Universiteit Utrecht

Faculteit Bètawetenschappen

De oorsprong van Brahmagupta's formule

Bachelorscriptie

Rebecca Kuijpers

Wiskunde

Begeleider:

Dr.Steven Wepster Begeleider

Universiteit Utrecht

17 juni 2021

Inhoudsopgave

1 Voorwoord **2**

2 Inleiding **3**

3 Brahmagupta en zijn drie- en vierhoeken **4**

4 Bewijzen **6**
- 4.1 Origineel bewijs 6
- 4.2 Al-Shanni 9
- 4.3 Abraham de Graaf 13
- 4.4 Euler 15

5 Tegenstanders Originaliteit **18**

6 Voorstanders Originaliteit **21**
- 6.1 Datta en Singh 21
- 6.2 Sarasvati 22
- 6.3 Colebrooke 23
- 6.4 Standpunten tot nu toe 24

7 David Pingree **26**

8 Conclusie **29**

9 Nawoord **30**

1 Voorwoord

Aan het begin van het scriptieproces was ik er vrij snel uit dat mijn scriptie zou draaien om Brahmagupta, een Indiase wiskundige uit de zevende eeuw na Christus. In een poging mij verder te oriënteren, kwam ik uit bij de volgende voetnoot in [16]:

> G.R. Kaye (The source of Hindu Mathematics, J.R.A.S. 1910, p. 753) zegt: "Brahmagupta geeft de oppervlakte van de koordenvierhoek als
>
> $$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$
>
> wat een uitbreiding is van de welbekende stelling van Hero voor driehoeken". Daarmee wekt hij de suggestie dat de Indiërs de formule van de Grieken hebben verworven. Echter, het is waarschijnlijker dat de Indiërs de stelling voor de koordenvierhoek eerst ontdekt hebben en hebben uitgebreid om de driehoek te omvatten. Daarna hebben ze, als een bewijs, wanneer toegepast op de driehoek, laten zien dat de gebruikelijke uitdrukking $\frac{1}{2}$ lengte $\times$ hoogte gelijk is aan deze stelling van Hero. Vandaar dat het voorkomen van de uitdrukking voor de oppervlakte van een driehoek bij Hero nauwelijks gebruikt kan worden als argument dat India hem iets verschuldigd is.[16, p. 118][1]

De voetnoot viel me in eerste instantie op omdat ik hem niet logisch vond klinken. Ik vroeg mij af waarom een wiskundige eerst bij het moeilijke geval, de koordenvierhoek, een formule voor de oppervlakte zou vinden en die vervolgens zou versimpelen tot het makkelijke, eenvoudig falsifieerbare geval, in plaats van te beginnen bij het makkelijke geval en dat uit te breiden naar het moeilijke geval zoals mij als wiskundestudent geleerd is. Toen ik dit in een scriptiegesprek met mijn begeleider opbracht, merkte hij op dat er bij Indiase wiskunde vaker een verschil van inzicht schijnt te zijn over wie de wiskunde origineel bedacht heeft. Waar de een vol lof was over de vernuftigheid van de Indiase wiskundigen, dacht de ander dat de resultaten overgenomen waren van andere, in het bijzonder Griekse, wiskundigen.

In de voetnoot krijgen we een inkijkje in het debat dat voortkomt uit dat verschil van inzicht over de originaliteit van Indiase wiskunde, dat in deze scriptie verder onderzocht is met betrekking tot de formule van Brahmagupta.

Deze scriptie had nooit bestaan zonder mijn begeleider, Steven Wepster, wie ik dan ook in het bijzonder dank verschuldigd ben voor alle constructieve feedback, prikkelende gesprekken en de al met al uitmuntende begeleiding in een bijzondere tijd.

Ik hoop dat u als lezer net zo kan genieten van het lezen van deze scriptie als ik heb genoten van het schrijven ervan.

[1] De originele footnote, zoals geschreven in [16] luidt als volgt: 'G.R. Kaye (The source of Hindu Mathematics, J.R.A.S. 1910 p.753) says "Brahmagupta gives the area of the cyclic quadrilateral as

$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

which is an extension of the well-known theorem of Heron for triangles", suggesting thereby that the Indians got the formula from the Greeks. But it is more probable that the Indians discovered the theorem for the cyclic quadrilateral first and extended it to cover the tringle and then as a proof for it, when applied to the triangle, showed how the usual expression $\frac{1}{2}$ base x altitude could be equated to this. Hence the occurrence of the expression for the area of a triangle in Heron can hardly be advanced as an argument for India's indebtedness to him'.

2 Inleiding

In de zevende eeuw na Christus leefde de wiskundige Brahmagupta in India. Hij is onder andere bekend geworden om wat nu de formule van Brahmagupta genoemd wordt, een formule waarmee we de oppervlakte van koordenvierhoeken kunnen berekenen aan de hand van de lengte van de zijden van deze koordenvierhoek. Een soortgelijke formule bestaat ook voor driehoeken. Deze is al bekend sinds de eerste eeuw na Christus en staat bekend als de formule van Hero, naar Hero van Alexandrië. De formule van Brahmagupta lijkt dan ook een uitbreiding van de formule van Hero. Dit roept de vraag op of Brahmagupta kennis had van deze formule van Hero toen hij zijn eigen formule opschreef. Met andere woorden: is Brahmagupta de originele bedenker van de formule die naar hem genoemd is? Rondom deze vraag is een debat ontstaan dat het originaliteitsdebat wordt genoemd.

We zullen dit debat in deze scriptie ontdekken. We onderscheiden voorstanders, zij die denken dat Brahmagupta zijn formule geheel zelf bedacht heeft, en tegenstanders, zij die denken dat Brahmagupta zijn formule niet zelf bedacht heeft. Dit debat heeft een extra dimensie gekregen toen wiskundehistoricus David Pingree zijn gedachtengoed publiceerde. Hij pleitte voor een geheel andere kijk op het originaliteitsdebat en we zullen deze kijk in de scriptie dan ook behandelen.

Eerst zullen we kijken naar Brahmagupta's leven en zijn werk. We zullen ons daarna focussen op zijn oppervlakteformule, waar we een aantal bewijzen van door de geschiedenis heen van geven. Bij deze bewijzen bekijken we ook wat de bewijzen typeert en waarom zij kenmerkend zijn voor de wiskunde van de periode waarin ze geschreven zijn. Wanneer we Brahmagupta en zijn formule hebben leren kennen, zullen we het originaliteitsdebat rondom de formule behandelen. We zullen eerst kijken naar het gedachtengoed van de tegenstanders, vervolgens naar dat van de voorstanders en ten slotte dat van David Pingree. Tijdens deze besprekingen zullen we ook behandelen hoe de voor- en tegenstanders en David Pingree met elkaar in verband stonden. Ten slotte volgt dan de conclusie en een nawoord over de scriptie.

3 Brahmagupta en zijn drie- en vierhoeken

Brahmagupta was een Indiase wiskundige, geboren in 598 na Christus. Zijn bekendste werk is de Brahmasputasiddhanta, afgerond in 628 na Christus[12, p. 319]. Het boek heeft 25 hoofdstukken, waarvan er vier gewijd zijn aan wiskunde. Onder andere komen vlakke figuren en het getal nul aan de orde. Ook behandelt Brahmagupta oplossingen van wat wij nu de vergelijking van Pell zouden noemen. Zo benoemt Brahmagupta het type vergelijkingen uiteraard niet, aangezien Pell ongeveer 1000 jaar na Brahmagupta pas ter wereld zou komen. Aangezien deze scriptie over de oppervlakte van koordenvierhoeken gaat, zullen wij ons beperken tot de vlakke figuren.

Brahmagupta heeft geen bewijzen opgeschreven[7, p. 121-122]. In het originaliteitsdebat dat we later in deze scriptie zullen bespreken zal dit een belangrijk feit blijken te zijn in de argumenten van zowel voor- als tegenstanders. Een andere belangrijke opmerking is dat Brahmagupta nergens vermeldt dat zijn formule niet werkt voor vierhoeken in het algemeen, maar alleen voor koordenvierhoeken. Dat de formule niet voor alle vierhoeken de correcte oppervlakte geeft, wordt rond 950 benoemd door de eveneens Indiase wiskundige Aryabhata II[17, p. 165]. Ik zal in het vervolg, en in het bijzonder in de behandeling van Brahmagupta's tekst hieronder, wel koordenvierhoek schrijven aangezien dit wiskundig correct is.

We zullen nu de tekst van Brahmagupta over de oppervlakte van drie- en vierhoeken nader beschouwen. We nemen hierbij als uitgangspunt [3, p. 295-297]. Dit is een vertaling van een deel van het werk van Brahmagupta. De vertaler Colebrooke heeft in deze vertaling ook Indiase commentaren op de tekst meegenomen, omdat deze verduidelijking geven op de compacte tekst van Brahmagupta. De tekst begint met de volgende stelling:

> Het product van de helft van de zijden en weerszijden is de grove oppervlakte van een driehoek en vierhoek. De helft van de som van de zijden vier keer opgeschreven, en streng verminderd door de zijden, vermenigvuldigd met elkaar, de vierkantswortel van het product is de precieze oppervlakte.[3, p. 295]

We zullen nu kijken wat deze stelling betekent.

Als we een koordenvierhoek hebben met zijden a, b, c en d, is de helft van de som $s = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$. Wanneer we deze som vier keer opschrijven, verminderd door de zijden, krijgen we

$$\begin{aligned} s-a &= \tfrac{1}{2}(-a+b+c+d),\\ s-b &= \tfrac{1}{2}(a-b+c+d),\\ s-c &= \tfrac{1}{2}(a+b-c+d),\\ s-d &= \tfrac{1}{2}(a+b+c-d). \end{aligned}$$

Deze termen vermenigvuldigd met elkaar geeft

$$(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) = \tfrac{1}{16}(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d).$$

Ten slotte is de precieze oppervlakte van de vierhoek de vierkantswortel hiervan, dus

$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} = \tfrac{1}{4}\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}.$$

De formule voor de oppervlakte van een driehoek is dezelfde, maar dan met $d = 0$[16, p. 118]. De formule voor de oppervlakte van een driehoek met zijden a, b, c is dus

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}.$$

Deze formule staat ook bekend als de formule van Hero, genoemd naar Hero van Alexandrië die hem naar ons weten in de eerste eeuw na Christus als eerste op heeft geschreven. Hero heeft overigens niet de formule voor de oppervlakte van koordenvierhoeken opgeschreven.

Er zijn volgens de aantekeningen in [3] drie soorten driehoeken. Deze zijn de gelijkzijdige driehoeken, de gelijkbenige driehoeken en de driehoeken met drie ongelijke zijdes. In [3] wordt van alle soorten driehoeken een voorbeeld behandeld, door voor elke driehoek lengtes van de zijden en vervolgens de oppervlakte te geven. Na voor alle soorten driehoeken een voorbeeld te geven, gaat het boek verder met voorbeelden van vierhoeken. Er zijn vijf soorten vierhoeken, zo zegt het boek. Deze zijn de ruiten, parallellogrammen, vierhoeken met twee gelijke zijden, met drie gelijke zijden en met alle zijden ongelijk aan elkaar. Ook van al deze soorten vierhoeken wordt een voorbeeld van de oppervlakteberekening gegeven.

