -as geven daarom raaklijnen door de oorsprong. Een translatie in de x -richting heeft in dit geval geen nut. Door alles 1 omlaag te transleren, zorgen we ervoor dat de oorsprong boven de parabool ligt, zodat geen van de raaklijnen door de oorsprong zullen gaan.

Voor A6 hebben we twee gevallen. Het eerste geval is $(A, B)_6 = \left(\frac{q-s}{p-r}, \frac{(q-s)^2}{(p-r)^2} \right)$ met $r = -\frac{Ls+1}{K}$ en s voldoet aan

$$\frac{K^2 + L^2}{K^2} s^3 + \frac{2L + 2L^2 - q(K^2 + L^2)}{K^2} s^2 + \frac{4KLp - K^2(p^2 + q^2) - 2Lq + 4L + 1}{K^2} s + \frac{4Kp - q + 2}{K^2} + p^2q + 2p^2 + q^3 = 0$$

voor de punten $(0, 1)$ en (p, q) en de lijnen $y + 1 = 0$ en $Kx + Ly + 1 = 0$ met $K \neq 0$. Vanwege de voorwaarde $K \neq 0$, zien we dat alle noemers ongelijk nul zijn en daarmee goed gedefinieerd. Daarnaast hebben we een vergelijking voor s . Omdat $(K, L) \neq (0, 0)$ volgt dat $K^2 + L^2 \neq 0$, waardoor dit altijd een derdegraads vergelijking geeft voor s . Hieruit volgt dat er altijd een reële oplossing is, waardoor het vouwen van een lijn met het zesde axioma altijd mogelijk is, zolang $K \neq 0$, dus zolang de lijnen niet evenwijdig zijn.

Voor het tweede geval geldt $(A, B)_6 = \left(\frac{q-s}{p-r}, \frac{(q-s)^2}{(p-r)^2} \right)$ met $s = -\frac{1}{L}$ en r voldoet aan

$$\left(2 - q - \frac{1}{L} \right) r^2 - 4pr + (p^2 + q^2) \left(q + \frac{1}{L} \right) + 2p^2 - \frac{Lq + 1}{L^3} = 0$$

voor de punten $(0, 1)$ en (p, q) en de lijnen $y + 1 = 0$ en $Ly + 1 = 0$. We weten dat $L \neq 0$, dus opnieuw hebben we geen problemen met delen door nul. We zullen nu kijken naar de vergelijking voor r . Als $q = 2 - \frac{1}{L}$, dan volgt dat $2 - q - \frac{1}{L} = 0$. We zien dat we voor $(p, q) = \left(0, 2 - \frac{1}{L} \right)$ een vergelijking van alleen L overhouden. Omdat hierdoor elke waarde van r of juist geen enkele waarde van r aan de vergelijking voldoet, volgt dat we voor dit punt

geen axioma hebben. Voor $(p, q) = (p, 2 - \frac{1}{L})$ met $p \neq 0$ volgt dat we een lineaire vergelijking hebben voor r , dus hiervoor is A6 wel gedefinieerd. Als $q \neq 2 - \frac{1}{L}$, volgt dat we een kwadratische vergelijking hebben voor r . Deze vergelijking heeft geen reële oplossingen als de discriminant D voor deze vergelijking negatief is. Er geldt

$$D = (-4p)^2 - 4 \left(2 - q - \frac{1}{L} \right) \left((p^2 + q^2) \left(q + \frac{1}{L} \right) + 2p^2 - \frac{Lq + 1}{L^3} \right).$$

Herschrijven geeft

$$D = \frac{4}{L^4} (Lq + 1)^2 (L^2(p^2 + q^2 - 2q) + 2L - 1).$$

Omdat $\frac{4}{L^4} > 0$ en $(Lq + 1)^2 \geq 0$, volgt dat $D < 0$ voor $p^2 + (q - 1)^2 - 1 < \frac{1-2L}{L^2}$, oftewel $p^2 + (q - 1)^2 < (\frac{L-1}{L})^2$, tenzij $Lq + 1 = 0$. We zien dat er geen reële oplossingen zijn voor r als (p, q) binnen een cirkel van straal $\frac{L-1}{L}$ rond het punt $(0, 1)$ ligt, tenzij (p, q) op de lijn $Ly + 1 = 0$ ligt. In dit laatste geval, dus als het punt op de lijn ligt, wordt het axioma gelijk aan A5, omdat elke lijn door het punt (p, q) het punt op de lijn afbeeldt. In figuur 3.13b zien we een visuele weergave van het gebied dat geen oplossingen geeft als (p, q) erin ligt. Merk op dat het punt $(0, 2 - \frac{1}{L})$ precies op de rand van de cirkel ligt.

Tot slot hebben we nog het zevende axioma. Hiervoor geldt $(A, B)_7 = (\frac{2K}{L+1}, 0)$ voor het punt $(0, 1)$ en de lijnen $y + 1 = 0$ en $Kx + Ly + 1 = 0$. We zien dat we delen door nul als $L = -1$. Het probleem voor $L = -1$ is namelijk dat het door het punt $(0, 1)$ gaat. Hieruit volgt dat de vouwlijn door het punt $(0, 1)$ moet gaan om het op de lijn $Kx + Ly + 1 = 0$ af te beelden. Omdat de vouwlijn ook loodrecht op de lijn $y + 1 = 0$ staat, volgt dat de vouwlijn door de oorsprong gaat. Een translatie lost dit probleem weer op. Daarnaast is er nog een belangrijk geval om te bespreken. Als $K = 0$, volgt dat $(A, B)_7 = (0, 0)$, wat niet mogelijk is. Voor $K = 0$ is het probleem dat de twee lijnen evenwijdig zijn. Elke loodlijn op de lijn $y + 1 = 0$ staat dan ook loodrecht op de lijn $Kx + Ly + 1 = 0$. Als het punt niet op de lijn $Kx + Ly + 1 = 0$ ligt, zal deze er ook niet op afgebeeld kunnen worden. Als het punt wel op de lijn ligt, zal elke loodlijn het punt op de lijn afbeelden. In beide gevallen is het axioma daarom niet uitvoerbaar.

Axioma	Standaard punten/lijnen	Uitvoerbaar voor:
A1	$(0, 1)$	$(p, q) \in \mathcal{O}^2 \setminus \{(0, 1)\}$
A2	$(0, 1)$	$(p, q) \in \mathcal{O}^2 \setminus \{(0, 1)\}$
A3	$y + 1 = 0$	$(K, L) \in \mathcal{O}^2 \setminus \{(0, 0), (0, 1)\}$
A4	$(0, 1)$	$(K, L) \in \mathcal{O}^2 \setminus \{(0, 0), (0, 1)\}$
A5	$(0, 1), y + 1 = 0$	$\{(p, q) \in \mathcal{O}^2 \mid p^2 - 4q \geq 0\}$
A6	$(0, 1), y + 1 = 0$	$(p, q) \in \mathcal{O}^2 \setminus \{(0, 1)\}, \{(K, L) \in \mathcal{O}^2 \mid K \neq 0\}$
		$\{(K, L) \in \mathcal{O}^2 \mid K = 0, L \notin \{0, 1\}\},$
		$\{(p, q) \in \mathcal{O}^2 \mid p^2 + (q - 1)^2 \geq (\frac{L-1}{L})^2\} \setminus \{(0, 2 - \frac{1}{L})\}$
		$\{(K, L) \in \mathcal{O}^2 \mid K = 0, L \notin \{0, 1\}\},$
		$\{(p, q) \in \mathcal{O}^2 \mid Lq + 1 = 0\} \setminus \{(0, 1)\}$
A7	$(0, 1), y + 1 = 0$	$\{(K, L) \in \mathcal{O}^2 \mid K \neq 0\}$

Tabel 3.3: Uitvoerbaarheid per axioma.

Omdat we geen last hebben van de coördinaten tijdens het vouwen, geldt dat de axioma's waar hooguit een translatie nodig is met origami gewoon uitvoerbaar zijn. In tabel 3.3 zien we een overzicht van wanneer elk axioma uitvoerbaar is.

3.7 Gevouwen Beelden

Het voelt misschien vreemd dat we in paragraaf 3.4 de vergelijkingen op een directe manier opgesteld hebben, terwijl we in paragraaf 3.2 formules opgesteld hebben voor de gevouwen beelden van punten en lijnen. We hadden deze ook kunnen gebruiken, maar doordat de formules voor de gevouwen beelden niet eenvoudig zijn, wordt het opstellen van de vergelijkingen hierdoor erg ingewikkeld. We zullen dit nu toch uitwerken en zijn hierbij vooral geïnteresseerd in de graad van de vergelijkingen, zoals in paragraaf 3.5. Het voordeel van deze manier is, dat het erg algemeen is en daarom ook zou kunnen werken in het geval van 2-vouw of zelfs n -vouw. We zullen in deze paragraaf ook geen gebruik meer maken van de standaard punten en lijnen, om de vergelijkingen zo algemeen mogelijk te houden.

We zullen eerst vergelijkingen opstellen voor de vijf uitlijningen uit het bewijs van lemma 3.7.

Voor de uitlijning $P_1 - P_1$ hebben we de vergelijking $V_{(A,B)}(p, q) = (p, q)$ al voor een deel opgelost in vergelijking (3.4). Hieruit volgt dat $Ap + Bq + 1 = 0$ of $A = B = 0$, waarbij het laatste geval geen lijn geeft. We kunnen concluderen dat de uitlijning $P_1 - P_1$ de vergelijking $Ap + Bq + 1 = 0$ geeft voor $P_1 = (p, q)$.

Voor de uitlijning $P_1 - P_2$ hebben we ook al voorwerk gedaan. Herschrijven van de vergelijkingen in (3.3) laat zien dat $V_{(A,B)}(p, q) = (r, s)$ equivalent is met de vergelijkingen

$$\begin{aligned}(A^2 + B^2)r + (A^2 - B^2)p + 2ABq + 2A &= 0 \\ (A^2 + B^2)s - (A^2 - B^2)q + 2ABp + 2B &= 0.\end{aligned}$$

De uitlijning $L_1 - L_1$ voor de lijn $Kx + Ly + 1 = 0$ geeft $V_{(A,B)}(K, L) = (K, L)$, waaruit met lemma 3.4 de volgende vergelijkingen volgen:

$$\begin{aligned}K &= -\frac{(A^2 - B^2)K + 2ABL}{A^2 - 2AK - 2BL + B^2} \\ L &= \frac{(A^2 - B^2)L - 2ABK}{A^2 - 2AK - 2BL + B^2}.\end{aligned}$$

Herschrijven van de eerste vergelijking geeft $2A^2K - 2AK^2 - 2BLK + 2ABL = 0$, waaruit volgt $(AK + BL)(A - K) = 0$. Dit geeft $A = K$ of $AK + BL = 0$. De tweede vergelijking geeft op dezelfde manier $B = L$ of $AK + BL = 0$. Hieruit volgt $(A, B) = (K, L)$ of $AK + BL = 0$. De oplossing $(A, B) = (K, L)$ is technisch juist, want vouwen op de lijn (K, L) beeldt elk punt op deze lijn op zichzelf af, maar we zijn vooral geïnteresseerd in het construeren van nieuwe lijnen. We zullen de oplossing $(A, B) = (K, L)$ om deze reden negeren. We zien dus dat de uitlijning $L_1 - L_1$ de vergelijking $AK + BL = 0$ geeft voor de lijn $Kx + Ly + 1 = 0$.

De uitlijning $L_1 - L_2$ waarbij we de lijnen $Kx + Ly + 1 = 0$ en $Mx + Ly + 1 = 0$ nemen, geeft $V_{(A,B)}(K, L) = (M, N)$. Met lemma 3.4 volgt hieruit

$$\begin{aligned}M &= -\frac{(A^2 - B^2)K + 2ABL}{A^2 - 2AK - 2BL + B^2} \\ N &= \frac{(A^2 - B^2)L - 2ABK}{A^2 - 2AK - 2BL + B^2}.\end{aligned}$$

Herschrijven geeft

$$\begin{aligned} (A^2 - 2AK - 2BL + B^2)M + (A^2 - B^2)K + 2ABL &= 0 \\ (A^2 - 2AK - 2BL + B^2)N - (A^2 - B^2)L + 2ABK &= 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Helaas zijn deze vergelijkingen niet veel compacter te schrijven.

Tot slot hebben we nog de uitlijning $P_1 - L_1$ voor het punt (p, q) en de lijn $Kx + Ly + 1 = 0$. Vanwege definitie 3.5 moet gelden $K(V_{(A,B)}(p, q))_1 + L(V_{(A,B)}(p, q))_2 + 1 = 0$. Dit geeft $K \left(-\frac{(A^2 - B^2)p + 2ABq + 2A}{A^2 + B^2} \right) + L \left(\frac{(A^2 - B^2)q - 2ABp - 2B}{A^2 + B^2} \right) + 1 = 0$, waaruit volgt

$$(A^2 - B^2)(Lq - Kp) - 2AB(Kq + Lp) - 2(AK + BL) + A^2 + B^2 = 0.$$

$V_{(A,B)}(p, q) = (p, q)$	$Ap + Bq + 1 = 0$
$V_{(A,B)}(p, q) = (r, s)$	$(A^2 + B^2)r + (A^2 - B^2)p + 2ABq + 2A = 0$ $(A^2 + B^2)s - (A^2 - B^2)q + 2ABp + 2B = 0$
$V_{(A,B)}(K, L) = (K, L)$	$AK + BL = 0$
$V_{(A,B)}(K, L) = (M, N)$	$(A^2 - 2AK - 2BL + B^2)M + (A^2 - B^2)K + 2ABL = 0$ $(A^2 - 2AK - 2BL + B^2)N - (A^2 - B^2)L + 2ABK = 0$
$V_{(A,B)}(p, q) \in (K, L)$	$(A^2 - B^2)(Lq - Kp) - 2AB(Kq + Lp) - 2(AK + BL) + A^2 + B^2 = 0$

Tabel 3.4: Overzicht van de gevonden vergelijkingen per uitlijning.

In tabel 3.4 zien we een overzicht van de gevonden vergelijkingen. Nu we de vergelijkingen van de uitlijningen aan de hand van de gevouwen beelden gevonden hebben, kunnen we de vergelijkingen per axioma gaan bestuderen. We gebruiken hierbij tabel 3.2.

