



**Universiteit
Utrecht**

BACHELORSCRIPTIE

Een ruimte-fractioneel τ -model uit de geohydrologie

Auteur:

Lisa Pijpers

5550025

Begeleider:

Dr. P.A. Zegeling

Departement Wiskunde

Universiteit Utrecht

7 juni 2024

Samenvatting

Het τ -model uit de geohydrologie modelleert monotone en niet-monotone golven die ontstaan bij watersaturatie. In deze bachelorscriptie lossen we het τ -model numeriek op met behulp van de methode-der-lijnen en de IMEX- θ methode. Om een ééndimensionaal fractioneel τ -model te onderzoeken, implementeren we de fractionele Laplaciaan in het model. De fractionele Laplaciaan kunnen we op twee plekken in de vergelijking zetten. We voeren numerieke experimenten uit met het ééndimensionale fractionele τ -model en bespreken de resultaten. Uit de numerieke experimenten volgt dat de trillingen een grotere amplitude kunnen krijgen, of dat de golf steiler wordt. Een andere mogelijkheid is dat de plateaus en de trillingen smaller worden. In een tweedimensionaal advection-diffusiemodel hebben we tevens een fractionele Laplaciaan geïmplementeerd en het gevolg hiervan onderzocht. Bij het fractionele tweedimensionale advection-diffusiemodel vlakkt de golf minder snel af en de omvang van de golf krijgt meer een ovaalvorm. Een tweedimensionaal τ -model kan ‘fingering structures’ modelleren, wat overeenkomt met labexperimenten. We hebben numerieke experimenten met een vereenvoudigd model gedaan. Hieruit volgt dat ons vereenvoudigde model deze ‘fingering structures’ niet kan modelleren.

Inhoudsopgave

1	Introductie	3
2	Een ééndimensionaal τ-model uit de geohydrologie	4
3	De numerieke oplosmethode	6
3.1	De voorwaartse en terugwaartse Euler methode	6
3.2	Eindige differentiematrices	6
3.3	De IMEX-methode	8
4	Numerieke oplossingen van het ééndimensionale τ-model	9
4.1	Numerieke experimenten	10
4.2	Een lopende golf oplossing	12
4.2.1	Een één-fase stroming	13
4.2.2	Een twee-fasen stroming	17
5	De fractionele Laplaciaan en wortels van eindige differentiematrices	19
5.1	De fractionele Laplaciaan	19
5.2	Wortels van eindige differentiematrices	21
6	Een ééndimensionaal fractioneel τ-model	22
6.1	Numerieke experimenten met een één-fase stroming	22
6.2	Numerieke experimenten met een twee-fasen stroming	26
7	Een tweedimensionaal advection-diffusiemodel	29
7.1	De numerieke oplosmethode	29
7.2	Numerieke experimenten	32
8	Een tweedimensionaal τ-model uit de geohydrologie	35
8.1	Numerieke resultaten van het tweedimensionale τ -model	35
8.2	Numerieke experimenten van het vereenvoudigde model	37
9	Conclusies	42
A	De methode-der-lijnen toegepast op het ééndimensionale τ-model	44
B	Een stabiliteitsanalyse van het tweedimensionale τ-model	46
C	De MATLAB codes	48

1 Introductie

De interactie tussen water en een poreus materiaal, bijvoorbeeld zand, is een belangrijk onderwerp uit de geohydrologie. Het begrip saturatie is hierbij erg belangrijk. Watersaturatie is de verhouding water in een poreus materiaal. Begrijpen hoe een poreus materiaal, bijvoorbeeld zand, verzadigd raakt met water is van groot belang voor het voorspellen van onder andere bodemvochtigheid en het beheer van watervoorraden. Het τ -model uit de geohydrologie simuleert monotone en niet-monotone golven die ontstaan bij watersaturatie. Een monotone golf is een golf waarbij de amplitude constant blijft gedurende de tijd. Met andere woorden, deze blijft op hetzelfde niveau zonder enige verandering in hoogte. Een niet-monotone golf daarentegen vertoont veranderingen in amplitude over tijd. Dit betekent dat de hoogte van de golf kan variëren naarmate de tijd verstrijkt, waardoor er bijvoorbeeld plateaus of trillingen ontstaan. Simulaties van het τ -model komen overeen met labexperimenten uit de geohydrologie waarbij dit is onderzocht. In het τ -model staat een Laplaciaan. Deze Laplaciaan kunnen we vervangen door een fractionele Laplaciaan. Het voornaamste doel van deze bachelorscriptie is om te onderzoeken wat de invloed is van de fractionele Laplaciaan op het τ -model.

We beginnen met het ééndimensionale τ -model. In hoofdstuk 2 zullen we een korte introductie geven van dit ééndimensionale τ -model. In hoofdstuk 3 bespreken we hoe een niet-lineaire partiële differentiaalvergelijking numeriek opgelost kan worden en in hoofdstuk 4 zullen we de oplossing van het ééndimensionale τ -model numeriek benaderen en een analyse geven. Afhankelijk van de parameters van het ééndimensionale τ -model ontstaan er monotone golven, niet-monotone golven met trillingen of niet-monotone golven met plateaus. We zullen verklaren wanneer deze golven ontstaan met behulp van numerieke en analytische oplossingsmethoden. In hoofdstuk 5 introduceren we de fractionele Laplaciaan aan de hand van een Lévy-vlucht. In hoofdstuk 6 zullen we numerieke experimenten uitvoeren met het ééndimensionale fractionele τ -model. We construeren het fractionele τ -model met behulp van de eerdergenoemde fractionele Laplaciaan.

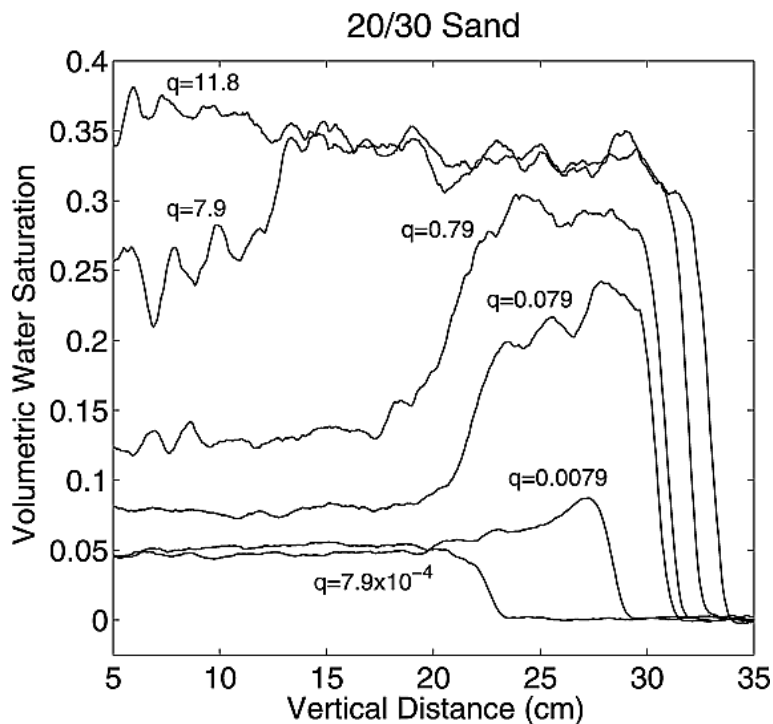
Voordat we verdergaan met het tweedimensionale τ -model, zullen we in hoofdstuk 7 een tweedimensionaal advection-diffusiemodel onderzoeken. We beschrijven in dit hoofdstuk hoe een tweedimensionaal model numeriek opgelost kan worden. Hier zullen we tevens een fractioneel advection-diffusiemodel bestuderen. In hoofdstuk 8 gaan we het tweedimensionale τ -model onderzoeken. In twee dimensies kunnen er ‘fingering structures’ ontstaan. We bestuderen in dit hoofdstuk eerst een tweedimensionaal τ -model dat deze ‘fingering structures’ kan modelleren. Daarna onderzoeken we met behulp van numerieke experimenten of ons eigen vereenvoudigde tweedimensionale τ -model de ‘fingering structures’ ook kan modelleren. We sluiten deze scriptie af met conclusies in hoofdstuk 9.

2 Een ééndimensionaal τ -model uit de geohydrologie

We zullen eerst een ééndimensionaal model voor watersaturatie onderzoeken. In de praktijk kan dit gezien worden als een heel smalle buis met zand waar water in wordt geïnjecteerd.

De Richardsvergelijking of de Buckley-Leverett vergelijking zijn gebruikelijke modellen om watersaturatie te simuleren. Maar deze twee modellen simuleren alleen monotone golven [1]. Uit labexperimenten volgt echter dat er ook niet-monotone golven met trillingen en niet-monotone golven met plateaus kunnen ontstaan [2, 3]. In figuur 1 zijn resultaten van een labexperiment te zien waar water geïnjecteerd wordt in een smalle buis met zand. We zien dat hier afhankelijk van de flux q in cm/min er monotone golven (voor lage flux), niet-monotone golven met trillingen (voor hoge flux) en niet-monotone golven met plateaus (voor gemiddelde flux) ontstaan.

Een variant op de Richardsvergelijking is de niet-evenwichts-Richardsvergelijking. In [4, 5] is de stabiliteit van de Richardsvergelijking en de niet-evenwichts-Richardsvergelijking onderzocht. Een variant op de Buckley-Leverett vergelijking is de gemodificeerde Buckley-Leverett vergelijking, beschreven in [1]. De niet-evenwichts-Richardsvergelijking en de gemodificeerde Buckley-Leverett vergelijking kunnen afhankelijk van de gekozen parameters naast de monotone golven ook niet-monotone golven simuleren.



Figuur 1: Resultaten van een labexperiment voor diverse fluxen q in cm/min, afkomstig van [2].

Het ééndimensionale τ -model dat wij in deze scriptie zullen gebruiken, en wat tevens beschreven staat in [6], wordt gegeven door

$$u_t = du_{xx} + [f(u)]_x + \tau u_{xxt}. \quad (2.1)$$

Dit model is gebaseerd op de eerdergenoemde vergelijkingen en kan zowel monotone golven als niet-monotone golven modelleren die overeenkomen met de labexperimenten. De functie u is afhankelijk van x en t , en wordt afgebeeld op het interval $[0, 1]$. De waarde van u geeft de mate van saturatie aan. Er geldt dat $x \in [0, 1]$ en $t \in [0, T]$ voor een $T > 0$. De parameter $d > 0$ staat voor de diffusiecoëfficiënt. De diffusiecoëfficiënt is een maat voor de snelheid waarmee een deeltje in een bepaald materiaal beweegt. Als d kleiner wordt, dan wordt de golf steiler. De parameter $\tau \geq 0$ staat voor een niet-evenwichtsparameter. Deze parameter hoort bij de kruisterm u_{xxt} in de vergelijking die ervoor zorgt dat er niet-monotone golven kunnen ontstaan. Wanneer het model niet-monotone golven kan modelleren, zal later in deze scriptie toegelicht worden. De beginvoorwaarde van het model wordt gegeven door

$$u(x, 0) = u_- + \frac{1}{2}(u_+ - u_-)(1 + \tanh(R(x - x_0))),$$

waarbij x_0 en R constanten zijn. Verder worden de randvoorwaarden gegeven door $u(0, t) = u_-$ en $u(1, t) = u_+$. We nemen aan dat $u_+ > u_-$. De waarden van T, d, τ, u_-, u_+, R en x_0 zullen gekozen worden bij het numeriek oplossen van het ééndimensionale τ -model.

De functie f moet voldoen aan $f(0) = 0, f(1) = 1$ en $f'(u) > 0$ voor $0 < u < 1$. Voor het modelleren van een één-fase stroming gebruiken we een convexe functie $f(u) = \frac{u^2}{2}$. Voor het modelleren van een twee-fasen stroming gebruiken we een convex-concave functie $f(u) = \frac{u^2}{u^2 + (1-u)^2}$. Een één-fase stroming verwijst naar een stroming van materie waarbij de materie zich in één fase bevindt, bijvoorbeeld water (dat zich volledig in vloeibare vorm bevindt). Een twee-fasen stroming verwijst naar een stroming waarbij twee verschillende fasen van materie aanwezig zijn. Een voorbeeld hiervan is een combinatie van water (in vloeibare vorm) en lucht (in gasvorm). De functies komen van [6, 7].

In de volgende hoofdstukken zullen we bespreken hoe we dit ééndimensionale τ -model numeriek kunnen oplossen.

3 De numerieke oplosmethode

In dit hoofdstuk gaan we in op het numeriek benaderen van gewone differentiaalvergelijkingen. Vervolgens nemen we door hoe we een numerieke oplossing van een lineaire partiële differentiaalvergelijking kunnen vinden en uiteindelijk zullen we bespreken hoe we niet-lineaire partiële differentiaalvergelijkingen numeriek kunnen oplossen.

3.1 De voorwaartse en terugwaartse Euler methode

Om een gewone differentiaalvergelijking $\frac{du}{dt} = f(u(t))$ met $u(0) = u_1$ voor $t \in [0, T]$ op te lossen, discretiseren we het interval in N gelijke stappen, $0 = t_1 < \dots < t_N = T$. De afstand tussen twee stappen noemen we Δt . Het verband tussen Δt en het aantal stappen N wordt gegeven door $\Delta t = \frac{T}{N-1}$. We noteren $u(t_n)$ als u_n . Met behulp van een Taylor benadering volgt dat:

$$\frac{du}{dt}(t_n) \approx \frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t}$$

voor $n = 1, 2, \dots, N-1$. Deze benadering wordt de voorwaartse Euler methode of de expliciete Euler methode genoemd.

De terugwaartse Euler methode is als volgt gedefinieerd:

$$\frac{du}{dt}(t_{n+1}) \approx \frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t}$$

voor $n = 1, 2, \dots, N-1$. Deze methode wordt ook wel de impliciete Euler methode genoemd.

Merk op dat we bij deze benaderingen de hogere orde termen hebben weggelaten. Niet voor elke beginvoorwaarde $u(0) = u_1$ convergeren deze iteraties. De terugwaartse Euler methode heeft een groter stabiliteitsgebied dan de voorwaartse Euler methode. De terugwaartse Euler methode zal dus voor meer Δt een stabiele oplossing hebben dan de voorwaartse Euler methode. Een nadeel van de terugwaartse Euler methode is dat deze meer rekenkracht vereist dan de voorwaartse Euler methode.

3.2 Eindige differentiematrices

Laat u nu een functie afhankelijk van x en t zijn: $u(x, t)$. We nemen aan dat $(x, t) \in [0, 1] \times [0, T]$. Dan kunnen we het interval $[0, 1]$ discretiseren in I gelijke stappen, $0 = x_1 < \dots < x_I = 1$. De afstand tussen twee stappen is Δx en er geldt dat $\Delta x = \frac{1}{I-1}$. We bekijken $\frac{\partial u}{\partial x}$ bij $x = x_i$ voor $i = 1, \dots, I$. We schrijven $u_i(t) = u(x_i, t)$ en we definiëren $u_0(t) := u_I(t)$ en $u_{I+1}(t) := u_1(t)$ zodat er aan periodieke randvoorwaarden wordt voldaan. De centrale differentiemethode wordt dan gegeven door:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t) \approx \frac{u_{i+1}(t) - u_{i-1}(t)}{2\Delta x}$$

voor $i = 2, \dots, I-1$. We definiëren de oplossingsvector

$$\vec{u}(t) := \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_I(t) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} u(x_1, t) \\ \vdots \\ u(x_I, t) \end{pmatrix}$$

en de matrix

$$D_{1c} := \frac{1}{2\Delta x} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & -1 \\ -1 & 0 & 1 & & \\ & -1 & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & & & & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{I \times I}.$$

Op de lege plekken in deze matrix staat een nul. Deze matrix is een eindige differentiematrix voor $\frac{\partial u}{\partial x}$.

We kunnen de matrix D_{1c} schrijven als $D_{1c} = \frac{1}{2}(D_{1+} + D_{1-})$ waarbij

$$D_{1+} = \frac{1}{\Delta x} \begin{pmatrix} -1 & 1 & & & 0 \\ 0 & -1 & 1 & & \\ & 0 & -1 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & & & & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{I \times I}$$

en

$$D_{1-} = \frac{1}{\Delta x} \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & -1 \\ -1 & 1 & 0 & & \\ & -1 & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{I \times I}.$$

Hier zijn D_{1+} en D_{1-} respectievelijk de voorwaartse differentiematrix en de terugwaartse differentiematrix.

We kunnen de tweede partiële afgeleide naar x bij $x = x_i$ benaderen door

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t) \approx \frac{u_{i+1}(t) - 2u_i(t) + u_{i-1}(t)}{(\Delta x)^2}.$$

Als we opnieuw aannemen dat de randvoorwaarden periodiek zijn, kunnen we de volgende matrix definiëren:

$$D_2 := \frac{1}{(\Delta x)^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & 1 \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & 1 & -2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & & & & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{I \times I}.$$

Deze matrix is een eindige differentiematrix voor $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Er geldt dat $D_2 = D_{1+}D_{1-}$. Op dezelfde manier volgt dat $D_3 = D_2D_{1c} = D_{1+}D_{1-}D_{1c}$ een eindige differentiematrix is voor $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$.

We hebben de partiële afgeleide naar plaats x bestudeerd, maar we kunnen ook de partiële afgeleide naar tijd t bestuderen. We kunnen namelijk opmerken dat

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t) \approx \frac{d}{dt}u_i(t) = \dot{u}_i(t).$$

Nu volgt dat we een partiële differentiaalvergelijking kunnen schrijven als een stelsel van gewone differentiaalvergelijkingen. Een stelsel differentiaalvergelijkingen kan numeriek opgelost worden met bijvoorbeeld de voorwaartse of terugwaartse Euler methode. In dat geval zal de tijd t gediscretiseerd worden door het interval $[0, T]$ op te delen in N gelijke stappen $0 = t_1 < \dots < t_N = T$ met afstand Δt . Er geldt wederom dat $\Delta t = \frac{T}{N-1}$. Het oplossen van een partiële differentiaalvergelijking op bovenstaande manier wordt de *methode-der-lijnen* genoemd.

Voorbeeld 3.1. We nemen de diffusievergelijking $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ met $(x, t) \in [0, 1] \times [0, T]$ en periodieke randvoorwaarden. We delen het interval $[0, 1]$ op in I gelijke stappen met $0 = x_1 < \dots < x_I = 1$. We definiëren de oplossingsvector $\vec{u} := (u_1, \dots, u_I)^T$, met $u_i = u(x_i)$ voor $i = 1, \dots, I$. Met bovenstaande theorie kunnen we de lineaire partiële differentiaalvergelijking omschrijven naar een stelsel van gewone differentiaalvergelijkingen:

$$\frac{d\vec{u}}{dt}(t) = D_2\vec{u}(t).$$

3.3 De IMEX-methode

We hebben zojuist gezien hoe de diffusievergelijking, een lineaire partiële differentiaalvergelijking, numeriek opgelost kan worden. Stel dat we een niet-lineaire partiële differentiaalvergelijking hebben, de diffusievergelijking met een extra reactieterm, zodanig dat we het stelsel $\frac{d\vec{u}}{dt}(t) = D_2\vec{u}(t) + \vec{f}(\vec{u})$ willen oplossen. Dit kan opnieuw met de voorwaartse of terugwaartse Euler, maar we kunnen ook een combinatie van deze twee gebruiken. De voorwaartse Euler methode is niet altijd stabiel, maar de terugwaartse Euler methode vereist meer rekenkracht. Bij de terugwaartse Euler methode moet er namelijk per tijdstap een niet-lineair stelsel opgelost worden. Een IMEX-methode is een combinatie van de Impliciete en EXplicitie Euler methode.

