

# Vernieuwd reken-wiskundeonderwijs in het Montessoribasisonderwijs

*Effectiviteit van de 'Rekenkaarten Vermenigvuldigen met hele getallen'*



Masterthesis Orthopedagogiek  
Universiteit Utrecht

Student: Sandra de la Mar-van Beurden, 3037622  
Onderwijsonderdeel: masterthesis  
Werkveld: leerlingenzorg  
Code: 200500130  
Thesisdocent: Hans van Luit  
Datum: 29-06-2010

# Inhoud

Voorwoord .....	2
Samenvatting .....	3
Inleiding .....	3
Montessorirekenen en realistisch rekenen.....	4
Vernieuwing van het Montessorireken-wiskundeonderwijs .....	5
Vier uitgangspunten voor het vernieuwd reken-wiskundeonderwijs .....	5
De rol van de leraar .....	6
Onderzoekshypotheses.....	7
Methode.....	8
Deelnemers.....	8
Beschrijving van de RVHG.....	8
Beschrijving van de interventie.....	10
Resultaten .....	12
Kwantitatieve resultaten .....	12
Kwalitatieve resultaten.....	16
Conclusies en discussie .....	18
Literatuur .....	20
Abstract .....	23
Appendix A, Illustratie van een werkkaart voor het kind van de RVHG.....	24
Appendix B, Illustratie van een didactische bijsluiter voor de leraar van de RVHG.....	25

## Voorwoord

Dit onderzoek heeft plaatsgevonden in het kader van de masterthesis van de studie Orthopedagogiek aan de Universiteit Utrecht. Nadat Els Westra mij fantastisch begeleid heeft in mijn stageperiode, is het contact met haar gebleven en vroeg zij mij ongeveer een jaar geleden of ik interesse zou hebben om onderzoek te doen voor de Projectgroep Montessori Wiskunde Basisonderwijs in het kader van het vernieuwd reken-wiskundeonderwijs. Ik heb daar even over nagedacht, want wat wist ik nou van het Montessorionderwijs? Maar met Els als begeleider en inspiratiebron, heb ik 'ja' gezegd. Het maken van die keuze verliep overigens soepeler dan het opzetten van het onderzoek. Het viel niet mee om een onderzoek van begin af aan op te zetten, mensen te enthousiasmeren om deel te nemen aan het onderzoek en literatuur te vinden over een vorm van onderwijs waarover weinig onderzoek is gepubliceerd. Els heeft me veel bijgepraat en bovendien kreeg ik de gelegenheid om het Montessoricongres in Dallas te bezoeken, dat geheel was gewijd aan het wiskundeonderwijs op het gebied van rekenen en geometrie binnen het Montessorionderwijs. Een week lang optrekken met Nederlandse en buitenlandse Montessorianen was geweldig. Ik heb enorm geleerd van de gesprekken en discussies die we tot 's avonds laat hadden. Bedankt, Els, Maaike, Joyce, Maria Rosa, Annouschka en Mirjam. Mede dankzij jullie kon ik mijn onderzoek met beter inzicht op de goede weg voortzetten. Vooral Els wil ik bedanken voor haar begeleiding bij dit onderzoek, het gebruik van haar indrukwekkende bibliotheek en de liters koffie en thee met chocolade. Ik hoop nog veel van je te kunnen leren. Ik wil de teamleden en kinderen van de Montessorischolen De Trinoom in Barendrecht, Tuinstad Schiebroek in Rotterdam, Maassluis in Maassluis en De Wiek in Drunen bedanken. Met name Arlyn, Marjoleine, Sylvia en Veronica van De Trinoom wil ik bedanken voor het verzamelen van alle data. Zij en de kinderen uit hun groep hebben veel werk verzet. Ik wil mijn thesisbegeleider Hans van Luit bedanken voor zijn flexibiliteit, opbouwende kritiek en altijd snelle reacties op mijn vragen.

Helaas heeft mijn vader de afronding van deze studie niet meer mogen meemaken. Ik ben hem dankbaar voor zijn steun en interesse en onze lange gesprekken aan de keukentafel als we het hadden over de onderwerpen die in de studie aan bod kwamen. Tot slot een speciale dank voor mijn gezin. Lieve Marcel, Denise en Nicole, dank jullie wel voor jullie steun en begrip de afgelopen jaren. Jullie waren mijn klankbord bij mijn momenten van hardop denken, en testpersoon als er geoefend moest worden voor praktijkopdrachten. Lief, dat de klusjes die ik naliet als ik moest leren, verslagen maken of voor de praktijk werkte, door jullie werden opgepakt. Ik houd van jullie.

## **Samenvatting**

In deze thesis is de effectiviteit onderzocht van de set werkkaarten en didactische bijsluiters op het gebied van vermenigvuldigen met hele getallen (RVHG). De RVHG is ontworpen voor kinderen in groep 5 en 6 van het Montessoribasisonderwijs. De RVHG is gebaseerd op de Montessoritheorie en waarborgt belangrijke uitgangspunten van het Montessorionderwijs zoals het gebruik van het Montessorimateriaal, vrije werkkeuze, werkduur, werktempo en werkcyclus en de gerichtheid op de ontwikkeling van de mathematische geest. Zeven keer is een N=1 design uitgevoerd. Na een interventieperiode van negen weken konden drie van de zeven deelnemers meer vermenigvuldigingen tot 100 oplossen en gebruikten vier van de zeven deelnemers vermenigvuldigstrategieën meer en gevarieerder bij het oplossen van vermenigvuldigingen tot 100.

**Trefwoorden:** rekenen, wiskunde, vermenigvuldigen, strategie, Montessorionderwijs.

## **Inleiding**

Tot eind jaren 80, begin jaren 90 was het Montessorionderwijs erg materiaalgericht. Het kind koos een werkje, de leraar deed voor, het kind deed na totdat alle aspecten van het materiaal aan de orde waren geweest. Deze vorm van modelleren werd zowel in de onderbouw als in de midden- en bovenbouw toegepast. Pas veel later bleek dit een onjuiste interpretatie van de Montessoripedagogiek. De oorzaak van deze onjuiste interpretatie was tweeledig. Allereerst was het modelleren voor kinderen in de onderbouw (3-6 jaar) bedoeld en zouden oudere kinderen meer gebaat zijn bij meer inzichtelijke vorm van leren (E. C. J. Westra-Mattijssen, persoonlijke mededeling, 12 juni, 2010). Ten tweede zijn de hoofdwerken en herschrijvingen van Montessori onvoldoende vertaald (e.g. 'Psico Arithmetica', 'Psico Gramatica') (Leenders, 1999) of zelfs genegeerd, zoals de boeken 'Zelfopvoeding I en II'. Nadat eind jaren 80, begin jaren 90 het Montessorirekenonderwijs al eens aan vernieuwing was onderworpen, bleef het binnen het Montessoriveld onrustig ten aanzien van dit rekenonderwijs (Stefels, Westra-Mattijssen, & Rubinstein, 2007). Het Montessorirekenmateriaal werd door veel scholen uit de klas gehaald en vervangen door een realistische rekenmethode. Met die keus dreigen belangrijke uitgangspunten van de Montessoripedagogiek te verdwijnen, zoals vrije werkkeuze, werkduur, werktempo en werkcyclus en de specifieke Montessoriaanse gerichtheid op de ontwikkeling van de mathematische geest en de daarvoor noodzakelijke Montessoriaanse leerhouding van kinderen (Klep & Westra, 2009; Stefels et al., 2007). Met

het verdwijnen van de materialen wordt het kind de mogelijkheid ontnomen om zelfstandige ontdekkingen te doen (Kelpin, 2006). Het materiaal heeft tot doel de zintuiglijke en de motorische vermogens te trainen en zo tot intellectuele vaardigheden als lezen, schrijven en rekenen te brengen (Schwegman, 1999).

### **Montessorirekenen en realistisch rekenen**

Het landelijk marktaandeel van realistische rekenmethoden is toegenomen van 15 procent in 1987 tot 100 procent in 2004. Hoe groot dit marktaandeel is binnen het Montessorionderwijs, is niet duidelijk. Op de ontwikkeling van het realistisch reken-wiskundeonderwijs heeft het gedachtegoed van Freudenthal een grote invloed gehad. Het mathematiseren speelt daarbij een belangrijke rol. Zo stelde Freudenthal dat het erom gaat dat kinderen de wiskunde zelf heruitvinden en de juistheid door hen bewust beleefd en doordacht dient te worden (Freudenthal, 1991). Ook binnen de Montessoritheorie speelt dit mathematiseren een belangrijke rol (Montessori, 1950). In beide theorieën wordt de leraar een begeleidende rol toebedeeld. De leraar observeert en stemt zijn educatieve beslissingen af op het kind. Educatieve beslissingen zijn er op gericht om kinderen problemen aan te bieden, kinderen hun oplossingen uit te laten leggen, redeneerbekwaamheid en wiskundige bekwaamheid te bevorderen, inzichtelijk te oefenen en ongunstige rekenstrategieën te vermijden (Klep, 1998).