- A1) Het eerste axioma wordt bepaald door $V_{(A,B)}(p, q) = (p, q)$ en $V_{(A,B)}(r, s) = (r, s)$. We krijgen de vergelijkingen $Ap + Bq + 1 = 0$ en $Ar + Bs + 1 = 0$. Dit stelsel van lineaire vergelijkingen geeft lineaire oplossingen voor A en B .
- A2) Het tweede axioma wordt bepaald door $V_{(A,B)}(p, q) = (r, s)$, dus door de vergelijkingen $(A^2 + B^2)r + (A^2 - B^2)p + 2ABq + 2A = 0$ en $(A^2 + B^2)s - (A^2 - B^2)q + 2ABp + 2B = 0$. Deze vergelijkingen zijn kwadratisch in A en B , maar in paragraaf 3.5 hebben we gezien dat A2 lineaire oplossingen heeft. We gebruiken hier de Gröbner-basis om oplossingen te vinden van dit stelsel. Met behulp van MATLAB en de code in appendix A.1.1 krijgen we

$$g_1 = f_1 B^3 + f_2 B^2 + f_3 B + p \cdot f_4 A$$

met $f_1, f_2, f_3, f_4 \in \mathbb{Z}[p, q, r, s]$ en

$$g_2 = h_1 B^4 + h_2 B^3 + h_3 B^2 + h_4 B$$

met

$$\begin{aligned} h_1 &= -p^4 - 2p^2 q^2 + p^2 r^2 + p^2 s^2 - q^4 + q^2 r^2 + q^2 s^2 \\ h_2 &= 2(-2p^2 q + p^2 s - 2q^3 + q^2 s + qr^2 + qs^2) \\ h_3 &= -p^2 - 5q^2 + 4qs + r^2 + s^2 \\ h_4 &= -2(q - s). \end{aligned}$$

Zie appendix A.2.1 voor de volledige vergelijkingen. Herschrijven van $g_2 = 0$ geeft

$$\begin{aligned} 0 &= -(p^2 - q^2)(p^2 + q^2 - r^2 - s^2)B^4 + 2((p^2 + q^2)(s - q) - q(p^2 + q^2 - r^2 - s^2))B^3 \\ &\quad + (4q(s - q) - (p^2 + q^2 - r^2 - s^2))B^2 + 2(s - q)B \\ &= B \cdot ((p^2 + q^2)B^2 + 2qB + 1) \cdot (2(s - q) - B(p^2 + q^2 - r^2 - s^2)). \end{aligned}$$

Hieruit volgt $B = 0$, $(p^2 + q^2)B^2 + 2qB + 1 = 0$ of $2(s - q) - B(p^2 + q^2 - r^2 - s^2) = 0$. Voor $B = 0$ volgt uit $g_1 = 0$ dat $A = 0$, maar dit is niet mogelijk, omdat $(A, B) = (0, 0)$ geen lijn definieert. De discriminant van $(p^2 + q^2)B^2 + 2qB + 1 = 0$ is gelijk aan $D = 4q^2 - 4(p^2 + q^2) = -4p^2$. Hieruit volgt dat we alleen reële oplossingen krijgen als $p = 0$. Voor $p = 0$ wordt de coëfficiënt voor A in g_1 gelijk aan 0, waardoor we geen oplossingen gaan vinden voor A . Hieruit volgt dat de vergelijking $(p^2 + q^2)B^2 + 2qB + 1 = 0$ uiteindelijk alleen complexe oplossingen geeft voor B . Omdat we geïnteresseerd zijn in reële oplossingen, zien we dat er een lineaire vergelijking voor B overblijft, namelijk $2(s - q) - B(p^2 + q^2 - r^2 - s^2) = 0$, waaruit een lineaire vergelijking voor A uit $g_1 = 0$ volgt. Het axioma A2 geeft dus ook vanuit de gevouwen beelden lineaire oplossingen.

A3) Axioma 3 geeft de bissectrice van twee lijnen, gegeven door $V_{(A,B)}(K, L) = (M, N)$, die we verder uitgewerkt hebben in (3.8). We zien twee vergelijkingen die kwadratisch zijn in A en B , maar zoals we net gezien hebben, zegt dat niet altijd alles over de graad van de oplossingen. Met MATLAB krijgen we de Gröbner-basis van de vorm

$$g_1 = B^3 - f_2 B^2 + f_3 \left(\frac{L}{K} B + A \right)$$

en

$$g_2 = h_1 B^4 - h_2 B^3 - h_3 B^2$$

met $f_1, f_2, f_3, h_1, h_2, h_3 \in \mathbb{Z}[K, L, M, N]$. Uit $g_2 = 0$ volgt dat $B^2 = 0$ of $h_1 B^2 + h_2 B + h_3 = 0$. Als $B^2 = 0$, oftewel $B = 0$, volgt uit $g_1 = 0$ dat $A = 0$. Zoals we eerder hebben gezien is dit niet mogelijk. Hieruit volgt dat we een kwadratische vergelijking hebben voor B , waarna we de lineaire vergelijking $g_1 = 0$ hebben voor A . We zien dus dat ook bij het berekenen vanuit de gevouwen beelden het derde axioma een kwadratische uitbreiding geeft.

A4) Het vierde axioma krijgen we volgens tabel 3.2 met $V_{(A,B)}(p, q) = (p, q)$ en $V_{(A,B)}(K, L) = (K, L)$. Dit geeft de vergelijkingen

$$\begin{aligned} Ap + Bq + 1 &= 0 \\ AK + BL &= 0. \end{aligned}$$

Deze vergelijkingen zijn duidelijk lineair, dus het vierde axioma geeft vanuit de gevouwen beelden lineaire oplossingen, zoals we verwachtten.

A5) Axioma 5 wordt gegeven door $K(V_{(A,B)}(r, s))_1 + L(V_{(A,B)}(r, s))_2 + 1 = 0$ en $V_{(A,B)}(p, q) = (p, q)$. Dit geeft de vergelijkingen

$$\begin{aligned} Ap + Bq + 1 &= 0 \\ (A^2 - B^2)(Ls - Kr) - 2AB(Ks + Lr) - 2(AK + BL) + A^2 + B^2 &= 0. \end{aligned}$$

Omdat de eerste vergelijking lineair is, geeft substitutie van bijvoorbeeld $A = -\frac{Bq+1}{p}$ als $p \neq 0$ in de tweede vergelijking een kwadratische vergelijking van B . Omdat in deze vergelijking de constante term ongelijk is aan nul, zien we dat het vijfde axioma een kwadratische uitbreiding geeft.

A6) Het zesde axioma wordt gegeven door $M(V_{(A,B)}(p, q))_1 + N(V_{(A,B)}(p, q))_2 + 1 = 0$ en $K(V_{(A,B)}(r, s))_1 + L(V_{(A,B)}(r, s))_2 + 1 = 0$ waaruit we de vergelijkingen

$$\begin{aligned}(A^2 - B^2)(Nq - Mp) - 2AB(Mq + Np) - 2(AM + BN) + A^2 + B^2 &= 0 \\ (A^2 - B^2)(Ls - Kr) - 2AB(Ks + Lr) - 2(AK + BL) + A^2 + B^2 &= 0\end{aligned}$$

krijgen. Hier hebben we wederom de Gröbner-basis nodig om meer te kunnen zeggen over de graad van de uitbreidingen. We krijgen

$$\begin{aligned}g_1 &= f_1A + f_2B + f_3B^2 + f_4B^3 \\ g_2 &= h_1B^4 + h_2B^3 + h_3B^2 + h_4B\end{aligned}$$

met $f_1, f_2, f_3, f_4, h_1, h_2, h_3, h_4 \in \mathbb{Z}[K, L, M, N, p, q, r, s]$. Uit $g_2 = 0$ volgt $B = 0$ of $h_1B^3 + h_2B^2 + h_3B + h_4 = 0$. Uit $g_1 = 0$ volgt met $B = 0$ dat $A = 0$, wat niet kan, dus hebben we een derdegraads vergelijking voor B . De waarde van B geeft vervolgens een lineaire vergelijking voor A in $g_1 = 0$, dus we krijgen ook met de gevouwen beelden een derdegraads uitbreiding voor het zesde axioma.

Natuurlijk hadden we ook een geval gevonden waarbij het zesde axioma een uitbreiding geeft van graad 2, namelijk voor evenwijdige lijnen. Als we de Gröbner-basis bepalen met $M = aK$ en $N = aN$, waarbij a een constante is, krijgen we

$$\begin{aligned}g_1 &= A - f_1B^3 + f_2B^2 + f_3B \\ g_2 &= B^4 + h_1B^3 + h_2B^2\end{aligned}$$

met $f_1, f_2, f_3, h_1, h_2 \in \mathbb{Z}[K, L, p, q, r, s]$. We zien opnieuw dat $B \neq 0$, dus we kunnen B^2 wegdelen uit $g_2 = 0$. Dit geeft de kwadratische vergelijking $B^2 + h_1B + h_2 = 0$. Als we de waarde van B weten, volgt uit $g_1 = 0$ een lineaire vergelijking voor A . We zien dus ook hier hooguit een kwadratische uitbreiding als we evenwijdige lijnen hebben voor A6.

A7) Tot slot het zevende axioma. De vergelijkingen worden gegeven door $V_{(A,B)}(K, L) = (K, L)$ en $M(V_{(A,B)}(p, q))_1 + N(V_{(A,B)}(p, q))_2 + 1 = 0$, namelijk

$$AK + BL = 0 \quad (3.9)$$

$$(A^2 - B^2)(Nq - Mp) - 2AB(Mq + Np) - 2(AM + BN) + A^2 + B^2 = 0. \quad (3.10)$$

Dit axioma kunnen we op een vergelijkbare manier bekijken als het vijfde axioma. De eerste vergelijking is weer lineair, dus substitutie in de tweede vergelijking van $A = -\frac{L}{K}B$ voor $K \neq 0$ geeft een kwadratische vergelijking voor B , namelijk

$$\left(\frac{L^2}{K^2} - 1\right) B^2(Nq - Mp) + 2\frac{L}{K}B^2(Mq + Np) - 2\left(N - \frac{LM}{K}\right)B + \left(\frac{L^2}{K^2} + 1\right)B^2 = 0$$

Het verschil met het vijfde axioma is dat we in deze vergelijking B uit kunnen delen. Daarom volgt dat $B = 0$ of we hebben een lineaire vergelijking voor B . Als $B = 0$ volgt uit de eerste vergelijking dat $A = 0$ of $K = 0$. We hadden aangenomen dat $K \neq 0$ en $A = 0$ is ook niet mogelijk, omdat $B = 0$. Voor $K \neq 0$ krijgen we daarom een lineaire vergelijking voor B , waaruit de lineaire vergelijking (3.9) voor A volgt.

Als $K = 0$, volgt uit vergelijking (3.9) dat $B = 0$ of $L = 0$. Omdat $K = 0$ kan L niet gelijk zijn aan nul, omdat dit wederom geen lijn definieert. Dus we hebben $B = 0$. Voor $K = 0$ en $B = 0$ wordt vergelijking (3.10) gelijk aan $A^2(Nq - Mp + 1) - 2AM = 0$. Omdat $B = 0$ weten we $A \neq 0$, dus kunnen we delen door A . Dit geeft de lineaire vergelijking $A(Nq - Mp + 1) - 2M = 0$.

We hebben dus voor zowel $K \neq 0$ als $K = 0$ lineaire vergelijkingen voor A en B .

We zien dat we voor elk axioma dezelfde graad vergelijkingen krijgen als we berekend hadden in paragraaf 3.4. Dit biedt perspectief voor het berekenen van de lichaamsuitbreidingen in algemenere gevallen, zoals bij 2-vouw origami.

3.8 Klassieke Constructieproblemen

We zullen nu opnieuw kijken naar de drie klassieke constructieproblemen. Uit lemma 3.19 volgt dat $\sqrt[3]{2}$ construeerbaar is met origami constructies. Daarnaast volgt uit stelling 3.18 dat $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 3$ impliceert dat α origamiconstrueerbaar is. De tegenvoorbeelden die we in proposities 2.14 en 2.17 gebruikt hebben, zijn daarom geen tegenvoorbeelden meer voor origamiconstructies. We zullen de drie klassieke constructieproblemen daarom opnieuw bekijken voor origamiconstructies.

Propositie 3.20. *De verdubbeling van de kubus is te construeren met origami.*

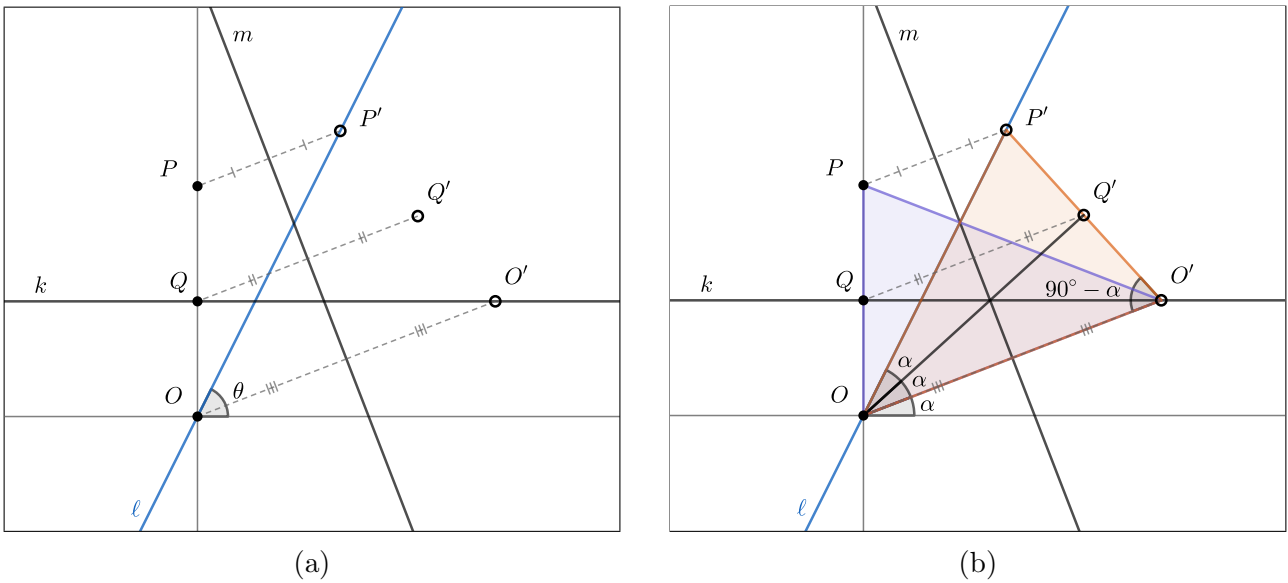
Bewijs. Stel we hebben een kubus met ribben van lengte a . Dan heeft de kubus een inhoud van a^3 , dus heeft de kubus die we willen construeren een inhoud van $2a^3$. De te construeren kubus heeft daarom ribben van $\sqrt[3]{2a^3} = a\sqrt[3]{2}$. Vanwege $2 \in \mathcal{O}$ volgt uit lemma 3.19 dat $\sqrt[3]{2}$ construeerbaar is. Met lemma 3.10 volgt dat $a\sqrt[3]{2}$ construeerbaar is. Hieruit volgt dat we met origami een kubus kunnen construeren met dubbel zoveel inhoud als dat van een gegeven kubus. \square