Zoals beschreven in [8], kunnen we een gewone differentiaalvergelijking schrijven als

$$\frac{du}{dt}(t) = F(t, u(t)) \equiv F_0(t, u(t)) + F_1(t, u(t)),$$

waarbij F_0 een niet-stijve reactieterm is en F_1 een stijve diffusieterm. Een voorbeeld van een IMEX-methode is de IMEX- θ methode. Deze methode toegepast op de differentiaalvergelijking geeft

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t} = F_0(t_n, u_n) + (1 - \theta)F_1(t_n, u_n) + \theta F(t_{n+1}, u_{n+1}),$$

waarbij $\theta \geq \frac{1}{2}$. Dit is de meest eenvoudige IMEX-methode. De stabiliteitsanalyse is behandeld in [8]. Voor $\theta = 1$ zijn de stabiliteitsresultaten het meest gunstig. In het volgende hoofdstuk zullen we de IMEX- θ methode met $\theta = 1$ toepassen op het τ -model. Voorbeelden van andere IMEX-methoden staan beschreven in [9].

4 Numerieke oplossingen van het ééndimensionale τ -model

Zoals beschreven in hoofdstuk 2 wordt het ééndimensionale τ -model gegeven door

$$u_t = du_{xx} + [f(u)]_x + \tau u_{xxt},$$

waarbij u een functie afhankelijk van x en t is die afgebeeld wordt op het interval $[0, 1]$, en waarbij $(x, t) \in [0, 1] \times [0, T]$. We zullen de oplossing van het model nu numeriek benaderen op de manier die beschreven staat in hoofdstuk 3.

We discretiseren het interval $[0, 1]$ in I gelijke stappen, $0 = x_1 < \dots < x_I = 1$, met afstand $\Delta x = \frac{1}{I-1}$. Opnieuw noteren we $u_i(t) = u(x_i, t)$ voor $i = 1, \dots, I$. Verder definiëren we de oplossingsvector

$$\vec{u}(t) := \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_I(t) \end{pmatrix},$$

zodanig dat $\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t) \approx \frac{d}{dt}u_i(t) = \dot{u}_i(t)$. Merk op dat $u_1(t) = u_-$ en $u_I(t) = u_+$. Passen we de theorie (methode-der-lijnen) van hoofdstuk 3 toe, dan volgt dat we het volgende stelsel gewone differentiaalvergelijkingen krijgen:

$$\dot{\vec{u}}(t) = dD_2\vec{u}(t) + \vec{g}(\vec{u}(t)) + \tau D_2\dot{\vec{u}}(t). \quad (4.1)$$

De vector $\vec{g}(\vec{u}(t))$ is gedefinieerd als:

$$\vec{g}(\vec{u}(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{f(u_3(t)) - f(u_1(t))}{2\Delta x} \\ \vdots \\ \frac{f(u_I(t)) - f(u_{I-2}(t))}{2\Delta x} \\ 0 \end{pmatrix} = D_{1c} \begin{pmatrix} f(u_1(t)) \\ f(u_2(t)) \\ \vdots \\ f(u_{I-1}(t)) \\ f(u_I(t)) \end{pmatrix}.$$

Omdat we nu geen periodieke randvoorwaarden hebben, stellen we de bovenste en onderste rij van matrix D_{1c} en matrix D_2 gelijk aan 0. In appendix A staat een uitgebreide analyse van de methode-der-lijnen toegepast op het ééndimensionale τ -model.

We kunnen vergelijking (4.1) omschrijven naar

$$(I - \tau D_2)\dot{\vec{u}}(t) = dD_2\vec{u}(t) + \vec{g}(\vec{u}(t)).$$

We discretiseren het tijdsinterval $[0, T]$ in N gelijke stappen met afstand Δt zodanig dat $0 = t_1 < \dots < t_N = T$. Merk op dat $\Delta t = \frac{T}{N-1}$. We noteren $\vec{u}(t_n)$ als \vec{u}^n voor $n = 1, \dots, N$. Toepassen van de IMEX- θ methode met $\theta = 1$, zoals beschreven in hoofdstuk 3, geeft

$$(I - \tau D_2)\frac{\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^n}{\Delta t} = dD_2\vec{u}^{n+1} + \vec{g}(\vec{u}^n).$$

We definiëren $M := I - \tau D_2$. Dan volgt dat

$$M(\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^n) = d\Delta t D_2\vec{u}^{n+1} + \Delta t \vec{g}(\vec{u}^n).$$

We kunnen dit omschrijven naar

$$(M - d\Delta t D_2)\vec{u}^{n+1} = M\vec{u}^n + \Delta t \vec{g}(\vec{u}^n).$$

We definiëren $B := M - d\Delta t D_2$ en $\vec{k}^n := M\vec{u}^n + \Delta t \vec{g}(\vec{u}^n)$. Dit geeft ons de vergelijking

$$B\vec{u}^{n+1} = \vec{k}^n.$$

We kunnen de oplossing van het ééndimensionale τ -model dan numeriek benaderen in MATLAB door $\vec{u}^{n+1} = B \setminus \vec{k}^n$. De operator \setminus lost in MATLAB een systeem van lineaire vergelijkingen op.

Voorbeeld 4.1. Stel dat we een systeem van lineaire vergelijkingen $A\vec{x} = \vec{b}$ hebben. Dan kan de oplossing \vec{x} in MATLAB berekend worden door $\vec{x} = A \setminus \vec{b}$.

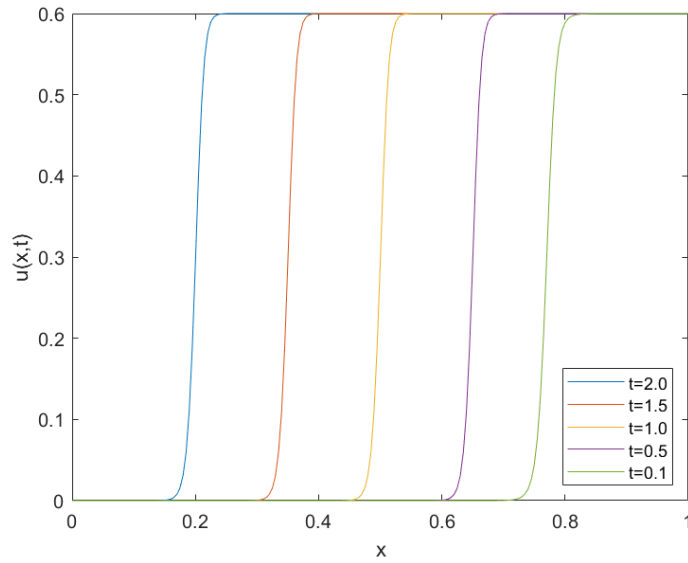
4.1 Numerieke experimenten

Met behulp van de bovenstaande theorie kunnen we de oplossing van het τ -model numeriek benaderen. Dit doen we in MATLAB. De bijbehorende code is te vinden in appendix C.

Eerst bekijken we een één-fase stroming. De bijbehorende functie is dan $f(u) = \frac{u^2}{2}$. Verder nemen we $T = 2$, $d = 0.002$, $u_- = 0$, $u_+ = 0.6$, $R = 50$ en $x_0 = 0.8$. Om de eerder besproken numerieke oplosmethode toe te passen, kiezen we $\Delta x = 0.005$. We variëren het aantal iteraties n , zodat we de oplossing op meerdere tijdstippen kunnen weergeven. Voor $\tau = 0$ is het resultaat in figuur 2 weergegeven. We zien dat er monotone golven ontstaan. Aan de hand van de figuur kunnen we de golfsnelheid berekenen. Hiervoor vergelijken we een x -waarde van de golf op tijdstip $t = 2.0$ en de golf op tijdstip $t = 1.5$. Op deze manier zien we hoeveel de golf verplaatst is na een bepaalde tijd. In de grafiek kunnen we aflezen dat de golf op tijdstip $t = 2.0$ ongeveer door het punt $(0.2; 0.2)$ gaat. De golf op tijdstip $t = 1.5$ gaat ongeveer door het punt $(0.35; 0.2)$. De golfsnelheid c kunnen we dan berekenen door

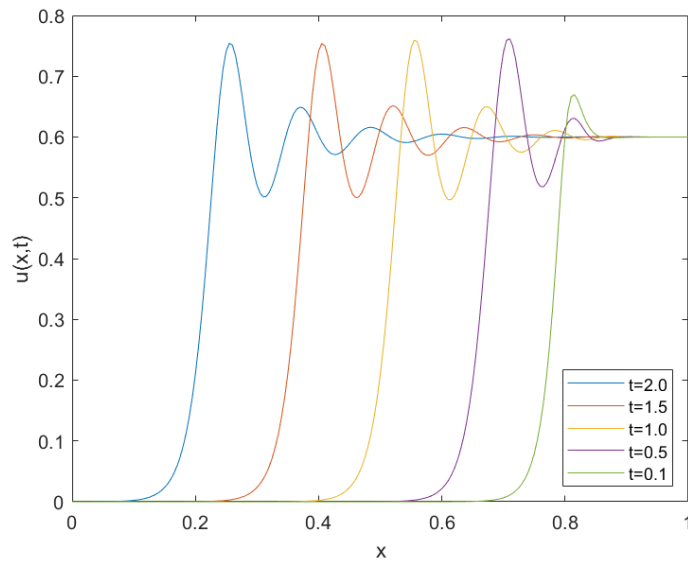
$$c \approx \frac{0.35 - 0.2}{2.0 - 1.5} = 0.3.$$

Later in dit hoofdstuk zullen we de golfsnelheid exact berekenen.



Figuur 2: Oplossing van een één-fase stroming met $\tau = 0$ voor verschillende t tussen 0.1 en 2.0.

Voor $\tau = 3.1 \cdot 10^{-4}$ ontstaan er niet-monotone golven met trillingen. Dit is te zien in figuur 3. Ook hier hebben we de golf op meerdere tijdstippen weergegeven. Aan de hand van de figuur kunnen we voor deze golven de golfsnelheid berekenen. Opnieuw kunnen we in de grafiek aflezen dat de golf op tijdstip $t = 2.0$ ongeveer door het punt $(0.2; 0.2)$ gaat. De golf op tijdstip $t = 1.5$ gaat ongeveer door het punt $(0.35; 0.2)$. De golfsnelheid c voor deze niet-monotone golven wordt dan, net zoals voor de monotone golven, gegeven door $c \approx 0.3$.

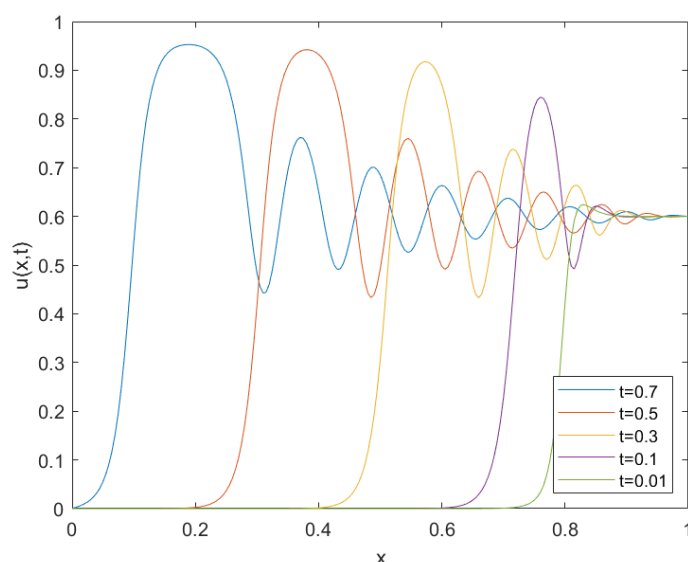


Figuur 3: Oplossing van een één-fase stroming met $\tau = 3.1 \cdot 10^{-4}$ voor verschillende t tussen 0.1 en 2.0.

Om te kijken wat er gebeurt bij een twee-fasen stroming, nemen we $f(u) = \frac{u^2}{u^2 + (1-u)^2}$, $T = 0.7$ en $\tau = 3.1 \cdot 10^{-4}$. Het resultaat is te zien in figuur 4. Hier ontstaan niet-monotone golven met een plateau. We hebben opnieuw gevarieerd in het aantal iteraties n , zodat we de oplossing op meerdere tijdstippen kunnen weergeven. Aan de hand van de figuur zullen we ook hier de golfsnelheid berekenen. Dit keer vergelijken we een x -waarde van de golf op tijdstip $t = 0.5$ en de golf op tijdstip $t = 0.3$. In de grafiek kunnen we aflezen dat de golf op tijdstip $t = 0.5$ ongeveer door het punt $(0.27; 0.2)$ gaat. De golf op tijdstip $t = 0.3$ gaat ongeveer door het punt $(0.50; 0.2)$. De golfsnelheid c kunnen we dan berekenen door

$$c \approx \frac{0.50 - 0.27}{0.5 - 0.3} = 1.15.$$

Deze golfsnelheid zullen we eveneens later in het hoofdstuk exact berekenen.



Figuur 4: Oplossing van een twee-fasen stroming met $\tau = 3.1 \cdot 10^{-4}$ voor verschillende t tussen 0.01 en 0.7.

4.2 Een lopende golf oplossing

Om de numerieke oplossingen van het ééndimensionale τ -model te analyseren, gaan we de lopende golf oplossing bestuderen. Met behulp van de lopende golf oplossing kunnen we namelijk de golfsnelheid berekenen en we kunnen voorspellen wanneer er monotone of niet-monotone golven ontstaan.

Definitie 4.2. Een *lopende golf oplossing* is een oplossing van een partiële differentiaalvergelijking die voortbeweegt met een golfsnelheid $c > 0$, terwijl de vorm van de golf hetzelfde blijft. De Ansatz voor een lopende golf wordt gegeven door

$$u(x, t) = \phi(x + ct) = \phi(\eta),$$

met $c > 0$ de golfsnelheid en $\eta \in (-\infty, \infty)$.

We gebruiken de Ansatz voor een lopende golf

$$u(x, t) = \phi(x + ct) = \phi(\eta),$$

met $c > 0$ de golfsnelheid en $\eta \in (-\infty, \infty)$. We willen deze nieuwe functie ϕ substitueren in het ééndimensionale τ -model (2.1). De linkerzijde van het τ -model wordt dan

$$u_t = c\phi'(x + ct) = c\phi'(\eta)$$

en de rechterzijde van het τ -model wordt

$$du_{xx} + [f(u)]_x + \tau u_{xxt} = d\phi''(\eta) + [f(\phi(\eta))]' + c\tau\phi'''(\eta).$$

We krijgen dan de volgende gewone differentiaalvergelijking van orde 3:

$$c\phi'(\eta) = d\phi''(\eta) + [f(\phi(\eta))]' + c\tau\phi'''(\eta).$$

Beide kanten integreren geeft

$$\int_{-\infty}^{\eta} c\phi'(\tilde{\eta})d\tilde{\eta} = \int_{-\infty}^{\eta} d\phi''(\tilde{\eta}) + [f(\phi(\tilde{\eta}))]' + c\tau\phi'''(\tilde{\eta})d\tilde{\eta}.$$

Dit geeft ons

$$c\phi(\eta)|_{-\infty}^{\eta} = d\phi'(\eta) + f(\phi(\eta)) + c\tau\phi''(\eta)|_{-\infty}^{\eta}.$$

We nemen aan dat $\phi(-\infty) = u_-$ en $\phi'(-\infty) = \phi''(-\infty) = 0$. Dan krijgen we de volgende differentiaalvergelijking van orde 2:

$$c(\phi(\eta) - u_-) = d\phi'(\eta) + f(\phi(\eta)) - f(u_-) + c\tau\phi''(\eta). \quad (4.2)$$

We nemen ook aan dat $\phi(\infty) = u_+$ en $\phi'(\infty) = \phi''(\infty) = 0$. We schrijven vergelijking (4.2) om en nemen het limiet $\eta \rightarrow \infty$, zodat we een asymptotische uitdrukking voor de golfsnelheid c kunnen bepalen. Dan volgt dat

$$\begin{aligned} c &= \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{d\phi'(\eta) + f(\phi(\eta)) - f(u_-)}{\phi(\eta) - u_- - \tau\phi''(\eta)} \\ &= \frac{d \cdot 0 + f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_- - \tau \cdot 0} \\ &= \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-}. \end{aligned}$$

We hebben nu een uitdrukking voor de golfsnelheid, afhankelijk van de functie f .

4.2.1 Een één-fase stroming

We zullen eerst de situatie voor $f(u) = \frac{u^2}{2}$ bekijken, het geval waarbij er een één-fase stroming is. Deze analyse staat beschreven in [6]. Als we $f(u) = \frac{u^2}{2}$ invullen, volgt dat we c kunnen schrijven als

$$c = \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-} = \frac{\frac{u_+^2}{2} - \frac{u_-^2}{2}}{u_+ - u_-} = \frac{1}{2}(u_+ + u_-).$$

Voor $u_- = 0$ en $u_+ = 0.6$ volgt dat de golfsnelheid gelijk is aan $c = \frac{1}{2}(0.6 - 0) = 0.3$. Dit komt overeen met de berekening die we aan de hand van figuur 2 en figuur 3 hebben gedaan.

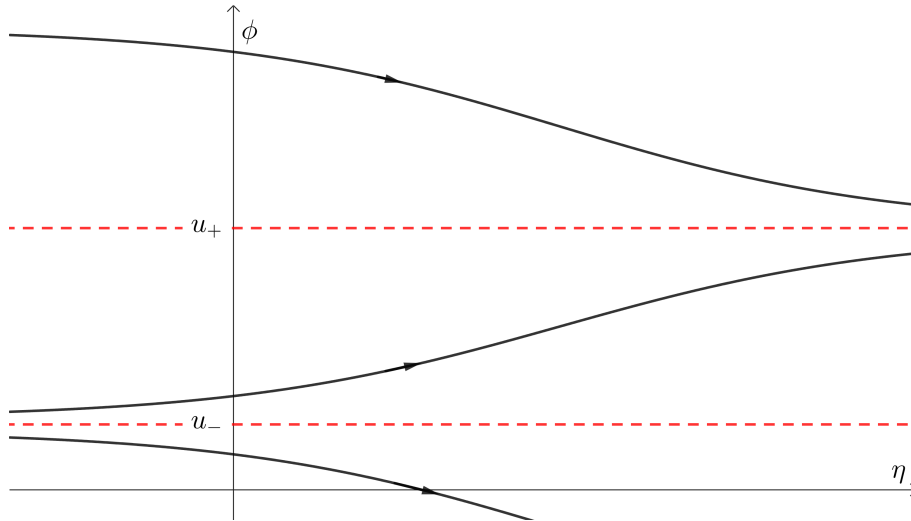
Nu we de golfsnelheid bepaald hebben, kunnen we de differentiaalvergelijking verder analyseren voor het geval $\tau = 0$ en het geval $\tau > 0$. Als $\tau = 0$ verdwijnt de term u_{xxt} uit het oorspronkelijke model (2.1) en houden we de Burgersvergelijking met viscositeit over. Om de lopende golf oplossing van de Burgersvergelijking met viscositeit te vinden, willen we de volgende gewone differentiaalvergelijking oplossen:

$$c(\phi(\eta) - u_-) = d\phi'(\eta) + f(\phi(\eta)) - f(u_-).$$

We kunnen dit schrijven als

$$\begin{aligned}\phi'(\eta) &= \frac{c}{d}(\phi(\eta) - u_-) - \frac{f(\phi(\eta))}{d} + \frac{f(u_-)}{d} \\ &= -\frac{1}{2d}(-(u_+ + u_-)\phi(\eta) + (u_+ + u_-)u_- + \phi^2(\eta) - u_-^2) \\ &= -\frac{1}{2d}(\phi^2(\eta) - (u_+ + u_-)\phi(\eta) + u_+u_-) \\ &= -\frac{1}{2d}(\phi(\eta) - u_-)(\phi(\eta) - u_+).\end{aligned}$$

Merk op dat $\phi'(\eta) = 0$ als $\phi(\eta) = u_-$ of als $\phi(\eta) = u_+$. We zien dat $\phi'(\eta) > 0$ voor $u_- < \phi(\eta) < u_+$ en dat $\phi'(\eta) < 0$ voor $\phi(\eta) < u_-$ en $\phi(\eta) > u_+$. In figuur 5 hebben we een aantal oplossingen weergegeven in het (ϕ, η) -vlak. De figuur is gemaakt met behulp van GeoGebra [10]. We zien dat $\phi(\eta) = u_-$ een instabiele oplossing is en $\phi(\eta) = u_+$ een stabiele oplossing.



Figuur 5: Oplossingen van de Burgersvergelijking in het (ϕ, η) -vlak.