Van den Heuvel-Panhuizen (2009) geeft aan dat na de intrede van het realistisch rekenonderwijs de resultaten van de leerlingen niet altijd dat hebben opgeleverd, wat ervan gehoopt werd. Volgens Wittmann (2005) is dit te wijten aan de verstoorde balans tussen het horizontaal en verticaal mathematiseren. Horizontaal mathematiseren wordt beschouwd als een wiskundige activiteit waarbij de leerling over reële situaties nadenkt en daarbinnen op een zinvolle manier kan handelen en redeneren. Verticale mathematisering wordt aangeduid met de daarop volgende activiteiten, die betrekking hebben op de mathematische verwerking, de probleemoplossing, de generalisatie van de oplossing en de verdergaande formalisering (Freudenthal, 1991; Treffers, 1978). Om kinderen wiskundig beter te leren redeneren moet volgens Van den Heuvel-Panhuizen (2009) meer wiskunde in het rekenonderwijs gebracht worden. Een standpunt waar ook de 'Projectgroep Montessori Wiskunde Basisonderwijs' in haar visiestuk 'Montessorireken-wiskundeonderwijs in de 21<sup>e</sup> eeuw' een aanzet toe heeft gegeven (Klep & Westra, 2009).

## **Vernieuwing van het Montessorireken-wiskundeonderwijs**

In 2001 hebben leden van de Werkgroep Montessori Onderwijs onderzoek gedaan naar de hiaten in het aanbod van het Montessorionderwijs om te kunnen voldoen aan het verzoek van de Inspectie van het Onderwijs en het Montessorireken-wiskundeonderwijs te kunnen spiegelen aan de kerndoelen. Om de vernieuwing van het reken-wiskundeonderwijs vorm te geven, heeft een groep opleiders en begeleiders in 2004 aansluiting gezocht bij de Nederlandse Montessori Vereniging (NMV). Zij zijn als ‘Projectgroep Montessori Wiskunde Basisonderwijs’ aan het werk en worden daarbij ondersteund door het nationaal expertisecentrum leerplanontwikkeling (SLO) (Stefels et al., 2007). In het opstellen van een vernieuwde visie voor het Montessorirekenonderwijs heeft de projectgroep zich opnieuw laten inspireren door de klassieke werken van Maria Montessori, zoals ‘Psico Arithmetica’, ‘De methode; de ontdekking van het kind’ en ‘Zelfopvoeding I en II’ (Klep & Westra, 2009). Deze hernieuwde interesse is ook op internationaal niveau merkbaar als in januari 2010 de NAMTA (North American Montessori Teachers’ Association) een congres organiseert met als titel ‘The essential Montessori mathematics: Whole school implementation’ (Scoppola, 2010; Waski, 2010). Het onderwijsdoel van het wiskundecurriculum (rekenen, algebra en geometrie) van Maria Montessori is om het wiskundig brein van het kind te ontwikkelen (Duffy, 2008; Montessori, 1950). In ‘Psico Geometria’ schrijft zij (vertaling): “The process for achieving this result differs from usual. It is not about fixing our mind on an idea, but about handling an object and examining it with our senses, moving it continuously and reproducing it with sensitive images (drawings, papers, paper works, etc.). The mind thus comes into contact and lingers on the object through the periphery, taking in everything that the object can give us. The hand touches the evidence and the mind discovers the secret.” (Scoppola, 2010).

## **Vier uitgangspunten voor het vernieuwd reken-wiskundeonderwijs**

De ‘Projectgroep Montessori Wiskunde Basisonderwijs’ heeft binnen de Montessoritheorie vier uitgangspunten geformuleerd voor het vernieuwd reken-wiskundeonderwijs. Ten eerste: reken-wiskundeonderwijs gaat over relaties in de wereld; de relaties hebben betrekking op grootte, aantal, vorm en structuur. Rekenkunde is de kennis en de vaardigheid hoe je met de relaties kunt werken. Ten tweede: wiskundig inzicht bij kinderen ontstaat aan de hand van het werken met paradigma’s (letterlijk: voorbeelden). Een paradigma doet een beroep op de aandacht, wil, intelligentie, verbeeldingskracht en ratio van het kind om te zien hoe dingen in elkaar zitten en om redeneringen te kunnen volgen. Ten derde: het kind werkt vanuit vrijheid

van werkkeuze, -duur, -tempo en -cyclus in een voorbereide kosmische omgeving. Ten vierde: de kinderen leren de wereld ordenen, ze leren ermee werken en bouwen zo aan een repertoire van kennis, vaardigheden, aanpakken en redeneringen. Het is de taak van de leraar dit proces te stimuleren. De eerste twee uitgangspunten richten zich specifiek op het reken-wiskundeonderwijs. De uitgangspunten van het vernieuwd reken-wiskundeonderwijs zijn uitgewerkt in een aantal katernen, waarvan het katern Vermenigvuldigen (met hele getallen) er één is (Klep & Westra, 2009).

### **De rol van de leraar**

Voor deze thesis wordt onderzoek gedaan binnen het domein 'Vermenigvuldigen met hele getallen'. De vernieuwing is gericht op de professionalisering van de leraar, die niet vanuit materiaal c.q. methodes werkt, maar vanuit het kind en zijn activiteiten in een wiskundige, essentiegerichte leeromgeving. Deze visie is geconcretiseerd in een didactisch model en in een methodiek. De visie, het didactisch model en de methodiek zijn vervolgens voor het vermenigvuldigen met hele getallen geconcretiseerd in activiteiten, welke zijn beschreven en uitgewerkt op de werkkaarten voor de kinderen. Het didactisch model voorziet eveneens in activiteitsbeschrijvingen voor de leraar, welke zijn beschreven op de zogenaamde didactische bijsluiters (Klep & Westra, 2009). Studies tonen aan dat bij het verbeteren van de kwaliteit van het rekenonderwijs er een belangrijke rol is weggelegd voor de leraar (Ding, Li, Piccolo, & Kulm, 2007; Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, 2009; Ma, 2009; Nipper & Sztajn, 2008; Van Zanten, Barth, Faarts, Van Gool, & Keijzer, 2009). Ma (2009) geeft aan dat de kwaliteit van de wiskundekennis van de leraar een directe invloed heeft op het leergedrag van de leerling. In een meta-analyse vergeleken Slavin en Lake (2008) effectieve programma's om het rekenonderwijs op Amerikaanse basisscholen te verbeteren. Zij onderzochten de uitkomsten van studies naar de effecten van drie types van interventies: aanpassingen in het reken-wiskundecurriculum, instructie door de computer en pedagogisch-didactische programma's. Zij concluderen dat pedagogisch-didactische programma's (met een gemiddelde effect size van .33) het meest effectief zijn. Voor de uitvoer van een pedagogisch-didactisch programma moet de (startbekwame) leraar beschikken over kennis voor het onderwijzen van rekenen-wiskunde (pedagogische kennisbasis) en kennis van rekenen-wiskunde (didactische kennisbasis) (Van Zanten et al., 2009). Daarnaast dragen de kennisbases bij aan de effectiviteit van een leraar wanneer deze hier flexibel gebruik van weet te maken (Steele, 2005). Klabbers (2010) gebruikt in dit kader de term 'pendelen': afstemming zoeken tussen onderdelen van het vakmanschap, eigenschappen van kinderen en

kenmerken van de werkelijkheid. Het gaat daarbij vooral om de leraar die de leeromgeving krachtiger moet maken. Klabbers (2009a; 2009b) noemt hiervoor zeven pijlers die niet alleen afzonderlijk essentieel zijn, maar waarbij ook de onderlinge samenhang bepaalt hoe krachtig de leeromgeving uiteindelijk is. De zeven pijlers hebben betrekking op tussendoelen en leerlijnen, het aantrekkelijk en uitdagend maken van onderwijs, de basisbehoeften van kinderen, mathematiseren, sociaal constructivisme, de rol van de leraar en de wenselijkheid om leeromgevingen als schakels met elkaar te verbinden. De zeven pijlers van Klabbers (2009a; 2009b) tonen veel overeenkomsten met de Montessoriaanse visie op het reken-wiskundeonderwijs. Een uitzondering hierop is de pijler 'tussendoelen en leerlijnen'. De werkkaarten vallen onder bepaalde thema's maar zijn niet bedoeld om in een leerlijn aan te bieden of als leerlijn te gebruiken. Vrijheid van werkkeuze, -duur, -tempo en -cyclus blijven gehandhaafd. De gehele inhoud van tussendoelen en leerlijnen is overigens wel geprofileerd in het (digitale) Montessori Kindvolgsysteem (MKVS), wat de mogelijkheid biedt om ontwikkelingsmomenten van kinderen te registreren en kinderen te begeleiden (E. C. J. Westra-Mattijssen, persoonlijke mededeling, 3 juni, 2010). In de Montessoriaanse visie kan met alle leerthema's begonnen worden en ze afwisselend laten bijdragen aan de wiskundige vorming van de kinderen. Voor het vermenigvuldigen met hele getallen zijn dit de leerthema's begrip van essenties (structuren en hun eigenschappen), rekenmanieren, automatiseren en memoriseren (oefenen) en integratie (Klep & Westra-Mattijssen, 2009).