We zien dus dat we het eerste klassieke constructieprobleem wel op kunnen lossen met origami. Hetzelfde geldt voor het tweede probleem:

Propositie 3.21. *De driedeling van een hoek is construeerbaar met origami.*

Bewijs. Omdat we met A3 een hoek altijd in twee gelijke delen kunnen verdelen, mogen we aannemen dat de hoek die we in drie stukken willen verdelen kleiner is dan 90° . We zullen met behulp van Abe's driedeling, zoals beschreven door Demaine en O'Rourke [4, §19.2], bewijzen dat een scherpe hoek in drie gelijke delen te verdelen is door middel van origamiconstructies. We beginnen met een lijn ℓ die door de oorsprong O gaat en een hoek θ met de positieve x -as maakt. Dit is de hoek die we in drie gelijke delen willen verdelen. We construeren het punt P op de positieve y -as op afstand 1 van O . Vervolgens construeren we met A7 lijn k loodrecht op de y -as door P op de x -as af te beelden. Het snijpunt van k met de y -as noemen we Q . Het punt Q is zo geconstrueerd dat het het middelpunt is van lijnstuk OP . Vervolgens construeren we met A6 de lijn m die P op ℓ afbeeldt en O op k . We noemen de beeldpunten van P , Q en O respectievelijk P' , Q' en O' . Ook voor de beeldpunten geldt dat Q' het middelpunt is van lijnstuk $O'P'$. Zie figuur 3.14a. Omdat O' op k ligt en k de middelloodlijn van OP is, volgt dat de afstand $O'P$ gelijk is aan de afstand $O'O$. Er geldt dat $\triangle O'OP$ een gelijkbenige driehoek is. Aangezien $\triangle OO'P'$ het spiegelbeeld is van $\triangle O'OP$ in lijn m , is $\triangle OO'P'$ ook gelijkbenig. Omdat Q' het middelpunt van $O'P'$ is, kunnen we $\angle O'OP'$ precies in twee gelijke delen verdelen: $\angle O'OQ' = \angle Q'O'P' = \alpha$, zie figuur 3.14b. Vanwege de gelijkbenigheid van $\triangle OO'P'$ volgt nu dat $\angle OO'P' = 90^\circ - \alpha$. Omdat deze hoek het spiegelbeeld is van $\angle O'OP$, volgt $\angle O'OP = 90^\circ - \alpha$. We weten dat de coördinaatassen loodrecht op elkaar staan, dus er geldt dat de hoek tussen OO' en de positieve x -as gelijk is aan α , zie figuur 3.14b. We hebben nu $\theta = \alpha + \alpha + \alpha$, zoals we wilden. \square

Tot slot hebben we nog het laatste klassieke constructieprobleem.



Figuur 3.14: Driedeling van de hoek θ .

Propositie 3.22. *De kwadratuur van een cirkel is niet construeerbaar met origami.*

Bewijs. Dit bewijs is vrijwel identiek aan de situatie met passer en latje (propositie 2.18). Omdat $[\mathbb{Q}(\pi) : \mathbb{Q}]$ niet eindig is, is het niet te schrijven als $2^n 3^m$ voor gehele getallen $n, m \geq 0$. Met gevolg 3.15 volgt nu dat π geen origamiconstrueerbaar getal is, dus $\sqrt{\pi}$ is niet construeerbaar. We kunnen concluderen dat we ook met origami geen vierkant kunnen construeren met een oppervlakte van π . □

We hebben nu twee van de drie klassieke problemen opgelost. De echte uitdaging wordt om een methode van constructies te vinden die ook het laatste probleem kan construeren. Het is natuurlijk maar de vraag of een dergelijke methode kan bestaan.

Hoofdstuk 4

2-vouw Origami

In het vorige hoofdstuk hebben we gezien wat er mogelijk is met origami. Dat wil zeggen, met 1-vouw origami. Als we ons niet beperken tot enkele vouwen, maar ook toestaan dat vouwlijnen van elkaar afhangen, is er nog meer mogelijk. Hoewel we dit kunnen doen voor eindig veel vouwen tegelijk, dus n -vouw origami, zullen we ons in dit hoofdstuk vooral richten op 2-vouw origami. We zullen kijken naar wat er nodig is om een axioma te definiëren en vervolgens een aantal axioma's onderzoeken. Tot slot zullen we kijken naar toepassingen. We zullen een aantal constructies bekijken waarbij we 2-vouw axioma's nodig hebben. Vervolgens zullen we Lill's methode bestuderen voor 2-vouw en dit tenslotte uitbreiden naar n -vouw. Omdat het tegelijkertijd vouwen van snijdende lijnen in de praktijk nogal lastig is, gaat dit hoofdstuk vooral over wat er in theorie mogelijk is. Het daadwerkelijk uitvoeren is een ander verhaal.

4.1 Uitlijningen

In deze paragraaf zullen we onderzoeken wat Alperin en Lang [1] beschrijven over de 2-vouw axioma's. Voor de 1-vouw axioma's hebben we in paragraaf 3.2 gezien dat we de axioma's terug kunnen vinden vanuit de verschillende uitlijningen. We zullen nu uitzoeken welke uitlijningen er bestaan voor de 2-vouw axioma's, om vervolgens iets te kunnen zeggen over de axioma's zelf.

Een 2-vouw uitlijning bestaat uit twee vouwlijnen (A, B) en (C, D) die ieder punten en/of lijnen op elkaar afbeelden. Alperin en Lang hebben een aantal voorwaarden gesteld aan wat we een 2-vouw uitlijning noemen. Als een van de twee vouwlijnen volledig bepaald wordt door de uitlijningen, en dus eigenlijk een 1-vouw axioma wordt, tellen we dit niet mee als 2-vouw uitlijning. De uitlijningen $P_1 - P_2$ en $L_1 - L_2$, waarbij beide punten of lijnen gegeven zijn, zullen we dus niet meetellen, omdat deze volgens het bewijs van lemma 3.7 equivalent zijn met respectievelijk A2 en A3.

We zullen de uitlijningen noteren met ALi, waarbij AL staat voor uitlijning (*alignment*) en i het nummer van de uitlijning. Verder gebruiken we (p, q) en (r, s) voor bestaande construeerbare punten en (K, L) en (M, N) voor bestaande construeerbare lijnen. Alperin en Lang hebben de volgende uitlijningen beschreven. Zie figuur 4.1 voor een visuele weergave.

AL1) Vouwlijn (A, B) beeldt vouwlijn (C, D) af op vouwlijn (C, D)

$$V_{(A,B)}(C, D) = (C, D)$$

AL2) Vouwlijn (A, B) beeldt lijn (K, L) af op lijn (K, L)

$$V_{(A,B)}(K, L) = (K, L)$$

AL3) Vouwlijn (A, B) beeldt punt (p, q) af op punt (p, q)

$$V_{(A,B)}(p, q) = (p, q)$$

AL4) Vouwlijn (A, B) beeldt lijn (K, L) af op vouwlijn (C, D)

$$V_{(A,B)}(K, L) = (C, D)$$

AL5) Vouwlijn (A, B) beeldt punt (p, q) af op vouwlijn (C, D)

$$V_{(A,B)}(p, q) \in (C, D)$$

AL6) Vouwlijn (A, B) beeldt punt (p, q) af op lijn (K, L)

$$V_{(A,B)}(p, q) \in (K, L)$$

AL7) Vouwlijn (A, B) beeldt punt (p, q) af precies waar vouwlijn (C, D) lijn (K, L) afbeeldt

$$V_{(A,B)}(p, q) \in V_{(C,D)}(K, L)$$

AL8) Vouwlijn (A, B) beeldt punt (p, q) af precies waar vouwlijn (C, D) punt (r, s) afbeeldt

$$V_{(A,B)}(p, q) = V_{(C,D)}(r, s)$$

AL9) Vouwlijn (A, B) beeldt lijn (K, L) af precies waar vouwlijn (C, D) lijn (M, N) afbeeldt

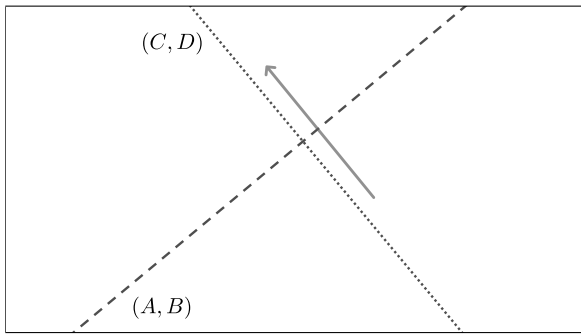
$$V_{(A,B)}(K, L) = V_{(C,D)}(M, N)$$

AL10) Vouwlijn (C, D) beeldt het snijpunt van vouwlijn (A, B) en lijn (K, L) af op lijn (M, N)

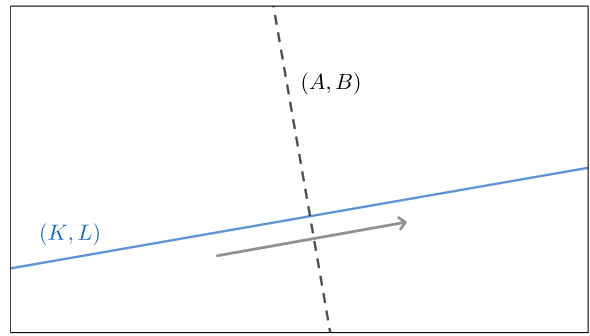
$$S := \text{snijpunt van } (A, B) \text{ en } (K, L)$$

$$V_{(C,D)}(S) \in (M, N)$$

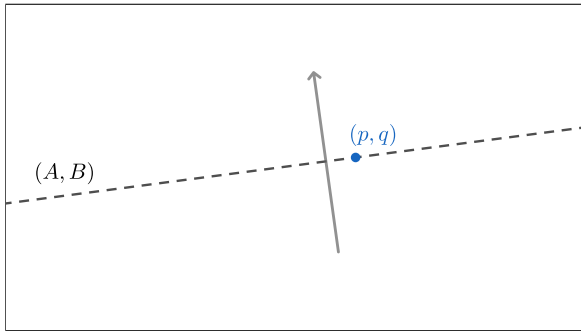
We zien dat in AL1 vouwlijn (A, B) een loodlijn is van vouwlijn (C, D) . Omdat vouwlijn (C, D) daardoor ook de loodlijn is van vouwlijn (A, B) , zijn de rollen van de vouwlijnen in deze uitlijning dus uitwisselbaar. In AL8 en AL9 zien we ook dat beide vouwlijnen dezelfde rol hebben. Daar staat tegenover dat in bijvoorbeeld AL5 het verwisselen van de vouwlijnen een andere uitlijning geeft. We zien dat voor AL2-AL7 en AL10 geldt dat er twee versies bestaan. We zullen de versies aangeven met a en b, bijvoorbeeld AL2b, waarbij a de uitlijning is zoals beschreven en b de uitlijning waarbij de rollen van de vouwlijnen verwisseld zijn.



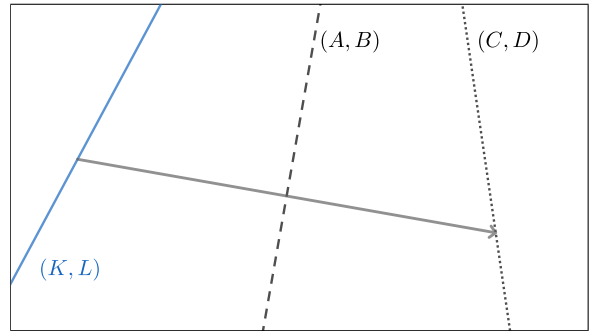
AL1



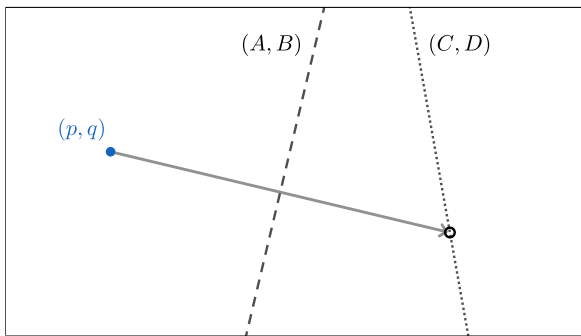
AL2



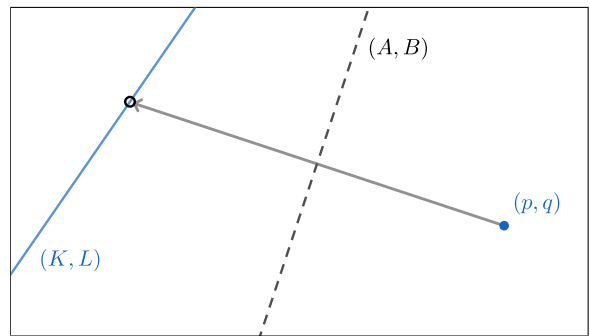
AL3



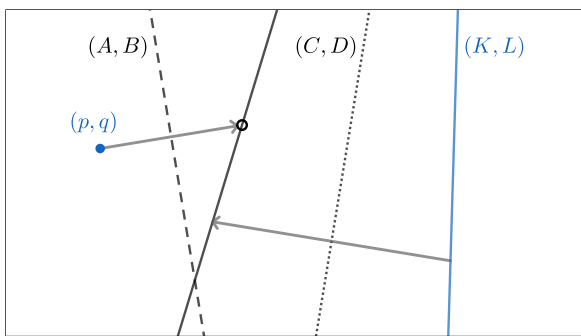
AL4



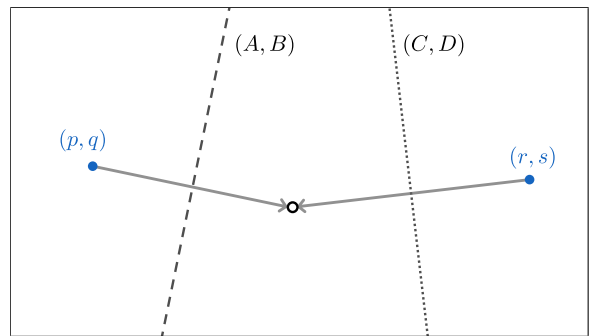
AL5



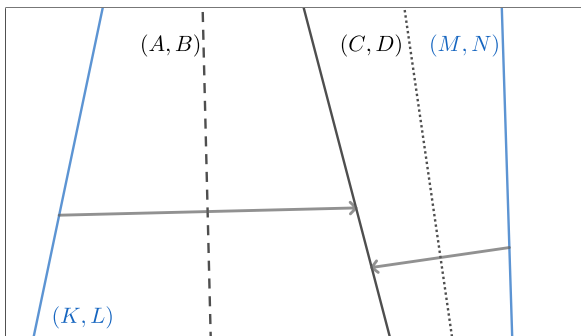
AL6



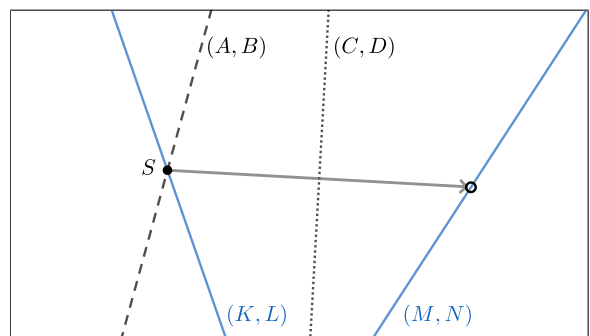
AL7



AL8



AL9



AL10

Figuur 4.1: De 2-vouw uitlijningen

Dan nu de definitie van een 2-vouw axioma.