De expliciete oplossing van de Burgersvergelijking met viscositeit wordt gegeven door $\phi(\eta) = \frac{u_+ + u_- e^{k\eta}}{1 + e^{k\eta}}$, waarbij $k = \frac{u_+ - u_-}{2d} > 0$. De oplossing is een monotone golf die voortbeweegt met snelheid $c = \frac{1}{2}(u_+ + u_-)$, zoals in figuur 2. Naarmate d kleiner wordt, zal de golf steiler worden. We kunnen concluderen dat het ééndimensionale τ -model met $\tau = 0$ altijd monotone golven zal hebben.

Om de lopende golf oplossing voor $\tau > 0$ te analyseren, schrijven we de differentiaalvergelijking (4.2) als het volgende stelsel differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{cases} \phi' = \psi, \\ \psi' = \frac{1}{\tau}(\phi - u_-) - \frac{d}{c\tau}\psi - \frac{1}{c\tau}f(\phi) + \frac{1}{c\tau}f(u_-). \end{cases} \quad (4.3)$$

Merk op dat de evenwichtspunten (ϕ, ψ) gegeven worden door $(u_-, 0)$ en $(u_+, 0)$. Om de stabiliteit van deze evenwichtspunten te berekenen, gebruiken we de Jacobiaan

$$J(\phi, \psi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{\tau} - \frac{f'(\phi)}{c\tau} & -\frac{d}{c\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{\tau} - \frac{\phi}{c\tau} & -\frac{d}{c\tau} \end{pmatrix}.$$

Deze matrix heeft spoor $\sigma = -\frac{d}{c\tau}$ en determinant $\Delta = -\frac{1}{\tau} + \frac{\phi}{c\tau} = \frac{\phi - c}{c\tau}$. We kunnen de eigenwaarden van de Jacobiaan berekenen door

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\sigma \pm \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} - \Delta} = -\frac{d}{2c\tau} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4c^2\tau^2} - \frac{\phi - c}{c\tau}}.$$

We zullen voor de twee gevonden evenwichtspunten bepalen of de eigenwaarden positief of negatief zijn.

Als we $(u_-, 0)$ invullen en gebruiken dat $c = \frac{1}{2}(u_+ + u_-)$, dan volgt dat

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -\frac{d}{2c\tau} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4c^2\tau^2} - \frac{\phi - c}{c\tau}} = -\frac{d}{2c\tau} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4c^2\tau^2} - \frac{2\phi - (u_+ + u_-)}{2c\tau}} \\ &= -\frac{d}{2c\tau} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4c^2\tau^2} + \frac{u_+ + u_- - 2\phi}{2c\tau}} \\ &= -\frac{d}{2c\tau} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4c^2\tau^2} + \frac{u_+ - u_-}{2c\tau}}. \end{aligned}$$

Omdat $\frac{u_+ - u_-}{2c\tau} > 0$ volgt dat $\sqrt{\frac{d^2}{4c^2\tau^2} + \frac{u_+ - u_-}{2c\tau}} > \frac{d}{2c\tau}$. Het evenwichtspunt $(u_-, 0)$ heeft dan een positieve en een negatieve eigenwaarde. Hieruit volgt dat $(u_-, 0)$ een zadelpunt is.

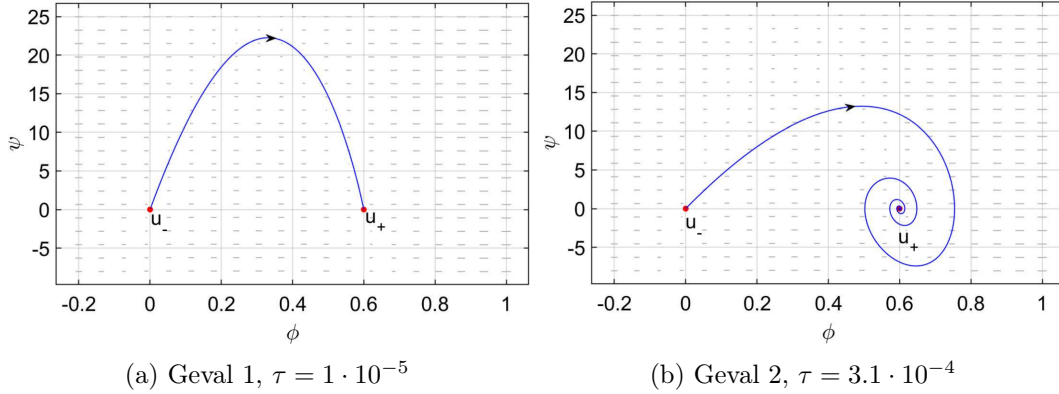
Als we $(u_+, 0)$ invullen, krijgen we

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -\frac{d}{2c\tau} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4c^2\tau^2} - \frac{\phi - c}{c\tau}} = -\frac{d}{2c\tau} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4c^2\tau^2} + \frac{u_+ + u_- - 2\phi}{2c\tau}} \\ &= -\frac{d}{2c\tau} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4c^2\tau^2} + \frac{u_- - u_+}{2c\tau}}. \end{aligned}$$

We kunnen opmerken dat $\frac{u_- - u_+}{2c\tau} < 0$. Er zijn dan twee mogelijke gevolgen:

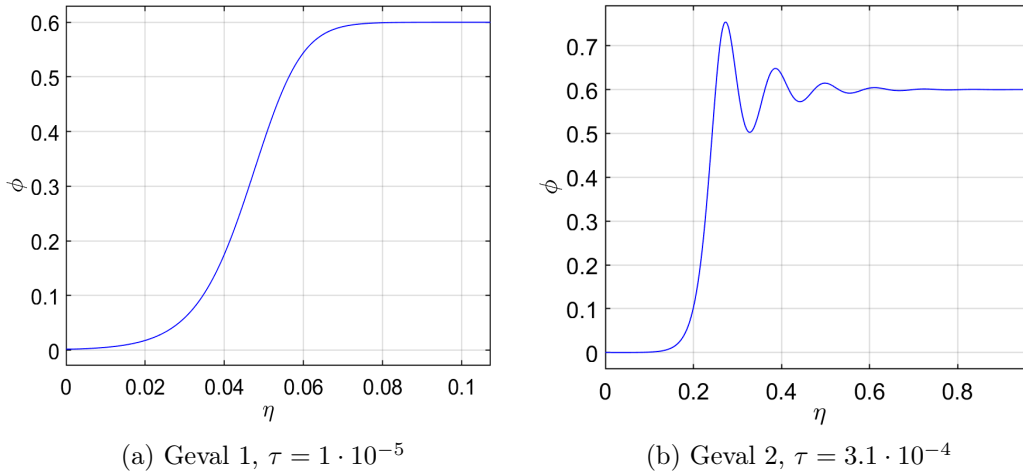
1. als $\frac{d^2}{4c^2\tau^2} + \frac{u_- - u_+}{2c\tau} \geq 0$ dan volgt dat beide eigenwaarden reëel en negatief zijn. Het evenwichtspunt $(u_+, 0)$ is dan een stabiel knooppunt;
2. als $\frac{d^2}{4c^2\tau^2} + \frac{u_- - u_+}{2c\tau} < 0$ dan volgt dat beide eigenwaarden een imaginair deel hebben. Het reële deel van de eigenwaarden is negatief. Het evenwichtspunt $(u_+, 0)$ is dan een stabiele focus (spiraal).

We hebben voor twee waarden van τ het faseplaatje in PPlane gemaakt voor stelsel (4.3). Hierbij hebben we $d = 0.002$, $u_- = 0$ en $u_+ = 0.6$ genomen, net zoals bij de numerieke oplossingen in figuur 2 en figuur 3. In figuur 6a hebben we $\tau = 1 \cdot 10^{-5}$ genomen zodat we in geval 1 zitten. We zien dat er dan een oplossing direct van u_- naar u_+ gaat. Dit correspondeert met een monotone golf. In figuur 6b hebben we $\tau = 3.10 \cdot 10^{-4}$ genomen. We zitten dan in geval 2. We zien dat de oplossing een paar keer rond u_+ draait voordat dit punt wordt bereikt. Dit correspondeert met een niet-monotone golf met trillingen.



Figuur 6: Faseplaatjes van stelsel (4.3) voor twee waarden van τ , en met $d = 0.002$, $u_- = 0$ en $u_+ = 0.6$.

We kunnen de oplossingen van figuur 6 in het (ϕ, η) -vlak plotten. Dit geeft een stationaire golf in η . In figuur 7a is de stationaire golf een monotone golf (zoals in figuur 2) en in figuur 7b is de stationaire golf een niet-monotone golf met trillingen (zoals in figuur 3).



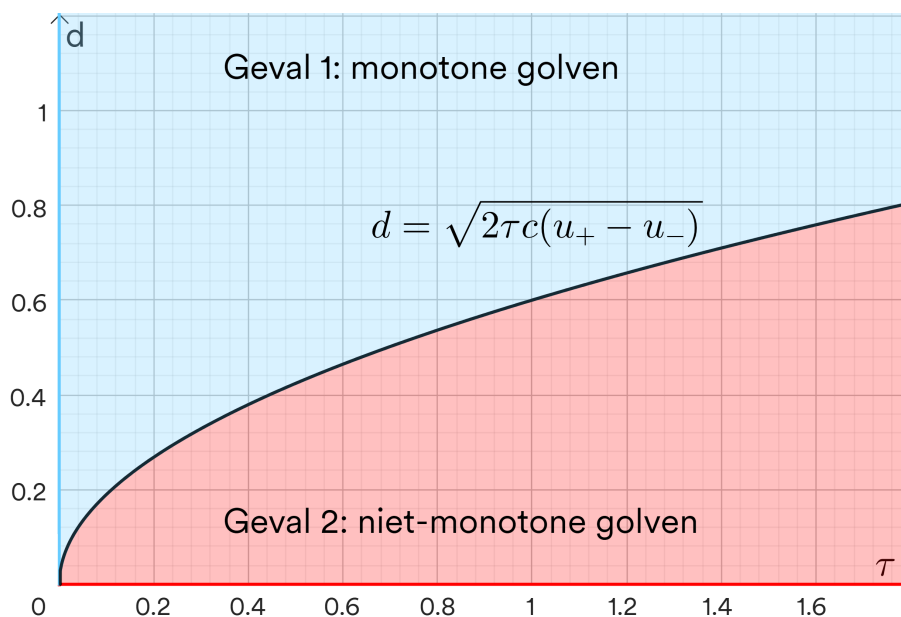
Figuur 7: Twee oplossingen van stelsel (4.3) in het (ϕ, η) -vlak.

Om exact te bepalen wanneer we monotone of niet-monotone golven hebben, kunnen we de ongelijkheid $\frac{d^2}{4c^2\tau^2} + \frac{u_- - u_+}{2c\tau} < 0$ omschrijven naar $2c\tau > \frac{d^2}{u_+ - u_-}$. Dan volgt dat voor parameters zodanig dat $\tau > \frac{d^2}{2c(u_+ - u_-)}$ de oplossing niet-monotone

golven zal hebben. Als we een één-fase stroming hebben, weten we dat $c = \frac{1}{2}(u_+ + u_-)$. Dan kunnen we de ongelijkheid schrijven als

$$\tau > \frac{d^2}{u_+^2 - u_-^2}.$$

Dus voor parameters zodanig dat aan deze ongelijkheid wordt voldaan, zal de oplossing van het één-dimensionale τ -model met een één-fase stroming niet-monotone golven met trillingen hebben. Als niet aan deze ongelijkheid wordt voldaan, heeft de oplossing monotone golven. In figuur 8 hebben we dit in het (τ, d) -vlak weergegeven. Dit is met behulp van GeoGebra vormgegeven [10].



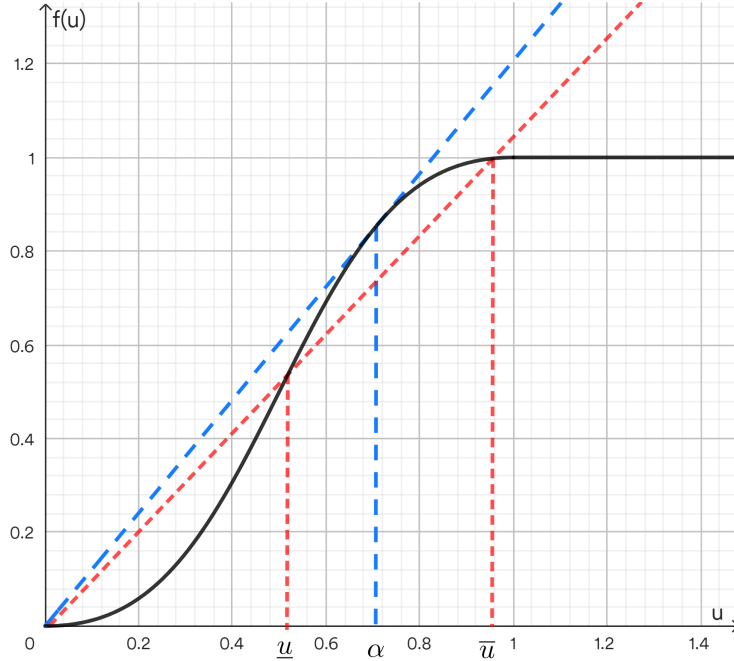
Figuur 8: De twee gevallen bij een één-fase stroming weergegeven in het (τ, d) -vlak, voor $u_- = 0$ en $u_+ = 0.6$.

4.2.2 Een twee-fasen stroming

De lopende golf oplossing voor een twee-fasen stroming met de convex-concave functie staat beschreven in [7, 11]. We zullen de resultaten kort samenvatten.

De golfsnelheid wordt gegeven door $c = \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-}$. Als we $f(u) = \frac{u^2}{u^2 + (1-u)^2}$ met $u_- = 0$ en $u_+ = 0.6$ invullen in de formule voor de snelheid, komen we uit op $c = \frac{0.6}{0.6^2 + (1-0.6)^2} \approx 1.15$. Dit komt overeen met de berekening die we aan de hand van figuur 4 hebben gedaan.

In figuur 9 is de grafiek van $f(u) = \frac{u^2}{u^2 + (1-u)^2}$ weergegeven met behulp van GeoGebra [10]. We kunnen een raaklijn opstellen die door het punt $(u_-, f(u_-))$ gaat. Deze lijn raakt de grafiek in het punt $(\alpha, f(\alpha))$ (blauwe stippellijn).



Figuur 9: De punten α , \underline{u} , \bar{u} en de grafiek $f(u)$ als $\tau > \tau^*$.

Als $\tau = 0$ volgt dat u_- een instabiel punt is en u_+ een stabiel punt. Er is dan een lopende golf oplossing mogelijk van u_- naar u_+ als $u_- < u_+ < \alpha$. Deze oplossing correspondeert met een monotone golf.

Als $\tau > 0$ dan bestaat er een τ^* zodanig dat voor $\tau < \tau^*$ er een lopende golf oplossing van u_- naar $u_- < u_+ < \alpha$ is die eveneens correspondeert met een monotone golf. Als $\tau > \tau^*$, dan bestaat er een $\bar{u}(\tau) > \alpha$ zodanig dat er een lopende golf oplossing is van u_- naar $\bar{u}(\tau)$. Er bestaat dan ook een oplossing van $\bar{u}(\tau)$ naar u_+ mits $\underline{u}(\tau) < u_+ < \bar{u}(\tau)$ met $\underline{u}(\tau)$ de oplossing in het interval $(u_-, \bar{u}(\tau))$ van

$$\frac{f(u) - f(u_-)}{u - u_-} = \frac{f(\bar{u}(\tau)) - f(u_-)}{\bar{u}(\tau) - u_-}.$$

Het punt $\underline{u}(\tau)$ is in figuur 9 weergegeven als het middelste snijpunt van de rode stippellijn met $f(u)$. De rode stippellijn is de lijn die $(u_-, f(u_-))$ met $(\bar{u}, f(\bar{u}))$ verbindt. Als $\tau > \tau^*$ en $\underline{u}(\tau) < u_+ < \bar{u}(\tau)$ dan bestaat er geen lopende golf oplossing van u_- direct naar u_+ . Er bestaat wel een combinatie van twee lopende golf oplossingen. Namelijk een lopende golf oplossing van u_- naar $\bar{u}(\tau)$ en een lopende golf oplossing van $\bar{u}(\tau)$ naar u_+ . De lopende golf oplossing van u_- naar $\bar{u}(\tau)$ correspondeert met het plateau dat gevormd wordt bij de numerieke oplossing. De lopende golf oplossing van $\bar{u}(\tau)$ naar u_+ correspondeert met een niet-monotone golf met trillingen. Samen vormt dit een niet-monotone golf met een plateau zoals in figuur 4.

5 De fractionele Laplaciaan en wortels van eindige differentiematrices

Bij (hogere orde) afgeleiden $\frac{d^n y}{dt^n}$ nemen we n altijd als een geheel getal. Wat gebeurt er als n niet meer een geheel getal, maar een breuk is? Dit noemen we een fractionele afgeleide. Het concept van fractionele afgeleiden gaat terug naar het jaar 1695. Leibniz en l'Hôpital stuurden in die tijd brieven naar elkaar. In een brief vroeg l'Hôpital aan Leibniz wat er zou gebeuren als $n = \frac{1}{2}$. Op 30 september 1695 beantwoordde Leibniz dat er dan een paradox zou ontstaan. Daar voegde hij het volgende aan toe: *“Het lijkt erop dat we op een dag zeer nuttige consequenties uit deze paradoxen zullen trekken, omdat er nauwelijks paradoxen zijn zonder relevantie”* [12].

In deze scriptie gaan we de fractionele Laplaciaan gebruiken. We zullen de intuïtie achter de fractionele Laplaciaan toelichten met behulp van een Lévy-vlucht. Daarna zullen we het hebben over wortels van eindige differentiematrices. We gaan wortels van eindige differentiematrices gebruiken om fractionele partiële differentiaalvergelijkingen numeriek op te lossen.

5.1 De fractionele Laplaciaan

Voordat we ingaan op de fractionele Laplaciaan, introduceren we eerst de gewone Laplaciaan aan de hand van de volgende definitie.

Definitie 5.1. Stel we hebben een functie $f(x_1, \dots, x_n, t)$ afhankelijk van plaats en tijd t . De **Laplaciaan** van deze functie, aangegeven met Δ , wordt gegeven door

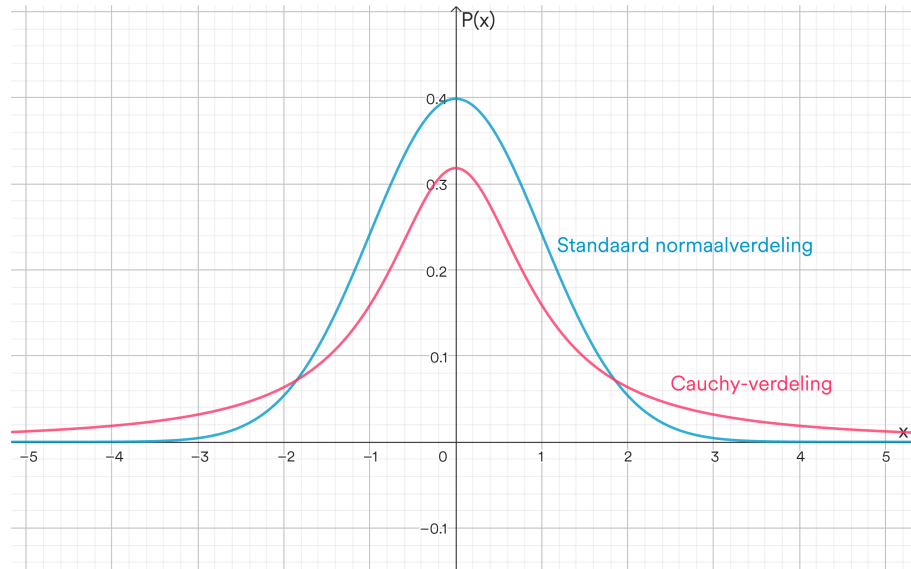
$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Voor een functie $u(x, t)$ geldt dat $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{xx}$. De fractionele Laplaciaan noteren we met $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$ voor $\alpha \in (0, 2)$ [13]. Er zijn verschillende definities voor de fractionele Laplaciaan, eveneens beschreven in [13]. In deze scriptie gaan we de fractionele Laplaciaan alleen numeriek toepassen. We zullen daarom verder niet ingaan op deze definities. Wel gaan we de intuïtie achter de fractionele Laplaciaan toelichten.