### **Onderzoekshypotheses**

Dit onderzoek is erop gericht de waarde te bepalen van de set werkkaarten en didactische bijsluiters op het gebied van vermenigvuldigen met hele getallen (RVHG). Daarbij wordt gebruikgemaakt van herhaalde casestudies (N=1), welke causale bewijskracht kunnen geven over de werkzaamheid van de interventie (Van Yperen & Veerman, 2008). Met zeven N=1 casestudies wordt onderzocht of kinderen in het laatste jaar van een middenbouwgroep (groep 5) of in het eerste jaar van een bovenbouwgroep (groep 6) van het Montessoribasisonderwijs, beter gaan presteren op het gebied van vermenigvuldigen met hele getallen wanneer zij en hun leraren gebruikmaken van de RVHG. Op grond hiervan worden twee hypothesen onderzocht:

1. het werken met de set werkkaarten en didactische bijsluiters op het gebied van vermenigvuldigen met hele getallen resulteert in een verbetering van de vaardigheid om vermenigvuldigingen tot 100 op te lossen;



2. het werken met de set werkkaarten en didactische bijsluiters op het gebied van vermenigvuldigen met hele getallen resulteert in een gevarieerder gebruik van rekenstrategieën bij vermenigvuldigingen tot 100.

De RVHG is specifiek ontworpen voor het verwerven van verschillende strategieën bij het vermenigvuldigen. Daarnaast staat in de RVHG het kind centraal waardoor het kind zelf veel inbreng heeft. Verwacht wordt dat het kind het nut van de verschillende strategieën beter zal begrijpen en ze daardoor beter en gevarieerder kan toepassen (Kroesbergen & Van Luit, 2002).

## **Methode**

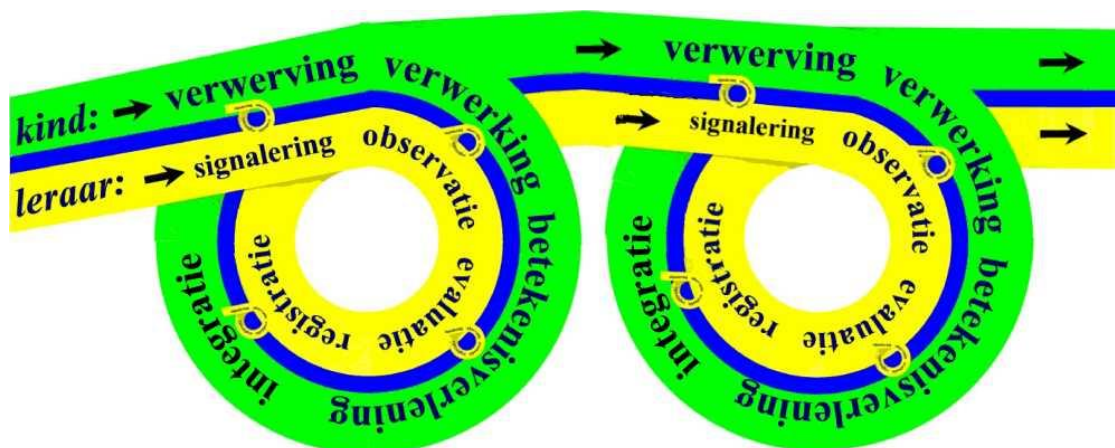
### **Deelnemers**

Het onderzoek is uitgevoerd bij zeven kinderen: drie jongens en drie meisjes uit groep 5 (laatste jaar middenbouw) en één meisje uit groep 6 (eerste jaar bovenbouw) van een Montessorischool in Barendrecht. Van deze basisschool werd de leraren van de midden- en bovenbouw gevraagd een selecte steekproef te trekken van twee tot vijf kinderen uit hun groep die gemiddeld presteren op het gebied van vermenigvuldigen. Op basis van een toets vermenigvuldigen tot 100 bleven zeven kinderen over, verdeeld over drie leraren, die een gewenste goedscore tussen de 40% en 70% behaalden. Van de deelnemers is niet bekend dat zij gediagnosticeerd zijn op een leerstoornis, zoals dyscalculie of dyslexie. Van deze leerstoornissen is bekend dat schoolse vaardigheden niet of moeizaam geautomatiseerd raken (Milo & Ruijssenaars, 2003; Ruijssenaars, Van Vliet, & Willemse, 2002). Alle kinderen werden beschouwd als een aparte onderzoeksgroep (zevenmaal een N=1 onderzoek). De leeftijden van de kinderen varieerden bij aanvang van het onderzoek tussen 8;1 en 9;10 jaar. Voor technisch lezen scoren alle kinderen op gemiddeld niveau of daarboven. Het niveau van begrijpend lezen is voor één kind (Elmi) onvoldoende, van de rest van de kinderen is dit voldoende. De vooropleiding van de ouders varieert van Mavo tot HBO. Alle kinderen behaalden eind vorig schooljaar een A-, B- of C-score op de Cito Rekenen-Wiskunde. Dit gold ook voor resultaten op de toets M5 respectievelijk M6, met uitzondering van één kind (Isa) die een E-score behaalde op de toets M5.

### **Beschrijving van de RVHG**

De leraar beschikt over een handleiding waarin de visie, didactiek, ‘mathetiek’ (de kunst van het leren; Comenius 1996), methodiek en een toelichting op vermenigvuldigen met hele getallen zijn opgenomen. De handleiding bevat tevens alle didactische bijsluiters en

werkbladen die bij een aantal werkkaarten gebruikt worden. Het lusmodel (zie figuur 1) is een essentieel onderdeel voor het werken met de RVMG. Een voorbeeld van een werkkaart en didactische bijsluiter uit de RVHG is te vinden in de appendices A en B. Kinderen gaan onder de pedagogisch-didactische begeleiding van de leraar steeds meer gestructureerd werken. In het Montessorionderwijs ontwikkelen kinderen zelf allerlei activiteiten. Soms zijn dat verkenningen, soms diepgaande studies. De opeenvolging van deze activiteiten zijn weer te geven als een koord met lussen. Soms kan een kind van verwerving naar verwerving gaan, maar beter is een lus te maken waarin het verwervingsmoment gevolgd wordt door een grotere of kleinere lus met momenten van verwerking, betekenisverlening en integratie, die op zich weer op verschillend niveau doorlopen kunnen worden. De lussen geven dus de activiteiten weer waarin de kinderen tot verdieping komen. Terwijl het kind de (groene) lus doorloopt, volgt de leraar de ontwikkeling van het kind. De leraar stemt zijn pedagogisch-didactisch handelen en de keuze van doelen af op wat kinderen kunnen. Dit doet hij door cyclisch te signaleren, te observeren, te evalueren en te registreren (gele lus). Vervolgens beslist de leraar over de eigen interventies en interactie met het kind (blauwe lus). De leraar bekijkt bijvoorbeeld samen met een kind diens werken, beziet de totale ontwikkeling van het kind en overweegt hoe wenselijk het is dat het kind zich verder verdiept in een eenmaal gekozen onderwerp of leerweg. (Klep & Westra-Mattijssen, 2009).



Legenda:  
 Lusbeweging van het kind  
 Interactie tussen leraar en kind  
 Afstemmende activiteit van de leraar

*Figuur 1.* Het lusmodel.

In de activiteiten op de werkkaarten is een aantal vermenigvuldigstructuren uitgewerkt: groepjesmodel, strokenmodel, roostermodel, getallenlijn model, dubbele getallenlijn,

boommodel en wegenmodel (Klep, 2007). Dergelijke structuren zijn als een ‘vermenigvuldigstructuur’ te herkennen, als een vaste ‘herhaling’ op te vatten. Een vermenigvuldigmodel is een getekende abstractie voor verschillende vermenigvuldigstructuren. In alle modellen komt een herhaling voor. De producten van de vermenigvuldigingen hebben drie belangrijke eigenschappen die zowel op de werkkaarten als op de didactische bijsluiters zijn terug te vinden: de commutatieve eigenschap (verwisseleigenschap:  $3 \times 4 = 4 \times 3$ ), de distributieve eigenschap (verdeeleeigenschap:  $3 \times (4+5) = 3 \times 4 + 3 \times 5$ ) en de associatieve eigenschap ( $3 \times (4 \times 5) = (3 \times 4) \times 5$ ). En ze hebben twee andere, daar uit voortvloeiende eigenschappen: vermenigvuldigen met 1 ( $3 \times 1 = 1 \times 3 = 3$ ) en vermenigvuldigen met 0 ( $3 \times 0 = 0 \times 3 = 0$ ).