Definitie 4.1. [1, def. 9] Een **2-vouw axioma** is een minimale verzameling van uitlijningen die eindig veel mogelijkheden voor twee gelijktijdige vouwlijnen definiëren op een eindig stuk papier.

Omdat we voor een 2-vouw axioma de coëfficiënten van twee lijnen moeten bepalen, waarvoor we eindig veel oplossingen willen, hebben we vier onafhankelijke vergelijkingen nodig. We zullen nu eerst per uitlijning het aantal vergelijkingen bepalen. We maken hierbij gebruik van tabel 3.4, waarvan we de vergelijkingen voor AL1 tot en met AL6 direct af kunnen lezen, waarbij we zo nodig een aantal letters vervangen. Verder zien we dat de vergelijkingen van AL8 en AL9 direct uit de vergelijkingen voor de gevouwen beelden in lemma 3.4 volgen. Omdat deze vergelijkingen niet veel eenvoudiger te schrijven zijn, zullen we deze niet verder uitwerken. Dan rest ons nu nog de vergelijkingen van AL7 en AL10 te bepalen.

Uitlijning AL7 wordt gegeven door $V_{(A,B)}(p, q) \in V_{(C,D)}(K, L)$, oftewel

$$(V_{(C,D)}(K, L))_1(V_{(A,B)}(p, q))_1 + (V_{(C,D)}(K, L))_2(V_{(A,B)}(p, q))_2 + 1 = 0.$$

Invullen van de gevouwen beelden uit lemma 3.4 geeft

$$\begin{aligned} -\frac{(C^2 - D^2)K + 2CDL}{C^2 - 2CK - 2DL + D^2} \cdot -\frac{(A^2 - B^2)p + 2ABq + 2A}{A^2 + B^2} \\ + \frac{(C^2 - D^2)L - 2CDK}{C^2 - 2CK - 2DL + D^2} \cdot \frac{(A^2 - B^2)q - 2ABp - 2B}{A^2 + B^2} + 1 = 0 \end{aligned}$$

en dit geeft

$$\begin{aligned} ((C^2 - D^2)K + 2CDL)((A^2 - B^2)p + 2ABq + 2A) + \\ ((C^2 - D^2)L - 2CDK)((A^2 - B^2)q - 2ABp - 2B) + \\ (C^2 - 2CK - 2DL + D^2)(A^2 + B^2) = 0, \end{aligned}$$

wat helaas een vrij lange vergelijking is.

Uitlijning AL10 heeft als vergelijking $V_{(C,D)}(S) \in (M, N)$, oftewel

$$M(V_{(C,D)}(S))_1 + N(V_{(C,D)}(S))_2 + 1 = 0$$

waarbij S het snijpunt van (A, B) en (K, L) is. Uit lemma 1.31 volgt $S = \left(\frac{L-B}{BK-AL}, \frac{A-K}{BK-AL} \right)$. Dit geeft

$$\begin{aligned} (V_{(C,D)}(S))_1 &= -\frac{(C^2 - D^2)\frac{L-B}{BK-AL} + 2CD\frac{A-K}{BK-AL} + 2C}{C^2 + D^2} \\ (V_{(C,D)}(S))_2 &= \frac{(C^2 - D^2)\frac{A-K}{BK-AL} - 2CD\frac{L-B}{BK-AL} - 2D}{C^2 + D^2}. \end{aligned}$$

Invullen in $Mx + Ny + 1 = 0$ en vermenigvuldigen met $(C^2 + D^2)(BK - AL)$ geeft

$$\begin{aligned} -M((C^2 - D^2)(L - B) + 2CD(A - K) + 2C(BK - AL)) + \\ N((C^2 - D^2)(A - K) - 2CD(L - B) - 2D(BK - AL)) + \\ (C^2 + D^2)(BK - AL) = 0, \end{aligned}$$

waaruit volgt

$$\begin{aligned} (C^2 - D^2)(N(A - K) - M(L - B)) - 2CD(M(A - K) + N(L - B)) + \\ (C^2 + D^2 - 2(CM + DN))(BK - AL) = 0. \end{aligned}$$

In tabel 4.1 zien we overzichtelijk de vergelijkingen per uitlijning. We zien dus dat AL4, AL8 en AL9 twee vergelijkingen geven, terwijl de andere uitlijningen ieder een enkele vergelijking geven.

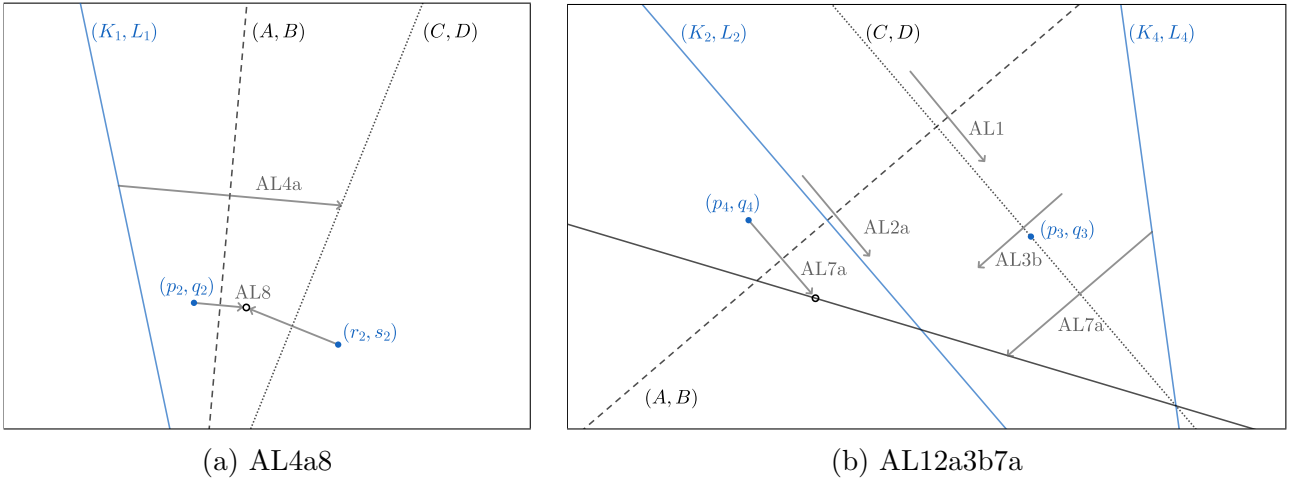
AL1	$AC + BD = 0$
AL2	$AK + BL = 0$
AL3	$Ap + Bq + 1 = 0$
AL4	$(A^2 - 2AK - 2BL + B^2)C + (A^2 - B^2)K + 2ABL = 0$ $(A^2 - 2AK - 2BL + B^2)D - (A^2 - B^2)L + 2ABK = 0$
AL5	$(A^2 - B^2)(Dq - Cp) - 2AB(Cq + Dp) - 2(AC + BD) + A^2 + B^2 = 0$
AL6	$(A^2 - B^2)(Lq - Kp) - 2AB(Kq + Lp) - 2(AK + BL) + A^2 + B^2 = 0$
AL7	$((C^2 - D^2)K + 2CDL)((A^2 - B^2)p + 2ABq + 2A)$ $+((C^2 - D^2)L - 2CDK)((A^2 - B^2)q - 2ABp - 2B)$ $+(C^2 - 2CK - 2DL + D^2)(A^2 + B^2) = 0$
AL8	$\frac{(A^2 - B^2)p + 2ABq + 2A}{A^2 + B^2} = \frac{(C^2 - D^2)r + 2CDs + 2C}{C^2 + D^2}$ $\frac{(A^2 - B^2)q - 2ABp - 2B}{A^2 + B^2} = \frac{(C^2 - D^2)s - 2CDr - 2D}{C^2 + D^2}$
AL9	$\frac{(A^2 - B^2)K + 2ABL}{A^2 - 2AK - 2BL + B^2} = \frac{(C^2 - D^2)M + 2CDN}{C^2 - 2CM - 2DN + D^2}$ $\frac{(A^2 - B^2)L - 2ABK}{A^2 - 2AK - 2BL + B^2} = \frac{(C^2 - D^2)N - 2CDM}{C^2 - 2CM - 2DN + D^2}$
AL10	$(C^2 - D^2)(N(A - K) - M(L - B)) - 2CD(M(A - K) + N(L - B))$ $+(C^2 + D^2 - 2(CM + DN))(BK - AL) = 0$

Tabel 4.1: Overzicht vergelijkingen per uitlijning.

4.2 Axioma's

Voor het definiëren van een 2-vouw axioma moeten we combinaties maken van de uitlijningen die we gevonden hebben in de vorige paragraaf, zodat we precies vier vergelijkingen krijgen. Alperin en Lang hebben berekend dat er 489 verschillende 2-vouw axioma's bestaan en geven hier een volledige lijst van [1]. Je zult begrijpen dat we deze niet allemaal kunnen bespreken. We noteren deze axioma's symbolisch, waarbij we het voorvoegsel AL niet steeds herhalen. Zo is het axioma AL12a3b7a het axioma dat ontstaat uit AL1, AL2a, AL3b en AL7a en bedoelen we met AL3ab4a het axioma dat ontstaat uit AL3a, AL3b en AL4a. Hoe deze axioma's er in de praktijk uitzien, zien we in figuur 4.2.

Om meer te kunnen zeggen over de lichaamsuitbreidingen die deze axioma's generen, hebben we een Matlabcode geschreven die de Gröbner-basis van een axioma kan berekenen, die te vinden is in Appendix A.1.2. Omdat de punten en lijnen verschillend kunnen zijn voor de uitlijningen en zelfs voor het herhaald gebruiken van dezelfde uitlijning, nummeren we de punten en lijnen aan de hand van de plek van de uitlijning in het axioma. Zo is bijvoorbeeld (p_2, q_2) een punt die wordt gebruikt door AL3b in het axioma AL3ab4a en (K_4, L_4) een lijn die gebruikt wordt door AL7a in het axioma AL12a3b7a.



Figuur 4.2: Voorbeelden van 2-vouw axioma's.

Voor dit laatste axioma, zie figuur 4.2b, krijgen we

$$\begin{aligned}
g_1 &= AK_2 + BL_2 \\
g_2 &= B \frac{h_1}{K_2 h_2} + B^2 \frac{h_3}{K_2^2 h_2} \\
g_3 &= B \frac{L_2}{K_2 p_3} + BD \frac{K_2 p_3 + L_2 q_3}{K_2 p_3} \\
g_4 &= Cp_3 + Dq_3 + 1,
\end{aligned}$$

met $h_1, h_2, h_3 \in \mathbb{Z}[K_2, K_4, L_2, L_4, p_3, p_4, q_3, q_4]$. De volledige Gröbner-basis is te vinden in Appendix A.2.2.

Uit $g_2 = 0$ volgt dat $B = 0$ of $B = -\frac{h_1}{K_2 \cdot h_2} \cdot \frac{K_2^2 \cdot h_2}{h_3} = -\frac{h_1 \cdot K_2}{h_3}$. Als $B = 0$, dan volgt uit $g_1 = 0$ dat $A = 0$, wat niet mogelijk is. We krijgen dus een lineaire vergelijking voor B . Verder volgt uit $g_3 = 0$ met $B \neq 0$ dat ook D uit een lineaire vergelijking volgt. Als we B en D weten, volgen uit $g_1 = 0$ en $g_4 = 0$ respectievelijk de waarden van A en C met lineaire vergelijkingen. We zien dus dat het axioma AL12a3b7a geen lichaamsuitbreidingen geeft.

Het axioma AL2a3b5a7b geeft de volgende Gröbner-basis:

$$\begin{aligned}
g_1 &= AK_1 + BL_1 \\
g_2 &= 2BD^2 \frac{f_1}{f_2} + 2B \frac{f_3}{f_4} - B^2 \frac{f_5}{f_6} + 2BD \frac{f_7}{f_8} \\
g_3 &= 2BD^3 \frac{h_1}{h_2} - 2BD^2 \frac{h_3}{h_2} - 2BD \frac{h_4}{h_2} - 2B \frac{h_5}{h_2} \\
g_4 &= Cp_2 + Dq_2 + 1,
\end{aligned}$$

met $f_1, \dots, f_8, h_1, \dots, h_5 \in \mathbb{Z}[K_1, K_4, L_1, L_4, p_2, p_3, p_4, q_2, q_3, q_4]$

Uit $g_3 = 0$ volgt $B = 0$ of een derdegraads vergelijking voor D . Net als bij het vorige axioma geldt dat $B \neq 0$, vanwege $g_1 = 0$ en $(A, B) \neq (0, 0)$. We krijgen dus een derdegraads vergelijking voor D met een constante term. We kunnen D dus niet wegdelen. Als we een waarde van D gevonden hebben, volgt uit $g_2 = 0$ een kwadratische vergelijking voor B , maar zonder constante term. Omdat $B \neq 0$ volgt een lineaire vergelijking voor B . Tot slot volgen uit $g_1 = 0$ en $g_4 = 0$ lineaire vergelijkingen voor A en C . Dit axioma geeft dus hooguit een derdegraads lichaamsuitbreiding.