We beginnen met een Brownse beweging. Een Brownse beweging is een toevalsbeweging waarbij een deeltje per tijdstap beweegt met een stapgrootte die bepaald wordt door de standaard normaalverdeling. De richting waarin het deeltje beweegt, wordt aan de hand van de uniforme verdeling bepaald. Voor elke richting is de kans dat het deeltje daar naartoe beweegt gelijk. De verwachtingswaarde van een variabele waarvan de kansverdeling gegeven wordt door de standaard normaalverdeling, is gelijk aan 0. Dan volgt dat het deeltje voornamelijk met kleine stappen rondom de startpositie beweegt. De Brownse beweging van een groot aantal onafhankelijke deeltjes samen veroorzaakt diffusie. Dit geeft het verband tussen de Brownse beweging en de diffusievergelijking waarbij de gewone Laplaciaan wordt gebruikt.

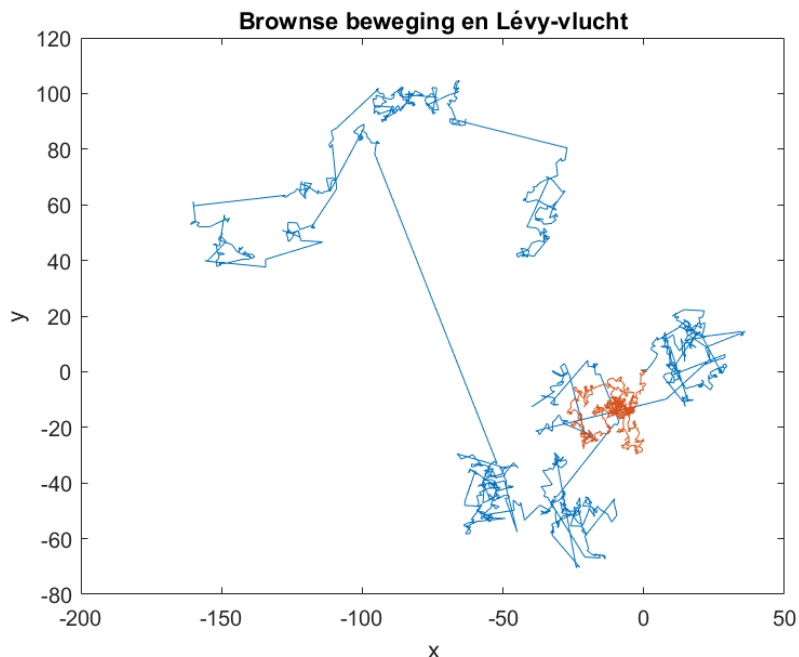
Een Lévy-vlucht is net als een Brownse beweging een toevalsbeweging, maar nu wordt de stapgrootte bepaald door een kansverdeling met een ‘zwarte staart’. Dit vergroot de kans op een aanzienlijke toename in stapgrootte. De Cauchy-verdeling en Pareto-verdeling zijn voorbeelden van een kansverdeling met een ‘zwarte staart’.

In figuur 10 zijn de kansdichtheid voor de Cauchy-verdeling met $\gamma = 1$ en de kansdichtheid voor de standaard normaalverdeling weergegeven. Dit laat het verschil zien tussen een kansverdeling met en zonder ‘zware staart’.



Figuur 10: Standaard normaalverdeling en Cauchy-verdeling ($\gamma = 1$).

Het verschil tussen een Brownse beweging en een Lévy-vlucht kan in figuur 11 geobserveerd worden. De toevalsbewegingen zijn in MATLAB gesimuleerd. Voor beide toevalsbewegingen is het beginpunt $(0, 0)$ en zijn er 1000 iteraties genomen. Voor het simuleren van een Lévy-vlucht is gebruik gemaakt van de Pareto-verdeling met $\alpha = 1.5$. We zien in de figuur dat de Brownse beweging (rood) met kleine stappen rondom het beginpunt beweegt. De Lévy-vlucht (blauw) verspreidt verder en is een combinatie van korte stappen en grote sprongen.



Figuur 11: Brownse beweging (rood) en Lévy-vlucht (blauw), voor 1000 iteraties.

De Lévy-vlucht van een groot aantal onafhankelijke deeltjes samen veroorzaakt superdiffusie [14]. Superdiffusie kan gemodelleerd worden met een fractionale Laplaciaan op dezelfde manier dat diffusie gemodelleerd kan worden met de gewone Laplaciaan. Een voorbeeld van een toepassing van een Lévy-vlucht is de verspreiding van een virus. Omdat zowel superdiffusie als Lévy-vluchten in diverse natuurverschijnselen voorkomen, wordt de fractionele Laplaciaan regelmatig gebruikt om dit soort fenomenen te modelleren [15].

5.2 Wortels van eindige differentiematrices

Zoals eerder benoemd, wordt de fractionele Laplaciaan gegeven door $-(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$ met $\alpha \in (0, 2)$. Er zijn dus meerdere fractionele Laplacianen mogelijk. In één dimensie geldt dat $-(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} = -\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}}$. Omdat $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \sim D_2$, kunnen we deze eindige differentiematrix gebruiken als we oplossingen van een fractionele partiële differentiaalvergelijking numeriek benaderen. In [16, 17] is onderzoek gedaan naar het gebruik van eindige differentiematrices voor het numeriek benaderen van oplossingen van fractionele partiële differentiaalvergelijkingen. In deze onderzoeken is de numerieke oplossing waarbij gebruik gemaakt is van $-(-D_2)^{\frac{\alpha}{2}} \sim -(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$ de beste benadering voor de analytische oplossing. We zullen in deze scriptie de fractionele Laplaciaan dus modelleren met behulp van wortels van eindige differentiematrices. In MATLAB kan dit met de functie `sqrtm()`, waarmee een wortel van een matrix berekend wordt.

In het volgende hoofdstuk zullen we de fractionele Laplaciaan implementeren in het éédimensionale τ -model en we zullen het effect hiervan onderzoeken door middel van numerieke experimenten.

6 Een ééndimensionaal fractioneel τ -model

Wanneer de methode-der-lijnen is toegepast op het ééndimensionale τ -model, krijgen we het volgende stelsel differentiaalvergelijkingen:

$$\dot{\vec{u}}(t) = dD_2\vec{u}(t) + \vec{g}(\vec{u}(t)) + \tau D_2\dot{\vec{u}}(t),$$

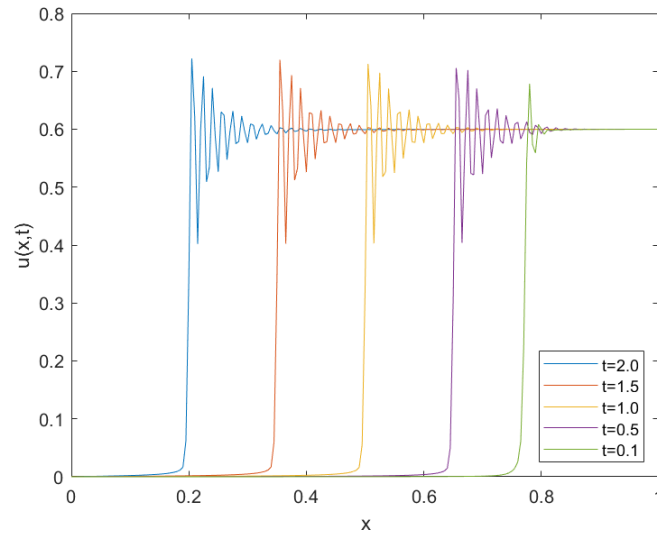
zoals beschreven in hoofdstuk 4. We willen het ruimte-fractionele τ -model onderzoeken, waarbij we de fractionele Laplaciaan implementeren in het model. In het bovenstaande stelsel volgt dan dat we de matrix D_2 kunnen vervangen door $-(-D_2)^{\frac{\alpha}{2}}$ voor $\alpha \in (0, 2)$. In deze bachelorscriptie gaan we het effect van de fractionele Laplaciaan met $\alpha = 1.5$ onderzoeken. We kiezen deze α , omdat $-(-D_2)^{\frac{1.5}{2}} = -(-D_2)^{\frac{3}{4}}$ eenvoudig te implementeren is in MATLAB. We kunnen $-(-D_2)^{\frac{3}{4}}$ in MATLAB berekenen door $-\sqrt{\sqrt{(-D_2)^3}}$ waarbij we de wortel van de matrix in MATLAB berekenen met behulp van de functie `sqrtn()`. We onderscheiden drie mogelijke implementaties van de fractionele Laplaciaan:

1. $\dot{\vec{u}}(t) = -d\sqrt{\sqrt{(-D_2)^3}}\vec{u}(t) + \vec{g}(\vec{u}(t)) + \tau D_2\dot{\vec{u}}(t);$
2. $\dot{\vec{u}}(t) = dD_2\vec{u}(t) + \vec{g}(\vec{u}(t)) - \tau\sqrt{\sqrt{(-D_2)^3}}\dot{\vec{u}}(t);$
3. $\dot{\vec{u}}(t) = -d\sqrt{\sqrt{(-D_2)^3}}\vec{u}(t) + \vec{g}(\vec{u}(t)) - \tau\sqrt{\sqrt{(-D_2)^3}}\dot{\vec{u}}(t).$

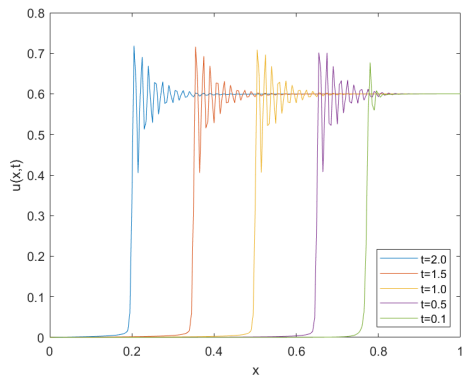
We kunnen dit bij zowel een één-fase stroming als een twee-fasen stroming toepassen. We nemen opnieuw $d = 0.002$, $u_- = 0$, $u_+ = 0.6$, $R = 50$ en $x_0 = 0.8$. De gebruikte MATLAB code voor de numerieke resultaten is te vinden in appendix C.

6.1 Numerieke experimenten met een één-fase stroming

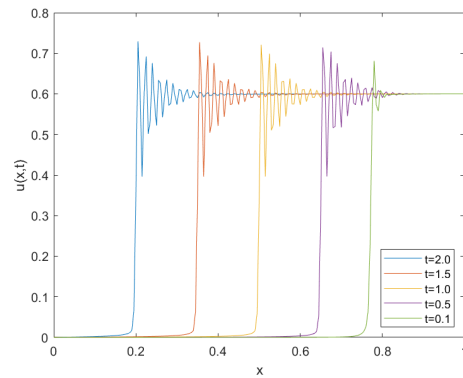
Voor een één-fase stroming nemen we weer $f(u) = \frac{u^2}{2}$ en $T = 2$. Als $\tau = 0$ kunnen we alleen de D_2 bij de d -term vervangen door $-(-D_2)^{\frac{3}{4}}$. De andere twee gevallen zijn niet van toepassing, omdat de τ -term wegvalt als $\tau = 0$. Het resultaat met $\Delta t = 0.0001$ en $\Delta x = 0.005$ is te zien in figuur 12. We hebben gevarieerd in het aantal iteraties, zodat we de golf op verschillende tijdstippen kunnen weergeven. In figuur 13 hebben we hetzelfde gedaan als in figuur 12, maar dan met $\Delta t = 0.00005$ en $\Delta t = 0.0002$. Voor al deze waarden van Δt krijgen we dezelfde golf met trillingen die afnemen in amplitude. Als we Δx kleiner maken, dan neemt de resolutie toe. Het resultaat met $\Delta t = 0.0001$ en $\Delta x = 0.002$ of $\Delta x = 0.001$ is te zien in figuur 14. Omdat de trillingen minder worden naarmate Δx kleiner wordt, kunnen we stellen dat dit een numerieke afwijking is.



Figuur 12: Eén-fase stroming met $\tau = 0$ waar D_2 bij de d -term vervangen is door $-(-D_2)^{\frac{3}{4}}$, en met $\Delta t = 0.0001$ en $\Delta x = 0.005$.

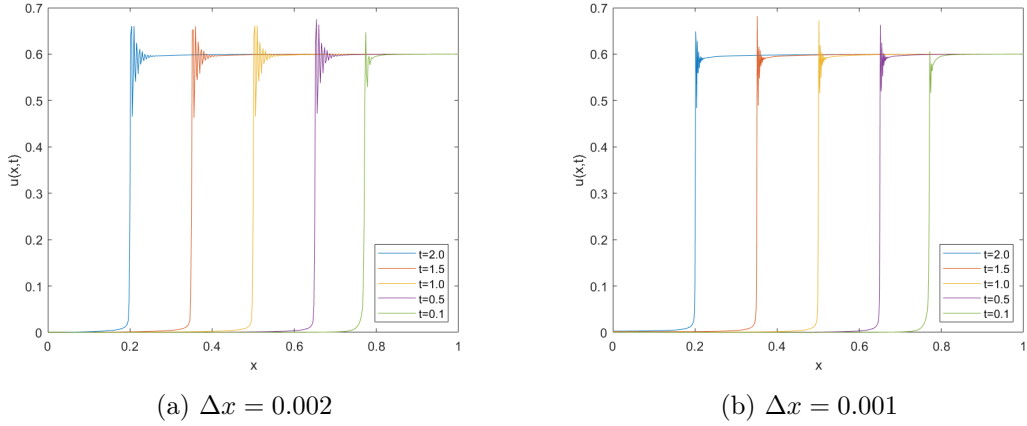


(a) $\Delta t = 0.00005$



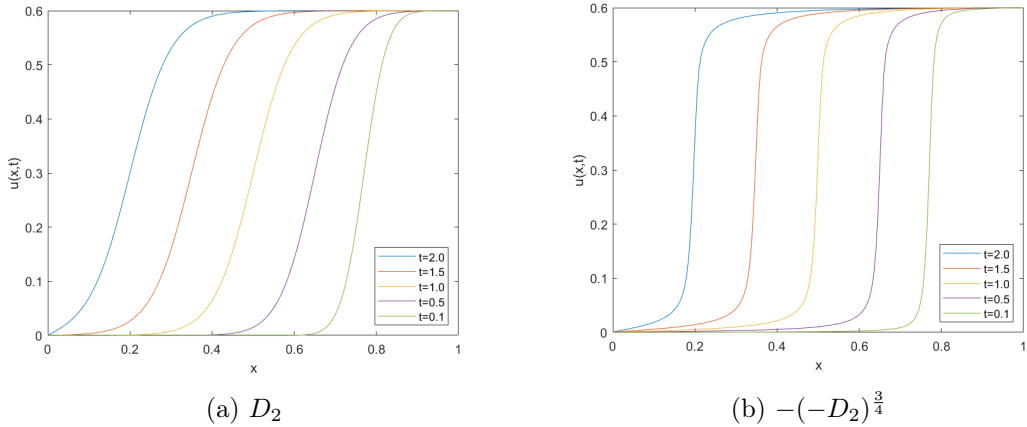
(b) $\Delta t = 0.0002$

Figuur 13: Eén-fase stroming met $\tau = 0$ waar D_2 bij de d -term vervangen is door $-(-D_2)^{\frac{3}{4}}$ voor twee waarden van Δt , en met $\Delta x = 0.005$.



Figuur 14: Eén-fase stroming met $\tau = 0$ waar D_2 bij de d -term vervangen is door $-(-D_2)^{\frac{3}{4}}$ voor twee waarden van Δx , en met $\Delta t = 0.0001$.

Nemen we een grotere diffusiecoëfficiënt d , dan wordt deze numerieke afwijking minder. Het resultaat voor $d = 0.015$ is in figuur 15 weergegeven. Links staat het resultaat als we D_2 gebruiken (de gewone Laplaciaan) en rechts staat het resultaat als we $-(-D_2)^{\frac{3}{4}}$ gebruiken. We zien dat de oplossing met de fractionele Laplaciaan monotone golven heeft. Het verschil met de oplossing met de gewone Laplaciaan is dat de oplossing met de fractionele Laplaciaan steilere golven heeft.

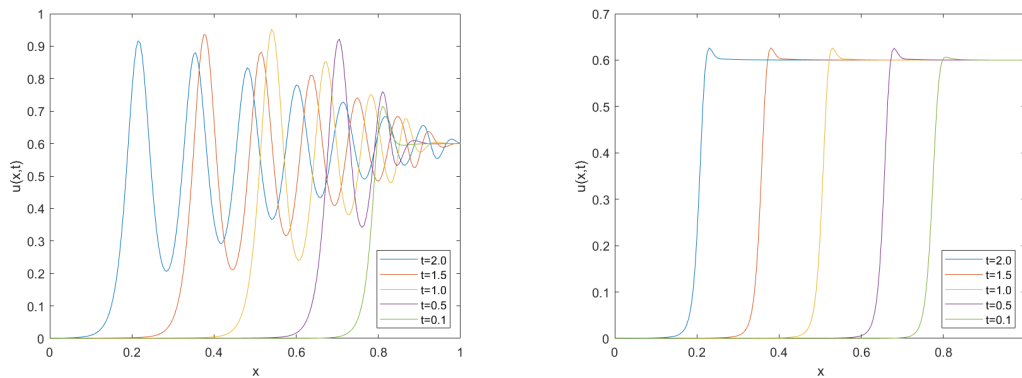


Figuur 15: Eén-fase stroming met $\tau = 0$, $d = 0.015$, en met $\Delta t = 0.0001$ en $\Delta x = 0.005$.

Als $\tau = 3.1 \cdot 10^{-4}$ kunnen we wel alle drie de eerdergenoemde implementaties van de fractionele Laplaciaan bestuderen. We nemen dezelfde parameterwaarden als eerder genoemd: $d = 0.002$, $u_- = 0$, $u_+ = 0.6$, $R = 50$, $x_0 = 0.8$, $T = 2$ en $\Delta x = 0.005$. Het resultaat als we D_2 bij de d -term vervangen door $-(-D_2)^{\frac{3}{4}}$ is te zien in figuur 16a. We kiezen $\Delta t = 0.0001$ en we nemen opnieuw een verschillend aantal iteraties zodat we de golf op meerdere tijdstippen kunnen observeren. We zien dat de oplossingen niet-monotone golven hebben, net zoals in figuur 3. Een verschil met de oorspronkelijke oplossing is dat de amplitude van de trillingen nu aanzienlijk

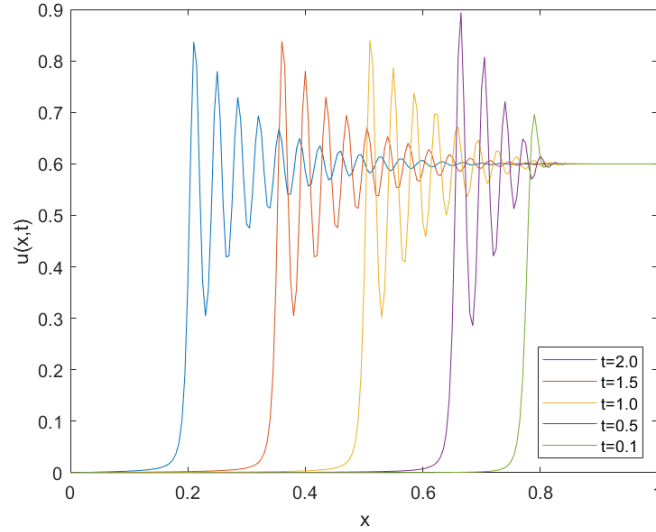
is toegenomen. In figuur 16b zijn de oplossingen weergegeven als we bij de τ -term D_2 vervangen door $-(-D_2)^{\frac{3}{4}}$. Hier zien we dat er een kleine toename ontstaat aan de rand van de golf, maar dat er verder geen trillingen meer zijn.