Aan de bovenkant van de werkkaarten voor de kinderen staat informatie over het onderwerp (kern van de leertaak van het kind, e.g. het wegenmodel), werkgebied (e.g. langs hoeveel wegen kan de muis naar de kaas?) en benodigd materiaal voor de opdracht aangegeven. Ook kan het kind op de werkkaart terugvinden of het een individuele opdracht, een opdracht voor twee kinderen of een (klein) groepje is. Bij het kopje ‘Aan het werk’ gaat het erom dat het kind een richting meekrijgt (of ontwikkelt) in het werk dat hij zal gaan doen, om vervolgens de leertaak te gaan uitvoeren. Op het einde van de werkkaart staat het leerdoel voor het kind, omschreven als wat het kind moet weten, onthouden of vastleggen. De didactische bijsluiter voor de leraar geeft naast de informatie die ook op de werkkaart is terug te vinden, informatie over het gewenste leerproces en leeropbrengst van het kind, de wiskundige essentie (de beschrijving van de wiskunde die in de taak aan de orde komt, e.g. optelstrategieën: buursommen) en de fase in het lusmodel (e.g. verwerving, zie figuur 1). Tot slot worden aanwijzingen gegeven voor signalering, interventies, zorgpunten en registratie in het MKVS (Montessori Kindvolgsysteem).

### **Beschrijving van de interventie**

In dit onderzoek is gebruikgemaakt van een herhaalde metingen analyse om het effect van de interventie te kunnen aantonen; zeven maal een N=1 design. Voor het hanteren van een enigszins beperkt aantal metingen is gebruikgemaakt van de C-statistiek (Young, 1941) bij een N=1 ontwerp (Blumberg, 1984; Tryon, 1982, 1984; Van Luit, 1994). De metingen zijn uitgevoerd met rekentoetsen bestaande uit 20 vermenigvuldigsommen, waarvan de eerste 10 sommen de tafels tot en met 10 en de laatste 10 sommen de tafels tot en met 100 betroffen. Voor dit onderzoek zijn meerdere parallelversies van de rekentoets gemaakt die alle

inhoudelijk vergelijkbaar zijn qua moeilijkheidsgraad en variatie in strategiegebruik.

Gedurende het gehele onderzoek maakten de kinderen tweemaal per week een rekentoets.

De gehele periode van dataverzameling bestond uit drie fasen: fase van de voormetingen, fase van de interventie (gebruik van de RVHG) en de fase van de nametingen. In de eerste fase gebruiken de kinderen en de leraren nog geen RVHG. Om aan te tonen dat er in deze fase sprake is geweest van een stabiele ontwikkeling ten aanzien van het maken van vermenigvuldigingen, moet een niet-significante Z-score worden behaald om de interventiefase te kunnen starten (Tryon, 1982). Tussen de voormetingen en het starten van de interventiefase heeft een studiedag plaatsgevonden waarbij het gehele lerarenteam 's ochtends een presentatie kreeg over evalueren en registreren hiervan in het MKVS en 's middags een workshop over de RVHG. De leraren van de onderbouw hebben ontwerpen voor werkkaarten bedacht met als onderwerp getalbegrip. De leraren van de midden- en bovenbouw hebben in groepjes met de RVHG gewerkt in de vorm van rollenspel om zo vertrouwd te raken met het nieuwe concept. Voor deze studiedag is bewust gekozen voor een training en workshop voor het gehele team. Onderzoek toont aan dat effectieve en duurzame implementatie van nieuwe werkwijzen gebaat is bij onder andere een onderlinge samenwerking in het eigen team en het bundelen en delen van kennis en ervaringen (Diephuis, 2004; Joha, Van Luit & Vermeer, 1999).

Kwantitatieve veranderingen in het juist kunnen uitrekenen van de vermenigvuldigingen werden gemeten door middel van de goedscores op rekentoetsen. Om aan te kunnen tonen dat de interventie een verbetering tot stand heeft gebracht, moet een significante Z-score behaald worden. In de nameting wordt onderzocht of de doorgemaakte ontwikkeling zich stabiliseert. Voor het aantonen van de afwezigheid van een trend in deze fase, moet een niet-significante Z-score behaald worden (Tryon, 1982). Om te beoordelen of er naast het automatiseren ook een verbetering tot stand is gebracht ten aanzien van het memoriseren van vermenigvuldigingen, worden drie afnames van de Tempo-Test-Rekenen (TTR; De Vos, 1992) met elkaar vergeleken. De TTR bestaat vijf kolommen waarvan de derde kolom de vermenigvuldigingen betreft. Alleen de resultaten uit deze kolom worden als metingen gebruikt. De Vos (1992) beschouwt een achterstand van het Didactische Leeftijd Equotiënt (DLE) ten opzichte van de Didactische Leeftijd (DL) van 20% of meer als signaleringsgrens. Daarom wordt in dit onderzoek een toename van de Didactische Leeftijd Equotiënt (DLE) van 20% of meer (exclusief de maanden vanaf de laatste meting) beschouwd als een vooruitgang. Een afname van de DLE van 20% of meer ten opzichte van de vorige meting wordt beschouwd als een achteruitgang. Kwalitatieve veranderingen ten aanzien van

het gebruik van rekenstrategieën worden door middel van observatie van het kind door de eigen leraar, geregistreerd in het MKVS. Dit gebeurt op basis van vier strategieën: uit het hoofd weten (geautomatiseerd), verwissel-eigenschap, verdeel-eigenschap of de associatieve eigenschap.

## **Resultaten**

### **Kwantitatieve resultaten**

Om te beoordelen in hoeverre de eerste hypothese bevestigd kan worden, wordt allereerst visuele analyse toegepast op de verrichte metingen. In de literatuur is onvoldoende bewijs gevonden voor een goede betrouwbaarheid van deze methode (e.g. Brossart, Parker, Olson, & Mahadevan, 2006; Normand, 2006), reden om tevens een statistische analyse toe te passen op grond van Z-scores, berekend met de C-statistiek (Tryon, 1982). De grafieken van de metingen in alle drie de fasen zijn opgenomen in figuur 2. Tabel 1 toont de Z-scores van elke deelnemer.

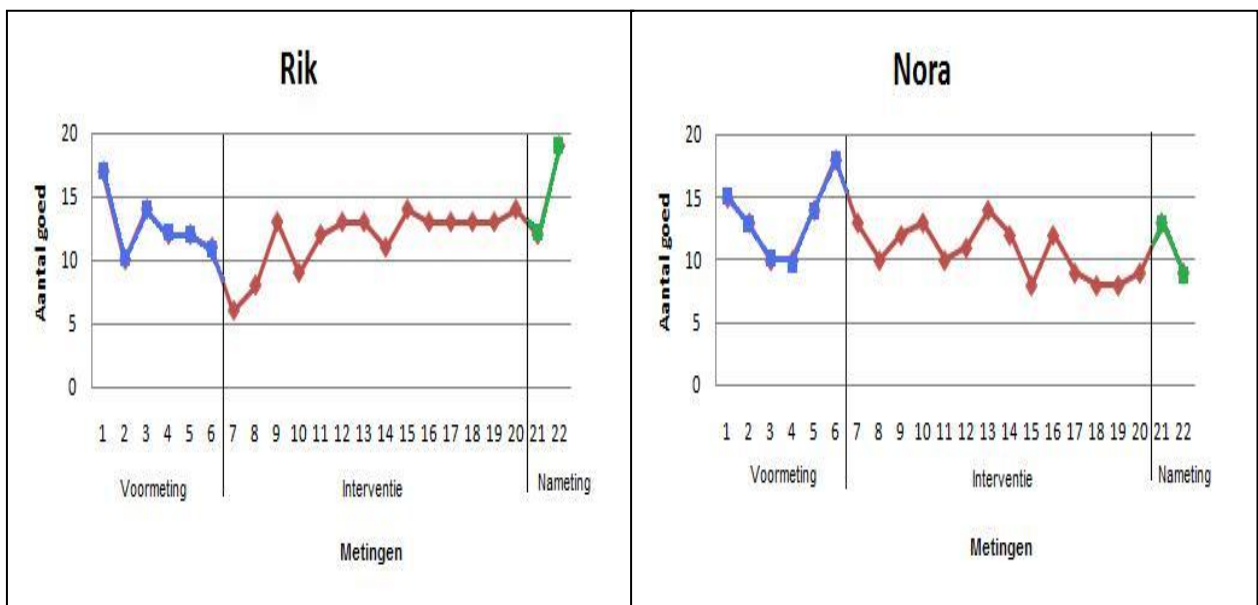
Op de grafiek wordt een trendlijn voor lineaire voorspelling toegepast. Bij Nora, Nena en Nils is een opwaartse lijn in de voormetingsfase waarneembaar. De resultaten van Elmi en Yordi vertonen een gelijkblijvende lijn en bij Rik en Isa is een neerwaartse lijn te zien. De neerwaartse lijn bij Rik en Isa wordt niet bevestigd door de berekende Z-scores. Bij alle zeven deelnemers (Rik, Nora, Isa, Nena, Nils, Elmi en Yordi) zijn zes metingen verricht waarna een niet-significante Z-score meetbaar is. Dit betekent dat bij alle deelnemers de gemeten ontwikkeling stabiel is en geen externe factoren aanwezig zijn die de vaardigheid om vermenigvuldigingen tot 100 op te lossen beïnvloeden. Wanneer in de interventiefase de gemeten ontwikkeling een significante Z-score laat zien, kan deze vooruitgang worden geweten aan het werken met de RVHG.