Helaas wordt het berekenen van de Gröbner-basis steeds complexer naarmate de graad van de vergelijkingen hoger wordt. Het duurt daardoor te lang om met Matlab de Gröbner-basis van axioma's te berekenen van hogere graad. Door met getallenvoorbeelden te werken in plaats van de symbolische punten en lijnen, lukt het voor sommige axioma's wel om de Gröbner-basis te bepalen. Hierbij is het wel belangrijk om te bedenken dat dit om voorbeelden gaat, dus het kan zijn dat we voor andere getallen een hogere graad uitbreiding krijgen. Dit zullen we illustreren aan de hand van AL3a5b6b7b.

Als we de substitutie

$$[p_1, p_2, p_3, p_4, q_1, q_2, q_3, q_4, K_3, K_4, L_3, L_4] \mapsto [1, 1, 1, 1, 0, 2, 0, 0, 1, -1, -2, 1]$$

gebruiken, krijgen we als Gröbner-basis

$$\begin{aligned} g_1 &= A + 1 \\ g_2 &= D(-a_1D^8 + a_2D^7 + a_3D^6 + a_4D^5 + a_5D^4 - a_6D^3 + a_7D^2 - a_8D + a_9B - a_{10}) \\ g_3 &= -b_1D^9 + b_2D^8 + b_3D^7 + b_4D^6 + b_5D^5 + b_6D^4 + b_7D^3 - b_8D^2 - b_9D + b_{10}C \\ g_4 &= D(2D^5 - 22D^4 - 33D^3 + 15D^2 + 17D + 1)(D^2 + 1)(D^2 + 1) \end{aligned}$$

met $a_1, \dots, a_{10}, b_1, \dots, b_{10} \in \mathbb{N}$, waarbij we de polynomen gelijk gefactoriseerd hebben voor zover dit mogelijk is. Uit $g_4 = 0$ volgt $D = 0$, $D = \pm i$ of een D is een oplossing van $2D^5 - 22D^4 - 33D^3 + 15D^2 + 17D + 1$. Voor $D = 0$ volgt uit $g_3 = 0$ dat $C = 0$, wat niet mogelijk is. Verder weten we dat D altijd reëel is, dus $D \neq \pm i$. Dan blijft het polynoom van graad 5 over. Dit polynoom is irreducibel en heeft reële oplossingen. Voor elk van deze oplossingen krijgen we uit $g_2 = 0$ en $g_3 = 0$ lineaire vergelijkingen voor B en C . Tot slot geldt in alle gevallen dat $A = -1$. We krijgen dus een lichaamsuitbreiding van graad 5 voor deze substitutie, omdat het polynoom voor D irreducibel en van graad 5 is.

Als we de substitutie

$$[p_1, p_2, p_3, p_4, q_1, q_2, q_3, q_4, K_3, K_4, L_3, L_4] \mapsto [0, 1, 2, 3, 3, 2, 1, 0, 0, 1, 1, 0]$$

gebruiken, krijgen we als Gröbner-basis

$$\begin{aligned} g_1 &= D(a_1D^8 - a_2D^7 - a_3D^6 - a_4D^5 - a_5D^4 - a_6D^3 - a_7D^2 - a_8D + a_9A - a_{10}) \\ g_2 &= 3B + 1 \\ g_3 &= -b_1D^9 + b_2D^8 + b_3D^7 + b_4D^6 + b_5D^5 + b_6D^4 + b_7D^3 + b_8D^2 + b_9D + b_{10}C \\ g_4 &= D(5D^2 + 2D + 1)(c_1D^7 - c_2D^6 - c_3D^5 - c_4D^4 - c_5D^3 - c_6D^2 - c_7D - c_8), \end{aligned}$$

met $a_1, \dots, a_{10}, b_1, \dots, b_{10}, c_1, \dots, c_8 \in \mathbb{N}$, waarbij we opnieuw de polynomen gefactoriseerd hebben. We zien met $g_3 = 0$ dat $D \neq 0$. Uit $g_4 = 0$ volgt dus dat $5D^2 + 2D + 1 = 0$ of $c_1D^7 - c_2D^6 - c_3D^5 - c_4D^4 - c_5D^3 - c_6D^2 - c_7D - c_8 = 0$. Omdat de kwadratische vergelijking geen reële oplossingen heeft, blijft er een polynoom van graad 7 over voor D . Dit is wederom een irreducibel polynoom. Op dezelfde manier als hiervoor zien we dat we voor A , B en C alleen lineaire vergelijkingen overhouden als we D bepaald hebben. Voor deze substitutie krijgen we dus een lichaamsuitbreiding van graad 7.

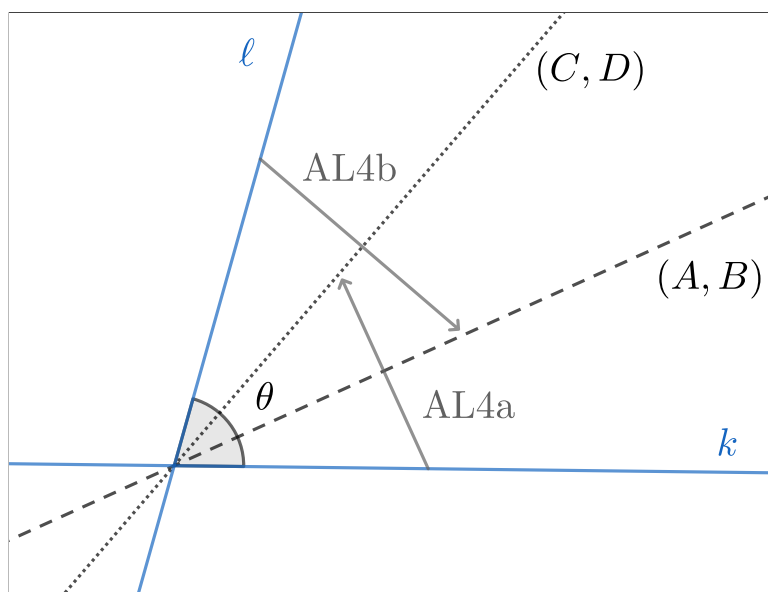
We zien dat we voor verschillende substituties verschillende lichaamsuitbreidingen kunnen krijgen. De volledige Gröbner-basis voor beide substituties is te vinden in Appendix A.2.3. Omdat zowel 5 als 7 niet geschreven kan worden als $2^n 3^m$, kunnen we wel concluderen dat de verzameling construeerbare getallen met 2-vouw origami strikt groter is dan \mathcal{O} .

4.3 Constructies

In deze paragraaf zullen we kijken naar een aantal toepassingen van 2-vouw origami. Daarnaast zullen we ook een aantal constructies zien met meer dan 2 vouwen die van elkaar afhangen.

4.3.1 Driedeling van een hoek

Zoals we in hoofdstuk 3 gezien hebben, kunnen we met 1-vouw origami een hoek in drie gelijke delen verdelen. Hetzelfde kunnen we doen met 2-vouw origami, maar dan een stuk eenvoudiger. Als we twee lijnen k en ℓ hebben die elkaar onder een hoek θ snijden, kunnen we de hoek in drie delen verdelen door het axioma AL4ab. Voor de eerste uitlijning beelden we lijn k met vouwlijn (A, B) af op vouwlijn (C, D) en met de tweede uitlijning beelden we lijn ℓ met vouwlijn (C, D) af op vouwlijn (A, B) . De twee vouwlijnen delen de hoek nu precies in drie gelijke delen. Zie figuur 4.3.



Figuur 4.3: Driedeling van een hoek met AL4ab.

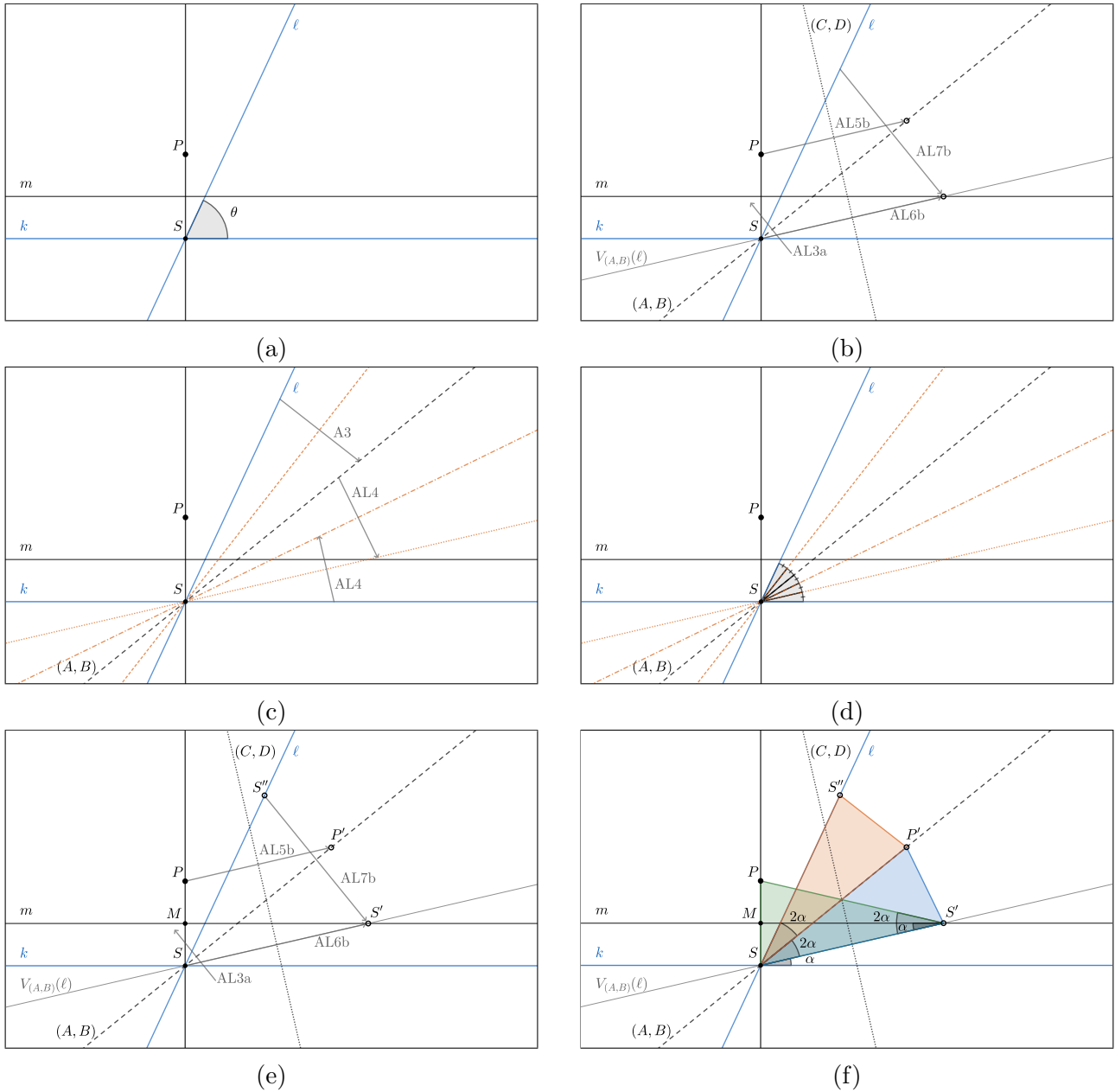
4.3.2 Vijfdeling van een hoek

We hebben in hoofdstuk 3 niet onderzocht of we een hoek in vijf gelijke delen kunnen verdelen. Het blijkt dat hier in het algemeen de oplossing van een polynoom van graad 5 voor nodig is [1]. Omdat we met 1-vouw origami alleen polynomen van graad 2 of 3 op kunnen lossen, zal de vijfdeling van een hoek niet mogelijk zijn. We hebben gezien dat de verzameling van construeerbare getallen voor 2-vouw origami strikt groter is dan \mathcal{O} en de vijfdeling van een hoek blijkt met 2-vouw origami wel mogelijk.

Lemma 4.2. *Een gegeven hoek is met behulp van 2-vouw origami in vijf gelijke delen te verdelen.*

Constructie. Deze constructie is gebaseerd van de constructie van Robert J. Lang [9]. We beginnen met twee lijnen k en ℓ die elkaar onder een hoek van θ snijden in het punt S . We kunnen net als bij de driedeling van een hoek aannemen dat de hoek kleiner dan 90° is, omdat we de hoek altijd met 1-vouw origami in twee gelijke delen kunnen verdelen. Vervolgens maken we een loodlijn op lijn k door S en construeren we een punt P op afstand 1 van S op deze lijn. Met A2 construeren we nu lijn m door P op S af te beelden, zie figuur 4.4a. Dan zijn we nu

klaar voor de belangrijkste stap, het 2-vouw axioma AL3a5b6b7b. Het toepassen van AL3a op punt S betekent dat vouwlijn (A, B) door het punt S gaat. Vervolgens zorgt AL5b ervoor dat vouwlijn (C, D) punt P op vouwlijn (A, B) afbeeldt. Uitlijning AL6b beeldt punt S af op lijn m en tot slot beeldt vouwlijn (C, D) het punt S af op het gevouwen beeld van lijn ℓ , zie figuur 4.4b. Nu kunnen we met behulp van het 1-vouw axioma A3 de hoek tussen ℓ en (A, B) in twee delen verdelen, terwijl we met AL4ab de hoek tussen ℓ en k in drieën delen, zoals we net gezien hebben in paragraaf 4.3.1. Zie figuur 4.4c.



Figuur 4.4: De vijfdeling van een hoek.