Als we zowel bij de d -term als de τ -term de D_2 vervangen door $-(-D_2)^{\frac{3}{4}}$ dan krijgen we het resultaat dat is weergegeven in figuur 17. Hier hebben we $\Delta t = 0.0001$ genomen. We zien dat de trillingen in deze oplossing een hogere frequentie hebben dan de trillingen in figuur 3. Het resultaat voor $\Delta t = 0.00005$ en $\Delta t = 0.0002$ is weergegeven in figuur 18. Omdat we hetzelfde resultaat krijgen voor deze waarden van Δt , kunnen we stellen dat deze trillingen geen gevolg zijn van een instabiele oplossing. We hebben tevens de resultaten met een kleinere Δx bestudeerd. Deze resultaten geven dezelfde golven als in figuur 17, maar dan met een hogere resolutie.

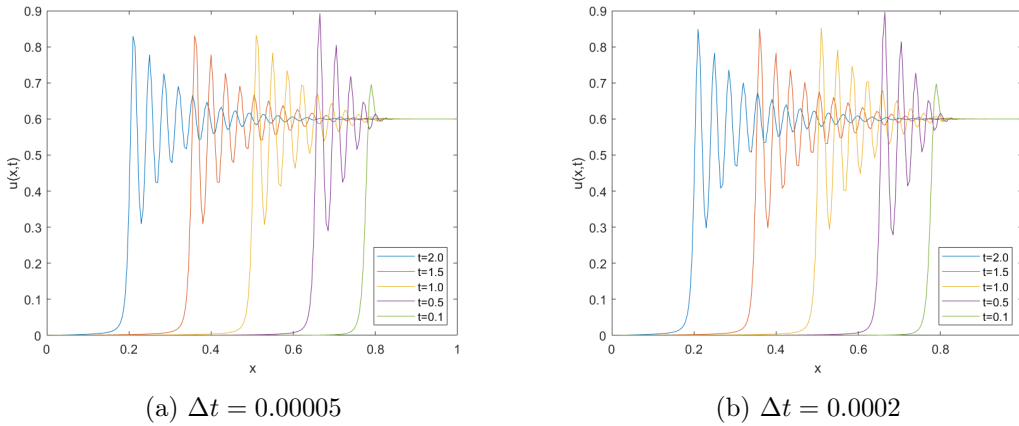


(a) Bij de d -term is D_2 vervangen door $-(-D_2)^{\frac{3}{4}}$. (b) Bij de τ -term is D_2 vervangen door $-(-D_2)^{\frac{3}{4}}$.

Figuur 16: Eén-fase stroming met $\tau = 3.1 \cdot 10^{-4}$ waar D_2 bij de d -term (links) of de τ -term (rechts) vervangen is door $-(-D_2)^{\frac{3}{4}}$, en met $\Delta t = 0.0001$.



Figuur 17: Eén-fase stroming met $\tau = 3.1 \cdot 10^{-4}$ waar D_2 bij zowel de d -term als de τ -term vervangen is door $-(-D_2)^{\frac{3}{4}}$, en met $\Delta t = 0.0001$.



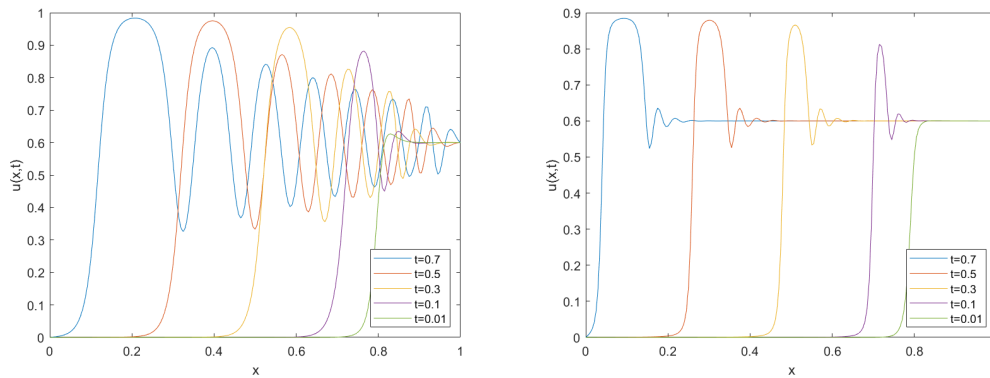
Figuur 18: Eén-fase stroming met $\tau = 3.1 \cdot 10^{-4}$ waar D_2 bij zowel de d -term als de τ -term vervangen is door $-(-D_2)^{\frac{3}{4}}$ voor twee waarden van Δt .

6.2 Numerieke experimenten met een twee-fasen stroming

We kunnen de fractionele Laplaciaan ook implementeren in het ééndimensionale τ -model met een twee-fasen stroming. Dan nemen we $f(u) = \frac{u^2}{u^2 + (1-u)^2}$ en $T = 0.7$. Voor de volgende resultaten hebben we $\Delta x = 0.005$ genomen. Als we D_2 bij de d -term vervangen door $-(-D_2)^{\frac{3}{4}}$ zien we in figuur 19a dat er nog steeds niet-monotone golven met plateaus ontstaan. We hebben hier $\Delta t = 0.0001$ genomen en we hebben wederom gevarieerd in het aantal iteraties zodat we de golf op meerdere tijdstippen kunnen observeren. Het verschil met de oorspronkelijke oplossing in figuur 4 is dat de amplitude van de plateaus en van de trillingen is toegenomen. In figuur 19b zien we dat er niet-monotone golven met plateaus ontstaan als we D_2 bij de τ -term

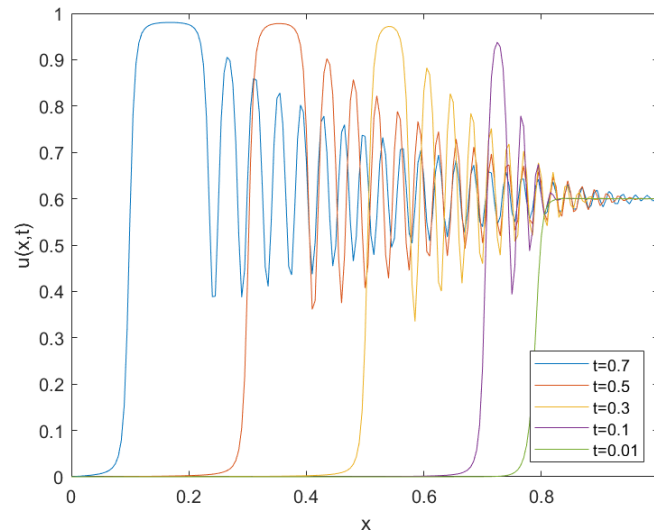
vervangen door $-(-D_2)^{\frac{3}{4}}$. Hier zijn de amplitudes van de trillingen en plateaus juist afgenomen in vergelijking met figuur 4. Ook zijn de plateaus verder naar links verplaatst.

In figuur 20 hebben we zowel bij de τ -term als de d -term D_2 vervangen door $-(-D_2)^{\frac{3}{4}}$. Bij dit resultaat hebben we opnieuw $\Delta t = 0.0001$ genomen. We zien dat er eveneens plateaus ontstaan en dat de trillingen een hogere frequentie en hogere amplitude hebben. Het resultaat voor $\Delta t = 0.00005$ en $\Delta t = 0.0002$ is weergegeven in figuur 21. Omdat we hetzelfde resultaat krijgen voor deze waarden van Δt , kunnen we stellen dat deze trillingen geen gevolg zijn van een instabiele oplossing. Een lagere waarde van Δx geeft dezelfde resultaten met een hogere resolutie.

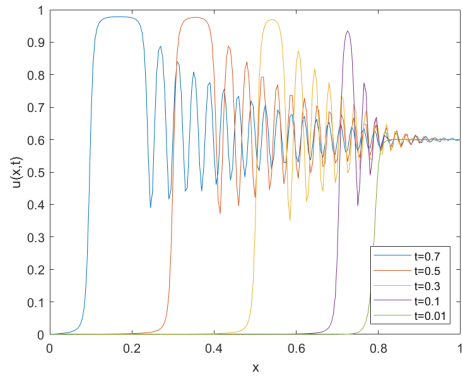


(a) Bij de d -term is D_2 vervangen door $-(-D_2)^{\frac{3}{4}}$. (b) Bij de τ -term is D_2 vervangen door $-(-D_2)^{\frac{3}{4}}$.

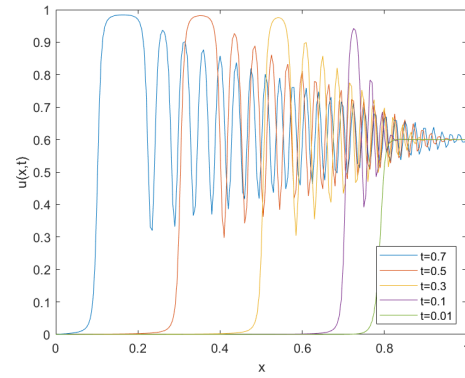
Figuur 19: Twee-fasen stroming met $\tau = 3.1 \cdot 10^{-4}$ waar D_2 bij de d -term (links) of de τ -term (rechts) vervangen is door $-(-D_2)^{\frac{3}{4}}$, en met $\Delta t = 0.0001$.



Figuur 20: Twee-fasen stroming met $\tau = 3.1 \cdot 10^{-4}$ waar D_2 bij zowel de d -term als de τ -term vervangen is door $-(-D_2)^{\frac{3}{4}}$, en met $\Delta t = 0.0001$.



(a) $\Delta t = 0.00005$



(b) $\Delta t = 0.0002$

Figuur 21: Twee-fasen stroming met $\tau = 3.1 \cdot 10^{-4}$ waar D_2 bij zowel de d -term als de τ -term vervangen is door $-(-D_2)^{\frac{3}{4}}$ voor twee waarden van Δt .

7 Een tweedimensionaal advection-diffusiemodel

Voordat we verdergaan met het tweedimensionale τ -model, introduceren we eerst een eenvoudiger tweedimensionaal advection-diffusiemodel. Een tweedimensionaal advection-diffusiemodel is een partiële differentiaalvergelijking die de beweging en verdeling van materie in een tweedimensionale ruimte beschrijft. Het advection-diffusiemodel is een handig model voor het analyseren en voorspellen van transportfenomenen in diverse toepassingen. We zullen het model introduceren en uitleggen hoe dit model numeriek opgelost kan worden. Vervolgens gaan we numerieke experimenten uitvoeren.

7.1 De numerieke oplosmethode

We zullen het volgende model bestuderen:

$$u_t = d\Delta u + \gamma_1 u_x + \gamma_2 u_y, \quad (7.1)$$

met $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ en $t \in [0, 0.01]$. De parameter $d > 0$ staat voor de diffusiecoëfficiënt en de parameters $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ bepalen de beweging in de ruimte. We nemen beginvoorwaarde $u(x, y, 0) = e^{-100((x-0.25)^2 + (y-0.25)^2)}$.

Om deze tweedimensionale partiële differentiaalvergelijking op te lossen, discretiseren we de intervallen voor x en y in respectievelijk I en J stappen, zodanig dat $0 = x_1 < \dots < x_I = 1$ en $0 = y_1 < \dots < y_J = 1$. De afstand tussen de stappen wordt gegeven door $\Delta x = \frac{1}{I-1}$ en $\Delta y = \frac{1}{J-1}$. We noteren $u(x_i, y_j, t) = u_{i,j}(t)$. Voor $1 \leq i \leq I$ en $1 \leq j \leq J$ vinden we de volgende benaderingen op dezelfde manier als voor het ééndimensionale geval:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j, t) \approx \frac{u_{i+1,j}(t) - u_{i-1,j}(t)}{2\Delta x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j, t) \approx \frac{u_{i,j+1}(t) - u_{i,j-1}(t)}{2\Delta y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j, t) \approx \frac{u_{i+1,j}(t) - 2u_{i,j}(t) + u_{i-1,j}(t)}{(\Delta x)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j, t) \approx \frac{u_{i,j+1}(t) - 2u_{i,j}(t) + u_{i,j-1}(t)}{(\Delta y)^2}.$$

We nemen aan dat $u_{i,0}(t) = u_{0,j}(t) = u_{i,J+1}(t) = u_{I+1,j}(t) = 0$. Om een partiële differentiaalvergelijking numeriek op te lossen met behulp van eindige differentiematrices, willen we een oplossingsvector u definiëren. We hebben nu zowel x -coördinaten

als y -coördinaten. Dan definiëren we de oplossingsvector als volgt:

$$\vec{u}(t) := \begin{pmatrix} u_{1,1}(t) \\ \vdots \\ u_{I,1}(t) \\ u_{1,2}(t) \\ \vdots \\ u_{I,2}(t) \\ \vdots \\ u_{I,J}(t) \end{pmatrix}.$$

We definiëren een eindige differentiematrix voor $\frac{\partial u}{\partial x}$ op de volgende manier:

$$D_{1x}^{2d} := \frac{1}{2\Delta x} \begin{pmatrix} A & & & & \\ & A & & & \\ & & A & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & A \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{IJ \times IJ},$$

met matrix A gegeven door

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ -1 & 0 & 1 & & & \\ & -1 & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{I \times I}.$$

Een eindige differentiematrix voor $\frac{\partial u}{\partial y}$ wordt gegeven door:

$$D_{1y}^{2d} := \frac{1}{2\Delta y} \begin{pmatrix} N & E & & & & \\ -E & N & E & & & \\ & -E & N & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & E \\ & & & & -E & N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{IJ \times IJ},$$

waarbij N de $I \times I$ nulmatrix is en E de $I \times I$ identiteitsmatrix.

We kunnen Δu schrijven als

$$u_{xx} + u_{yy} \approx \frac{u_{i+1,j}(t) - 2u_{i,j}(t) + u_{i-1,j}(t)}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j+1}(t) - 2u_{i,j}(t) + u_{i,j-1}(t)}{(\Delta y)^2}.$$

Een eindige differentiematrix voor deze benadering wordt gegeven door:

$$D_2^{2d} := \begin{pmatrix} B & F & & & & & & \\ F & B & F & & & & & \\ & F & B & \ddots & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & \ddots & F & & \\ & & & & \ddots & F & B & \\ & & & & & & & \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{IJ \times IJ},$$

waarbij $F = \frac{1}{(\Delta y)^2} E$ met E de eerdergenoemde $I \times I$ eenheidsmatrix is. De $I \times I$ matrix B wordt gegeven door

$$B := \begin{pmatrix} -\frac{2}{(\Delta x)^2} - \frac{2}{(\Delta y)^2} & \frac{1}{(\Delta x)^2} & & & & & & \\ \frac{1}{(\Delta x)^2} & & \ddots & & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & \frac{1}{(\Delta x)^2} & -\frac{2}{(\Delta x)^2} - \frac{2}{(\Delta y)^2} & & \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{I \times I}.$$

Met behulp van deze eindige differentiematrices kunnen we de methode-der-lijnen toepassen op het tweedimensionale advectie-diffusiemodel (7.1). Dan krijgen we

$$\dot{\vec{u}}(t) = dD_2^{2d}\vec{u} + \gamma_1 D_{1x}^{2d}\vec{u} + \gamma_2 D_{1y}^{2d}\vec{u}.$$

Om dit stelsel differentiaalvergelijkingen numeriek op te lossen, discretiseren we het interval $[0, 0.01]$ in N gelijke stappen met afstand $\Delta t = \frac{0.01}{N-1}$. Dit kunnen we schrijven als $0 = t_1 < \dots < t_N = 0.01$. We schrijven $\vec{u}(t_n) = \vec{u}^n$. We passen de IMEX- θ methode met $\theta = 1$ toe. Dan krijgen we

$$\frac{\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^n}{\Delta t} = dD_2^{2d}\vec{u}^{n+1} + \gamma_1 D_{1x}^{2d}\vec{u}^n + \gamma_2 D_{1y}^{2d}\vec{u}^n.$$

Dit kunnen we schrijven als

$$\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^n = d\Delta t D_2^{2d}\vec{u}^{n+1} + \gamma_1 \Delta t D_{1x}^{2d}\vec{u}^n + \gamma_2 \Delta t D_{1y}^{2d}\vec{u}^n.$$

Merk op dat dan volgt dat

$$(I - d\Delta t D_2^{2d})\vec{u}^{n+1} = \vec{u}^n + \gamma_1 \Delta t D_{1x}^{2d}\vec{u}^n + \gamma_2 \Delta t D_{1y}^{2d}\vec{u}^n.$$

In MATLAB kunnen we dit stelsel oplossen door

$$\vec{u}^{n+1} = (I - d\Delta t D_2^{2d}) \setminus (\vec{u}^n + \gamma_1 \Delta t D_{1x}^{2d}\vec{u}^n + \gamma_2 \Delta t D_{1y}^{2d}\vec{u}^n).$$

Hier gebruiken we opnieuw de operator \setminus die in MATLAB een systeem van lineaire vergelijkingen oplost. Dit geeft dan de numerieke oplossing van het advectie-diffusiemodel (7.1).

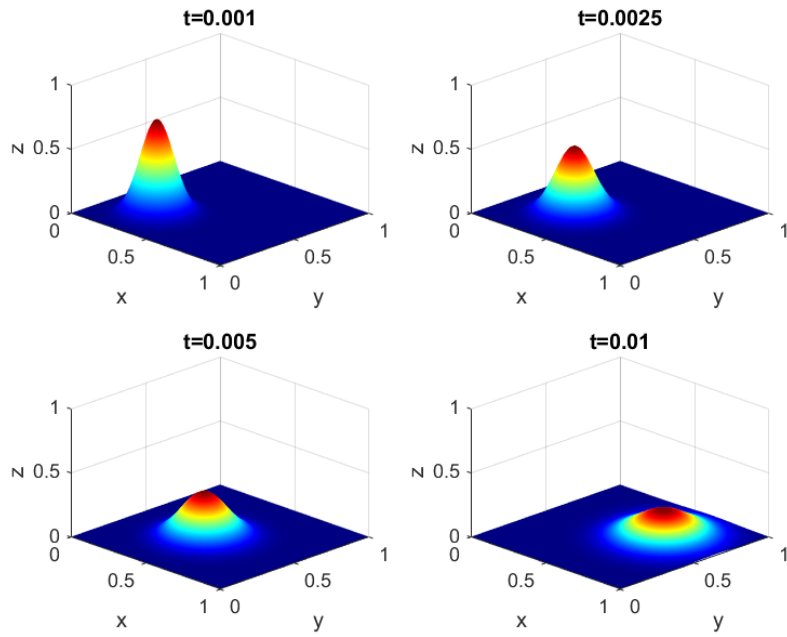
7.2 Numerieke experimenten

Voor de numerieke experimenten nemen we $d = 1$ en $\gamma_1 = \gamma_2 = -40$. Verder kiezen we $\Delta x = \Delta y = 0.02$ en $\Delta t = 0.0001$. We lossen het model eerst op met de gewone Laplaciaan. Numeriek gebruiken we dan D_2^{2d} . Vervolgens vergelijken we dit resultaat met het resultaat als we de fractionele Laplaciaan $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$ met $\alpha = 1.5$ te gebruiken. Numeriek kunnen we dit toepassen door $(-D_2^{2d})^{\frac{3}{4}}$ te nemen [18]. In MATLAB implementeren we dit door $-\sqrt{\sqrt{(-D_2^{2d})^3}}$ waarbij we de wortel van de matrix berekenen. We hebben gecontroleerd dat de eigenwaarden van $-\sqrt{\sqrt{(-D_2^{2d})^3}}$ reëel zijn. De code voor de resultaten is te vinden in appendix C.