Aan voorbeelden ontbreekt het in Brahmagupta's werk en de commentaren daarop dus niet. Echter, zoals ik al eerder opmerkte, het werk en de commentaren hebben ons geen bewijs van de formule gegeven. Door de geschiedenis heen zijn er wel een aantal geschreven, waarbij we in elk bewijs de eigen wiskundecultuur en tijdsgeest terugzien. We zullen in het volgende hoofdstuk een aantal van deze bewijzen behandelen om een beter beeld van de formule te ontwikkelen.

4 Bewijzen

In dit hoofdstuk zullen we een aantal bewijzen van de formule voor de oppervlakte van koordenvierhoeken bespreken. We beginnen met een bewijs van de school van Aryabhata, dat zoals we in 6.2 zullen zien waarschijnlijk het dichtst bij de originele afleiding van Brahmagupta staat. Daarna zullen we een bewijs uit de Islamitische wereld bespreken, origineel beschreven door Al-Shanni. Dit bewijs maakt veelvuldig gebruik van geconstrueerde driehoeken en de eigenschappen van die driehoeken. Als derde hebben we het bewijs van Abraham de Graaf dat geschreven is in de tijd dat Cartesische meetkunde zijn opwachting maakte. Ten slotte behandelen we het bewijs van Euler, de kortste van allemaal.

We zullen in alle bewijzen notatie gebruiken waarbij de dikgedrukte naam van een veelhoek de oppervlakte van die veelhoek aangeeft. Voor de koordenvierhoek $ABCD$ zal **ABCD** dus de oppervlakte van $ABCD$ aangeven.

4.1 Origineel bewijs

We zullen nu het bewijs bespreken dat aangehaald wordt door Sarasvati, een wiskundig historica, zoals we in 6.2 zullen zien. We zullen daar zien dat Sarasvati het waarschijnlijk achtte dat de afleiding van Brahmagupta soortgelijk is geweest aan de afleiding in dit bewijs. Deze afleiding zou het ook aannemelijk maken dat Brahmagupta de formule voor de oppervlakte van een koordenvierhoek als eerst vond en de formule voor de oppervlakte van een driehoek als vereenvoudiging daaruit volgde. We zullen inderdaad zien dat de formule voor de oppervlakte van een driehoek niet geïmpliceerd wordt in dit bewijs. Verder wordt dit bewijs getypeerd door het gebruik van een geconstrueerde rechthoek, alle andere bewijzen die we behandelen zijn gebaseerd op geconstrueerde driehoeken. Het bewijs is gebaseerd op [16, p.115-116]. Waar ik dat nodig of nuttig achtte heb ik zelf verduidelijkingen en extra uitwerkingen aan het bewijs toegevoegd. Ik zal in het bewijs aangeven wanneer dit het geval is.

Stel $ABCD$ is een koordenvierhoek. We tekenen de diagonaal AC en de lijnen DE en BF, die loodrecht staan op AC, met E en F de snijpunten met AC. Vervolgens tekenen we de lijnen DG en BH, zo dat zij loodrecht staan op respectievelijk DE en BF. Nu vormt $DGBH$ en rechthoek. In deze rechthoek geldt dat $BG = DH = DE + BF$ en $DG = HB = EF$. Ten slotte noteren we het middelpunt van AC met O. De situatie is getekend in Figuur 4.1. We merken op dat niet, zoals in het plaatje, hoeft te gelden dat E op CO en F op AO ligt. We kunnen twee gevallen onderscheiden, namelijk dat E en F beiden op ofwel CO, ofwel AO liggen, of dat de een op CO en de ander op AO ligt. We nemen in het vervolg zonder verlies van algemeenheid aan dat E op CO ligt en dat F op EA ligt.

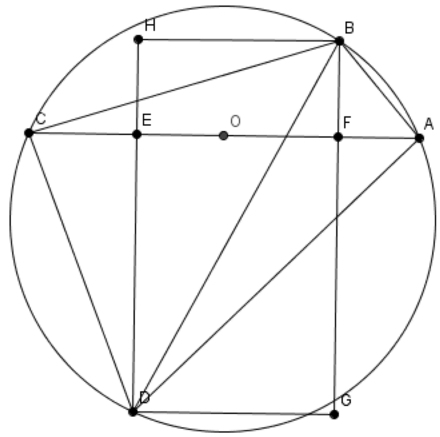
Opmerking 4.1.

$$EO = -\frac{1}{2}\frac{CD^2 - AC^2}{AC}.$$

Bewijs. Sarasvati heeft alleen de opmerking opgeschreven, het volgende bewijs is van mijn hand.

We merken allereerst op dat geldt $DE^2 = CD^2 - CE^2 = AD^2 - AE^2$. Dit betekent dat

$$CD^2 - AD^2 = CE^2 - AE^2 = (CE + AE)(CE - AE) = AC(CO - EO - AE),$$



Figuur 1: De getekende situatie van het bewijs gegeven in 4.1.

aangezien $CE + AE = AC$ en $CE = CO - EO$. We zien, omdat we hebben aangenomen dat E op CO ligt, dag geldt $CO = AE - EO$. Dit betekent dat $CO - EO - AE = -2EO$.

We zien nu dat $CD^2 - AD^2 = AC(CO - EO - AC) = -2AC \cdot EO$. Dit geeft ons de gewenste uitdrukking, namelijk

$$EO = -\frac{1}{2}\frac{CD^2 - AD^2}{AC}.$$

□

Opmerking 4.2.

$$FO = \pm\frac{1}{2}\frac{AB^2 - BC^2}{AC}.$$

Bewijs. Sarasvati heeft alleen de opmerking opgeschreven, ik heb het bewijs toegevoegd. We merken eerst op dat $BF^2 = AB^2 - AF^2 = BC^2 - CF^2$. Dat betekent dat

$$AB^2 - BC^2 = AF^2 - CF^2 = (AF + CF)(AF - CF) = AC(AF - CF).$$

We hebben nu twee gevallen, namelijk dat F op CO ligt en dat F op AO ligt.

We behandelen eerst het geval waarbij F op CO ligt. Dit geeft dat $AF = AO + OF$, dus $AF - CF = AO + FO - CF$. We merken verder op dat $AO = CF + FO$, dus $AO + FO - CF = 2FO$. Dit geeft dat $AB^2 - BC^2 = 2FO \cdot AC$, dus

$$FO = \frac{1}{2}\frac{AB^2 - BC^2}{AC}.$$

We behandelen nu het geval waarbij F op AO ligt. Dit geeft dat $AF = AO - FO$, dus $AF - CF = AO - FO - CF$. Ook zien we dat $AO = CF - FO$, dus $AF - CF = -2FO$. Dit geeft

$AB^2 - BC^2 = -2FO \cdot AC$, dus

$$FO = -\frac{1}{2}\frac{AB^2 - BC^2}{AC}.$$

□

We zien nu dat, onafhankelijk van de plaatsing van F op AC, geldt dat

$$EF = -\frac{1}{2AC}\left(\left(AB^2 + CD^2\right) - \left(AD^2 + BC^2\right)\right).$$

Opmerking 4.3. $\boldsymbol{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot HD$.

Bewijs. We merken op dat $\mathbf{ABCD} = \mathbf{ABC} + \mathbf{ACD}$. Dat betekent dat $\mathbf{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BF + \frac{1}{2}AC \cdot DE = \frac{1}{2}AC(BF + DE) = \frac{1}{2}AC \cdot HD$. □

Opmerking 4.4.

$$\boldsymbol{ABCD} = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \text{ waar } s = \frac{1}{2}(a+b+c+d).$$

Bewijs. We merken op dat geldt $HD^2 = BD^2 - BH^2 = BD^2 - EF^2$ en we herinneren ons dat

$$EF = -\frac{1}{2AC}\left(\left(AB^2 + CD^2\right) - \left(AD^2 + BC^2\right)\right).$$

Dat betekent dat

$$HD^2 = BD^2 - \left(-\frac{(AB^2 + CD^2) - (AD^2 + BC^2)}{2AC}\right)^2.$$

We weten dat $\mathbf{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot HD$, dus

$$\begin{aligned}
\mathbf{ABCD}^2 &= \frac{AC^2}{4}\left(BD^2 - \left(\frac{(AB^2 + CD^2) - (AD^2 + BC^2)}{2AC}\right)^2\right) \\
&= \frac{AC^2}{4}\frac{4AC^2 \cdot BD^2 - ((AB^2 + CD^2) - (AD^2 + BC^2))^2}{4AC^2} \\
&= \left(\frac{AC \cdot BD}{2}\right)^2 - \left(\frac{(AB^2 + CD^2) - (AD^2 + BC^2)}{4}\right)^2
\end{aligned}$$

We passen nu de stelling van Ptolemaeus toe die geeft dat $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$. Verder zullen we vanaf nu de notatie $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ en $AD = d$ gebruiken. Dat geeft

$$\mathbf{ABCD}^2 = \left(\frac{ac + bd}{2}\right) - \left(\left(\frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{4}\right) - \left(\frac{b^2}{4} + \frac{d^2}{4}\right)\right)^2.$$

De lezer kan met behulp van vermenigvuldiging verifiëren dat dit gelijk is aan

$$\left(\frac{ac}{2}+\frac{bd}{2}+\frac{a^2}{4}+\frac{c^2}{4}-\frac{b^2}{4}-\frac{d^2}{4}\right)\left(\frac{ac}{2}+\frac{bd}{2}-\frac{a^2}{4}-\frac{c^2}{4}+\frac{b^2}{4}+\frac{d^2}{4}\right).$$

We kunnen deze uitdrukkingen weer factoriseren en krijgen dan

$$\left(\left(\frac{a+c}{2}\right)^2-\left(\frac{b-d}{2}\right)^2\right)\left(\left(\frac{b+d}{2}\right)^2-\left(\frac{a-c}{2}\right)^2\right).$$

We herinneren ons het bijzondere product $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$. Dit geeft ons tenslotte

$$\mathbf{ABCD}^2=\left(\frac{-a+b+c+d}{2}\right)\left(\frac{a-b+c+d}{2}\right)\left(\frac{a+b-c+d}{2}\right)\left(\frac{a+b+c-d}{2}\right)$$

en we zien dat dit gelijk is aan $(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$ met $s=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$. We zien ten slotte dat $\mathbf{ABCD}=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$. □

4.2 Al-Shanni

We kennen het bewijs van Al-Shanni door het overgeleverde werk van Al-Biruni. Het bewijs is een voorbeeld van Arabische meetkunde. Het kenmerkende van de stijl van Arabische meetkundebewijzen is dat zij beknopt geschreven zijn. De schrijver van [1], waar ik het bewijs gevonden en de uitwerkingen op gebaseerd heb, geeft dan ook aan voor de overzichtelijkheid en leesbaarheid moderne notatie en conventies te gebruiken. Ik heb zijn voorbeeld hierin gevolgd bovenop zijn bewijs uitwerkingen toegevoegd van resultaten die mij niet direct duidelijk waren. In de tekst geef ik ook aan waar ik dit heb gedaan.