Bewijs. We zullen nu bewijzen dat de vouwlijnen de hoek θ precies in vijf gelijke delen verdelen, zoals in figuur 4.4d. Als we teruggaan naar de situatie van figuur 4.4b, noemen we het beeldpunt van P onder AL5b P' , het beeldpunt van S onder AL6b noemen we S' , het 'beeldpunt' van S' onder AL7b noemen we S'' en het snijpunt van m en de loodlijn op k noemen we M , zoals in figuur 4.4e. We zien dat vouwlijn (C, D) de driehoek PSS' afbeeldt op $\Delta P'S'S$ en dat vouwlijn (A, B) driehoek $P'S'S$ afbeeldt op $\Delta P'S''S$. We zien dus dat $\Delta PSS'$, $\Delta P'S'S$ en $\Delta P'S''S$

congruente driehoeken zijn, zie figuur 4.4f. Daarnaast geldt dat lijn m de middelloodlijn van PS is en dat S' op m ligt. Hieruit volgt dat $\triangle PSS'$ een gelijkbenige driehoek is. We geven $\angle MS'S$ aan met α . Omdat m en k evenwijdige lijnen zijn, volgt dat de hoek tussen lijnstuk SS' en lijn k ook gelijk is aan α . Omdat $\triangle PSS'$ gelijkbenig is, volgt dat $\angle PS'S$ gelijk is aan 2α en vanwege congruentie van de driehoeken zijn dus ook $\angle P'SS'$ en $\angle P'SS''$ gelijk aan 2α , zoals in figuur 4.4f. We zien dus dat de hoek tussen ℓ en (A, B) gelijk is aan 2α en de hoek tussen (A, B) en k gelijk is aan 3α . Hieruit volgt dat de vouwlijnen in figuur 4.4c hoek θ inderdaad in vijf gelijke delen verdelen. \square

4.3.3 Lill's Methode

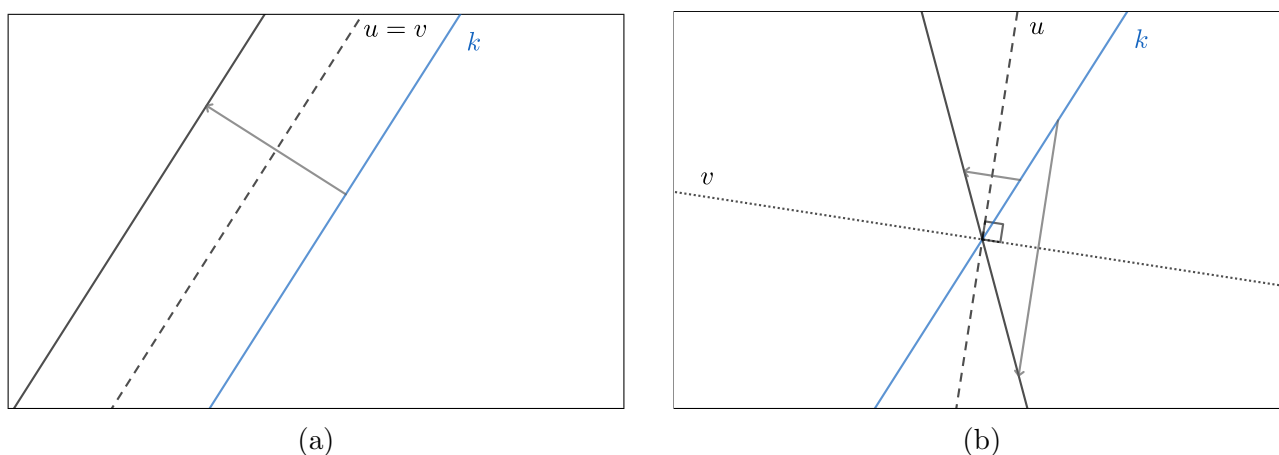
We zullen nu gaan zien hoe krachtig n -vouw origami is door gebruik te maken van Lill's methode. We zullen eerst naar 2-vouw origami kijken, dit uitbreiden naar 3-vouw en tot slot nog kijken naar n -vouw origami.

We beginnen met het volgende lemma.

Lemma 4.3. *Twee verschillende vouwlijnen waarvan de gevouwen beelden van een gegeven lijn samenvallen, snijden elkaar loodrecht op de gegeven lijn.*

Bewijs. Stel we hebben twee verschillende vouwlijnen u en v en een gegeven lijn k . Als een van de vouwlijnen evenwijdig is aan lijn k , is het gevouwen beeld van lijn k met deze vouwlijn evenwijdig aan k . Omdat er maar één lijn is die lijn k op een evenwijdige lijn af kan beelden, namelijk de lijn er midden tussen, volgt dat u en v samenvallen, zie figuur 4.5a. Omdat de vouwlijnen verschillend moeten zijn, volgt dat deze situatie niet mogelijk is. Er geldt dus dat vouwlijn u lijn k snijdt. Omdat vouwlijn u fungeert als spiegellijn tussen lijn k en het gevouwen beeld b , volgt dat u de bissectrice is van k en b . Daarnaast beeldt vouwlijn v de lijn k ook af op b , dus moet gelden dat v ook een bissectrice is van k en b . Vanuit het gegeven dat u en v verschillend zijn, volgt dat ieder één van de bissectrices is. Tot slot geldt dat de twee bissectrices van een hoek altijd loodrecht op elkaar staan, dus u en v snijden elkaar loodrecht op lijn k . Zie figuur 4.5b. \square

Merk op dat lemma 4.3 de situatie van AL9 beschrijft waarbij we twee keer dezelfde lijn gebruiken.

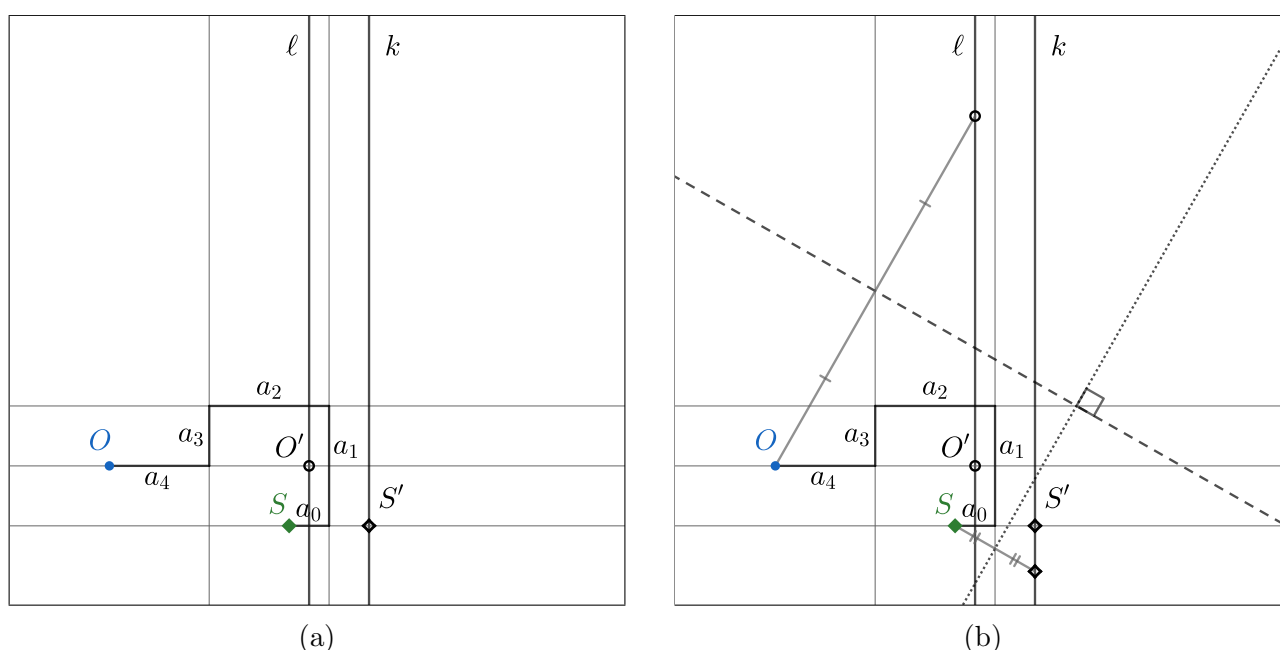


Figuur 4.5: Vouwlijnen die een lijn op dezelfde plek afbeelden, zijn aan elkaar gelijk of snijden elkaar loodrecht.

Dan nu de beloofde 2-vouw versie van Lill's methode.

Lemma 4.4. *Van elk vierdegraadspolynoom met 2-vouw construeerbare coëfficiënten, zijn de reële oplossingen 2-vouw construeerbaar.*

Bewijs. Deze constructie is gebaseerd op het voorbeeld van Alperin en Lang [1, Fig. 7]. We beginnen weer met het construeren van het pad van de schildpad voor het polynoom $a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Net als voor de derdegraadspolynomen krijgen we weer de beeldpunten O' en S' van respectievelijk lijn a_3 en a_1 . Daarna construeren we opnieuw loodlijnen ℓ en k door de beeldpunten, zoals in figuur 4.6a. Het axioma AL6ab9 geeft nu als volgt de lichtstraal waar we naar op zoek zijn. De uitlijning AL6a beeldt het punt O op lijn ℓ af, uitlijning AL6b beeldt het punt S op lijn k af en door AL9 wordt lijn a_2 door beide vouwlijnen op dezelfde plek afgebeeld, zoals in figuur 4.6b. Uit lemma 4.3 volgt dat de vouwlijnen elkaar loodrecht snijden op lijn a_2 . We zien dat we een lichtstraal gevonden hebben, dus volgt uit paragraaf 1.2.2 dat we een reële oplossing gevonden hebben. \square



Figuur 4.6: Het oplossen van het polynoom $a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ met $a_4 = 2\frac{1}{2}$, $a_3 = 1\frac{1}{2}$, $a_2 = -3$, $a_1 = 3$ en $a_0 = -1$.

Omdat Lill's methode voor polynomen van elke graad werkt, geeft dit een vermoeden dat we nog weer een stap verder kunnen gaan. We hebben alleen nog geen theorie ontwikkeld voor n -vouw axioma's voor $n > 2$. We zullen zien dat de uitlijningen die we gevonden hebben voor 2-vouw genoeg zijn voor toepassingen met Lill's methode. We zullen deze uitlijningen wel wat aan moeten passen, omdat we meer dan twee vouwlijnen hebben.

Equivalent aan de eerdere definities voor 1-vouw en 2-vouw axioma's, hebben we de volgende definitie voor een n -vouw axioma.

Definitie 4.5. Een n -vouw axioma is een minimale verzameling van uitlijningen die eindig veel mogelijkheden voor n gelijktijdige vouwlijnen definiëren op een eindig stuk papier.

Omdat we voor elke vouwlijn twee coëfficiënten moeten bepalen, hebben we voor een n -vouw axioma $2n$ onafhankelijke vergelijkingen nodig. We hebben in lemma 4.4 gebruik gemaakt van AL6 en AL9 om een vierdegraads polynoom op te lossen. We zullen zien dat we uitlijningen die equivalent zijn hieraan nodig zullen hebben om polynomen van hogere graad op te kunnen lossen. Het volgende lemma is daarom belangrijk.

Lemma 4.6. *Laat $(A_1, B_1), \dots, (A_n, B_n)$ n verschillende vouwlijnen zijn. Het toepassen van een uitlijning equivalent aan AL6 op (A_1, B_1) en (A_n, B_n) en het toepassen van een uitlijning equivalent aan AL9 op de paren $(A_i, B_i), (A_{i+1}, B_{i+1})$ voor $i \in \{1, \dots, n-1\}$ geeft een n -vouw axioma.*

Bewijs. Uit tabel 4.1 volgt dat de twee uitlijningen equivalent aan AL6 beide een vergelijking geven. De uitlijningen equivalent aan AL9 geven ieder twee vergelijkingen. Dit geeft samen dus $2 \cdot 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n$ vergelijkingen. Omdat deze vergelijkingen onafhankelijk zijn, volgt dat dit een n -vouw axioma vormt. \square

We kunnen nu de volgende stap zetten, namelijk het oplossen van polynomen van graad vijf.

Lemma 4.7. *Van elk vijfdegraadspolynoom met 3-vouw construeerbare coëfficiënten, zijn de reële oplossingen 3-vouw construeerbaar.*

Bewijs. Deze constructie is gebaseerd op de constructie voor het vierdegraadspolynoom, waarbij we de uitlijning equivalent aan AL9 twee keer toe zullen passen. We beginnen met hetzelfde uitgangspunt voor het polynoom $a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, zoals we al vaker gezien hebben. Zie figuur 4.7a. We kunnen nu de lichtstraal construeren door met uitlijningen equivalent aan AL6 met vouwlijn (A, B) het punt O op ℓ af te beelden en met vouwlijn (C, D) het punt S op lijn k af te beelden. Daarnaast gebruiken we uitlijningen equivalent aan AL9 door vouwlijnen (A, B) en (E, F) de lijn a_3 op dezelfde plek af te laten beelden en de vouwlijnen (C, D) en (E, F) de lijn a_2 op dezelfde plek af te laten beelden, zoals in figuur 4.7b. We hebben opnieuw de lichtstraal van Lill's methode geconstrueerd, zoals in figuur 4.7c, dus hebben we een reële oplossing van het polynoom gevonden. \square

Nu we vijfdegraadspolynomen op kunnen lossen, kunnen we ook de vijfdemachtswortel van construeerbare getallen construeren.

Lemma 4.8. *De vijfdemachtswortel van een construeerbaar getal is construeerbaar.*

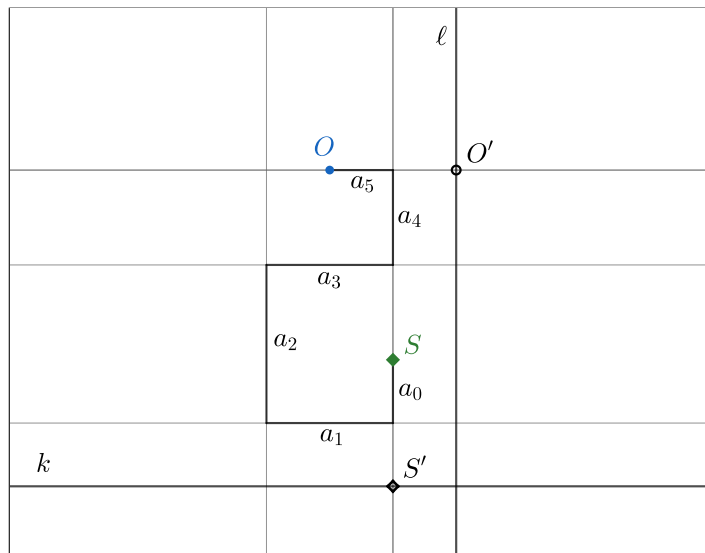
Bewijs. Zij c een construeerbaar getal. Het construeren van $\sqrt[5]{c}$ is identiek aan de constructie in het bewijs van lemma 4.7, waarbij we het polynoom $x^5 - c$ gebruiken, zie figuur 4.8. \square

We hebben gezien dat het herhaald toepassen van de uitlijning equivalent aan AL9 ons in staat stelt een polynoom van een hogere graad op te lossen. We kunnen dit daarom uitbreiden naar n -vouw origami.