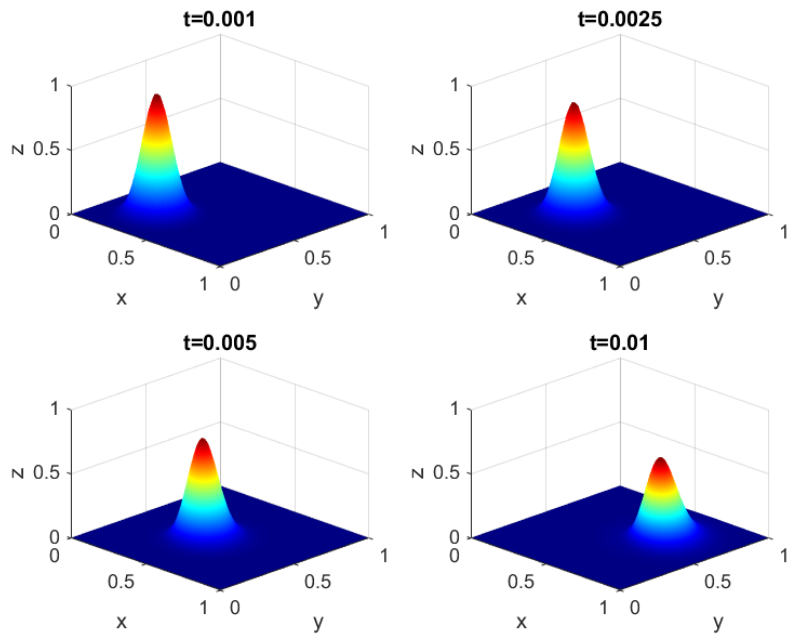
In figuur 22 hebben we de oplossing van het tweedimensionale advection-diffusiemodel weergegeven voor $t = 0.001$, $t = 0.0025$, $t = 0.005$ en $t = 0.01$. We zien hier hoe de golf geleidelijk afvlakt. De toevoeging van de advectionsterm aan het model zorgt ervoor dat de golf vanaf het beginpunt richting het punt $(1, 1)$ beweegt. Dit zien we terug in de figuur. In figuur 23 hebben we de oplossing van het tweedimensionale fractionele advection-diffusiemodel weergegeven voor dezelfde tijdstippen als het gewone tweedimensionale advection-diffusiemodel. Opvallend is dat de golf in figuur 23 minder snel afvlakt dan de golf in figuur 22.

In figuur 24 hebben we de bovenaanzichten van de grafieken in figuur 22 weergegeven. Deze bovenaanzichten kunnen we vergelijken met figuur 25 waarbij we de bovenaanzichten van de grafieken in figuur 23 hebben weergegeven. Opvallend is dat de grafiek in het bovenaanzicht van het fractionele model meer een ovaalvorm krijgt. Dit in tegenstelling tot het bovenaanzicht van de grafiek van het gewone model, wat voor alle weergegeven tijdstippen een cirkel blijft.

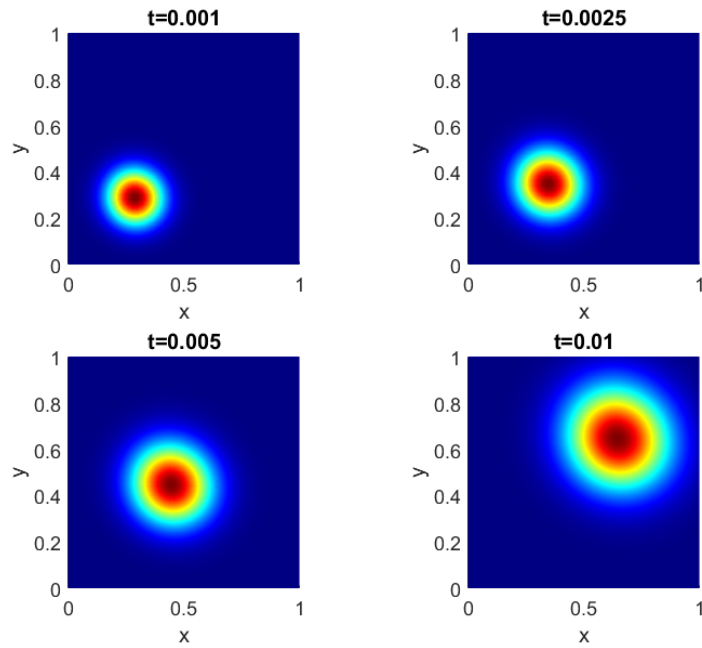
De ruimte-fractionele Laplaciaan in dit tweedimensionale advection-diffusiemodel heeft dus invloed op de snelheid waarmee de golf afvlakt. Bovendien verandert de omtrek van de golf van een ronde vorm naar een ovale vorm.



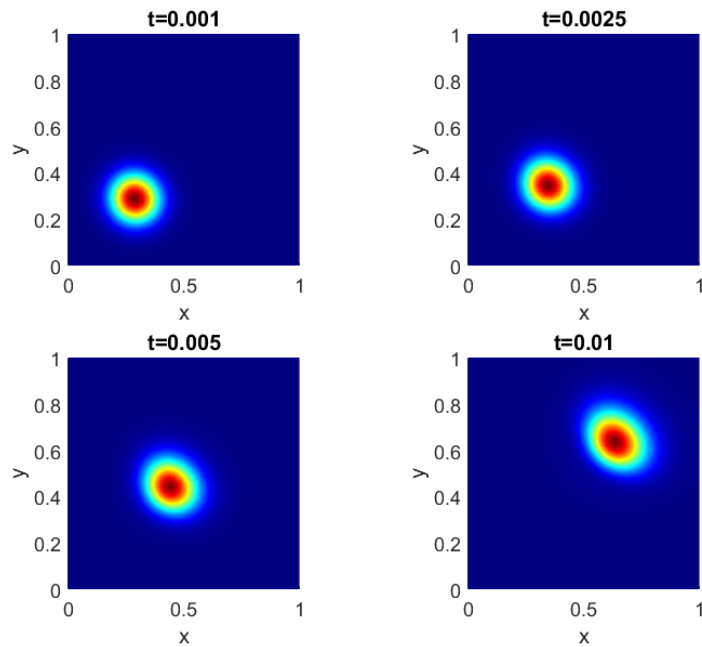
Figuur 22: Numerieke oplossing van het tweedimensionale advection-diffusiemodel voor t tussen 0.001 en 0.01.



Figuur 23: Numerieke oplossing van het tweedimensionale fractionele advection-diffusiemodel voor t tussen 0.001 en 0.01.



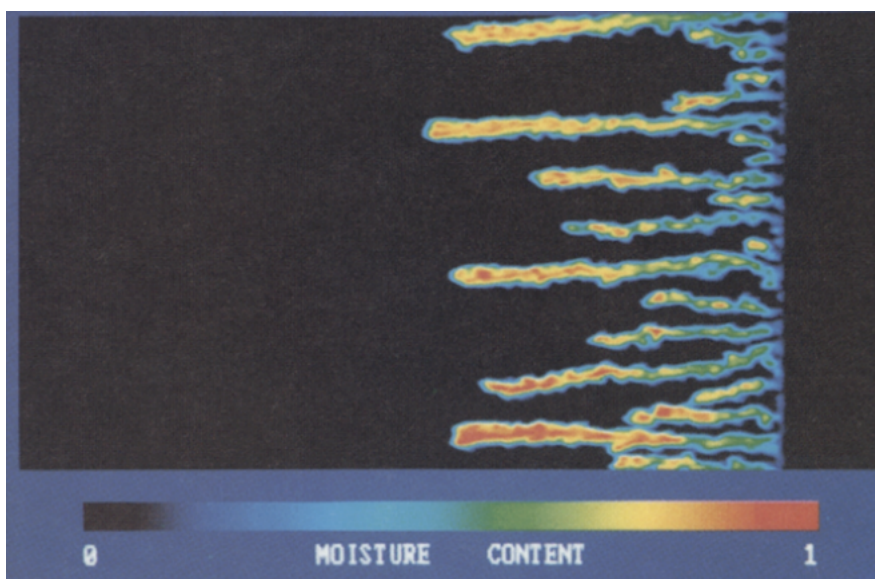
Figuur 24: Bovenaanzicht van de numerieke oplossing van het tweedimensionale advection-diffusiemodel voor t tussen 0.001 en 0.01.



Figuur 25: Bovenaanzicht van de numerieke oplossing van het tweedimensionale fractionele advection-diffusiemodel voor t tussen 0.001 en 0.01.

8 Een tweedimensionaal τ -model uit de geohydrologie

Wanneer we water in een poreus materiaal injecteren, kunnen er in meer dimensies zogenoemde ‘fingering structures’ ontstaan. In figuur 26 is een bovenaanzicht van ‘fingering structures’ weergegeven die ontstaan zijn bij een labexperiment [19]. Het tweedimensionale τ -model, zoals beschreven in onder andere [20], [21] en [22], kan deze ‘fingering structures’ modelleren. In dit hoofdstuk zullen we eerst het tweedimensionale τ -model bespreken. Daarna zullen we ons eigen vereenvoudigde tweedimensionale τ -model numeriek oplossen en onderzoeken of een vereenvoudigd model tevens ‘fingering structures’ kan modelleren.



Figuur 26: ‘Fingering structures’ die ontstaan zijn bij een experiment waar water in een poreus materiaal is geïnjecteerd [19].

8.1 Numerieke resultaten van het tweedimensionale τ -model

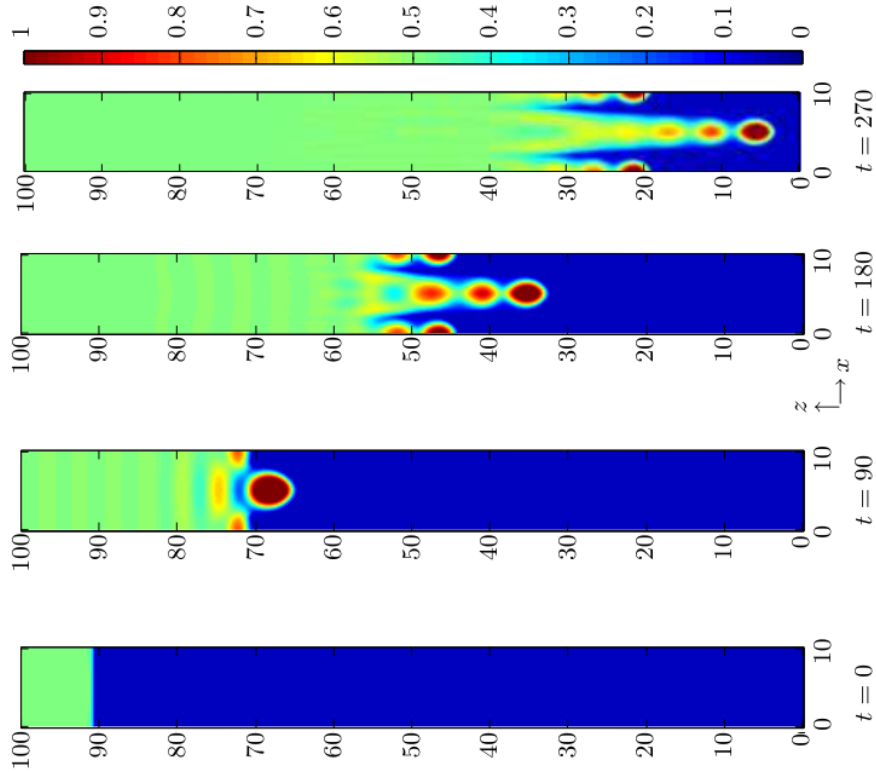
Het tweedimensionale τ -model, zoals beschreven in [20] en [21], wordt gegeven door

$$u_t = \nabla \cdot (D(u)\nabla u) + [f(u)]_z + \tau \nabla \cdot [f(u)\nabla u_t]. \quad (8.1)$$

Hierbij is u een functie afhankelijk van x, z en t : $u(x, z, t)$. De diffusiecoëfficiënt is vervangen door een functie $D(u) = \beta u^{\alpha-\beta-1}$ en de functie f wordt gegeven door $f(u) = u^\alpha$ met $\alpha > \beta + 1$.

De ‘fingering structures’ kunnen ontstaan nadat er een kleine verstoring (perturbation) is toegevoegd aan de beginvoorwaarde. Deze verstoring kan afzwakken of toenemen. Als de verstoring toeneemt naarmate de tijd vordert, ontstaan er ‘fingering structures’.

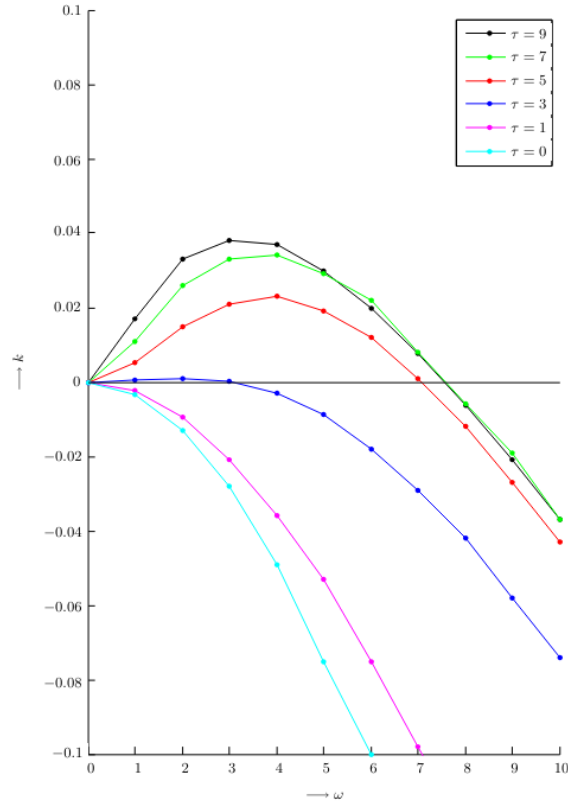
In figuur 27 is het bovenaanzicht van een numerieke oplossing van het tweedimensionale τ -model (8.1) weergegeven, afkomstig van [22]. Het domein, de beginvoorwaarde en de parameters van dit numerieke resultaat staan beschreven in [22, sectie 3.2].



Figuur 27: Numerieke oplossing met ‘fingering structures’ [22].

Het is ook mogelijk dat ondanks de toevoeging van de verstoring er geen ‘fingering structures’ ontstaan. Wanneer er wel of geen ‘fingering structures’ ontstaan na de toevoeging van de verstoring is afhankelijk van de waarde van τ en het golfgetal, het aantal golfjes van de verstoring die toegevoegd is. In Appendix B staat een deel van de stabiliteitsanalyse beschreven zoals in [21] en [22]. Bij de stabiliteitsanalyse wordt berekend of de groeifactor k van de verstoring positief of negatief is. Een positieve groeifactor k betekent dat de verstoring toeneemt en dat er ‘fingering structures’ kunnen ontstaan.

In [22] is numeriek de waarde van de groeifactor bepaald, afhankelijk van het golfgetal ω en de waarde van τ . Het resultaat is weergegeven in figuur 28. De groeifactor behorend bij deze waarden van τ en ω is bepaald door de verstoorde oplossing te vergelijken met de onverstoorde oplossing en aan het verschil een exponentiële functie $y = Ae^{Bt}$ te koppelen. De waarde van B is dan gelijk aan de groeifactor k . Deze methode staat in detail beschreven in [22, Chapter 4].



Figuur 28: De groeifactor k afhankelijk van het golfgetal ω weergegeven voor verschillende waarden van τ tussen 0 en 9, afkomstig van [22].

8.2 Numerieke experimenten van het vereenvoudigde model

Het vereenvoudigde model dat we gaan onderzoeken, wordt gegeven door

$$u_t = d\Delta u + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} \right) + \tau \Delta u_t. \quad (8.2)$$

Dit model is bijna identiek aan het ééndimensionale τ -model dat we hebben onderzocht. We hebben nu een functie u afhankelijk van x, y en t : $u(x, y, t)$. De waarde van de parameters en het interval waarop we het model oplossen, zullen we bij de numerieke resultaten benoemen. Als beginvoorwaarde nemen we

$$u(x, y, 0) = u_- + \frac{1}{2}(u_+ - u_-)(1 + \tanh(R(y - y_0))), \quad (8.3)$$

met $u_- = 0, u_+ = 0.6, R = 50$ en $y_0 = 0.8$. Om het vereenvoudigde tweedimensionale τ -model (8.2) numeriek op te lossen, passen we opnieuw de methode-der-lijnen en IMEX- θ methode met $\theta = 1$ toe. Dit geeft

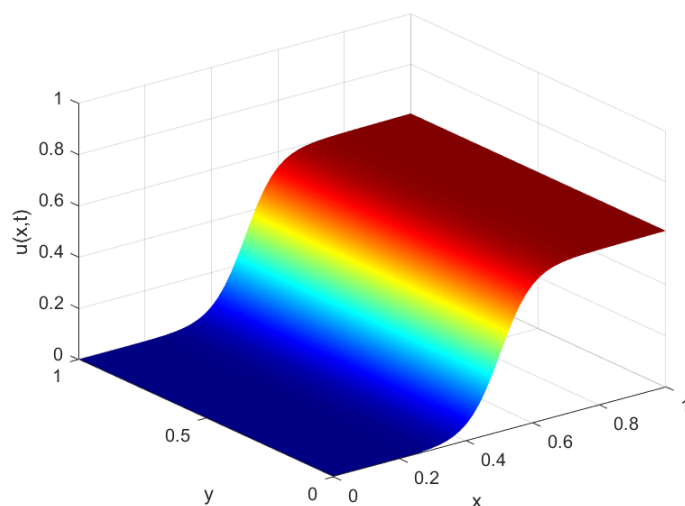
$$\dot{\vec{u}}(t) = dD_2^{2d}\vec{u}(t) + \vec{g}(\vec{u}(t)) + \tau D_2^{2d}\dot{\vec{u}}(t).$$

met \vec{u} de oplossingsvector gedefinieerd op dezelfde manier als in hoofdstuk 7. Nadat we de IMEX- θ methode met $\theta = 1$ hebben toegepast, kunnen we het vereenvoudigde

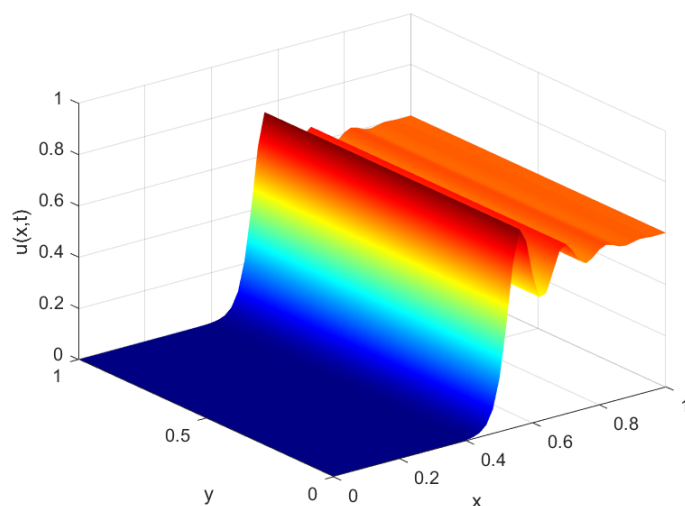
tweedimensionale τ -model in MATLAB oplossen door

$$\bar{u}^{n+1} = \left[I - \tau D_2^{2d} - d\Delta t D_2^{2d} \right] \setminus \left[\left(I - \tau D_2^{2d} \right) \bar{u}^n + \Delta t \bar{g}(\bar{u}^n) \right].$$

We nemen $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$, $d = 0.015$ en $\tau = 0$. In figuur 29 zien we het numerieke resultaat van het vereenvoudigde tweedimensionale τ -model op tijdstip $t = 1$. Het numerieke resultaat voor $d = 0.002$ en $\tau = 3.1 \cdot 10^{-4}$ is weergegeven in figuur 30. We hebben voor beide figuren $\Delta x = \Delta y = 0.02$ en $\Delta t = 0.001$ gekozen.



Figuur 29: Numerieke oplossing van het vereenvoudigde tweedimensionale τ -model voor $d = 0.015$ en $\tau = 0$ op tijdstip $t = 1$.