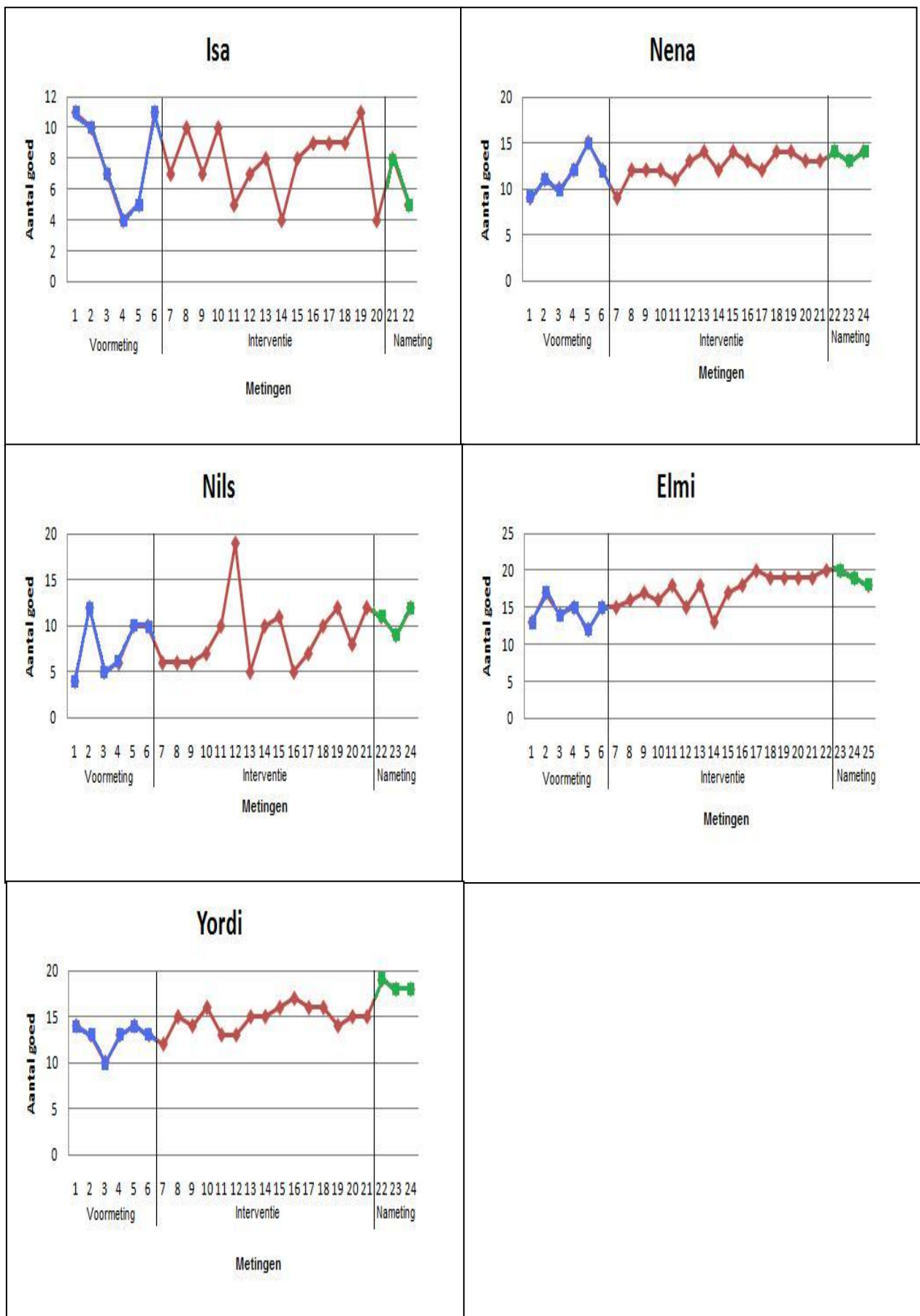
Op grond van de niet-significante Z-scores in de voormetingsfase, is er geen trend van daling of stijging van de resultaten meetbaar, waarop de interventiefase gestart is. De kinderen zijn gaan werken met de RVHG. Alle leraren waarvan de kinderen deelnemen aan het onderzoek, hebben bij aanvang van de interventiefase een trainingsdag gevolgd waarin aandacht is besteed aan het werken met de didactische bijsluiters en de registratie van evaluaties in het MKVS.

In de interventiefase is bij visuele analyse een opwaartse lijn te zien bij Rik, Nena, Nils, Elmi en Yordi. Bij Isa blijft de lijn stabiel. De resultaten van Nora laten een neerwaartse lijn te zien. Bij drie (Rik, Nena en Elmi) van de zeven deelnemers wordt de vooruitgang bevestigd door een significante Z-score. Rik, Nena en Elmi hebben duidelijk geprofiteerd van

het werken met de RVHG. De bij visuele analyse waargenomen positieve trends in de resultaten van Nils en Yordi, kunnen niet worden bevestigd door een significante Z-score. Ook de berekende Z-scores van de resultaten van Isa en Nora zijn niet-significant. Dit betekent dat het werken met de RVHG voor Nora, Isa, Nils en Yordi niet heeft geleid tot het verbeteren of verminderen van de vaardigheid in het oplossen van vermenigvuldigingen tot 100.

In de nametingsfase is bij visuele analyse bij Rik en Nils een stijging te zien in de resultaten. Bij Nora, Isa, Elmi en Yordi is sprake van een neergaande lijn en de resultaten van Nena laten een stabiliserende lijn zien. De berekende Z-scores van de nametingen leveren voor alle kinderen een niet-significante Z-score op. De verbetering die Rik, Nena en Elmi in de interventiefase hebben verworven, blijft ook in de nametingsfase aanwezig. De resultaten van Nora, Isa, Nils en Yordi zijn in de nametingsfase net zo stabiel als in de voormetings- en interventiefase. Voor hen is noch een verbetering, noch een vermindering van hun vaardigheid om vermenigvuldigingen tot 100 op te lossen, tot stand gekomen.





Figuur 2. Aantal goed score van de toetsen vermenigvuldigen tot 100.

Tabel 1

*Z-scores in de voormetings-, interventie- en nametingsfase voor elke deelnemer*

Deelnemers	Groep	Voormetingsfase	Interventiefase	Nametingsfase
Rik	5	-0.346	2.183*	0.189
Nora	6	1.552	1.111	-0.325
Isa	5	1.233	-0.544	-0.639
Nena	5	1.101	1.731*	-0.913
Nils	5	-0.681	-0.131	-0.137
Elmi	5	-1.286	1.669*	1.313
Yordi	5	0.091	1.399	1.111

\*significantieniveau van 5%.

Voorafgaand aan de voormetingsfase hebben alle deelnemers in november 2009 en januari 2010 de TTR gemaakt. Voor het beoordelen van de resultaten is gebruikgemaakt van het onderdeel vermenigvuldigen van de TTR. Dit is de derde kolom van de vijf kolommen die de test heeft. Tabel 2 laat hiervan de resultaten zien. Met uitzondering van Nils, die een achteruitgang laat zien, laten alle kinderen een stabiele DLE-score zien. In november scoren vier van de zeven deelnemers (Nora, Isa, Nena en Yordi) onder de signaalgrens van 20% die door de TTR wordt aangegeven als advies voor een nadere diagnose (De Vos, 1992). De uitvoering hiervan ligt buiten de bedoeling van dit onderzoek. Voor zover bekend heeft ook geen nadere diagnose plaatsgevonden en hebben de kinderen geen extra begeleiding/oefening hiervoor gekregen buiten dit onderzoek om. Besloten is om deze signaleringen wel zichtbaar te maken in tabel 2, aangezien deze signalering zowel in de meting van november 2009 als die van januari 2010 aanwezig bleek te zijn en ik benieuwd was of dit ook in de meting van mei 2010 bleef bestaan.

In mei 2010 is de TTR afgenomen. Deze viel nagenoeg samen met de overgang van de interventiefase naar de nametingsfase. Vier van de zeven deelnemers (Rik, Nena, Elmi en Yordi) laten hierbij een vooruitgang zien van meer dan 20% ten opzichte van de meting in januari 2010. Hierbij is rekening gehouden met een verloop van vier maanden tussen deze twee metingen. De gegeven DLE's van deze vier deelnemers zijn op niveau, gezien de DL.



Tabel 2

*DLE-scores behaald op het onderdeel vermenigvuldigen van de TTR voor elke deelnemer*

Deelnemers	november 2009		januari 2010		mei 2010	
	DL	DLE	DL	DLE	DL	DLE
Rik	23	26	25	24	29	35*
Nora	33	24 <sup>#</sup>	35	24 <sup>#</sup>	39	21 <sup>#</sup>
Isa	23	12 <sup>#</sup>	25	12 <sup>#</sup>	29	18 <sup>#</sup>
Nena	23	14 <sup>#</sup>	25	14 <sup>#</sup>	29	24*
Nils	23	21	25	14 <sup>#o</sup>	29	18 <sup>#</sup>
Elmi	23	26	25	26	29	50*
Yordi	23	18 <sup>#</sup>	25	18 <sup>#</sup>	29	26*

\* toename >20% t.o.v. de voorgaande meting. <sup>o</sup> afname >20% t.o.v. de voorgaande meting.