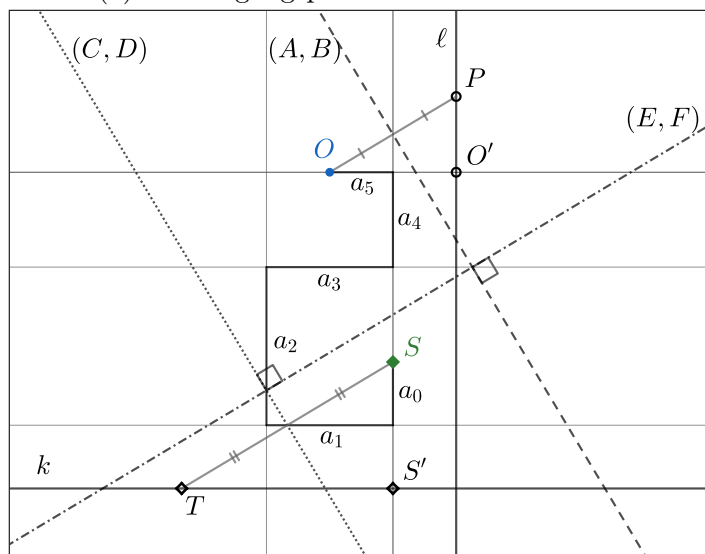
Propositie 4.9. *[11, Thm. 1] De reële oplossingen van elk polynoom van graad m met n -vouw construeerbare coëfficiënten zijn n -vouw construeerbaar als $m \leq n + 2$.*

We hebben natuurlijk niet gedefiniëerd wat n -vouw construeerbaar precies is. In het bewijs gaan we ervan uit dat de gebruikte coëfficiënten construeerbaar zijn, zonder dit verder te specificeren.

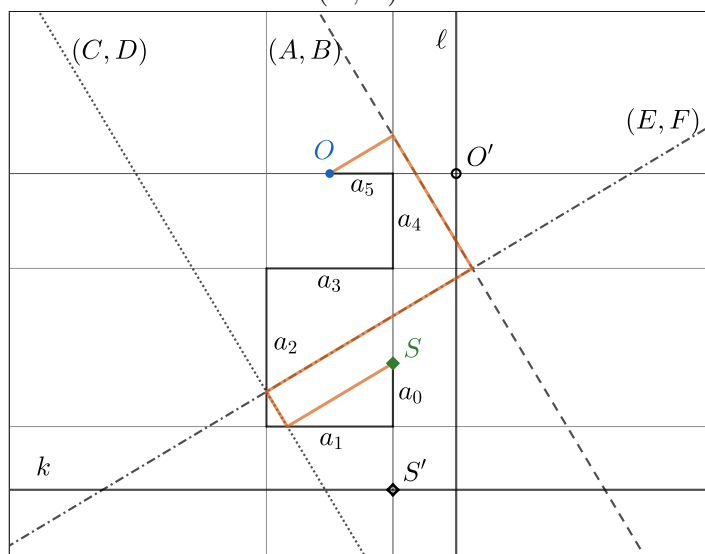
Bewijs. Deze propositie volgt op de volgende manier uit Lill's methode en lemma 4.6. Het pad van de schildpad voor een polynoom van graad m bestaat uit $m + 1$ lijnstukken (als geen van de coëfficiënten gelijk is aan 0). We zien dat de lichtstraal bestaat uit m lijnstukken. Het eerste en laatste lijnstuk van deze lichtstraal hoeven we niet te construeren, zoals we eerder gezien hebben bij polynomen van graad 3, 4 en 5 in figuren 3.11, 4.6 en 4.7. We moeten dus $m - 2$ lijnstukken construeren en nemen daarom $n = m - 2$. We zullen nu AL6 toepassen op zowel (A_1, B_1) met O en lijn ℓ als op (A_n, B_n) met S en lijn k , zie figuur 4.9. Daarnaast passen we AL9 toe op de paren $(A_i, B_i), (A_{i+1}, B_{i+1})$ met de lijn door lijnstuk a_{m-i-1} voor alle $i \in \{1, \dots, n-1\}$ zoals in lemma 4.3. Uit lemma 4.6 volgt dat dit een n -vouw axioma is en vanwege lemma 4.3 volgt dat dit de gewenste lichtstraal geeft. \square



(a) Het uitgangspunt voor de constructie.

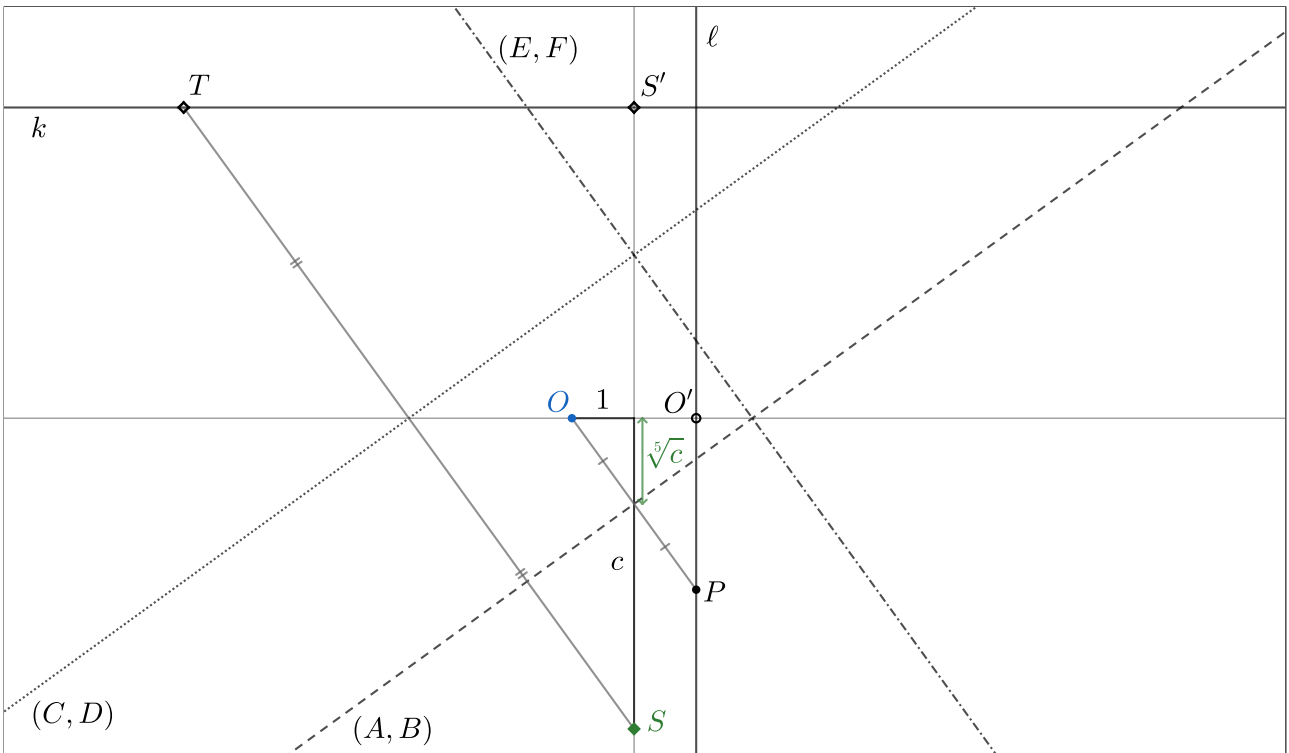


(b) De geconstrueerde vouwlijnen (A, B) , (C, D) en (E, F) .

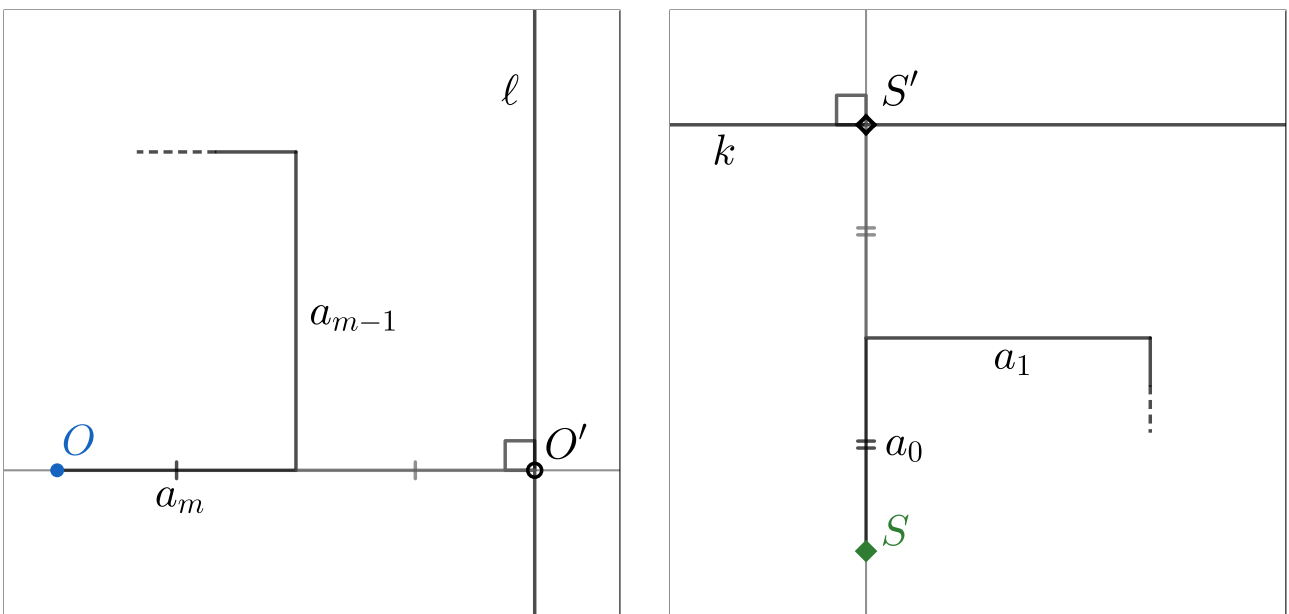


(c) De gevonden lichtstraal in oranje weergegeven.

Figuur 4.7: Het oplossen van het polynoom $a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ met $a_5 = 2$, $a_4 = -3$, $a_3 = 4$, $a_2 = 5$, $a_1 = 4$ en $a_0 = 2$.



Figuur 4.8: Het construeren van $\sqrt[5]{c}$.



Figuur 4.9: Constructie van de lijnen ℓ en k voor het oplossen van een polynoom van graad m .

Hoofdstuk 5

Slotopmerkingen

We hebben in deze scriptie de verzamelingen van construeerbare getallen van zowel passer en latje als 1-vouw origami onderzocht. Daarnaast hebben we gezien dat de klassieke constructieproblemen niet construeerbaar zijn met passer en latje, maar dat de verdubbeling van de kubus en de driedeling van de hoek wel te construeren zijn met 1-vouw origami. Daarnaast hebben we een begin gemaakt aan het onderzoeken van de verzameling van construeerbare getallen voor 2-vouw origami en hebben we gevonden dat de reële nulpunten van polynomen van willekeurige graad met construeerbare coëfficiënten oplosbaar zijn met n -vouw origami, zolang n groot genoeg is.

Tijdens het onderzoek zijn we ook onderwerpen, problemen en ideeën tegengekomen die we helaas niet verder uit konden werken. We zullen deze hieronder kort toelichten. Deze onderwerpen zijn mogelijk interessant voor verdere verdieping.

5.1 n -vouw Origami

We hebben in ons onderzoek de verzameling van construeerbare getallen voor 1-vouw origami bepaald. Helaas voerde het te ver om hetzelfde ook voor 2-vouw origami te doen. Het zou interessant zijn om te kijken of dit voor 2-vouw origami inderdaad mogelijk is en of dit nog verder uitgebreid kan worden naar n -vouw origami.

5.2 Kegelsneden

We hebben gezien dat parabolen op een natuurlijke manier verschijnen in de constructies met origami. Hoewel we niet alle punten op een parabool kunnen construeren, zijn wel alle construeerbare punten op de parabool eenvoudig te construeren vanuit het brandpunt en de construeerbare punten op de richtlijn. Hierbij kunnen we ons afvragen of iets vergelijkbaars geldt voor de andere kegelsneden.

Daarnaast zijn we nog het volgende probleem tegengekomen: Als een kegelsnede ongelijk aan een cirkel en een willekeurig punt P gegeven zijn, dan is het niet mogelijk om met passer en latje de lijn PM te construeren waarbij M het punt op de kegelsnede is waarvoor de afstand tussen P en M minimaal is [2].

Een eenvoudige berekening laat zien dat we voor een parabool een vergelijking van graad 3 krijgen met construeerbare coëfficiënten voor de x -coördinaat van het punt M . Hieruit volgt dat het punt M construeerbaar moet zijn met origami. Nu kunnen we ons afvragen of dit ook geldt voor de ellips en hyperbool. Daarnaast kunnen we de vraag stellen of we het punt M ook rechtstreeks kunnen construeren, of dat we dit alleen kunnen doen door de coördinaten eerst te berekenen.

5.3 Andere Definities

We hebben in ons onderzoek een aantal keuzes moeten maken voor de definities. Hierbij kunnen we ons afvragen of andere keuzes interessante resultaten op kunnen leveren. We hebben bijvoorbeeld bij 1-vouw origami de keuze gemaakt om na elke vouw het papier weer uit te vouwen. Wat zou er gebeuren als we meerdere vouwen na elkaar toe zouden staan zonder deze direct weer uit te vouwen? Daarnaast hebben we het papier geïdentificeerd met \mathbb{R}^2 . Zouden we in plaats hiervan ook \mathbb{C} kunnen kiezen? Welke gevolgen heeft dit? Tijdens de presentatie van deze scriptie kwam er nog een andere interessante vraag naar voren. Zouden we het vouwen kunnen veralgemeniseren naar hogere dimensies? Zou het bijvoorbeeld mogelijk zijn om iets zoals vouwen te definiëren op een ruimtelijk voorwerp en hebben we het dan bijvoorbeeld over een vouwvlak in plaats van een vouwlijn? Wat zouden we op deze manier kunnen construeren? Tot slot hebben we de keuze gemaakt voor eindig groot papier. Een interessante vraag zou zijn wat er gebeurt als we oneindig groot papier toestaan. In het verlengde hiervan kunnen we kijken of vergelijkbare constructies gedefinieerd kunnen worden op het projectieve vlak.