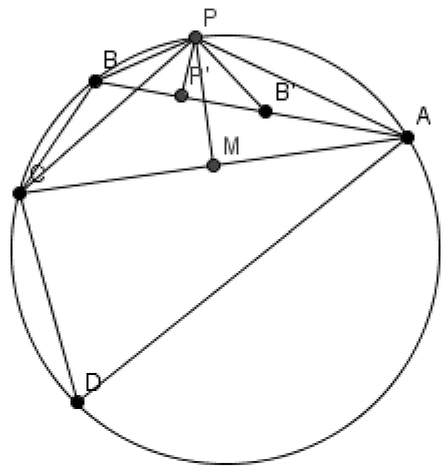
Zoals u zal zien wordt dit bewijs in het bijzonder gekenmerkt door de grote hoeveelheid geconstrueerde driehoeken. Dit maakt ook dat het plaatje van de situatie er mijns inziens onnodig ingewikkeld uit kan zien en vandaar heb ik Figuur toegevoegd die naar mijn mening de eerste helft van het bewijs duidelijker maakt.

Stel $ABCD$ is een koordenvierhoek, omcirkeld door Γ. Stel ook a, b, c, d, x zijn de lengtes van respectievelijk AB, BC, CD, DA en AC, waarbij we aannemen dat $a > b$ en $d > c$. Het middelpunt van de koorde AC noemen we M en het middelpunt van de boog ABC op Γ noemen we P. Dit maakt PM de loodrecht bissectrice van AC. U kan dit ook terugzien in de figuren 2 en 3.

Opmerking 4.5. $\angle PBA = \angle PCA$

Bewijs. Atzema geeft als reden voor deze uitspraak alleen 'de eigenschappen van een cirkel'. De uitwerking van deze eigenschappen die nu volgt heb ik zelf toegevoegd. We herinneren ons dat voor koordenvierhoeken geldt dat twee overstaande hoeken opgeteld π zijn. Dat betekent dat in de koordenvierhoek $APBC$ geldt dat $\angle PBC = \pi - \angle PCA$.

We merken ook op dat $\triangle APC$ door zijn constructie een gelijkbenige driehoek is met $\angle PAC = 2\angle CAP = 2\angle PCA$. Met andere woorden, $\angle APC = \pi - 2\angle PCA$. We zien nu dat in de koordenvierhoek $APCD$ geldt dat $\angle CDA = \pi - \angle APC = 2\angle PCA$.



Figuur 2: De getekende situatie van de eerste helft van Al-Shanni's bewijs, als aanvulling op Figuur 3

We zien vervolgens dat in de koordenvierhoek $ABCD$ geldt dat $\angle ABC = \pi - \angle CDA = \pi - 2\angle PCA$.

We merken op dat $\angle PBA = \angle PBC - \angle ABC = \angle PCA$, dus we concluderen dat geldt $\angle PBA = \angle PCA$. $\square$

We kunnen nu een punt B' construeren op BA zodat $\triangle BPB' \sim \triangle CPA$.

Opmerking 4.6. $\triangle PB'A \sim \triangle PBC$

Bewijs. Atzema geeft geen verder uitwerking van de bewering. De hierop volgende uitwerking heb ik zelf toegevoegd. We weten dat $\triangle BPB' \sim \triangle CPA$. Dat betekent dat in het bijzonder geldt dat $\angle B'PB = \angle APC$. We zien nu dat $\angle PBC = \angle APB'$.

We zien ook dat geldt $\angle PBC = \pi - \angle PCA$, aangezien $\angle PBA = \angle PCA$ en $\angle ABC = \pi - 2\angle PCA$.

Ten slotte zien we dat $\angle PB'P = \pi - \angle PCA$, dus $AB'P = \angle PBC$ en dus geldt $\triangle PB'A \sim \triangle PBC$. We weten dat $PA = PC$, dus $PB'A$ en PBC zijn gelijkvormig. $\square$

Opmerking 4.7. ***ABC* = *CAP* − *BPB'*.**

Bewijs. We weten dat **APBC** = **PBC** + **CAP**, maar ook dat **APBC** = **APB** + **ABC**, dus **APBC** = **BPB'** + **PB'A** + **ABC**. Daaruit volgt dat **ABC** = **CAP** − **BPB'**. $\square$

We noemen de lengte van PM nu p. Verder duiden we het middelpunt van BB' aan met P' en de lengte van PP' noemen we p'.

Opmerking 4.8. $\frac{x}{2p} = \frac{a-b}{2p'}$

Bewijs. Er geldt $\mathbf{CAP} = \frac{px}{2}$. Ook geldt door onze constructie dat $P'B = \frac{a-b}{2}$ en $\mathbf{BPB'} = p'\frac{a-b}{2}$. Nu kunnen we concluderen dat

$$\frac{x^2/4}{\mathbf{CAP}} = \frac{\mathbf{CAP}}{p^2} \text{ en } \frac{(a-b)^2/4}{\mathbf{BPB'}} = \frac{\mathbf{BPB'}}{p'^2}.$$

We zien dat $\frac{x}{2p} = \frac{a-b}{2p'}$. □

Opmerking 4.9. $\dfrac{x^2/4-(a-b)^2/4}{\boldsymbol{CAP}-\boldsymbol{BPB'}} = \dfrac{\boldsymbol{CAP}-\boldsymbol{BPB'}}{p^2-p'^2}$ *of* $\dfrac{x^2/4-(a-b)^2/4}{\boldsymbol{ABC}} = \dfrac{\boldsymbol{ABC}}{p^2-p'^2}$.

Bewijs. Atzema geeft geen verdere uitwerking van de formule, wat volgt is mijn eigen werk. We zullen geen bewijs geven, maar laten wel zien dat deze formule juist is. We merken op dat als de formule klopt, er moet gelden dat

$$\begin{aligned}
\left(\frac{px-p'(a-b)}{2}\right)^2 &= \left(\frac{x^2-(a-b)^2}{4}\right)\left(p^2-p'^2\right) \\
\frac{p^2x^2-2pp'x(a-b)+p'^2(a-b)^2}{4} &= \frac{p^2x^2-p^2(a-b)^2-p'^2x^2+p'^2(a-b)^2}{4} \\
p'^2x^2-2pp'x(a-b)+p^2(a-b)^2 &= 0 \\
(p'x-p(a-b))^2 &= 0
\end{aligned}$$

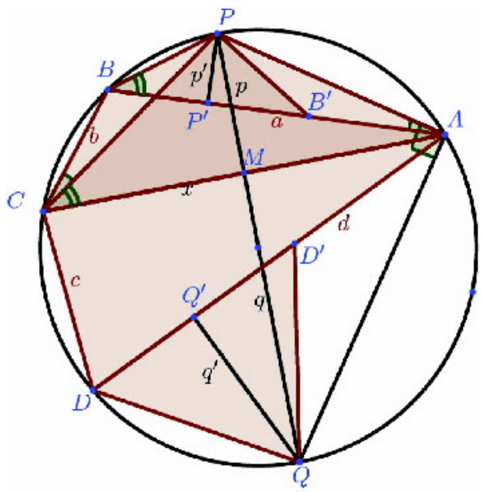
En dit klopt alleen als $\frac{x}{2p} = \frac{a-b}{2p'}$. We hadden eerder al gezien dat dit door onze constructie geldt en dus is de formule juist. □

Ten slotte merken we op dat PA de schuine zijde is van zowel $\triangle PP'A$ en $\triangle PMA$. Dat betekent dat $p'^2 + (a+b)^2/4 = p^2 + x^2/4$ of dat $p^2 - p'^2 = (a+b)^2/4 - x^2/4$.

Opmerking 4.10. $\dfrac{x^2/4-(a-b)^2/2+q^2-q'^2}{\boldsymbol{ABC}+\boldsymbol{CDA}} = \dfrac{\boldsymbol{ABC}+\boldsymbol{CDA}}{x^2/4-(d-c)^2/4+p^2-p'^2}$.

Bewijs. We merken op dat het argument dat we hiervoor hebben gebruikt ook toegepast kan worden op $\triangle CDA$, met P, P' en B' vervangen door Q, Q' en D', zoals te zien in Figuur 3. Wanneer we nu de lengte van QM en QQ' aanduiden met respectievelijk q en q', krijgen we

$$\frac{x^2/4-(d-c)^2/4}{\mathbf{CDA}} = \frac{\mathbf{CDA}}{q^2-q'^2}.$$



Figuur 3: De getekende situatie van Al-Shanni's bewijs. Figuur 1 uit [1]

We weten dat $\triangle PAQ$ een rechthoekige driehoek is met hoogte AM en daarom geldt dat $x/2q$ de reciprook is van $x/2p$. Nu tellen we de verhoudingen op in plaats van dat we ze van elkaar aftrekken en we krijgen

$$\frac{x^2/4 - (a-b)^2/2 + q^2 - q'^2}{\mathbf{ABC} + \mathbf{CDA}} = \frac{\mathbf{ABC} + \mathbf{CDA}}{x^2/4 - (d-c)^2/4 + p^2 - p'^2}.$$

□

Opmerking 4.11. *$\boldsymbol{ABCD} = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$, waar $s = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$.*

Bewijs. We weten dat $p^2 - p'^2 - (a+b)^2/4 - x^2/4$ en evenzo $q^2 - q'^2 = (d+c)^2/4 - x^2/4$. We concluderen nu dat

$$\frac{(d+c)^2/4 - (a-b)^2/4}{\mathbf{ABCD}} = \frac{\mathbf{ABCD}}{(a+b)^2/4 - (d-c)^2/4} = \frac{x}{2p}.$$

Dit geeft

$$\mathbf{ABCD}^2 = \left(\frac{(d+c)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}\right)\left(\frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(d-c)^2}{4}\right)$$

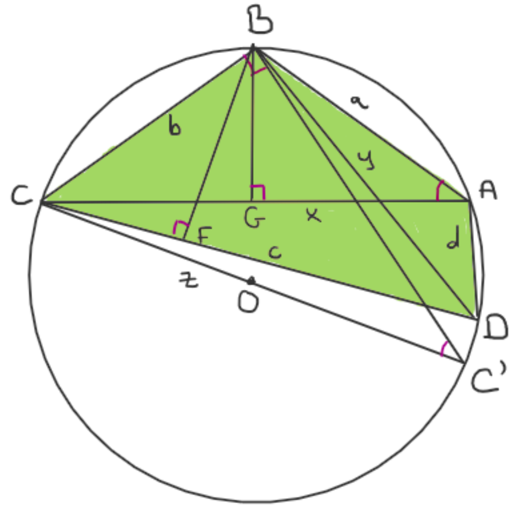
en we hebben dit al eerder gezien in *verwijzing*.

We concluderen nu dat geldt $\mathbf{ABCD} = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$, waar $s = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$. □

4.3 Abraham de Graaf

Abraham de Graaf was een Nederlandse wiskundige. Zijn carrière als wiskundige speelde zich af in de tweede helft van de zeventiende eeuw. De formule voor de oppervlakte van de koordenvierhoek wordt behandeld in zijn derde leerboek, uitgebracht in 1706. Waar De Graaf in zijn eerste twee boeken primair gebruik maakte van de toen nieuwe cartesische meetkunde, gebruikt hij voor dit bewijs Euclidische meetkunde. Ook dit bewijs heb ik, net als de hiervoor gegeven achtergrondinformatie, gebaseerd op [1]. In het bewijs heb ik wederom uitwerkingen toegevoegd waar ik dat nuttig en nodig achtte bij resultaten waar Atzema geen nadere toelichting bij geeft.