<sup>#</sup> onder signaalgrens van 20%.

De DLE-score van Elmi in mei 2010 valt hierbij bijzonder op, gezien de nagenoeg verdubbeling van de DLE-score. Met de vooruitgang die Nena en Yordi laten zien, is tevens de signalering voor een nadere diagnose verdwenen. Bij de andere drie deelnemers (Nora, Isa en Nils) zijn de DLE-scores lager dan de gehanteerde marge van 20% ten opzichte van de DL (didactische leeftijd) (De Vos, 1992).

### **Kwalitatieve resultaten**

Om te beoordelen of de tweede hypothese bevestigd kan worden, is gebruik gemaakt van de observatiegegevens zoals die in het MKVS door de leraren zijn bijgehouden (zie tabel 3 en 4). In de voormetingsfase zijn niet bij alle deelnemers de tafels geautomatiseerd. Rik heeft de tafels 1 tot en met 6 geautomatiseerd. Nena heeft de tafels 1 tot en met 7 geautomatiseerd, Nils de tafels 1, 2, 3, 5 en 10. Elmi heeft de tafels 1 tot en met 10 geautomatiseerd. Door de tijd heen worden door Nora, Isa en Yordi de tafels gekend en niet gekend. De verwisselingschap wordt door Rik, Nils, Elmi en Yordi met ondersteuning van materiaal gebruikt. Het vermenigvuldigbord en het keerbordje zijn voorbeelden van materialen die ondersteuning kunnen bieden bij het oefenen van de verwisselingschap. Nora kan deze strategie zonder ondersteuning van materiaal gebruiken. De associatieve eigenschap wordt in alle onderzoeksfases door geen van de deelnemers gebruikt.

Tabel 3

*Gebruikte rekenstrategieën bij het vermenigvuldigen tijdens de voormetingsfase*

Strategie	Voormetingsfase						
	Rik	Nora	Isa	Nena	Nils	Elmi	Yordi
Geautomatiseerde tafels	1 t/m 6	wisselend	wisselend	1 t/m 7	2, 3, 5 en 10	1 t/m 10	1 t/m 10
Verwisseleigenschap met materiaal	X	-	-	-	X	-	-
Verwisseleigenschap	-	X	-	-	-	-	-
Verdeeleigenschap met materiaal	-	-	-	-	-	-	-
Verdeeleigenschap	-	-	-	-	-	-	-

X = de strategie wordt toegepast.

Tabel 4

*Gebruikte rekenstrategieën bij het vermenigvuldigen na de interventiefase*

Strategie	Interventiefase						
	Rik	Nora	Isa	Nena	Nils	Elmi	Yordi
Geautomatiseerde tafels	1 t/m 6	wisselend	wisselend	1 t/m 10	2, 3, 5 en 10	1 t/m 10	wisselend
Verwisseleigenschap met materiaal	-	-	-	X	-	X	X
Verwisseleigenschap	X	X	-	-	-	-	-
Verdeeleigenschap met materiaal	-	-	-	X	-	-	-
Verdeeleigenschap	-	X	-	-	-	X	X

X = de strategie wordt toegepast.

In de interventiefase (zie tabel 4) laat Nena een toename zien van de geautomatiseerde tafels; ook de tafels 8, 9 en 10 heeft zij nu geautomatiseerd. Bij Nora en Isa zijn de tafels nog niet geautomatiseerd. Vijf van de zeven deelnemers (Rik, Nora, Nena, Elmi en Yordi) laten een uitbreiding zien van hun gebruik van strategieën bij het vermenigvuldigen. Nena gebruikt zowel de verwisselbaarheid als de verdeelbaarheid met materiaalondersteuning (e.g. met de kralendecanoom), Rik gebruikt de verwisselbaarheid zonder materiaalondersteuning. Nora, Elmi en Yordi kunnen nu de verdeelbaarheid toepassen zonder materiaalondersteuning. Zo rekt Elmi bijvoorbeeld de som  $8 \times 39$  uit door eerst  $8 \times 30$  en  $8 \times 9$  uit te rekenen, en vervolgens de uitkomsten 240 en 72 bij elkaar op te tellen.

## **Conclusies en discussie**

Uit de eigen Montessorigeschiedenis (zie inleiding) en de ontwikkeling van het realistisch rekenonderwijs is gebleken dat niet voor ieder kind het onderwijs dezelfde resultaten oplevert (E. C. J. Westra-Mattijssen, persoonlijke mededeling, 12 juni, 2010; Van den Heuvel-Panhuizen, 2009). Binnen het vernieuwd Montessorireken-wiskundeonderwijs worden het kind, de leraar en de omgeving beschouwd als de kernen van een dynamisch model waarin kind, leraar en omgeving met elkaar in interactie zijn. De kunst van de juiste afstemming op het kind door de leraar ligt in het ‘pendelen’ tussen deze kernen (Klabbers, 2010). De leraar moet beschikken over de juiste pedagogisch-didactische kennis voor het geven van wiskundeonderwijs en over voldoende vakinhoudelijke wiskundekennis beschikken om aan te kunnen sluiten bij de ‘mathetiek’ van het kind. In dit onderzoek was het handelen van de leraar geen onderwerp van onderzoek. De rol van de leraar is echter niet gering. Tijdens de training van de leraren bleek dat naast het kunnen evalueren met kinderen ook kennis van de mogelijkheden van het MKVS van belang is om de juiste informatie te kunnen vastleggen. In de periode na de training is ook gebleken dat een enthousiast team van leraren, zich deze vaardigheden snel eigen kan maken wanneer zij gebruik kunnen maken van supervisie en intervisie. Aan de intentie van de Projectgroep Montessori Wiskunde Basisonderwijs om de werkwijze van de RVHG in te voeren met een begeleidingstraject met de nodige supervisie, is in dit onderzoek voorbijgegaan. Verwacht wordt dat met een dergelijke aanpak de resultaten van de kinderen sterker zullen toenemen. Of de kennis van de leraren toereikend is om de vier uitgangspunten voor het vernieuwd reken-wiskundeonderwijs tot hun recht te laten komen, kan verduidelijkt worden met een inventarisatie van de kennisbehoefte van de leraren. Hebben zij bijvoorbeeld behoefte aan inhoudelijke wiskundekennis of willen ze meer weten over de pedagogisch-didactische kennis over het wiskundeonderwijs? Tevens kunnen in een

begeleidingstraject de consequenties voor een juiste afstemming van begeleiding aan kinderen beter overwogen worden. Hiervoor is een heldere conceptvorming binnen de school nodig ten aanzien van de RVHG, het MKVS en het kindwerkdossier, waarin de ‘mathetiek’ van het kind centraal staat. Het begrip ‘mathetiek’ zal hiervoor door de ‘Projectgroep Montessori Wiskunde Basisonderwijs’ verder uitgewerkt gaan worden.

De onderzoeksvraag is of kinderen in het laatste jaar van een middenbouwgroep (groep 5) of in het eerste jaar van een bovenbouwgroep (groep 6) van het Montessoribasisonderwijs, beter gaan presteren op het gebied van vermenigvuldigen met hele getallen wanneer zij en hun leraren gebruikmaken van de RVHG. De metingen zijn beoordeeld op zowel kwantitatieve als kwalitatieve verbetering. Drie (Rik, Nena en Elmi) van de zeven deelnemers presteren kwantitatief beter op een daartoe ontwikkelde toets, zij maken meer vermenigvuldigingen tot 100 goed. Vier (Nena, Elmi, Nora en Yordi) van de zeven deelnemers presteren kwalitatief beter. Zij gebruiken meer en gevarieerder vermenigvuldigstrategieën, al of niet met ondersteuning van materiaal. Rik laat een verbetering in zijn strategie met de verwisselingschap zien door deze in te kunnen zetten zonder materiaalondersteuning. De resultaten van Isa en Nils laten op zowel kwantitatief als kwalitatief niveau geen verbetering zien. Uiteindelijk lijkt één (Isa) van de zeven deelnemers achter te blijven op het automatiseren en het gebruik van vermenigvuldigstrategieën. Bij nadere analyse van de grafiek in figuur 2, valt op dat de behaalde resultaten vooral bij Rik, Nora, Isa en Nils erg wisselend zijn. Bij Nena en Elmi lijkt er een meer stabiele situatie te ontstaan na de 19<sup>e</sup>, respectievelijk de 17<sup>e</sup> meting. De wisselende resultaten kunnen een gevolg zijn van de mogelijkheden van het kind om tot automatiseren te komen. Van Nora, Isa en Yordi is door hun leraar in het MKVS geregistreerd dat het automatiseren van de tafels moeizaam verloopt. Daarnaast laten de resultaten van Isa en Yordi geen kwalitatieve verbetering zien. Mogelijk dat zij door het moeizame automatiseren moeite hebben met het toepassen van een aangeboden strategie in nieuwe situaties. Hiervoor dient het kind niet alleen over begrip en inzicht te beschikken, maar ook over een snelle beschikbaarheid van voorkennis (Ruijsenaars, Van Vliet, & Willemse, 2002).