Bijlage A

Appendix

A.1 Matlabcodes

A.1.1 1-vouw Origami

```
syms A B K L M N p q r s
vars=[A B];
A1=[A*p+B*q+1,A*r+B*s+1];
A2=[(A^2+B^2)*r+(A^2-B^2)*p+2*A*B*q+2*A,
     (A^2+B^2)*s-(A^2-B^2)*q+2*A*B*p+2*B];
A3=[(A^2-2*A*K-2*B*L+B^2)*M+(A^2-B^2)*K+2*A*B*L,
     (A^2-2*A*K-2*B*L+B^2)*N-(A^2-B^2)*L-2*A*B*K];
A4=[A*K+B*L,A*p+B*q+1];
A5=[A*p+B*q+1,
     (A^2-B^2)*(L*s-K*r)-2*A*B*(K*s+L*r)-2*(A*K+B*L)+A^2+B^2];
A6=[(A^2-B^2)*(N*q-M*p)-2*A*B*(M*q+N*p)-2*(A*M+B*N)+A^2+B^2,
     (A^2-B^2)*(L*s-K*r)-2*A*B*(K*s+L*r)-2*(A*K+B*L)+A^2+B^2];
A7=[A*K+B*L,
     (A^2-B^2)*(N*q-M*p)-2*A*B*(M*q+N*p)-2*(A*M+B*N)+A^2+B^2];
prompt = "Van welk axioma wil je de Grobner basis weten?";
GrobnerBasis=gbasis(input(prompt),vars,'MonomialOrder','
    lexicographic')
```

A.1.2 2-vouw Origami

```
syms A B C D k l m n P Q R S
syms K [1 4]
syms L [1 4]
syms M [1 4]
syms N [1 4]
syms p [1 4]
syms q [1 4]
syms r [1 4]
syms s [1 4]
vars=[A B C D];
```

```
%gevouwen beeld punt punt:
```



```

Vpp=A*P+B*Q+1;
%gevouwen beeld punt lijn:
VpK=(A^2-B^2)*(1*Q-k*P)-2*A*B*(k*Q+1*P)-2*(A*k+B*1)+A^2+B^2;
%gevouwen beeld lijn lijn:
VKK=A*k+B*1;
%gevouwen beeld lijn1 lijn2:
VKM=[(A^2-2*A*k-2*B*1+B^2)*m+(A^2-B^2)*k+2*A*B*1,(A^2-2*A*k-2*B*1
+B^2)*n-(A^2-B^2)*1+2*A*B*k];
%vergelijking uitlijning 7:
V7=((C^2-D^2)*k+2*C*D*1)*((A^2-B^2)*P+2*A*B*Q+2*A)+((C^2-D^2)*1
-2*C*D*k)*((A^2-B^2)*Q-2*A*B*P-2*B)+(C^2-2*C*k-2*D*1+D^2)*(A
^2+B^2);
%vergelijking uitlijning 8:
V8=[(C^2+D^2)*((A^2-B^2)*P+2*A*B*Q+2*A)-(A^2+B^2)*((C^2-D^2)*R+2*
C*D*S+2*C),(C^2+D^2)*((A^2-B^2)*Q-2*A*B*P-2*B)-(A^2+B^2)*((C
^2-D^2)*S-2*C*D*R-2*D)];
%vergelijking uitlijning 9:
V9=[((A^2-B^2)*k+2*A*B*1)*(C^2-2*C*m-2*D*n+D^2)-((C^2-D^2)*m+2*C*
D*n)*(A^2-2*A*k-2*B*1+B^2),(A^2-2*A*k-2*B*1+B^2)*((C^2-D^2)*n
-2*C*D*m)-(C^2-2*C*m-2*D*n+D^2)*((A^2-B^2)*1-2*A*B*k)];
%vergelijking uitlijning 10:
V10=(C^2-D^2)*(n*(A-k)-m*(1-B))-2*C*D*(m*(A-k)+n*(1-B))+(C^2+D
^2-2*(C*m+D*n))*(B*k-A*1);

AL1=cell(1,4);
AL2a=cell(1,4);
AL2b=cell(1,4);
AL3a=cell(1,4);
AL3b=cell(1,4);
AL4a=cell(1,4);
AL4b=cell(1,4);
AL5a=cell(1,4);
AL5b=cell(1,4);
AL6a=cell(1,4);
AL6b=cell(1,4);
AL7a=cell(1,4);
AL7b=cell(1,4);
AL8=cell(1,4);
AL9=cell(1,4);
AL10a=cell(1,4);
AL10b=cell(1,4);

for i=1:4
    AL1{i}=subs(VKK,[k,1],[C,D]);
    AL2a{i}=subs(VKK,[k,1],[K(i),L(i)]);
    AL2b{i}=subs(VKK,[k,1,A,B],[K(i),L(i),C,D]);
    AL3a{i}=subs(Vpp,[P,Q],[p(i),q(i)]);
    AL3b{i}=subs(AL3a{i},[A,B],[C,D]);
    AL4a{i}=subs(VKM,[m,n,k,1],[C,D,K(i),L(i)]);
    AL4b{i}=subs(VKM,[A,B,m,n,k,1],[C,D,A,B,K(i),L(i)]);

```

```

AL5a{i}=subs(VpK,[k,l,P,Q],[C,D,p(i),q(i)]);
AL5b{i}=subs(VpK,[A,B,k,l,P,Q],[C,D,A,B,p(i),q(i)]);
AL6a{i}=subs(VpK,[k,l,P,Q],[K(i),L(i),p(i),q(i)]);
AL6b{i}=subs(AL6a{i},[A,B],[C,D]);
AL7a{i}=subs(V7,[k,l,P,Q],[K(i),L(i),p(i),q(i)]);
AL7b{i}=subs(subs(AL7a{i},[A,B,C,D],[m,n,A,B]),[m,n],[C,D]);
AL8{i}=subs(V8,[P,Q,R,S],[p(i),q(i),r(i),s(i)]);
AL9{i}=subs(V9,[k,l,m,n],[K(i),L(i),M(i),N(i)]);
AL10a{i}=subs(V10,[k,l,m,n],[K(i),L(i),M(i),N(i)]);
AL10b{i}=subs(subs(AL10a{i},[A,B,C,D],[m,n,A,B]),[m,n],[C,D])
;
end

```

prompt = "Van welke uitlijningen wil je de Grobner basis weten?

Voorbeeld van invoer: '[AL1,AL2a,AL3b,AL7a]'\n";

```
Uitlijning=input(prompt);
```

```
Aantal=sum(cellfun('prodofsize',Uitlijning));
```

```
if Aantal==16
```

```
    Uitlijning2=[Uitlijning{1},Uitlijning{6},Uitlijning{11},
                Uitlijning{16}];
```

```
elseif Aantal==12
```

```
    Uitlijning2=[Uitlijning{1},Uitlijning{6},Uitlijning{11}];
```

```
elseif Aantal==8
```

```
    Uitlijning2=[Uitlijning{1},Uitlijning{6}];
```

```
else
```

```
    'Er gaat iets mis.'
```

```
end
```

```
Check=numel(Uitlijning2);
```

```
if not(Check==4)
```

```
    'Dit is geen 2-vouw axioma.'
```

```
end
```

```
GrobnerBasis=gbasis(Uitlijning2,vars,'MonomialOrder','
lexicographic');
```

```
bestandsnaam = 'GrobnerBasis.txt';
```

```
fileID = fopen(bestandsnaam,'w');
```

```
fprintf(fileID,'%s\n',GrobnerBasis);
```

```
fclose(fileID);
```

```
Resultaat = 'opgeslagen als GrobnerBasis.txt';
```

```
Resultaat
```

Voor een getallenvoorbeeld vervangen we de regel

```
GrobnerBasis=gbasis(Uitlijning2,vars,'MonomialOrder','
lexicographic');
```

door

```
Uitlijning3=subs(Uitlijning2,[p1,p2,p3,p4,q1,q2,q3,q4,r1,r2,
r3,r4,s1,s2,s3,s4,K1,K2,K3,K4,L1,L2,L3,L4,M1,M2,M3,M4,N1,N2,
N3,N4],[1,1,1,1,0,0,0,0,1,1,1,1,0,0,0,0,1,1,1,1,0,0,0,0,1,1,
1,1,0,0,0,0]);
```

GrobnerBasis=gbasis(Uitlijning3, vars, 'MonomialOrder', 'lexicographic');

waarbij we de gewenste getallen invullen op de plek van de 1'en en 0'en.

A.2 Gröbner Vergelijkingen

A.2.1 A2

$$\begin{aligned}
g_1 = & B^3(p^2 + rp + q^2 - sq)(-p^4 - 2p^2q^2 + p^2r^2 + p^2s^2 - q^4 + q^2r^2 + q^2s^2) + \\
& B^2(-3p^4q + p^4s - 4p^3qr + 2p^3rs - 6p^2q^3 + 6p^2q^2s + p^2qr^2 - p^2qs^2 + p^2r^2s + p^2s^3 - \\
& 4pq^3r + 2pq^2rs + 2pqr^3 + 2pqr^2s - 3q^5 + 5q^4s + q^3r^2 - q^3s^2 - q^2r^2s - q^2s^3) + \\
& B(-p^4 - p^3r - 3p^2q^2 + 2p^2qs + p^2r^2 + p^2s^2 - 3pq^2r + 2pqr^2s + pr^3 + prs^2 - 2q^4 + \\
& 4q^3s - 2q^2s^2) + \\
& A(p^3q - p^3s + 2p^2qr - 2p^2rs + pq^3 - 3pq^2s + pqr^2 + 3pqs^2 - pr^2s - ps^3) \\
g_2 = & B^4(-p^4 - 2p^2q^2 + p^2r^2 + p^2s^2 - q^4 + q^2r^2 + q^2s^2) + \\
& 2B^3(-2p^2q + p^2s - 2q^3 + q^2s + qr^2 + qs^2) + \\
& B^2(-p^2 - 5q^2 + 4qs + r^2 + s^2) - \\
& 2B(q - s)
\end{aligned}$$

A.2.2 AL12a3b7a

$$\begin{aligned}
g_1 = & AK_2 + BL_2 \\
g_2 = & 2B(-L_4K_2^3 + K_4K_2^2L_2 - L_4K_2L_2^2 + K_4L_2^3)/(K_2(K_2p_3 + L_2q_3)^2) + \\
& B^2(K_2^4 + L_2^4 + 2K_2^2L_2^2 + 2K_2^4K_4p_3 - K_2^4K_4p_4 - K_4L_2^4p_4 - K_2^4L_4q_4 + 2L_2^4L_4q_3 - \\
& L_2^4L_4q_4 + 2K_2K_4L_2^3q_3 + 2K_2L_2^3L_4p_3 + 2K_2^3K_4L_2q_3 + 2K_2^3L_2L_4p_3 + 2K_2^2K_4L_2^2p_3 - \\
& 2K_2^2K_4L_2^2p_4 + 2K_2^2L_2^2L_4q_3 - 2K_2^2L_2^2L_4q_4)/(K_2^2(K_2p_3 + L_2q_3)^2) \\
g_3 = & BL_2/K_2p_3 + BD(K_2p_3 + L_2q_3)/K_2p_3 \\
g_4 = & Cp_3 + Dq_3 + 1
\end{aligned}$$

A.2.3 AL3a5b6b7b

Substitutie $[p_1, p_2, p_3, p_4, q_1, q_2, q_3, q_4, K_3, K_4, L_3, L_4] \mapsto [1, 1, 1, 1, 0, 2, 0, 0, 1, -1, -2, 1]$ geeft:

$$\begin{aligned}
g_1 = & A + 1 \\
g_2 = & 1710D^3 - 7879D^2 - 3751D - 2806D^4 + 14069D^5 + 9275D^6 + 8004D^7 + 6702D^8 - \\
& 604D^9 + 2500BD \\
g_3 = & -128D^9 + 1344D^8 + 2528D^7 + 3120D^6 + 4568D^5 + 1708D^4 + 790D^3 - 693D^2 - \\
& 1122D + 625C \\
g_4 = & 2D^{10} - 22D^9 - 29D^8 - 29D^7 - 47D^6 + 9D^5 + D^4 + 17D^3 + 17D^2 + D.
\end{aligned}$$

Substitutie $[p_1, p_2, p_3, p_4, q_1, q_2, q_3, q_4, K_3, K_4, L_3, L_4] \mapsto [0, 1, 2, 3, 3, 2, 1, 0, 0, 1, 1, 0]$ geeft:

$$g_1 = 310405471434640D^9 - 19456040353492D^2 - 126472625500174D^3 - 483860386329659D^4 - 1189468308714037D^5 - 1877297692408945D^6 - 1729419673512469D^7 - 545863917401424D^8 - 1274355856968D + 23916814800AD$$

$$g_2 = 3B + 1$$

$$g_3 = -108952360488240D^9 + 194470758251584D^8 + 600448944798039D^7 + 646400748320850D^6 + 406862323119452D^5 + 164518352247494D^4 + 42742284682969D^3 + 6530150574552D^2 + 424161154228D + 861867200C$$

$$g_4 = 5840D^{10} - 9424D^9 - 33961D^8 - 40177D^7 - 27782D^6 - 12590D^5 - 3821D^4 - 749D^3 - 84D^2 - 4D$$

Bibliografie

- [1] Roger Alperin en Robert Lang. „One, Two, and Multi-Fold Origami Axioms”. In: *Origami4: 4th International Meeting of Origami Science, Mathematics and Education, 4OSME 2006* (jan 2009).
- [2] H. Azad en A. Laradji. „88.70 Some Impossible Constructions in Elementary Geometry”. In: *The Mathematical Gazette* 88.513 (2004), p. 548–551. ISSN: 00255572.
- [3] David Cox, John Little en Donal O’Shea. „Ideals, Varieties, and Algorithms. An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra”. In: (2018).
- [4] Erik D. Demaine en Joseph O’Rourke. *Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra*. Cambridge University Press, 2007.
- [5] D.S. Dummit en R.M. Foote. *Abstract Algebra*. Wiley, 2003. ISBN: 9780471433347.
- [6] Koshiro Hatori. „History of Origami in the East and the West before Interfusion”. In: *Origami 5: Fifth International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education* (2016), p. 3–11.
- [7] Thomas C. Hull. „Solving Cubics With Creases: The Work of Beloch and Lill.” In: *Am. Math. Mon.* 118.4 (2011), p. 307–315.
- [8] I. Kleiner. *A History of Abstract Algebra*. Birkhäuser Boston, 2007. ISBN: 9780817646851.
- [9] Robert Lang. *Angle Quintisection*. [Online; bezocht 8 juni 2024]. 2004. URL: <https://langorigami.com/article/angle-quintisection/>.
- [10] Hwa Young Lee. „Origami-constructible numbers”. eng. University of Georgia, 2017.
- [11] Jorge Lucero. *Division of an angle into equal parts and construction of regular polygons by multi-fold origami*. Feb 2019.
- [12] Randy Schwartz. *Pi is Transcendental: Von Lindemann’s Proof Made Accessible to Today’s Undergraduates*. Feb 2015.