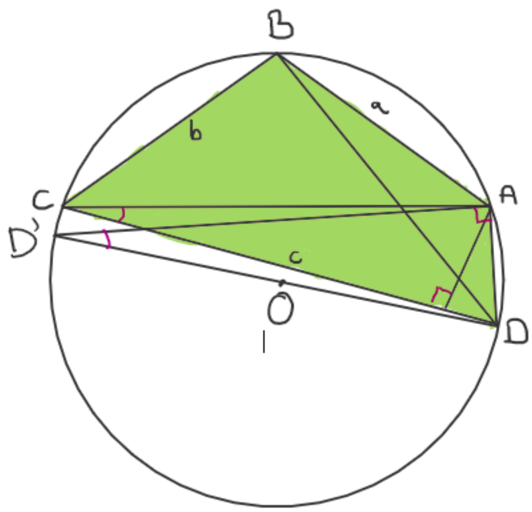
Stel $ABCD$ is een koordenvierhoek. We gebruiken de notatie $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = x$ en $BD = y$. Verder tekenen we de lijnen BG en BF, die loodrecht staan op respectievelijk x en c. Verder tekenen we diameter van de cirkel vanuit punt C. Het andere punt waar deze diameter de cirkel snijdt noemen we C' en de lijn CC' noemen we z. U kan dit terugzien in figuur 4.



Figuur 4: De situatie van het bewijs van van de Graaf.

Opmerking 4.12. $BG = \frac{ab}{z}$.

Bewijs. Atzema heeft alleen de opmerking opgeschreven, dit bewijs heb ik zelf toegevoegd. We merken op dat als $\triangle BCC' \sim \triangle GBA$, geldt dat $\frac{BC}{BG} = \frac{CC'}{AB}$, oftewel $BG = \frac{AB \cdot BC}{CC'} = \frac{ab}{z}$. We willen dus bewijzen dat $\triangle BCC' \sim \triangle GBA$. We merken hiertoe op dat de driehoeken $\triangle ABC$ en $\triangle BCC'$ de koorde BC als zijde hebben. Nu vertelt stelling 21 uit het derde boek van de elementen van Euclides ons dat $\angle BAC = \angle BC'C$. Ook zien we dat zowel $\angle CBC'$ als $\angle BGA$ rechte hoeken zijn, dus $\angle CBC' = \angle BGA$. We concluderen hieruit dat $\triangle BCC' \sim \triangle GBA$ en dus geldt $BG = \frac{ab}{z}$. $\square$



Figuur 5: De situatie om te bewijzen dat $AH = \frac{dx}{z}$.

Opmerking 4.13. $AH = \frac{dx}{z}$.

Bewijs. Ik heb zowel de opmerking als dit bewijs zelf toegevoegd aan het bewijs uit [1]. We tekenen nu een hulplijn door punt D en de oorsprong van de cirkel. Het snijpunt van deze lijn met de cirkel dat niet D is, noemen we D'. Ook tekenen we een hulplijn door punt A die loodrecht staat op de lijn CD. U kan dit getekend zien in figuur 5. We zien op dezelfde wijze als zojuist dat $\angle AD'D = \angle ACH$ en $\angle AHC = \angle D'AD$. Dat betekent dat $\triangle ADD' \sim \triangle HAC$. We concluderen nu dat $\frac{AC}{DD'} = \frac{AH}{AD}$, ofwel $AH = \frac{dx}{z}$. □

Opmerking 4.14. $y^2 = \dfrac{bca^2 + adb^2 + adc^2 + bcd^2}{ad + bc}$.

Bewijs. We zien met behulp van de vorige opmerkingen dat $\mathbf{ABC} = \frac{AC \cdot BG}{2} = \frac{abx}{2z}$ en dat $\mathbf{CAD} = \frac{cdx}{2z}$ en dus geldt $\mathbf{ABCD} = \frac{abx+cdx}{2z}$.

Op een analoge manier zien we dat $\mathbf{ABCD} = \frac{bcy+ady}{2z}$. Hieruit volgt dat $y = \frac{(ab+cd)x}{ad+bc}$.

We gebruiken nu de stelling van Ptolemaeus. Deze zegt dat $ABCD$ een koordenvierhoek is dan en slechts dan als $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$. Met andere woorden, in onze koordenvierhoek geldt dat $ac + bd = xy$. Wanneer we nu beide zijden van onze gevonden uitdrukking vermenigvuldigen met y en de stelling van Ptolemaeus toepassen krijgen we

$$y^2 = \frac{bca^2 + adb^2 + adc^2 + bcd^2}{ad + bc}.$$

□

Opmerking 4.15. $2 \cdot CD \cdot CF = \pm(b^2 + c^2 - y^2)$.

Bewijs. Atzema geeft alleen de opmerking, ik heb dit bewijs toegevoegd. Boek II van Euclides geeft ons in propositie 12 en 13 dat voor onze figuur geldt dat $y^2 = b^2 + c^2 \pm 2 \cdot CD \cdot CF$, dus $2 \cdot CD \cdot CF = \pm(b^2 + c^2 - y^2)$.

□

Opmerking 4.16. $\boldsymbol{ABCD} = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ *met* $s = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$.

Bewijs. Aangezien $CD = c$ geldt

$$CF = \frac{\pm\,(c^2 + b^2 - a^2 - d^2)b}{2(ad+bc)}.$$

We zien dat $BF^2 = CB^2 - CF^2$, dus

$$4 \cdot BF^2 = \frac{(-a^4 - b^4 - c^4 - d^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2a^2d^2 + 2b^2c^2 + 2b^2d^2 + 2c^2d^2 + 8abcd)b^2}{(ad+bc)^2}.$$

We stellen nu

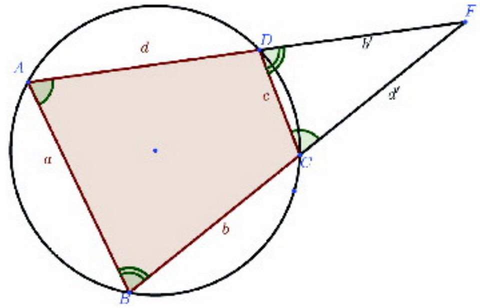
$$r = -a^4 - b^4 - c^4 - d^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2a^2d^2 + 2b^2c^2 + 2b^2d^2 + 2c^2d^2 + 8abcd.$$

Dat betekent dat $BF = \frac{b\sqrt{r}}{2(ad+bc)}$. We weten dat $\mathbf{BCD} = \frac{1}{2}BF \cdot CD = \frac{bc\sqrt{r}}{4(ad+bc)}$ Ten slotte merken we op dat aangezien de overstaande hoeken van een koordenvierhoek optellen tot 180 graden, geldt dat $\frac{\mathbf{BCD}}{\mathbf{ABCD}} = \frac{bc}{ad+bc}$. Met andere woorden $\mathbf{ABCD} = \frac{\sqrt{r}}{4}$. We merken nu op dat $r = (-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)$. De lezer kan dit verifiëren door de vermenigvuldiging uit te schrijven. We concluderen dat $\mathbf{ABCD} = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ met $s = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$. □

4.4 Euler

Het laatste bewijs dat we bespreken is dat van Leonhard Euler. Dit bewijs maakt gebruik van de formule voor de oppervlakte van driehoeken van Hero en is daarmee expliciet alleen een bewijs voor de formule van de oppervlakte van een koordenvierhoek. Het bewijs is gebaseerd op gelijkvormige driehoeken en maakt gebruik van slechts twee hulplijnen. Het bewijs vind ik prachtig in zijn eenvoud, aangezien er alleen gebruik gemaakt wordt van eigenschappen van gelijkvormige driehoeken en algebraïsche manipulatie. Verder is dit bewijs het kortste dat Atzema heeft gevonden en naar mijn mening is dit bewijs ook het eenvoudigste van de vier bewijzen die we besproken hebben. Dit laatste bewijs is ook gebaseerd op [1] en werderom heb ik waar ik dat nuttig en nodig vond extra uitwerkingen toegevoegd.

Stel $ABCD$ is een convexe koordendriehoek, waarbij we de zijden AB, BC, CD en AD respectievelijk a, b, c en d noemen. Stel verder dat F het snijpunt is van de lijnen AD en BC. We noemen nu CF en DF respectievelijk d' en b'. U kan dit zien in figuur 6.



Figuur 6: De situatie in het bewijs. Figuur 4 uit [1]

Opmerking 4.17. $\triangle ABF \sim \triangle CDF$

Bewijs. We herinneren ons dat overstaande hoeken van een koordenvierhoek opgeteld π zijn en dat dus geldt $\angle BAF = \angle FCD$ en evenzo $\angle ABF = \angle CDF$. Dat betekent dat de driehoeken ABF en CDF gelijkvormig zijn. □

Opmerking 4.18. $\boldsymbol{ABCD} = \frac{a^2 - c^2}{c^2}\boldsymbol{CDF}$

Bewijs. Dit bewijs heb ik zelf toegevoegd. Omdat $\triangle ABF \sim \triangle CDF$ geldt $\mathbf{ABF} = \frac{a^2}{c^2}\mathbf{CDF}$. We zien dat geldt $\mathbf{ABCD} = \mathbf{ABF} - \mathbf{CDF}$, dus we concluderen $\mathbf{ABCD} = \mathbf{ABF} - \mathbf{CDF} = \frac{a^2-c^2}{c^2}\mathbf{CDF}$. □

Opmerking 4.19. $\boldsymbol{ABCD} = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ *met* $s = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$.

Bewijs. We weten uit de formule van Hero voor de oppervlakte van driehoeken dat geldt dat $\mathbf{CDF}^2 = \frac{1}{16}(d'+b'+c)(-d'+b'+c)(d'-b'+c)(d'+b'-c)$. Dat betekent dat

$$16\mathbf{ABCD}^2 = \frac{(a-c)(d'+b'+c)}{c} \cdot \frac{(a+c)(-d'+b'+c)}{c} \cdot \frac{(a+c)(d'-b'+c)}{c} \cdot \frac{(a-c)(d'+b'-c)}{c}.$$

Het volgende heb ik zelf toegevoegd aan het bewijs. We merken op dat uit de gelijkvormigheid van $\triangle ABF$ en $\triangle CDF$ volgt dat $\frac{a}{c} = \frac{b+d'}{d'}$ en $\frac{a}{c} = \frac{b'+d}{b'}$. Hieruit volgt dat $b = \frac{d'(a-c)}{c}$ en $d = \frac{b'(a-c)}{b'}$. Atzema zegt nu dat $b+d = \frac{(b'+d')(a-c)}{c}$ en $d-b = \frac{(a+c)(-d'+b')}{c}$.

Nu kunnen we de factoren in $16\mathbf{ABCD}^2$ als volgt schrijven:

$$\begin{aligned}
\frac{(a-c)(d'+b'+c)}{c} &= \frac{(a-c)(d'+b')}{c}+a-c=\frac{(a-c)\cdot c(d+b)}{(a-c)c}+a-c=a+b-c+d\\
\frac{(a+c)(-d'+b'+c)}{c} &= \frac{(a+c)c(d-b)}{(a+c)c}+a+c=a-b+c+d\\
\frac{(a+c)(d'-b'+c)}{c} &= \frac{(a+c)c(b-d)}{(a+c)c}+a+c=a+b+c-d\\
\frac{(a-c)(d'+b'-c)}{c} &= \frac{(a-c)c(b+d)}{(a-c)c}-a+c=-a+b+c+d
\end{aligned}$$

Met andere woorden,

$$\mathbf{ABCD}^2=\frac{1}{16}(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)$$

en dus $\mathbf{ABCD}=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ met $s=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$. $\square$

5 Tegenstanders Originaliteit

In een biografie van David Pingree, wiens gedachtengoed we later nog zullen behandelen, geschreven door Kim Plofker voor Studies in the History of Indian Mathematics[13], vertelt Plofker dat Pingree van tijd tot tijd onder de groep reactionaire Oriëntalisten werd geschaard, zoals G.R. Kaye en John Bentley. Zij gingen er vanuit dat alle wetenschappelijke ontwikkelingen automatisch van Griekse origine waren. Pingree echter, ageerde sterk tegen deze visie en heeft hier zelfs een artikel aan gewijd, namelijk [10]. Dit artikel zullen we nog behandelen.