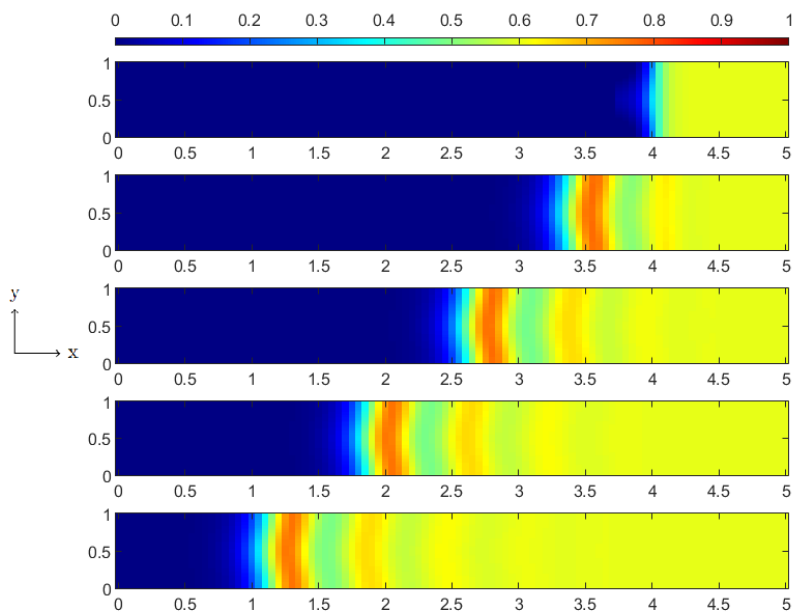
Figuur 30: Numerieke oplossing van het vereenvoudigde tweedimensionale τ -model voor $d = 0.002$ en $\tau = 3.1 \cdot 10^{-4}$ op tijdstip $t = 1$.

Het grootste verschil tussen het vereenvoudigde model (8.2) en het tweedimensionale τ -model (8.1) is dat de functie $D(u)$ vervangen is door een constante d . Om te onderzoeken of er alsnog ‘fingering structures’ kunnen ontstaan, voegen we een verstoring toe aan de beginvoorwaarde (8.3). De vorm van deze verstoring is een product van cosinussen: $\epsilon \cos(\omega_x x) \cos(\omega_y y)$. Voor de amplitude ϵ nemen we $\epsilon = 0.05$. De waarden van ω_x en ω_y bepalen het aantal golfjes. Dit is afhankelijk van het gekozen domein.

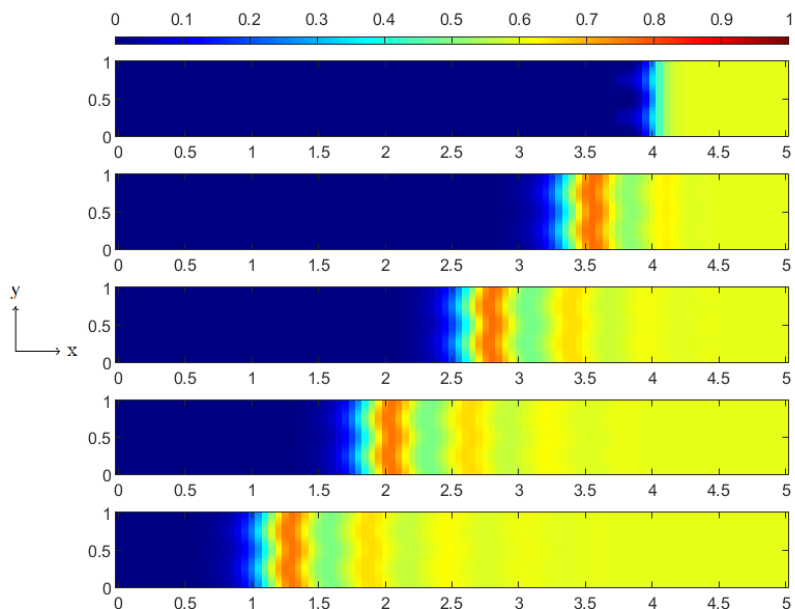
Voor de volgende resultaten nemen we $(x, y) \in [0, 5] \times [0, 1]$, zodat we over een langere afstand kunnen bekijken wat er gebeurt na de toevoeging van de verstoring. We tonen de numerieke oplossingen op vijf tijdstippen vanaf $t = 0$ tot en met $t = T = 2$. Voor het numeriek oplossen hebben we $\Delta x = 0.1$, $\Delta y = 0.01$ en $\Delta t = 0.001$ gekozen.

In figuur 31 is het bovenaanzicht van een numeriek resultaat van het vereenvoudigde tweedimensionale τ -model weergegeven op vijf tijdstippen tussen $t = 0$ en $t = T = 2$. Hierbij hebben we $d = 0.002$ en $\tau = 3.1 \cdot 10^{-4}$ gekozen. Het golfgetal van de verstoring is gelijk aan 1. In figuur 32 is het bovenaanzicht van het numerieke resultaat weergegeven waarbij voor d en τ dezelfde waarden zijn gekozen, maar waarbij de verstoring golfgetal 2 heeft. We zien in beide figuren dat het model wel deze golfjes ‘overneemt’, maar dat de grootte van deze golfjes constant blijft. Op basis van deze numerieke experimenten kunnen we dus stellen dat de aanpassing van $D(u)$ naar d in het model ervoor zorgt dat er geen ‘fingering structures’ kunnen ontstaan.

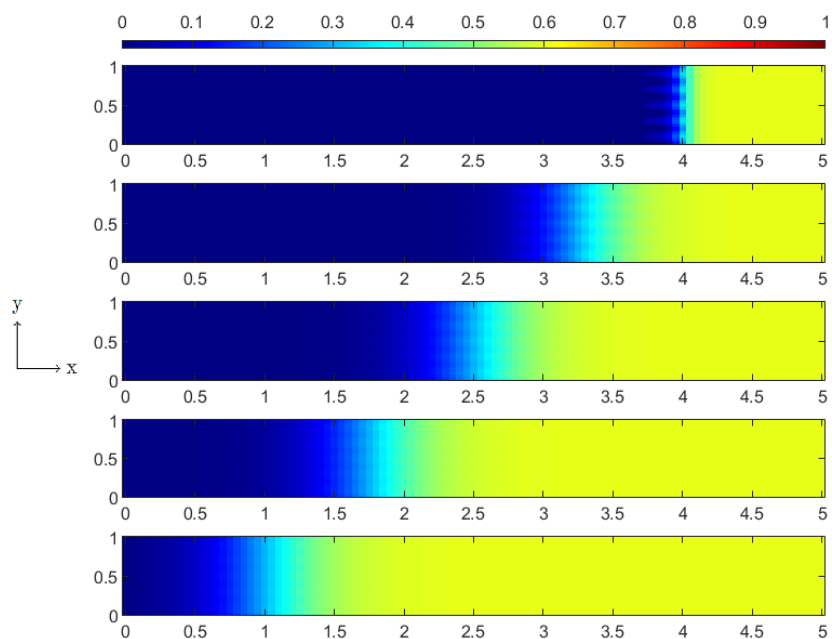
In figuur 33 is een verstoring met golfgetal 5 toegevoegd aan het vereenvoudigde tweedimensionale τ -model met $d = 0.015$ en $\tau = 0$. Dit is een voorbeeld waarbij de verstoring afzwakt naarmate de tijd vordert. De mogelijkheid waarbij de verstoring afneemt, kan dus nog wel voorkomen bij ons vereenvoudigde tweedimensionale τ -model. De MATLAB code voor het numeriek oplossen van het vereenvoudigde tweedimensionale τ -model is te vinden in Appendix C.



Figuur 31: Numerieke oplossing van het vereenvoudigde tweedimensionale τ -model voor $d = 0.002$ en $\tau = 3.1 \cdot 10^{-4}$ op vijf tijdstippen tussen $t = 0$ en $t = T = 2$. De verstoring heeft golfgetal 1.



Figuur 32: Numerieke oplossing van het vereenvoudigde tweedimensionale τ -model voor $d = 0.002$ en $\tau = 3.1 \cdot 10^{-4}$ op vijf tijdstippen tussen $t = 0$ en $t = T = 2$. De verstoring heeft golfgetal 2.



Figuur 33: Numerieke oplossing van het vereenvoudigde tweedimensionale τ -model voor $d = 0.015$ en $\tau = 0$ op vijf tijdstippen tussen $t = 0$ en $t = T = 2$. De verstoring heeft golfgetal 5.

9 Conclusies

In dit hoofdstuk zullen we de resultaten samenvatten. We hebben eerst het ééndimensionale τ -model besproken. We hebben onderzocht hoe we dit model numeriek kunnen oplossen door eindige differentiematrices en de methode-der-lijnen te gebruiken. Vervolgens hebben we de IMEX- θ methode toegelicht en gebruikt om de oplossingen van het τ -model numeriek te benaderen. Het ééndimensionale τ -model geeft monotone golven, niet-monotone golven met trillingen of niet-monotone golven met plateaus die allemaal opzij bewegen. We hebben de numerieke resultaten verklaart met behulp van een lopende golf oplossing. De golfsnelheid wordt gegeven door $c = \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-}$. We hebben tevens de vergelijking afhankelijk van τ en d opgesteld, die aangeeft of er bij een één-fase stroming monotone golven of niet-monotone golven met trillingen ontstaan. Als $\tau > \frac{d^2}{2c(u_+ - u_-)}$, dan ontstaan er bij een één-fase stroming niet-monotone golven met trillingen.

Vervolgens hebben we het concept van een fractionele afgeleide geïntroduceerd, en specifiek de fractionele Laplaciaan. We hebben hierbij de intuïtie achter de fractionele Laplaciaan besproken met behulp van een Lévy-vlucht. Een fractionele Laplaciaan wordt gebruikt om superdiffusie te modelleren wat in veel natuurverschijnselen terugkomt. Het voornaamste doel van deze bachelorscriptie was om te onderzoeken wat de invloed van deze fractionele Laplaciaan op het ééndimensionale τ -model zou zijn. Bij een één-fase stroming met $d = 0.015$ en $\tau = 0$ kunnen we maar op één plek in het τ -model de Laplaciaan vervangen door de fractionele Laplaciaan. We zagen dat de fractionele Laplaciaan ervoor zorgde dat de golf steiler werd. Bij een één-fase stroming met $d = 0.002$ en $\tau = 3.1 \cdot 10^{-4}$ zagen we dat de amplitude van de trillingen groter werd als we de fractionele Laplaciaan bij de d -term implementeerden. Wanneer we de fractionele Laplaciaan bij de τ -term vervingen, verdwenen de trillingen juist en ontstond er een kleine toename aan de rand van de golf. Het vervangen van de Laplaciaan door de fractionele Laplaciaan op beide plekken in het τ -model gaf een resultaat waarbij de amplitude en frequentie van de trillingen was toegenomen. Bij een twee-fasen stroming met $d = 0.002$ en $\tau = 3.1 \cdot 10^{-4}$ zagen we opnieuw dat de amplitude van de trillingen en de plateaus groter werd als we de fractionele Laplaciaan bij de d -term implementeerden. Wanneer we de fractionele Laplaciaan bij de τ -term vervingen, werden de plateaus smaller en de trillingen waren sterk afgenomen. Het vervangen van de Laplaciaan door de fractionele Laplaciaan op beide plekken in het τ -model gaf een resultaat waarbij de plateaus en trillingen smaller waren geworden, maar waar zowel de amplitude als de frequentie van de trillingen waren toegenomen.

In deze bachelorscriptie hebben we niet onderzocht of de resultaten van het ééndimensionale fractionele model in de praktijk toegepast kunnen worden. Dit is een mogelijkheid voor een vervolgonderzoek (in de richting van geohydrologie). Een andere mogelijkheid voor een vervolgonderzoek is om te bestuderen wat er gebeurt als er een fractionele Laplaciaan wordt gekozen met een andere macht dan $\frac{3}{4}$.

De volgende stap was het modelleren in twee dimensies. We hebben een tweedimensionaal advection-diffusiemodel gemodelleerd. Het numeriek oplossen hiervan werkte iets anders dan bij een ééndimensionaal model, omdat de oplossingsvector op een andere manier gedefinieerd werd. We hebben de resultaten van het gewone advection-diffusiemodel vergeleken met de resultaten van het fractionele advection-diffusiemodel. Bij de resultaten van het fractionele advection-diffusiemodel konden

we observeren dat de golf minder snel afvlakt. Bovendien veranderde de omvang van de golf. In het oorspronkelijke model bleef de omvang van de golf een cirkel. In het fractionele model werd de omvang van de golf een ovaalvorm.

Als laatste hebben we een tweedimensionaal τ -model onderzocht. Het tweedimensionale τ -model zoals beschreven in diverse bronnen kan ‘fingering structures’ modelleren als er een verstoring aan de beginvoorwaarde is toegevoegd. Deze ‘fingering structures’ komen overeen met labexperimenten waar water in een poreus materiaal werd geïnjecteerd. Of het tweedimensionale τ -model ‘fingering structures’ kan simuleren, is afhankelijk van de waarde van τ en het golfgetal van de verstoring. We hebben een vereenvoudigd tweedimensionaal τ -model opgesteld. Bij dit vereenvoudigde model is de functie $D(u)$ vervangen door een constante d . We hebben numerieke experimenten uitgevoerd om te kijken of ons vereenvoudigde model ook ‘fingering structures’ kan modelleren nadat er een verstoring is toegevoegd aan de beginvoorwaarde. Dit is niet het geval. Uit onze numerieke experimenten volgt dus dat het vervangen van $D(u)$ door d invloed heeft op het resultaat. Wel is het nog steeds mogelijk dat de verstoring verdwijnt als het golfgetal en de waarde van d groot genoeg zijn.

In een vervolgonderzoek kan gekeken worden of het mogelijk is om analytisch te bepalen of het vereenvoudigde model inderdaad geen ‘fingering structures’ kan modelleren.

A De methode-der-lijnen toegepast op het ééndimensionale τ -model

We passen de methode-der-lijnen toe op het model

$$u_t = du_{xx} + [f(u)]_x + \tau u_{xxt}.$$

De oplossingsvector $\vec{u}(t)$ is gedefinieerd als in hoofdstuk 4. Het toepassen van de methode-der-lijnen op het ééndimensionale τ -model geeft het volgende stelsel differentiaalvergelijkingen:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{u}_1 = 0, \\ \dot{u}_2 = \frac{d}{(\Delta x)^2}(u_3 - 2u_2 + u_1) + \frac{f(u_3) - f(u_1)}{2\Delta x} + \frac{\tau}{(\Delta x)^2}(\dot{u}_3 - 2\dot{u}_2 + \dot{u}_1), \\ \dot{u}_3 = \frac{d}{(\Delta x)^2}(u_4 - 2u_3 + u_2) + \frac{f(u_4) - f(u_2)}{2\Delta x} + \frac{\tau}{(\Delta x)^2}(\dot{u}_4 - 2\dot{u}_3 + \dot{u}_2), \\ \vdots \\ \dot{u}_{I-1} = \frac{d}{(\Delta x)^2}(u_I - 2u_{I-1} + u_{I-2}) + \frac{f(u_I) - f(u_{I-2})}{2\Delta x} + \frac{\tau}{(\Delta x)^2}(\dot{u}_I - 2\dot{u}_{I-1} + \dot{u}_{I-2}), \\ \dot{u}_I = 0. \end{array} \right.$$

We kunnen alle afgeleide termen naar links halen. Het nieuwe stelsel wordt dan:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{u}_1 = 0, \\ \dot{u}_2 - \frac{\tau}{(\Delta x)^2}(\dot{u}_3 - 2\dot{u}_2 + \dot{u}_1) = \frac{d}{(\Delta x)^2}(u_3 - 2u_2 + u_1) + \frac{f(u_3) - f(u_1)}{2\Delta x}, \\ \dot{u}_3 - \frac{\tau}{(\Delta x)^2}(\dot{u}_4 - 2\dot{u}_3 + \dot{u}_2) = \frac{d}{(\Delta x)^2}(u_4 - 2u_3 + u_2) + \frac{f(u_4) - f(u_2)}{2\Delta x}, \\ \vdots \\ \dot{u}_{I-1} - \frac{\tau}{(\Delta x)^2}(\dot{u}_I - 2\dot{u}_{I-1} + \dot{u}_{I-2}) = \frac{d}{(\Delta x)^2}(u_I - 2u_{I-1} + u_{I-2}) + \frac{f(u_I) - f(u_{I-2})}{2\Delta x}, \\ \dot{u}_I = 0. \end{array} \right.$$

Als we dit stelsel in vectorvorm schrijven, dan krijgen we

$$\left[\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{array} \right) - \frac{\tau}{(\Delta x)^2} \left(\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{array} \right) \end{array} \right] \dot{\vec{u}}(t) =$$

$$\frac{d}{(\Delta x)^2} \left(\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{array} \right) \vec{u}(t) + \frac{1}{2\Delta x} \left(\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} f(u_1(t)) \\ f(u_2(t)) \\ \vdots \\ f(u_{I-1}(t)) \\ f(u_I(t)) \end{pmatrix}.$$

We kunnen deze vergelijking schrijven als

$$(I - \tau D_2)\ddot{\vec{u}}(t) = dD_2\dot{\vec{u}}(t) + D_{1c} \begin{pmatrix} f(u_1(t)) \\ \vdots \\ f(u_I(t)) \end{pmatrix},$$

waarbij D_2 en D_{1c} de eindige differentiematrices zijn, zoals beschreven in hoofdstuk 3. De bovenste en onderste rij van zowel D_2 als D_{1c} zijn in deze vergelijking gelijk aan nul gesteld om aan de randvoorwaarden te voldoen.

B Een stabiliteitsanalyse van het tweedimensionale τ -model

We zullen een deel van de stabiliteitsanalyse behandelen zoals beschreven in [21] en [22]. In deze analyse nemen we aan dat u een functie afhankelijk van x, z en t is: $u(x, z, t)$. De verstoring die verderop wordt toegevoegd, is afhankelijk x en y . Deze notatie is overgenomen van [21, 22].

We schrijven vergelijking (8.1) als het volgende stelsel:

$$\begin{cases} u_t &= \nabla \cdot f(u) \nabla p + [f(u)]_z, \\ \tau u_t &= p - P(u), \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

met $P(u) = -u^{-\beta}$. De vergelijking $\tau u_t = p - P(u)$ zullen we in het vervolg schrijven als $F(u, p, \dot{u}, \dot{p}, \dots) = 0$ waarbij F de algemene formule voor druk is, en waarbij \dot{u} en \dot{p} de tijdsafgeleiden van respectievelijk u en p zijn.

We definiëren $(u_0(\eta), p_0(\eta))$ als een lopende golf oplossing van (B.1) met $\eta = z + ct$, waarbij c de golfsnelheid is. Voor de stabiliteitsanalyse schrijven we u en p als de som van de lopende golf oplossing van het tweedimensionale τ -model plus een verstoring:

$$u = u_0 + \epsilon \tilde{u}_1 e^{i\omega_x x + i\omega_y y + kt} + \mathcal{O}(\epsilon^2) = u_0 + \epsilon u_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (\text{B.2})$$

$$p = p_0 + \epsilon \tilde{p}_1 e^{i\omega_x x + i\omega_y y + kt} + \mathcal{O}(\epsilon^2) = p_0 + \epsilon p_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (\text{B.3})$$

Hierbij zijn \tilde{u}_1 en \tilde{p}_1 functies afhankelijk van η die de verstoring beschrijven. De parameter ϵ bepaalt de grootte van de verstoring. Verder geldt dat het golfgetalgegeven wordt door $\omega_x^2 + \omega_y^2 = \omega^2$. We willen uiteindelijk bepalen of de groeifactor k positief of negatief is. Een positieve groeifactor k betekent dat de verstoring toeneemt en dat er ‘fingering structures’ kunnen ontstaan. We negeren de termen van orde ϵ^2 en groter en we substitueren de verstoorde oplossingen in $u_t = \nabla \cdot f(u) \nabla p + [f(u)]_z$. Dit geeft

$$\frac{\partial(u_0 + \epsilon u_1)}{\partial t} = \nabla \cdot [f(u_0 + \epsilon u_1) \nabla(p_0 + \epsilon p_1)] + \frac{\partial f(u_0 + \epsilon u_1)}{\partial z}. \quad (\text{B.4})$$

Om de term $f(u_0 + \epsilon u_1)$ uit te schrijven, gebruiken we een Taylor benadering:

$$f(u_0 + \epsilon u_1) \approx f(u_0) + f'(u_0) \cdot \epsilon u_1.$$

Dan kunnen we (B.4) schrijven als:

$$\begin{aligned} c \frac{du_0}{d\eta} + \epsilon k u_1 + \epsilon c \frac{du_1}{d\eta} &= \nabla \cdot [f(u_0) \nabla p_0] + \epsilon \nabla \cdot [f(u_0) \nabla p_1] + \epsilon \nabla \cdot [f'(u_0) u_1 \nabla p_0] \\ &\quad + \frac{df(u_0)}{d\eta} + \epsilon \frac{d(f'(u_0) u_1)}{d\eta}. \end{aligned}$$

We kunnen deze vergelijking splitsen in een vergelijking met alle termen van orde ϵ^0 en een vergelijking met alle termen van orde ϵ^1 . De vergelijking met alle termen van orde ϵ^1 beschrijft wat er gebeurt met de verstoring. Nemen we de termen van orde ϵ^1 , dan volgt dat

$$k \tilde{u}_1 + c \frac{d\tilde{u}_1}{d\eta} = \frac{d}{d\eta} \left[f'(u_0) + f'(u_0) \tilde{u}_1 \frac{dp_0}{d\eta} + f(u_0) \frac{d\tilde{p}_1}{d\eta} \right] - \omega^2 f(u_0) \tilde{p}_1.$$

Dit kunnen we schrijven als

$$\frac{dA}{d\eta} + \omega^2 f(u_0) \tilde{p}_1 = -k \tilde{u}_1,$$

met

$$A = -f(u_0) \frac{d\tilde{p}_1}{d\eta} - f'(u_0) \left(\tilde{u}_1 + \tilde{u}_1 \frac{dp_0}{d\eta} \right) - c \tilde{u}_1.$$

In [21] en [22] staat beschreven hoe deze vergelijking verder opgelost kan worden. Daaruit volgt dat voor $C < 0$ met

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} f(u_0) \frac{dp_0}{d\eta} d\eta$$

geldt dat de groefactor k positief is, waardoor er ‘fingering structures’ kunnen ontstaan.