In antwoord op de algemene onderzoeksvraag kan geconcludeerd worden dat kinderen die geen moeite lijken te hebben om tot automatiseren te komen, beter gaan presteren op vermenigvuldigingen tot 100 wanneer zij en hun leraren met de RVHG werken. Verder onderzoek zal moeten uitwijzen of de deels succesvolle resultaten uit dit onderzoek zich herhalen bij andere kinderen. Gezien de resultaten van drie (Nora, Isa en Yordi) van de zeven deelnemers, rijst wel de vraag of het werken met de RVHG voldoet aan de behoefte van deze

leerlingen om rekenvaardigheden te verwerven op het gebied van automatiseren en aanleren en toepassen van vermenigvuldigstrategieën en -procedures. De verschillen in het al of niet kunnen profiteren van het werken met de RVHG geven in ieder geval aan dat het ene kind wel en het andere onvoldoende profiteert van dit specifieke aanbod waarop passende instructie of aanbod afgestemd moet worden op de ‘mathetiek’ van het kind.

Het in ontwikkeling zijnde kindwerkdossier zal een belangrijke aanvulling vormen op het MKVS en daarmee het handelen van de leraar. Het kindwerkdossier is een digitaal werkdossier van het kind. Eén van de initiatieven hiervoor is de ontwikkeling van een digitaal programma waarmee de stappen van het kind tijdens het werken met Montessorirekenmaterialen worden vastgelegd. De leraar kan dan op een later moment de stappen ‘terugspoelen’ en bekijken/analyseren. Deze ontwikkeling kan de leraar ondersteunen in het creëren van een betere afstemming op de leerwijzen/’mathetiek’ van het kind. De mogelijkheden van een dergelijk digitaal programma is goed bruikbaar wanneer herhaling van dit onderzoek wordt uitgevoerd.

Tot slot zouden het verticale en horizontale mathematiseren een meer expliciete uitwerking kunnen krijgen op de didactische bijsluiters van de RVHG. Hiermee wordt meer recht gedaan aan de wiskundige inhoud van de RVHG (Gravemeijer, 2005; Van den Heuvel-Panhuizen, 2009), en het biedt leraren meer zicht op de ontwikkeling van het mathematiseren (van concreet naar abstract).

## **Literatuur**

- Blumberg, C. J. (1984). Comments on “A simplified time-series analysis for evaluating treatment interventions”. *Journal of Applied Behavior Analysis*, 17, 539-542.
- Brossart, D. F., Parker, R. I., Olson, E. A., & Mahadevan, L. (2006). The relationship between visual analysis and five statistical analysis in a simple AB single-case research design. *Behavior Modification*, 30(5), 531-563.
- Buijs, K. (2005). Wiskunde leren. Een kwestie van steeds gezonder verstand. *Panama-Post*, 26(3), 98-105.
- Comenius, J. A. (1996). Mathetica, d.h. Lernkunst. In R. Golz, W. Korthaase, & E. Schäfer (Eds.). *Comenius und unsere Zeit* (pp. 120-148). Hohengehren: Schneider Verlag.
- De Vos, T. (1992). *Tempo-Test-Rekenen*. Nijmegen: Berkthout.
- Diephuis, K. H. (2004). *Doorbreken met kwaliteit. Programma kwaliteit in de jeugdzorg II*. Utrecht: GGZ Nederland, Maatschappelijk Ondernemers Groep.

- Ding, M., Li, X., Piccolo, D., & Kulm, G. (2007). Teacher interventions in cooperative-learning mathematics classes. *The Journal of Educational Research*, 100, 162-175.
- Duffy, M. (2008). *Math works. Montessori math and the developing brain*. Hollidaysburg, PA: Parent Child Press.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education, China lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Joha, D., Van Luit, H., & Vermeer, A. (1999). *Samen op PAD. Evaluatie van het Programma Alternatieve Denkstrategieën in het Nederlandse onderwijs aan dove kinderen*. Doetinchem: Graviant Educatieve Uitgaven.
- Kelpin, F. (2006). Realistisch Montessori rekenen. Retrieved September, 12, 2009, from <http://www.kelpin.nl/fred/artikelen/rekenen.pdf>
- Klabbers, V. (2009a). Een krachtige leeromgeving 1. *Praxisbulletin*, 26(6), 19-23.
- Klabbers, V. (2009b). Een krachtige leeromgeving 2. *Praxisbulletin*, 26(7), 10-15.
- Klabbers, V. (2010, januari). Pendelen in je hoofd. In M. van Zanten (Voorzitter), *Waardevol reken-wiskundeonderwijs - kenmerken van kwaliteit*. Symposium gehouden door Panama, Noordwijk.
- Klep, J. H. F. M. (1998). *Arithmeticus. Simulatie van wiskundige bekwaamheid* (pp. 29-130). Tilburg: Zwijsen.
- Klep, J. (2007). *Het landschap vermenigvuldigen*. Den Haag: Montessori Vereniging Nederland.
- Klep, J., & Westra-Mattijssen, E. (2009). *Vermenigvuldigen hele getallen*. Kortenhoef: Projectgroep Montessori Wiskunde Basisonderwijs.
- Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen (KNAW) (2009). *Rekenonderwijs op de basisschool. Analyse en sleutels tot verbetering*. Retrieved November, 5, 2009, from <http://www.taalenrekenen.nl/actueel/nieuws/00010/>
- Kroesbergen, E. H., & Van Luit, J. E. H. (2002). Veranderingen in strategiegebruik bij het leren vermenigvuldigen: Effecten van een interventiestudie bij kinderen met rekenproblemen. *Pedagogische Studiën*, 79, 130-143.
- Leenders, H. (1999). *Montessori en fascistisch Italië. Een receptiegeschiedenis*. Baarn: Intro.
- Ma, L. (2009). *Knowing and teaching elementary mathematics* (pp. 144-153). New York: Routledge Taylor & Francis.
- Milo, B. F., & Ruijsenaars, A. J. J. M. (2003). Instructie en leerlingkenmerken. (On)mogelijkheden van realistische instructie in het sbo. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 22(1), 27-33.

- Montessori, M. (1950). *De methode. De ontdekking van het kind*. Antwerpen: De Sikkel.
- Nipper, K., & Sztajn, P. (2008). Expanding the instructional triangle: Conceptualizing mathematics teacher development. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *11*, 333-341.
- Normand, M. P., & Bailey, J. S. (2006). The effects of celebration lines on visual data analysis. *Behavior Modification*, *30*, 295-314.
- Ruijsenaars, W., Van Vliet, P., & Willemse, A. (2002). Het leren van rekenfeiten: baart oefening kunst? In A. J. J. M. Ruijsenaars, & P. Ghesquière (Red.). *Dyslexie en dyscalculie: ernstige problemen in het leren lezen en rekenen. Recente ontwikkelingen in onderkenning en aanpak*. Leuven: Acco.
- Schwegman, M. (1999). *Maria Montessori 1870-1952. Kind van haar tijd vrouw van de wereld*. Amsterdam: University Press.
- Scoppola, B., (2010, januari). Montessori mathematics, a neuroscientific perspective: Psico arithmetica and psico geometria. In D. Kahn (Chair), *The essential Montessori mathematics: whole school implementation*. Symposium gehouden door The North American Montessori Teachers' Association, Dallas, Texas.
- Slavin, R. E., & Lake, C. (2008). Effective programs in elementary mathematics: A best-evidence synthesis. *Review of Educational Research*, *78*, 427-515.
- Steele, M. D. (2005). Comparing knowledge bases and reasoning structures in discussions of mathematics and pedagogy. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *8*, 291-328.
- Stefels, M., Westra-Mattijssen, E., & Rubinstein, M. (2007). Vernieuwd Montessori reken-wiskundeonderwijs. In M. Stefels & M. Rubinstein (Eds.), *Montessori scholen in beweging. Vernieuwingen op Montessori basisscholen* (pp. 51-60). Antwerpen – Apeldoorn: Garant.
- Treffers, A. (1978). *Wiskobas doelgericht*. Utrecht: IOWO.
- Tryon, W. W. (1982). A simplified time-series analysis for evaluating treatment interventions. *Journal of Applied Behavior Analysis*, *15*, 423-429.
- Tryon, W. W. (1984). "A simplified time-series analysis for evaluating treatment interventions": A rejoinder to Blumberg. *Journal of Applied Behavior Analysis*, *17*, 543-544.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. H. A. M. (2009). *Hoe rekent Nederland?* Utrecht: Universiteit Utrecht, (oratie).