Plofker benoemt hier de groep reactionaire oriëntalisten die fervent tegenstander zijn van originaliteit. Om deze groep beter te kunnen onderzoeken, moeten we eerst ontdekken wat de ideologie was waar zij onder worden geschaard. Oriëntalisme is een term die in 1978 door Edward Said bekend geworden is in zijn boek *Orientalism*[15]. Oriëntalisme wordt niet expliciet gedefinieerd, maar kan begrepen worden als de Westerse kijk op het Midden-Oosten. Said benoemt hierbij de negatieve bijklank die de term volgens hem hoort te hebben, door de hooghartige houding van negentiende en begin twintigste eeuwse Europese kolonialisten ten opzichte van het Midden Oosten. Hij benadrukt wel dat hoewel wetenschappers die onderzoek doen naar het Midden Oosten technisch gezien onder de noemer oriëntalisten kunnen vallen door de aard van hun onderzoek, deze negatieve bijklank niet bij hun werk hoeft te horen[15, p. 1-2]. Met de voorbeelden die Kim Plofker aanhaalt van Oriëntalisten zullen we ervanuit gaan dat zij met oriëntalisten de kolonialisten uit de negentiende en twintigste eeuw met een hooghartige houding jegens het Midden Oosten bedoelt. Kaye leefde in de tijd van het hoogtepunt van het Britse Rijk (rond 1910) en Bentley leefde ten tijde van het tweede Britse Rijk (rond 1800), toen India vrijwel geheel geregeerd werd door de Britten. Zij waren beiden Brits en hadden als zodanig een 'westerse' kijk op de wereld. Dit was indertijd vooral een kijk waarin het westen, de kolonialisten, superieur waren in alle opzichten aan hen die gekolonialiseerd waren.

Om het gedachtengoed van deze mensen beter te leren kennen, zullen we kijken naar een artikel van Kaye[8]. Zoals de titel van het artikel al doet vermoeden, schrijft Kaye hier over wat volgens hem de herkomst is van de Indiase wiskunde. We zullen het artikel doorlopen en enkele zaken uitlichten.

Kaye begint met de noot dat hij zich er terdege bewust van is dat hij een controversiële mening aanhangt. Hij vertelt dat de meeste wetenschappers van mening zijn dat de ontwikkelingen in de Indiase wiskunde ook van groot belang zijn geweest voor de wetenschappelijke ontwikkeling in het westen. Kaye beweert dat de feiten juist compleet de andere kant op wijzen en in de rest van het artikel zal hij dat uitwerken. Voordat hij dit echter doet, benoemt hij drie referentiecriteria voor de geschiedenis van de wiskunde. Deze zijn (1) dat wiskunde zich op een logische manier ontwikkelt. Het is raar als ineens een ingewikkelde stelling verschijnt als al het opbouwende werk naar de stelling niet eerder gevonden is. Verder (2) kunnen twee onafhankelijk ontwikkelde systemen gelijkheden vertonen, maar nooit gelijk zijn. Er moeten verschillen in de ontwikkeling zitten. Ten slotte (3) benoemt Kaye dat degene die een bewering als eerst opschrijft, deze bewering niet noodzakelijkerwijs ontdekt heeft.

Bij dit laatste punt geeft Kaye een voorbeeld. Elphinstone heeft geschreven dat de formule van Brahmagupta voor de oppervlakte van een driehoek tot aan de zestiende eeuw niet bekend was in Europa, om precies te zijn tot Clavius hem publiceerde. Elphinstone zou hierna impliceren dat de regel door Indiërs ontdekt zou zijn. Kort na deze publicatie werd echter ontdekt dat de regel al bekend was bij Hero van Alexandrië. Dit, zegt Kaye, is een sprekend voorbeeld van waarom je er niet vanuit mag gaan dat iemand een wiskundig idee als eerste heeft bedacht. Het interessante is dat Kaye een historicus er in feite van beschuldigd dat hij schrijft op basis van de op dat moment bekende feiten. Natuurlijk is enige voorzichtigheid altijd geboden, zeker als het om geschiedenis gaat, maar in feite schrijven alle wetenschappers op basis van de voor hen tot dan toe bekende feiten. De redenatie van Kaye klopt dus maar half. Het kan inderdaad voorkomen dat iets eerder ontdekt is dan we kunnen achterhalen uit de bronnen die op dat moment voor ons beschikbaar zijn en daarom is voorzichtigheid altijd geboden. Echter, een wetenschapper moet hier ook weer niet te voorzichtig in worden uit angst iets te publiceren wat later toch niet helemaal juist blijkt. Dit zou immmers de voortgang van de wetenschap evengoed in de weg staan.

In het tweede deel van zijn artikel benoemt Kaye een aantal proposities en behandelt deze. Wij zullen ons beperken tot propositie 7, aangezien dit de enige propositie is die over de drie- en vierhoeken van Brahmagupta gaat. De propositie luidt als volgt:

> Brahmagupta geeft de oppervlakte van de koordenvierhoek als $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$, welke een uitbreiding is van de welbekende stelling van Hero voor driehoeken.[8, p. 753]

Over deze propositie schrijft Kaye dat een bestudering van het werk van Brahmagupta duidelijk doet blijken dat Brahmagupta niet de ontdekker was van de wiskunde in de Brahmasputtasiddhanta. Want, zo zegt Kaye, Brahmagupta begrijpt helemaal niets van zijn eigen regels. Sommige regels worden gevolgd door niet passende voorbeelden, er is een voorbeeld dat maar half afgemaakt is en soms bekritiseert Brahmagupta zijn eigen tekst omdat hij merkt dat er een fout in zit.

De toon en woordkeuze van Kaye doen mij denken aan een boze man, die alles erbij trekt wat hij maar kan vinden om het object van zijn boosheid zwart te maken. Hij overweegt bijvoorbeeld niet dat voor Brahmagupta een deels werkende regel wel eens beter zou kunnen zijn dan geen regel. Dit is zeker het geval wanneer de regel werkt voor alle gevallen waarin hij in praktische zaken gebruikt wordt, zoals in de bouw. Het is frappant dat Kaye enorm hamert op de gedachte dat het verloop van de ontdekking van wiskunde natuurlijk moet zijn, maar dat hij dan wel direct perfectie verwacht. De punten die hij aangeeft doen mij juist veel meer denken aan iemand die aan het ontdekken is, maar zich ook terdege bewust is van de fouten die nog in zijn ideeën zitten, dan aan een incapabele wiskundige die onvermeld andere bronnen benut.

Met behulp van [8] hebben we het gedachtengoed van de reactionaire oriëntalisten beter leren kennen. We merken nogmaals op dat de historische context van groot belang is om deze standpunten en ideeën te begrijpen. We zien in het artikel duidelijk dat Kaye van mening is dat de Westerse, en in het bijzonder Griekse, wiskunde superieur is. We zien ook dat Kaye zo nu en dan zijn zelfbenoemde neutraliteit lijkt te verliezen. Dit is niet omdat hij feitelijk incorrecte uitspraken doet. Als we terugdenken aan de propositie die we zojuist behandeld hebben, benoemt Kaye alleen maar feiten uit de tekst van Brahmagupta. Echter, hij toetst deze feiten vervolgens aan een standaard die Brahmagupta automatisch in een slecht daglicht stelt. In plaats hiervan had hij bijvoorbeeld ook kunnen overwegen dat de wiskunde nog in ontwikkeling was en daarna kunnen concluderen dat het overtuigender was Brahmagupta echt niet snapte waar hij het over had. Hoewel Kaye dus zegt zo neutraal mogelijk te zijn, worden zijn worden mijns inziens gekleurd door zijn omstandigheden. Deze gekleurdheid is weer in een logisch daglicht te plaatsen als we terugdenken aan de afkomst van Kaye. Daar passen deze denkbeelden goed in. Tegelijkertijd is het belangrijk op te merken dat Kaye benoemt dat hij tegen de gevestigde orde, die blijkbaar uitging van originaliteit, ingaat met zijn artikel.

In een levensbericht over Kaye [14] staat dat Kayes artikel een samenvatting was van het standpunt dat hij in een ander artikel uitdraagt. Dit zou een reactie zijn op overdreven beweringen van originaliteit en oudheid van Indiase wiskunde. We zullen later zien dat David Pingree een reactie op het artikel van Kaye heeft geschreven, precies om de overdreven beweringen van onoriginaliteit die daarin staan. Op deze manier zouden we het artikel van Kaye ook kunnen zien als een wellicht iets te gepassioneerde reactie op een zaak die hem aan het hart ging. Immers, Kaye was als Brit werkzaam op Indiase scholen. Het koloniale schoolsysteem staat er om bekend dat de cultuur van de overheersers doorgedrukt werd ten koste van de cultuur van de overheersten. In die zin zou het niet verwonderlijk zijn als Kaye overtuigd was van de absolute superieuriteit van de Westerse wetenschap boven de Indiase wetenschap. Daarbij komt nog, zoals we later uitgebreider zullen zien, Indiase schrijvers stonden er wel bekend om de uitvindingen van het eigen volk te overdrijven ten gunste van de Indiase wetenschap. Zij die dit doen, vallen meestal onder de voorstanders van de originaliteitstheorie, die we nu zullen gaan bespreken.

6 Voorstanders Originaliteit

We hebben zojuist het standpunt beschreven van de tegenstanders van de originaliteitstheorie. In dit hoofdstuk zullen we juist kijken naar de voorstanders van deze theorie. We zullen beginnen met een korte algemene karakterisering van deze voorstanders met behulp van [20] en daarna zullen we er drie concreet bespreken. Eerst zullen we Datta en Singh bespreken, die het eerste moderne grote werk [5] over de Indiase wiskundegeschiedenis hebben geschreven. Hier zullen we zien dat er niet alleen maar verdeeldheid is, maar dat Datta zelfs waardering op kon brengen voor het werk van Kaye, de oriëntalist. Vervolgens zullen we Sarasvati bespreken, die het tweede moderne grote werk over de Indiase wiskundegeschiedenis heeft geschreven. Zij behandelde de onderwerpen vooral vanuit wiskundig aspect en we zullen zien dat zij hierom minder controversieel is, ondanks dat ze wel de originaliteitstheorie aanhangt. Ten slotte zullen we Colebrooke behandelen, die, zoals we eerder al hebben gezien, een nog altijd veel gebruikte vertaling van de brahmasputtasiddhanta heeft gemaakt. Of hij echt een voorstander van de theorie is valt nog te bezien, maar hij was bijzonder in zijn eigen tijd doordat hij de originaliteit niet afwees en zelfs tegen de tegenstanders van de theorie inging. We zullen zien hoe zij alle drie een unieke kijk op het originaliteitsdebat hebben. Als laatst zullen we een breder overzicht van het originaliteitsdebat geven waarin we de standpunten van de voor- en tegenstanders die we hebben leren kennen op een rij zetten.