C De MATLAB codes

Listing 1: f

```
1 function y=f(X)
2 y=0.5*X.^2; %een-fase stroming
3 %y = X.^2 ./ (X.^2 + (1.-X).^2); %twee-fasen stroming
4 end
```

Listing 2: Eéndimensionaal (fractioneel) τ -model

```
1 % Deze code plot de oplossing van het eendimensionale (fractionele)
2 % tau-model met behulp van de IMEX-methode
3
4 format long
5
6 % Parameters
7 dx = 0.005;
8 dt = 0.0001;
9 I = 1 + (1/dx);
10 d = 0.002;
11 tau = 0; %0.000310;
12 umin = 0;
13 uplus = 0.6;
14
15 % Eindige differentiematrices
16 D1p = 1/dx * (-1*eye(I) + [zeros(I-1,1),eye(I-1);zeros(1,I)]);
17 D1p(I,1) = 1/dx;
18
19 D1m = 1/dx * (eye(I) - [zeros(I-1,1),eye(I-1);zeros(1,I)]');
20 D1m(1,I) = -1/dx;
21
22 D1c = 0.5*(D1p+D1m);
23
24 D2 = D1p*D1m;
25
26 % Randvoorwaarden
27 D2(1,:) = 0;
28 D1c(1,:) = 0;
29 D2(I,:) = 0;
30 D1c(I,:) = 0;
31
32 for i = 1:I
33     x(i) = (i-1)*dx;
34 end
35
36 for k = 1:I
37     u0(k) = umin + 0.5*(uplus-umin)*(1+tanh(50*(x(k)-0.8)));
38 end
39
40 % Keuze voor de matrix die achter de tau staat (tD) en die achter
41 % de d (dD) staat.
42 tD = D2;%-sqrtm(sqrtm(-D2^3));
43 dD = D2;%-sqrtm(sqrtm(-D2^3));
44
45 % IMEX-methode
46 u1 = u0';
47
```

```

48 for n = 2:((2.0/dt)+1)
49     u1 = (eye(I)-tau*tD-d*dt*dD)\((eye(I)-tau*tD)*u1 + dt*D1c*f(u1));
50 end
51
52 u2 = u0';
53
54 for n = 2:((1.5/dt)+1)
55     u2 = (eye(I)-tau*tD-d*dt*dD)\((eye(I)-tau*tD)*u2 + dt*D1c*f(u2));
56 end
57
58 u3 = u0';
59
60 for n = 2:((1.0/dt)+1)
61     u3 = (eye(I)-tau*tD-d*dt*dD)\((eye(I)-tau*tD)*u3 + dt*D1c*f(u3));
62 end
63
64 u4 = u0';
65
66 for n = 2:((0.5/dt)+1)
67     u4 = (eye(I)-tau*tD-d*dt*dD)\((eye(I)-tau*tD)*u4 + dt*D1c*f(u4));
68 end
69
70 u5 = u0';
71
72 for n = 2:((0.1/dt)+1)
73     u5 = (eye(I)-tau*tD-d*dt*dD)\((eye(I)-tau*tD)*u5 + dt*D1c*f(u5));
74 end
75
76 % Plot
77 plot(x,u1, x,u2, x,u3, x,u4, x,u5)
78 ylim([0,0.7])
79 legend('t=2.0', 't=1.5', 't=1.0', 't=0.5', 't=0.1')
80 legend('Location','southeast')
81 xlabel('x');
82 ylabel('u(x,t)');

```

Listing 3: Brownse beweging en Lévy-vlucht

```

1 % Deze code plot een Brownse beweging en een Levy-vlucht
2
3 % Startwaarden
4 N=1000;
5 x1=zeros(1,N);
6 y1=zeros(1,N);
7
8 x2=zeros(1,N);
9 y2=zeros(1,N);
10 rng(1);
11
12 % Levy-vlucht
13 alpha=1.5;
14 for n=2:N
15     theta=rand*2*pi;
16     f1=(rand)^(-1/alpha);
17     x1(n)=x1(n-1)+f1*cos(theta);
18     y1(n)=y1(n-1)+f1*sin(theta);
19 end
20

```

```

21 % Brownse beweging
22 for n=2:N
23     theta=rand*2*pi;
24     f2=randn;
25     x2(n)=x2(n-1)+f2*cos(theta);
26     y2(n)=y2(n-1)+f2*sin(theta);
27 end
28
29 % Plot
30 plot(x1,y1,x2,y2)
31 xlabel('x')
32 ylabel('y')
33 title('Brownse_beweging_en_Levy-vlucht')

```

Listing 4: Advectie-diffusiemodel

```

1 % Deze code plot de oplossing van een tweedimensionaal
2 % advectie-diffusiemodel
3
4 % Parameters
5 dx = 0.02;
6 dy = 0.02;
7 dt = 0.0001;
8 I = (1/dx) + 1;
9 J = (1/dy) + 1;
10 d = 1; % diffusiecoefficient
11 g1 = -40; % bepaalt in hoeverre de golf naar de x-as beweegt
12 g2 = -40; % bepaalt in hoeverre de golf naar de y-as beweegt
13
14 % Eindige differentiematrix
15 D2 = zeros(I*J);
16
17 for i = 1:I*J
18     D2(i,i) = -2*(1/dx^2 + 1/dy^2);
19 end
20
21 for i = 1:I-1
22     for j = 1:J
23         D2(i+(j-1)*I, i+(j-1)*I+1) = 1/dx^2;
24         D2(i+(j-1)*I+1, i+(j-1)*I) = 1/dx^2;
25     end
26 end
27
28 for i = 1:I
29     for j = 1:J-1
30         D2(i+(j-1)*I, i+j*I) = 1/dy^2;
31         D2(i+j*I, i+(j-1)*I) = 1/dy^2;
32     end
33 end
34
35 D1x = zeros(I*J);
36
37 for i = 1:I-1
38     for j = 1:J
39         D1x(i+(j-1)*I, i+(j-1)*I+1) = g1*1/(2*dx);
40         D1x(i+(j-1)*I+1, i+(j-1)*I) = g1*-1/(2*dx);
41     end
42 end

```

```

43
44 for i = 1:I
45     for j = 1:J-1
46         D1x(i+(j-1)*I, i+j*I) = g2*1/(2*dy);
47         D1x(i+j*I, i+(j-1)*I) = g2*-1/(2*dy);
48     end
49 end
50
51 % Beginvoorwaarden
52 for i = 1:I
53     x(i) = (i-1)*dx;
54 end
55
56 for j = 1:J
57     y(j) = (j-1)*dy;
58 end
59
60 u = zeros([I*J, 1]);
61
62 for i = 1:I
63     for j = 1:J
64         u(i+(j-1)*I) = exp(-100*((x(i)-0.25)^2 + (y(j)-0.25)^2));
65     end
66 end
67
68 % IMEX methode
69 u1=u;
70 u2=u;
71 u3=u;
72 u4=u;
73
74 %D2 = -sqrtm(sqrtm((-D2)^3));
75
76 for n = 2:11
77     u1 = (eye(I*J) - d*dt*D2)\(u1 + dt*D1x*u1);
78 end
79
80 for n = 2:26
81     u2 = (eye(I*J) - d*dt*D2)\(u2 + dt*D1x*u2);
82 end
83
84 for n = 2:51
85     u3 = (eye(I*J) - d*dt*D2)\(u3 + dt*D1x*u3);
86 end
87
88 for n = 2:101
89     u4 = (eye(I*J) - d*dt*D2)\(u4 + dt*D1x*u4);
90 end
91
92 % Plot
93 figure(1)
94 subplot(2,2,1)
95 surf(x,y,reshape(u1,I,J))
96 xlabel('x')
97 ylabel('y')
98 zlabel('z')
99 zlim([0 1])
100 %view([45 30])

```

```

101 view([0 90])
102 title("t=0.001")
103 colormap("jet")
104 shading("interp")
105
106 subplot(2,2,2)
107 surf(x,y,reshape(u2,I,J))
108 xlabel('x')
109 ylabel('y')
110 zlabel('z')
111 zlim([0 1])
112 %view([45 30])
113 view([0 90])
114 title("t=0.0025")
115 shading("interp")
116
117 subplot(2,2,3)
118 surf(x,y,reshape(u3,I,J))
119 xlabel('x')
120 ylabel('y')
121 zlabel('z')
122 zlim([0 1])
123 %view([45 30])
124 view([0 90])
125 title("t=0.005")
126 shading("interp")
127
128 subplot(2,2,4)
129 surf(x,y,reshape(u4,I,J))
130 xlabel('x')
131 ylabel('y')
132 zlabel('z')
133 zlim([0 1])
134 %view([45 30])
135 view([0 90])
136 title("t=0.01")
137 shading("interp")

```

Listing 5: Vereenvoudigd tweedimensionaal τ -model

```

1 % Deze code plot de oplossing van een tweedimensionaal
2 % tau-model
3
4 % Parameters
5 dx      = 0.1;
6 dy      = 0.01;
7 dt      = 0.001;
8 Tend    = 2;
9 xL      = 0;
10 xR      = 5;
11 yL      = 0;
12 yU      = 1;
13 umin    = 0.0;
14 uplus   = 0.6;
15 ubound  = 0.8;
16
17 d       = 0.002;
18 tau     = 0.0; %0.00031;

```

```

19
20 Nx      = (xR-xL)/dx+1;
21 Ny      = (yU-yL)/dy+1;
22 Nt      = Tend/dt;
23 dim     = Nx*Ny;
24 x       = xL:dx:xR;
25 x       = x';
26 y       = yL:dy:yU;
27 y       = y';
28
29 u       = zeros(dim,1);
30 B       = sparse(zeros(dim,dim));
31 rhs     = zeros(dim,1);
32
33 a       = 1+2*(dt*d+tau)/(dx*dx)+2*(dt*d+tau)/(dy*dy);
34 b       = -(d*dt+tau)/(dx*dx);
35 c       = -(d*dt+tau)/(dy*dy);
36 d       = 1+2*tau/(dx*dx)+2*tau/(dy*dy);
37 e       = -tau/(dx*dx);
38 f       = -tau/(dy*dy);
39 g       = dt/(2*dy);
40
41 figure; hold off;
42
43 % Beginvoorwaarden
44 for i = 1:Nx
45     for j = 1:Ny
46         u(i+(j-1)*Nx) = u_min + ...
47             0.5*(u_plus-u_min)*(1+tanh(50*(y(j)-ubound)));
48     end
49 end
50
51 for i = 1:Nx
52     for j = fix((0.75)/dy)+1:(0.8)/dy+1
53         u(i+(j-1)*Nx) = u_min + ...
54             0.5*(u_plus-u_min)*(1+tanh(50*(y(j)-ubound))) + ...
55             0.05*cos(0.8*pi*x(i))*cos(1*pi*y(j));
56     end
57 end
58
59 % Eindige differentiematrix
60 for i=1:Nx
61     B(i,i) = 1;
62     B(dim-i+1,dim-i+1) = 1;
63 end
64
65 j=1;
66 for i=Nx+1:dim-Nx
67     if j == 1
68         j = j+1;
69         B(i,i) = a;
70         B(i,i+1) = b;
71         B(i,i+Nx) = c;
72         B(i,i-Nx) = c;
73         B(i,i+Nx-1) = b;
74     elseif j == Nx
75         j = 1;
76         B(i,i) = a;

```

```

77         B(i, i-1)    = b;
78         B(i, i+Nx)  = c;
79         B(i, i-Nx)  = c;
80         B(i, i-Nx+1) = b;
81     else
82         B(i, i)      = a;
83         B(i, i+1)    = b;
84         B(i, i-1)    = b;
85         B(i, i+Nx)  = c;
86         B(i, i-Nx)  = c;
87         j = j+1;
88     end
89 end
90
91 % IMEX methode + plot
92
93 subplot(5,1,1);
94 imagesc(x,y, reshape(u,Nx,Ny));
95 set(gca, 'Ydir', 'Normal');
96 colormap(jet);
97 cb=colorbar("northoutside");
98 cb.Position = cb.Position + [0 0.1 0 0];
99 clim([0 1]);
100 fig=2;
101
102 for t=1:Nt
103     for i=1:Nx
104         rhs(i)          = u(i);
105         rhs(dim-i+1)    = u(dim-i+1);
106     end
107     j = 1;
108     for i=Nx+1:dim-Nx
109         if j == 1
110             rhs(i)      = d*u(i)+e*u(i+1)+e*u(i+Nx-1)+f*u(i+Nx)+...
111                 f*u(i-Nx)+0.5*g*((u(i+Nx))^2-(u(i-Nx))^2);
112             j           = j+1;
113         elseif j == Nx
114             rhs(i)      = d*u(i)+e*u(i-1)+e*u(i-Nx+1)+f*u(i+Nx)+...
115                 f*u(i-Nx)+0.5*g*((u(i+Nx))^2-(u(i-Nx))^2);
116             j           = 1;
117         else
118             rhs(i)      = d*u(i)+e*u(i+1)+e*u(i-1)+f*u(i+Nx)+...
119                 f*u(i-Nx)+0.5*g*((u(i+Nx))^2-(u(i-Nx))^2);
120             j           = j+1;
121         end
122     end
123     u = B\rhs;
124
125     if mod(t*4,Nt) == 0
126         subplot(5,1,fig);
127         imagesc(x,y, reshape(u,Nx,Ny));
128         set(gca, 'Ydir', 'Normal');
129         colormap(jet);
130         clim([0 1]);
131         fig = fig+1;
132     end
133 end

```

Referenties

- [1] V. C. H. Duijn, Y. Fan, L. A. Peletier, en S. Pop, “Travelling wave solutions for degenerate pseudo-parabolic equations modelling two-phase flow in porous media”, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, vol. 14, nr. 3, pp. 1361–1383, jun. 2013.
- [2] D. A. DiCarlo, “Experimental measurements of saturation overshoot on infiltration”, *Water Resources Research*, vol. 40, nr. 4, apr. 2004.
- [3] S. Shiozawa en H. Fujimaki, “Unexpected water content profiles under flux-limited one-dimensional downward infiltration in initially dry granular media”, *Water Resources Research*, vol. 40, nr. 7, jul. 2004.
- [4] A. G. Egorov, R. Z. Dautov, J. L. Nieber, en A. Y. Sheshukov, “Stability analysis of gravity-driven infiltrating flow”, *Water Resources Research*, vol. 39, nr. 9, sep. 2003.
- [5] J. L. Nieber, R. Z. Dautov, A. G. Egorov, en A. Y. Sheshukov, “Dynamic capillary pressure mechanism for instability in gravity-driven flows; review and extension to very dry conditions”, *Transport in Porous Media*, vol. 58, nr. 1–2, pp. 147–172, jan. 2005.
- [6] P.A. Zegeling, “An adaptive grid method for a non-equilibrium PDE model from porous media”, *Journal of Mathematical Study*, vol. 48, nr. 2, pp. 93-104, 2015.
- [7] C.J. van Duijn, S.M. Hassanizadeh, I.S. Pop en P.A. Zegeling, “Non-equilibrium models for two phase flow in porous media: the occurrence of saturation overshoots”, *Proceedings of Int. Conf. on Applications of Porous Media*, 2013.
- [8] W. Hundsdorfer en J. G. Verwer, *Numerical Solution of Time-Dependent Advection-Diffusion-Reaction Equations*. Springer-Verlag, Berlijn, 2003.
- [9] U. M. Ascher, S. J. Ruuth, en R. J. Spiteri, “Implicit-explicit Runge-Kutta methods for time-dependent partial differential equations”, *Applied Numerical Mathematics*, vol. 25, nr. 2–3, pp. 151–167, nov. 1997.
- [10] “GeoGebra.” <https://geogebra.org/> (geraadpleegd op 1 maart 2024).
- [11] H. Zhang en P.A. Zegeling, “Numerical investigations of two-phase flow with dynamic capillary pressure in porous media via a moving mesh method”, *Journal of Computational Physics*, mei 2017.
- [12] G. W. Leibniz, *Leibniz Mathematische Schriften*. Hildesheim, Duitsland: Olms-Verlag, 1849.
- [13] A. Lischke et al., “What is the fractional Laplacian? A comparative review with new results”, *Journal of Computational Physics*, vol. 404, mrt. 2020.
- [14] G. M. Viswanathan, E. P. Raposo, en M. G. E. Da Luz, “Lévy flights and superdiffusion in the context of biological encounters and random searches”, *Physics Of Life Reviews*, vol. 5, nr. 3, pp. 133–150, sep. 2008

- [15] M. Carlson, R. M. Kirby, en H. Sundar, “A scalable framework for solving fractional diffusion equations”, *Proceedings Of The 34th ACM Int. Conf. On Supercomputing*, jun. 2020
- [16] M. Ilić, F. Liu, I. Turner, en V. Anh, “Numerical approximation of a fractional-in-space diffusion equation, I”, *Fractional Calculus And Applied Analysis*, vol. 8, nr. 3, pp. 323–341, jan. 2005.
- [17] M. Ilić, F. Liu, I. Turner, en V. Anh, “Numerical approximation of a fractional-in-space diffusion equation (II) - with nonhomogeneous boundary conditions”, *Fractional Calculus And Applied Analysis*, vol. 9, nr. 4, pp. 333–349, jan. 2006.
- [18] Q. Yang, T. J. Moroney, K. Burrage, I. Turner, en F. Liu, “Novel numerical methods for time-space fractional reaction diffusion equations in two dimensions”, *Australian and New Zealand Industrial And Applied Mathematics Journal*, vol. 52, pp. 395, jul. 2011.
- [19] R. J. Glass, T. S. Steenhuis, en J. -y. Parlange, “Mechanism for finger persistence in homogeneous, unsaturated, porous media”, *Soil Science*, vol. 148, nr. 1, pp. 60–70, jul. 1989.
- [20] H. Zhang en P. A. Zegeling, “A moving mesh finite difference method for non-monotone solutions of non-equilibrium equations in porous media”, *Communications in Computational Physics*, vol. 22, nr. 4, pp. 935–964, jul. 2017.
- [21] J. L. Nieber, R. Z. Dautov, A. G. Egorov, en A. Y. Sheshukov, “Dynamic capillary pressure mechanism for instability in gravity-driven flows; review and extension to very dry conditions”, *Transport in Porous Media*, vol. 58, nr. 1–2, pp. 147–172, jan. 2005.
- [22] A. Remorie, “Numerical solution of two-dimensional fingering patterns.”, Master thesis, Universiteit Utrecht, 2011.