- Van Luit, J. E. H. (1994). Dealing with learning difficulties concerning addition and subtraction; due to or despite the Little Person? In J. E. H. Van Luit (Ed.), *Research on learning and instruction of mathematics in kindergarten and primary school* (pp. 328-343). Doetinchem/Rapallo: Graviant.
- Van Yperen, T. A., & Veerman, J. W. (2008). *Zicht op effectiviteit. Handboek voor praktijkgestuurd effectonderzoek in de jeugdzorg* (pp. 209-244). Delft: Eburon.
- Van Zanten, M., Barth, F., Faarts, J., Van Gool, A., & Keijzer, R. (2009). *Voetstuk van de Pabo. Kennisbasis rekenen-wiskunde voor de Pabo*. Retrieved September, 14, 2009, from [http://www.kennisbasispabo.nl/attachments/0000/0085/20090703\\_kennisbasis\\_rekenen-wiskunde\\_eindversie\\_def.pdf](http://www.kennisbasispabo.nl/attachments/0000/0085/20090703_kennisbasis_rekenen-wiskunde_eindversie_def.pdf)
- Waski, M. (2010, januari). Mathematics: A cultural approach for the adolescent. In D. Kahn (Chair), *The essential Montessori mathematics: Whole school implementation*. Symposium gehouden door The North American Montessori Teachers' Association, Dallas, Texas.
- Wittmann, E. Ch. (2005). Realistic mathematics education, past and present. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 5/6(4), 294-296.
- Young, L. C. (1941). On randomness in ordered sequences. *The Annals of Mathematical Statistics*, 12, 293-300.



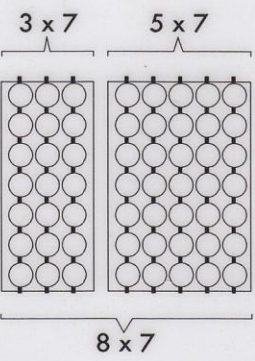
## **Abstract**

In this study the effectiveness of the mathematics program 'Multiplications with whole numbers' was examined. 'Multiplications with whole numbers' is designed for all children in grade 3 and 4 of the Montessori elementary school. The program is rooted in the Montessori theory and emphasizes the use of the Montessori hands-on materials, self-paced and self-initiated learning and the developmental approach to the mathematical mind. Seven times a N=1 design was used. At the end of an intervention period of 9 weeks three of the seven subjects performed better on tests with multiplication problems to 100 and four of the seven subjects used more and a higher variety of strategies in solving multiplication problems to 100.

**Keywords:** mathematics, multiplication, strategy, Montessori education.



## Appendix A, Illustratie van een werkkaart voor het kind van de RVHG.

vermenigvuldigen	
eigenschappen	Verdeeleigenschap
<p>Onderwerp</p> <p>De verdeeleigenschap</p>	<p>Benodigd materiaal</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Kralendecanoom</li> <li>- Potlood en papier</li> </ul>
<p>Werkgebied</p> <p>Je ontdekt dat je bij een vermenigvuldiging de vermenigvuldiger kunt splitsen in twee kleinere vermenigvuldigers.</p>	
<p>Aan het werk  of </p>	
<p>☞ Weet je dat:</p> <p><math>8 \times 7 = 56?</math></p> <p>en</p> <p><math>3 \times 7</math> en <math>5 \times 7</math> samen <math>8 \times 7</math> is?</p>	<p>met staafjes van de decanoom:</p> 
<p>☞ in rekentaal:</p> <p><math>3 \times 7 + 5 \times 7 = 8 \times 7</math></p>	
<p>☞ Leg dit zelf neer met de staafjes uit de kralendecanoom.</p>	
<p>☞ Bedenk zelf andere voorbeelden.</p>	
<p>☞ Hoe splits je die?</p>	
<p>☞ Laat dit zien en noteer het.</p>	
<p>☞ Hoe zou je splitsen:</p>	
<p><math>5 \times 14 =</math>      <math>6 \times 15 =</math>      <math>12 \times 4 =</math>      <math>18 \times 3 =</math></p>	
<p><b>Dit moet je weten/onthouden/vastleggen</b></p> <p>Je kunt bij een vermenigvuldiging de vermenigvuldiger verdelen in kleinere vermenigvuldigers, zonder dat het product verandert.</p> <p>Je kunt de splitsing opschrijven.</p>	

versie: augustus 2009

## Appendix B, Illustratie van een didactische bijsluiters voor de leraar van de RVHG.

vermenigvuldigen

1 van 2 - didactische bijsluiters

**eigenschappen**

**Verdeeleeigenschap**

<b>Onderwerp</b> Verdeeleeigenschap of distributieve eigenschap.	<b>Benodigd materiaal</b> - Kralendecanoom - Potlood en papier	<b>Setting</b> Alleen of tweetal. <div style="display: flex; align-items: center; margin-top: 5px;"> </div>
---	--	--

**Wiskundige essentie**  
 Distributieve eigenschap:  $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ , voor alle a, b en c.

**Gewenst leerproces**

- ☞ Het kind ontdekt door het werken met materiaal dat je bij een vermenigvuldiging de vermenigvuldiger kunt splitsen in kleinere vermenigvuldigers, zonder dat het product verandert.
- ☞ Het kind leert de distributieve eigenschap op te schrijven.
- ☞ Het kind leert zien wanneer de distributieve eigenschap handig is om te gebruiken.

**Lusmoment:**  
 Verwerving van de regel van de distributieve eigenschap bij vermenigvuldigen.

**Verwachte leeropbrengst**

- ☞ Het kind verwoordt de distributieve eigenschap en kan deze noteren.
- ☞ Het kind past de distributieve eigenschap toe bij de voor hem moeilijkere vermenigvuldigingen.

**Wat een kind vooraf moet kunnen/niet moet kunnen**

- ☞ Het kind heeft een begin gemaakt met het automatiseren van de tafels van vermenigvuldiging.
- ☞ Het begrip van conservatie is ontwikkeld (het kind doorziet dat als een vorm verandert, de hoeveelheid hetzelfde blijft: 20 kralen is evenveel als 20 andere voorwerpen).

**Wat het kind moet weten/onthouden/vastleggen**

- ☞ Het kind kan bij een vermenigvuldiging de vermenigvuldiger verdelen in kleinere vermenigvuldigers.
- ☞ Het kind kan de splitsing als formule opschrijven.

Signalering/ gerichte observatiemomenten	Interventies	Zorgpunten
Het kind past de strategie van de distributieve eigenschap goed toe.	<b>Verdiepen/verbreden/ versnellen</b> Laat het kind de eigenschap gebruiken bij tekorten: $(8 \times 5 = 10 \times 5 - 2 \times 5)$ .	
	Laat het kind de eigenschap toepassen bij grotere vermenigvuldigingen $(758 \times 7 = 700 \times 7 + 50 \times 7 + 8 \times 7)$	
	Laat het kind de bewerking verwoorden zonder gebruik van materiaal.	
Het kind doorziet niet hoe het de vermenigvuldiger kan splitsen.	<b>Verkleinen/versmallen/ vertragen</b> Bied het strokenmodel aan.	

versie: augustus 2009



# vermenigvuldigen

2 van 2 - didaactische bijsluiter

eigenschappen

Verdeeleigenschap

Signalering/ gerichte observatiemomenten	Interventies	Zorgpunten
Het kind doorziet het conservatie principe niet.	<b>Verkleinen/versmallen/ vertragen</b> Bied activiteiten aan waarbij de hoeveelheid hetzelfde is, maar de vorm anders.	Vraag naar verder specialistisch onderzoek. Het conservatiebegrip en het voorstellingsvermogen zijn essentieel in het rekenproces.
Het kind kan zelf geen voorbeelden bedenken.	Ga na of het kind mogelijk nog teveel tellend rekent.	Verder onderzoek gewenst naar de reden van het tellend rekenen.

## Evaluatie

### Vaardigheid:

aantonen van beheersing: het kind verwoordt hoe je bij een vermenigvuldiging de vermenigvuldiger kunt splitsen in kleinere vermenigvuldigers.

Integratie/toepassing: het kind kan een situatie bedenken waarbij de distributieve eigenschap van belang is.

## Registratie

### Signalering:

Het kind past de distributieve eigenschap bij vermenigvuldigen goed toe en kan deze verwoorden.  
Het kind maakt gebruik van de distributieve eigenschap in dagelijkse situaties.

### Registratie:

#### Getalbegrip

##### Begrip van grootheden

Het kind heeft constantie c.q. conservatiebegrip kan directe waarneming overwinnen.

### Registratie:

#### Getalinzicht /bewerkingsinzicht

##### Hele getallen

##### Bewerkingsinzicht vermenigvuldigen

Het kind kan de handeling verwoorden in wiskundetaal.

### Registratie:

#### Getalinzicht /bewerkingsinzicht

##### Verbanden

Het kind kan wiskundige essenties herkennen

Het kind kan wiskundige essenties verwoorden

Het kind kan wiskundige essenties toepassen

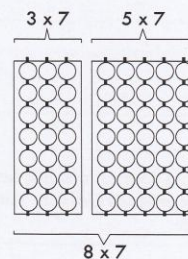
### Registratie:

#### Vaardigheden

##### Hoofdrekenen

Het kind gebruikt bij hoofdrekenen: eigenschappen van bewerkingen onderlinge relaties der getallen

met staafjes van de decanoom:



versie: augustus 2009