Er zijn maar weinig schrijvers overtuigd van volledige originaliteit van de wiskunde van Brahmagupta. Dat wil zeggen, ik heb er maar weinig kunnen vinden. We zullen beginnen met de bron die mij het meest overtuigd leek van originaliteit: Hindupedia. Deze website is naar eigen zeggen toegewijd aan het onderwijzen van het publiek over alle aspecten van Hindoeïsme, variërend van geschiedenis en filosofie tot huidige gebeurtenissen die Hindoes raken. Ze zijn, naar eigen zeggen, de enige online Hindoestaanse encyclopedie die het publiek een traditioneel perspectief op hun religie en manier van leven voorzien[20]. De website vermeld over Brahmagupta het volgende:

> Een Hindoestaanse wiskundige en sterrenkundige (598-668 na Christus) die het baanbrekende en vruchtbare werk Brahmasphuttasiddhanta schreef dat vele belangrijke uitvindingen van formules en eigenschappen door hem behandelt en dat de primaire bron en medium van de arabieren was om geïntroduceerd te worden tot Hindoestaanse sterrenkunde. Zijn meest bekende en belangrijke geometrische stelling staat bekend als de Brahmagupta stelling naar hem.[21][2]

Gezien de omschrijving van de website is het niet vreemd dat de inhoud een nationalistische insteek heeft. Die nationalistische insteek wil ik ook benadrukken, omdat dit een terugkerend thema zal zijn. We zullen zien dat de mensen die originaliteit aanhangen, allemaal mensen zijn die een sterke band met India hebben.

6.1 Datta en Singh

Datta en Singh zijn de auteurs van [5]. Dit boek wordt tot op de dag van vandaag beschouwt als een van de drie grote werken over de Indiase wiskundegeschiedenis. Over dit werk van Datta en Singh bestaan uiteenlopende meningen. Dit kunnen we bijvoorbeeld zien aan het contrast tussen de boekbespreking [19] en [18]. In [19] zegt de auteur dat Datta en Singh historische feiten negeerden door er vanuit te gaan dat er compleet geen sprake was van buitenlandse invloed was op de Indiase

[2] Ik heb er in deze vertaling voor gekozen om (stijl)fouten in het Engels ook in het Nederlands mee te vertalen.

wiskunde. Dit betekent dat zij per definite onder de aanhangers van de originaliteit vallen. Hierbij wil ik wel opmerken dat Toomer, de schrijver van de boekbespreking, een directe collega was van David Pingree. We zullen later zien dat David Pingree, op dat moment de autoriteit op het gebied van het originaliteitsdebat, volledige originaliteit expliciet verwierp en daarmee is het ook niet verwonderlijk dat Toomer dat ook doet.

Aan de andere kant hebben we Simons, een wiskundig historica. Zij merkt in [18] op dat zij niet de kennis bezit om een volledig oordeel te vellen over de exacte tijd en plek waar wiskundige ideeën bedacht zijn, maar dat de voorzichtigheid van de auteurs vertrouwen geeft dat ze weten waar ze het over hebben. Hierbij plaatst ze wel de opmerking dat Hindoeïstische wetenschappers de neiging hebben om originaliteit van de eigen wetenschap op te eisen.

Enerzijds wordt dus opgemerkt dat de auteurs voorzichtig zijn in hun schrijven, maar anderszijds ook dat zij expliciet volledige originaliteit claimen en dat Hindoeïstische wetenschappers de neiging hebben meer originaliteit te claimen dan de Indiase wetenschap toekomt. Hiermee nemen Datta en Singh een unieke positie in, die ik ook nergens anders tegen ben gekomen.Dit is niet de enige manier waarop in het bijzonder Datta een unieke positie inneemt.

Datta heeft namelijk ook de boekbespreking [4] geschreven over een werk van Kaye, de man die we al tegen zijn gekomen in het hoofdstuk over de tegenstanders van de originaliteitstheorie. Deze boekbespreking van Datta benadrukt nog eens de verschillen van inzicht tussen de twee mannen. Wat ik opvallend vond in vergelijking met veel stukken die ik heb gelezen, zoals [10], is dat de tekst beschaafd is. We hebben al bij Kaye gezien en we zullen nog bij Pingree zien dat uit een diepe passie voor het onderwerp ook wat minder nette woorden geuit kunnen worden. Zo zeggen beide mannen dat hun tegenstander een ronduit slechte historicus is. Datta is het op bepaalde punten duidelijk niet met Kaye eens, maar hij houdt het ook precies daarbij. Ze hebben een andere kijk op de gebeurtenissen en dit is dan ook exact wat Datta benoemt. In de boekbespreking wordt ook een opmerking gemaakt die raakt aan het originaliteitsdebat. In deze opmerking wordt aangegeven dat Kaye verschillende keren buitenlandse invloeden benoemt. Deze invloeden zouden volgens Datta echter Indiase bronnen zijn geweest waar Kaye geen weet van had. Wat mij verder in het bijzonder opviel aan deze boekbespreking is de waardering die Datta naar Kaye uitspreekt voor Kayes werk om het Bakshali manuscript te verklaren. Dit terwijl zij in een conflict over ditzelfde manuscript allebei aan een ander uiterste staan. Dit maakt het respect dat de hele boekbespreking jegens Kaye uitstraalt concreet en laat nog maar eens zien dat een verschil van inzicht geen persoonlijke vijandschap hoeft te betekenen. Deze collegiale waardering voor iemand die compleet aan de andere zijde van het debat staat ben ik verder niet tegengekomen en maakt ook dat Datta een unieke plek inneemt in het debat.

6.2 Sarasvati

Tekkath Amayankottukurussi Kalathil Sarasvati, ook wel T.A. Sarasvati Amma, werd geboren in 1918. Ze studeerde Sanskrit, Engels, wiskunde en natuurkunde aan de universiteit van Madras, de Banaras Hindoe universiteit en de universiteit van Bihar. Haar proefschrift wordt tegenwoordig beschouwd als een van de grote werken over de Indiase wiskundegeschiedenis. Nadat het proefschrift als boek uitgegeven werd, ontving ze veel lof, onder andere over haar behandeling van de formule voor de oppervlakte van de vierhoek van Brahmagupta[6]. De behandeling van de driehoek is voor ons alleen interessant omdat daar de voetnoot vandaan kwam die de aanleiding gaf tot dit onderzoek, zoals we gezien hebben in het voorwoord. We zullen het verder hebben over haar behandeling van de vierhoek. De behandeling van de formule van de vierhoek, en vooral het commentaar dat daar door andere wiskundigen op gegeven is, is de meest uitgebreide die ik heb gevonden. Ik zal nu enkele, voor mij opvallende stukken van deze behandeling nader toelichten.

Als eerste valt op dat sommige Indiase wiskundigen, ook na Brahmagupta's tijd, geen vertrouwen hadden in de oppervlakteformule voor de koordenvierhoek. We lezen hier namelijk dat zij de formule van Brahmagupta bij voorbaat verwierpen, omdat deze geen gebruik maakte van een diagonaal van de vierhoek. Zij waren ervan overtuigd dat je ofwel dom, ofwel de duivel was als je dacht de oppervlakte van een vierhoek te kunnen bepalen zonder de lengte van diagonaal te weten[16, p. 87-88]. Ook vanuit Indiase wiskundigen was er dus enig wantrouwen jegens Brahmagupta's formule.

Over ons onderwerp van discussie, de originaliteit van Brahmagupta's werk, zegt ze dat alhoewel de formule voor de oppervlakte van een driehoek eerder al was ontdekt door Hero van Alexandrië, de waarschijnlijkheid dat Brahmagupta dit overgenomen heeft niet zo groot is. Immers, zo zegt Sarasvati, het is waarschijnlijker dat Brahmagupta eerst de formule voor de vierhoek heeft gevonden en die toen uitgebreidt naar de driehoek en bovendien was de afleiding van de formule heel anders dan die van Hero. Hierbij baseert ze zich op het bewijs en de afleiding van de formule door de school van Aryabhata [16, p. 89]. Dit bewijs hebben we eerder al in 4.1 gezien.

Verder maakt Sarasvati de opmerking dat alle meetkunde die Brahmagupta op heeft geschreven uitgaat van figuren die in een cirkel ingeschreven zijn[16, p. 92]. Als zij hier gelijk in heeft, zou dit een interessant licht werpen op onder andere commentaren die een fout van Brahmagupta zien in het weglaten dat de stelling alleen voor koordenvierhoeken geldt. Dan heeft Brahmagupta namelijk onvermeld deze aanname voor zijn gehele werk gedaan en kan dit ook niet meer als fout gezien worden.

Het werk van Sarasvati geeft een subtiele overtuiging van originaliteit aan. We kunnen dit onder andere zien aan haar verwerping van het idee dat Brahmagupta de formule voor de oppervlakte van een driehoek geleend heeft van Hero. Dat deze opmerking apart van de hoofdtekst wordt geplaatst geeft voor mij twee dingen aan. Ten eerste was de opmerking voor Sarasvati blijkbaar een voetnoot waard, dus het is een besprekenswaardig punt van discussie. Ten tweede geeft dit de subtiliteit waarmee ze de overtuiging van originaliteit in haar werk verwerkt heeft aan. Ze verwerkt het immers niet in de hoofdtekst, maar geeft het als noot, als gedachte mee. Behalve in [8], het artikel van Kaye, heb ik geen kritiek op haar originaliteitsstandpunt kunnen vinden. Sterker nog, Sarasvati wordt alleen maar geroemd om haar werk voor de geschiedenis van de Indiase wiskunde. Zij verschilt hierin van Datta die, hoewel voorzichtig, expliciet orignaliteit claimde. De behandeling van wiskunde, inclusief historische commentaren op die wiskunde, speelt de hoofdrol in haar boek en het originaliteitsdebat is vooral bijzaak. Ook Sarasvati neemt dus een unieke plek in het debat in.

6.3 Colebrooke

Henry Thomas Colebrooke kwam op 15 juni 1765 ter wereld in Londen. In 1783, toen Colebrooke 18 jaar oud was, ging hij naar India. Hier leerde hij Sanskriet en bekleedde hij diverse posities bij de overheid. Toen hij de boeken van Indiase wis- en sterrenkundigen begon te bestuderen, raakt hij ervan overtuigd dat de Indiërs contact hadden gehad met Westerse bronnen. Dit leidde hij vooral af aan de gebruikte terminologie in de boeken, waarbij bepaalde woorden in verdacht grote mate met elkaar overeen kwamen[9, p. 367]. In zijn professionele leven begon Colebrooke als handelsman te ageren tegen het handelsbeleid van de Britse overheid ten aanzien van India, omdat hij ook voor India sympatie had opgebouwd en niet meer voor Groot-Brittannië wilde handelsdrijven ten koste van de Indiërs[9, p. 372]. Enkele jaren later begon Colebrooke met vertaalwerk voor de Britse overheid. Hierin werkte hij intensief samen met de lokale Indiase bevolking en zo kwam hij ook in grote mate met hen en hun ideeën in aanraking.

Colebrooke twijfelde over het vraagstuk van de originaliteit. Sterker nog, dit is een van de weinige controverses waar hij zich in zijn leven in mee heeft laten slepen. John Bentley, die we eerder al gezien hebben als oriëntalist, had op een bepaald moment een artikel gepubliceerd waarin hij het standpunt innam van volledige onoriginaliteit. Hij merkte echter dat Colebrooke niet volledig overtuigd was door zijn argumenten en toen een kritische recensie over het stuk van Bentley gepubliceerd werd, ging Bentley ervanuit dat Colebrooke die geschreven had. Colebrooke voelde zich verplicht op deze volgens hem valse beschuldiging te reageren en dat deed hij als volgt:

> Ik ben geen voorstander geweest, geen advocaat voor Indiase sterrenkunde. Ik heb getracht om aan het publiek, in begrijpelijke vorm, de uitkomsten van mijn onderzoeken erover voor te leggen. Ik heb herhaaldelijk de imperfecties opgemerkt en ik ben klaar om toe te geven dat het geen karige lener is geweest zoals volgens de theorie.[9, p. 388]

Na deze opmerking kan de lezer naar mijn mening terecht zich terecht afvragen waarom ik Colebrooke onder de aanhangers van originaliteit heb geschaard. Dit heeft met twee redenen te maken. De eerste is een andere uitspraak van Colebrooke over algebra waarin hij vaststelde dat:

> Arabische algebra echt punten van gelijkenis met die van de Indiërs had en met die van de Grieken; dat de Diofantische analyse slechts een beetje ontwikkeld was door de Arabieren; en dat, ten slotte, de Indiase meer wetenschappelijk en grondig was dan beide.[9, p. 392]

Met andere woorden, Colebrooke was een bewonderaar van de Indiase wiskunde. Er is nog een andere reden waarom Colebrooke onder de aanhangers van originaliteit is geschaard in deze scriptie. Na lang zoeken is Colebrooke de enige niet-Indiase figuur met een expertise in de geschiedenis van de Indiase wiskunde die in de buurt komt van originaliteit. Zoals we hebben gezien twijfelde hij en was hij er ook van overtuigd dat er enige buitenlandse invloeden waren, maar had hij tegelijkertijd een dusdanige bewondering voor de Indiase wetenschap dat het moeilijk te geloven is dat hij ervan uitging dat de Indiërs een groot deel van hun ontdekking hadden geleend uit andere culturen. In de huidige tijden zouden we hem misschien als aanhanger van de theorie van David Pingree noemen, ware het niet dat Colebrooke al bijna 100 jaar overleden was voordat Pingree ter wereld kwam. Dit laat des te meer zien dat door de geschiedenis heen er ook al genuanceerder meningen bestaan dan afentoe wil blijken.

6.4 Standpunten tot nu toe

We keren nu terug bij de voetnoot uit [16] waar dit onderzoek ook mee begon. We herinneren ons in het bijzonder dat dit een voetnoot was in het boek van Sarasvati over [8], geschreven door Kaye.

We hebben nu beide kanten van het verhaal onderzocht, maar we hebben nog weinig gekeken naar hoe zij in verhouding tot elkaar staan. Dit citaat geeft de essentie van ons vraagstuk weer. Het debat draait erom hoe Brahmagupta aan zijn oppervlakteformule voor de koordenvierhoek kwam. We hebben tot nu toe twee kampen bestudeerd. Namelijk zij die denken dat Brahmagupta de formule niet zelf heeft bedacht en zij die denken dat Brahmagupta de formule wel zelf heeft bedacht. We zullen nu de argumenten die we eerder gezien hebben op een rij zetten.

We zullen eerst terugkeren naar de tegenstanders van de originaliteit, zoals we die hebben leren kennen in hoofdstuk 5. Kaye voert als hoofdargument aan dat Brahmagupta niets snapt van wat hij zelf opgeschreven heeft. Om dit argument te illustreren haalt hij aan dat Brahmagupta niet passende voorbeelden gebruikt, een onafgemaakt voorbeeld geeft en bovenal dat Brahmagupta zijn eigen tekst bekritiseert. Als een wiskundige zo duidelijk zijn eigen theorie niet begrijpt en er zijn buitenlandse bronnen waar hij de theorie vandaan gehaald kan hebben, dan moet hij dit dus ook wel gedaan hebben, zo is de gedachte.

Zojuist, in hoofdstuk 6.2, hebben we gezien dat Sarasvati daarentegen zegt dat Brahmagupta, hoewel hij mogelijk het resultaat van Hero kende, onafhankelijk daarvan de formule voor de oppervlakte van de koordenvierhoek af heeft geleid. Dat hij daarbij niet specifiek benoemt dat hij het over een koordenvierhoek heeft is niet gek volgens Sarasvati, aangezien hij in al zijn werken uitgaat van koordenvierhoeken in plaats van een willekeurige vierhoek. Sarasvati gaat er hierbij vanuit dat de formule afgeleid is op een soortgelijke manier als we in het bewijs van de school van Aryabhata terug kunnen vinden.

Ook komt het voor dat een van onze hoofdrolspelers op een andere reageert. Zo zagen we in hoofdstuk 6.1 dat Datta Kaye onwetendheid verwijt, omdat Kaye bepaalde Indiase bronnen niet zou kennen die zijn argumenten uit de wind zouden slaan. Colebrooke krijgt van Bentley de beschuldiging dat hij een slechte recensie over Bentleys werk zou hebben geschreven omdat hij niet volledig overtuigd was van zijn argumenten, zo hebben we in hoofdstuk 6.3 . Al met al zien we een duidelijke strijdigheid tussen deze kampen.

Een interessante opmerking over de discussie die hieruit voortvloeit is dat de voor- en tegenstanders niet tegen elkaar, maar langs elkaar discussiëren. Ik zal uitleggen wat ik hiermee bedoel. Voorstanders van originaliteit zeggen dat, hoewel de formule voor de driehoek eerder al bekend was, dit niet hoeft te betekenen dat Brahmagupta het niet zelf heeft kunnen bedenken. Tegenstanders van originaliteit zullen aanhalen dat de wiskunde van Hero minimaal een beetje bekend moet zijn geweest bij Brahmagupta. Met andere woorden, de ene kant bediscussieerd of een formule die al bedacht is onafhankelijk nogmaals bedacht kan worden, terwijl de andere kant bediscussieerd dat de wiskunde van Hero wel bij Brahmagupta bekend moest zijn. Er worden dus twee compleet verschillende discussies gevoerd met overlappende vlakken zoals de aanwezigheid van kennis uit Griekenland in India. We zullen hierna bij David Pingree zien dat deze twee discussies weer samengebracht worden wanneer hij zegt dat er zowel buitenlandse invloed was, maar ook al bestaande wiskunde onafhankelijk een tweede keer bedacht kan worden.

7 David Pingree

David Pingree werd geboren op 2 januari 1933 en overleed op 11 november 2005. In zijn academische carrière, die vijftig jaar in beslag nam, was zijn onderzoeksgebied de ontwikkeling van wiskunde, sterrenkunde en gerelateerde exacte wetenschappen van het klassieke Mesopotamië tot vroegmodern Europa en India. Zijn voornaamste interesse was hoe wetenschappelijke ideeën van de ene cultuur in de andere terecht kwamen en de veranderingen die deze ideeën in dat proces ondergingen[13, p. 1-2]. Naar eigen zegggen werd deze interesse gewekt in het Vaticaan. Hij vond in de Vaticaanse bibliotheek een Grieks manuscript met een kanttekening die verwees naar Indiase astrologische ideeën. Ook vond hij een Indiaas manuscript, waarin vertalingen stonden van Griekse termen. Het Griekse materiaal was vertaaald uit het Arabisch, dus hij trok de conclusie dat de Griekse astrologie via India naar Arabië en van daaruit naar Byzantium was overgekomen. Over deze transmissie van wetenschap kon hij echter weinig materiaal vinden, dus hij besloot het zelf te onderzoeken[2, p. 517]. Dit is uiteindelijk zijn levenswerk geworden.

We zullen later ook zien dat Pingree noch een aanhanger, noch een tegenstander in het debat van originaliteit was. Hij advocateerde voor een genuanceerder beeld, waarbij zowel erkend werd dat er buitenlandse invloed was geweest op de Indiase wetenschap, als dat de Indiërs een unieke vorm van wetenschapsbeoefening hadden die tot grote resultaten heeft geleid.

Pingree heeft een aantal keer over de formule van Brahmagupta en ons vraagstuk over orignaliteit geschreven. We zullen hier nu naar kijken om Pingrees standpunten beter te leren kennen.

Pingree merkt op dat de wijze van wiskundebeoefening uit het oude India uniek was. In plaats van alles rigoreus te bewijzen zoals de Grieken dat deden, werkten ze aan de hand van voorbeelden. Ze lieten met behulp van een voorbeeld zien dat hun oplossing klopte onder bepaalde aannames. Als het vervolgens voor meerdere voorbeelden werkte, moest er wel een kern van waarheid inzitten.

Deze aanpak bracht automatisch met zich mee dat de Indiërs ook tevreden waren met een benadering, als die maar goed genoeg werkte om het beoogde doel te bereiken. Afentoe werd daardoor een 'ontdekking' gedaan, die helemaal niet waar bleek. Het merendeel was echter goed genoeg en zo maakten de Indiërs grote stappen in de ontwikkeling van wiskunde.

Dit konden ze, ondanks dat Indiërs, waaronder Brahmagupta, de gewoonte hadden geen beweegredenen of afleidingen te geven van hun ontdekkingen. Een andere obstakel dat de compacte documentatie van de Indiërs opwerpt is het ontbreken van de benoeming van bepaalde noodzakelijke aannames in de tekst. We denken hierbij terug aan Brahmagupta, die nergens vermeldt dat zijn formule alleen werkt voor koordenvierhoeken. We hebben eerder gezien dat Sarasvati het duidelijk achtte dat Brahmagupta zijn formule alleen voor koordenvierhoeken bedoelt, aangezien hij in zijn complete werk alleen maar met koordenvierhoeken werkt. Kaye echter, zag dit als een teken dat Brahmagupta zijn eigen formule niet goed begreep omdat hij blijkbaar de grenzen ervan niet inzag en benoemde.

In de tijd van Brahmagupta zullen deze aannames beter bekend zijn geweest dan nu, maar dan nog is het verwonderlijk dat met zo weinig tekst en uitleg iedere Indiase wiskundige weer meer en moeilijker wiskunde dan zijn voorganger uit kon vinden. We kunnen hierbij opmerken dat met een werkwijze die zo enorm verschilt van die van de oude Grieken, het ook niet verwonderlijk is dat mensen met grote bewondering voor de Griekse wiskundebeoefening niet direct gecharmeerd zijn van deze methode van de Indiërs. Deze methode klinkt immers alles behalve rigoreus en er wordt al helemaal niet vanuit axioma's gewerkt om een bouwsel van stellingen en bewijzen te creëren. De beoefening van de Indiërs doet mij dan ook veel meer denken aan empirische wetenschap, waar wiskunde nu overigens niet onder wordt geschaard.

Dat Pingree bewondering had voor de wiskundebeoefening van de Indiërs, blijkt uit zijn opmerking dat het des te meer bijzonder is dat Indiase wiskundigen niet alleen begrepen wat hun voorganger gedaan had, maar er ook nog op voort konden bouwen, zoals ook ik al eerder had geconcludeerd. Hier plaatst Pingree nog de noot bij dat het niet alleen knap is om nieuwe wiskunde te bedenken op deze manier, maar dat het ook benoemenswaardig is dat de Indiase leerlingen wiskunde konden leren, terwijl er maar zo weinig opgeschreven werd[11, p. 46-47]. Ik denk hierbij ook terug aan de middelbare school en het begin van de universitaire wiskunde, waar uitwerkingen en een antwoordenboek door de meeste studenten als onontbeerlijk wordt ervaren. Dit doet mij niet alleen de uitvinders van Indiase wiskunde bewonderen, maar zeker ook de leerlingen die met zo weinig hulpmiddelen de wiskunde hebben leren beheersen.

Pingree merkt ten slotte samenvattend het volgende op:

> In het kort is het duidelijk dat Indiase wiskundigen niet in het minst gehinderd waren in het oplossen van vele soorten significante problemen door wat de niet-Indiër als enorme obstakels in de perceptie en expressie van wiskundige ideeën voor kan komen[11, p. 47].

In het hele artikel komt Pingree enorm lovend over over de Indiase wiskundebedrijving. Op basis van dit artikel zou ik hem classificeren als een aanhanger van originaliteit. Hij geeft immers aan dat Indiase wiskundigen op hun eigen manier geniaal waren en benoemt geen invloed van buitenaf, afgezien van een korte opmerking aan het begin van artikel die stelt dat wetenschap altijd al van de ene naar de andere cultuur is overgedragen. In [13, p. 2-3] vertelt Plofker echter dat Pingrees soms gedurfde uitspraken niet altijd gewaardeerd werden door aanhangers van originaliteit. Deze stellingnames van Pingree waren dan gebaseerd op niet zo bekende bronnen die uitgebreider onderzocht moeten worden voor we er echt conlusies uit mogen trekken, aldus Plofker. Dit alles maakte Pingree tot een controversiële figuur. Hij werd bewonderd door velen en afgekraakt door even zo velen. Sommigen gaan daarbij zo ver als hem beschuldigen van racisme, omdat hij er bij voorbaat vanuit zou gaan dat alle Indiase wetenschapskennis geleend was uit andere culturen[22]. Pingree echter, ageerde sterk tegen het beeld dat hij op een lijn geplaatst kon worden met de oriëntalisten die we eerder hebben besproken. Hij reageerde hier zo fel op dat hij het artikel [10] heeft geschreven waarin hij deze hellenofielen wegzet als incapabele historici.

We zullen nu kort dit artikel bespreken. We herinneren ons de oriëntalisten Kaye en Bentley, die we eerder hebben gezien als tegenstanders van originaliteit. Pingree noemt wetenschappers met de denkbeelden van Kaye en Bentley Hellenofielen, een aanduiding waarvan hij aangeeft deze zelf verzonnen te hebben. Een Hellenofiel wordt gedefinieerd als iemand die lijdt aan een vorm van dwaasheid die hem of haar verblindt voor de historische waarheid. De hellenofiel creëert daarmee in zijn of haar verbeelding het idee dat een of meerdere onjuiste beweringen waar zijn, aldus Pingree.

Hij geeft vier kenmerken van de Hellenofiel. Hellenofielen zijn ervan overtuigd dat de Grieken wetenschap uit hebben gevonden. Ook zouden de Grieken de weg naar de waarheid, namelijk onze moderne wetenschappelijke methoden, hebben gevonden. Zij leven in de overtuiging dat de enige echte wetenschappen die zijn die in Griekenland zijn begonnen en als laatst geloven zij dat de enige ware manier van wetenschapsbeoefening is om methoden te gebruiken die wij vandaag ook gebruiken en die de Grieken hebben uitgevonden. Dit sluit aan bij een verdere typering die

Pingree geeft: hellenofilie komt voort uit het idee van superioriteit van de westerse mens en de eigen tijd. Niet alleen zouden alle mensen zoals zij moeten zijn, de overtuiging is dat zij dat ook zijn en waren. Dat getuigt mijns inziens van weinig respect voor de wetenschappers en de wetenschap uit het verleden. Zij hadden immers minder kennis, vaak ook minder toegang tot de kennis van hun voorgangers dan wij nu hebben, bijvoorbeeld door het gebrek aan wereldwijde kennisuitwisseling, en bovendien hadden zij hun eigen onderzoeksmethodes ontwikkelt die met deze kijk direct als ongeldig en fout worden verklaart. We hebben dit eerder al gezien bij het bespreken van de Indiase wiskundebeoefening.

Pingree advocateert hier voor een globaler wereldbeeld, waarbij alle culturen uiteindelijk leren van elkaars ontdekkingen. Ook pleit hij voor de consensus dat er niet een 'correcte' manier is om iets te ontdekken. Dit sluit ook aan bij zijn bewondering voor de Indiase wiskundebeoefening die we zojuist gezien hebben. Dat de methode anders is dan wij op de universiteit leren, betekent niet dat het resultaat niet juist kan zijn. We herinneren ons dat een van de proposities voor ontwikkelingen in de geschiedenis van de wiskunde van Kaye was dat onafhankelijke ontwikkelingen niet identiek kunnen zijn. Dit impliceert dat er meer wegen naar Rome, of in dit geval een wiskundig resultaat leiden. Tegelijkertijd zou, volgens Pingree, van Kaye een manier anders dan de Griekse weg automatisch niet correct zijn. Daarmee zouden dus inderdaad, zoals Pingree Kaye ook beticht, alle niet-Griekse wegen naar wiskunde gesloten worden.

Opvallend is de weg die David Pingree ingeslagen is met zijn kijk op het originaliteitsdebat zoals we dat besproken hebben. Waar de aanhangers en tegenstanders van originaliteit vooral twisten over of er buitenlandse inmenging in de Indiase wiskundegeschiedenis is geweest en over de al dan niet aanwezige intelligentie van Indiase wiskundigen, neemt David Pingree een interessant standpunt in. We hebben gezien dat hij er zowel van overtuigd was dat wetenschap nooit grenzen gekend heeft, als dat de Indiase wiskundigen inventief waren en uniek in hun methoden. Deze beweringen zijn bij hem niet betwistbaar, ze zijn juist het uitgangspunt voor herkenning en verbazing bij en over Indiase wiskunde en de ontwikkeling daarvan.

Zonder kennisoverdracht leert niemand wiskunde en zonder creatieve, inventieve mensen, die ooit begonnen zijn met wiskunde leren, kan geen nieuwe wiskunde uitgevonden worden om over te dragen. Overdracht en inventiviteit gaan hand in hand en zijn beiden noodzakelijk voor de voortgang van de wiskunde. David Pingree erkende dat en nam dat als uitgangspunt om te kijken naar de prachtige manieren waarop dit gebeurde en de mooie resultaten die het opbracht. Dat is ook waarom ik zijn toevoeging aan dit debat zo mooi vindt. Hij geeft iedereen gelijk en tegelijkertijd geeft hij niemand gelijk, maar bovenal kijkt hij naar het aspect dat mijns inziens in het hele debat verloren is gegaan, namelijk hoe mooi de wiskunde die eruit is gevloeid is.

8 Conclusie

We hebben nu het hele originaliteitsdebat gezien, zoals het behandeld is in deze scriptie. Dit alles hebben we onderzocht om een antwoord te vinden op ons onderzoeksdoel. We wilden weten of Brahmagupta zijn formule voor de oppervlakte van een koordenvierhoek zelf bedacht heeft, of dat hij dat niet heeft gedaan.

We hebben eerst gekeken naar de tegenstanders in het originaliteitsdebat. Zij redeneren dat Brahmagupta, omdat hij geen bewijzen gaf en een aantal fouten in zijn boek had staan, niet goed snapte wat hij opschreef en dat hij daarom wel inspiratie van buitenaf opgedaan moet hebben.

De voorstanders in ons debat zeggen juist dat de unieke wijze van wiskundebedrijving in het oude India zorgde voor deze resultaten, zoals in het niet expliciet benoemen van de koordenvierhoek. Brahmagupta was in hun ogen juist een briljante wiskundige, die met zijn ontdekkingen grote stappen heeft gezet in de wiskundeontwikkeling. Zij staan er echter ook om bekend voor alle wetenschap uit India volledige originaliteit op te eisen, ook als dat niet terecht is.

Ten slotte hebben we gekeken naar het gedachtengoed van David Pingree. We hebben gezien dat hij een tussenweg advocateert met erkenning van zowel de wetenschapsoverdracht tussen culturen als de kwaliteit en uniciteit van de Indiase wiskundebedrijving. Met andere woorden, David Pingrees standpunt is veel breder dan dit debat. Hij staat voor herkenning en verwondering bij de wiskundegeschiedenis en een nieuwe waardering voor de ontwikkeling van de wiskunde door de tijden en culturen heen.

Of Brahmagupta zijn formule volledig zelf bedacht heeft weet ik niet. Wel wil ik concluderen dat beide zijden van het verhaal hun sterke en zwakke punten hebben, zoals we in deze scriptie hebben gezien. Ze voeren een debat vanuit hun eigen achtergrond en standpunten en komen er aan het eind niet uit. Wat dan helpt, en dat hebben we ook gezien, is een frisse blik op een vastgeroest debat, zoals die van David Pingree. Misschien komt er ooit nog zo'n frisse blik die echt iedereen weet te overtuigen.

9 Nawoord

Graag zou ik u, de lezer, precies vertellen waar Brahmagupta's formule zijn oorsprong heeft gevonden. Graag zou ik u dat bevredigende gevoel van een duidelijk, pasklaar en sluitend eindantwoord geven. Vanuit dit standpunt moet ik u helaas mededelen dat ik die mooie conclusie niet heb. Dit is voor de lezer die snakte naar duidelijkheid over de oorsprong van deze formule mogelijk teleurstellend, maar ik ben er zelf niet rouwig om.

De heer van den Ban heeft zijn studenten, waaronder ikzelf, ooit tijdens een college Functies en Reeksen verteld dat je een wiskundige bent als je je een wiskundige voelt. Na drie jaar studeren, opgaven maken en bewijzen voltooien die eerst onmogelijk leken, voel ik me een wiskundige. Net als de meeste wiskundigen hou ik van duidelijkheid, van het zwart-witte aspect dat de wiskunde heeft. Een bewijs klopt of het klopt niet en daar is het dan ook klaar mee. Het lag dan ook niet bijzonder voor de hand dat ik mij juist aangetrokken voelde tot de geschiedenis van de wiskunde.

Ik leerde al tijdens het vak Geschiedenis van de Wiskunde dat niets is wat het lijkt en dat het vakgebied alles behalve zwart-wit is. Wij kunnen immers niet in een tijdmachine stappen om te kijken hoe het nou echt gebeurd is en zelfs als we dat zouden kunnen zou ons verslag net zo gekleurd zijn als de verslagen die we wel hebben. Iedereen heeft immers zijn eigen standplaatsgebondenheid, wij nu net zo goed als zij zoveel honderden jaren geleden. Dit hebben we tijdens de scriptie bijvoorbeeld gezien doordat alle voorstanders van de originaliteit een sterke band met India hebben en de tegenstanders juist een koloniale achtergrond. Tijdens het schrijven van deze scriptie heb ik dat dus keer op keer mogen ervaren en ik heb hier ontzettend veel van geleerd.

Iedere keer dat de voor- of tegenstanders van de originaliteit me overtuigd hadden, las ik iets anders waardoor ik toch weer ging twijfelen. En andersom, iedere keer dat ik een argument las dat sloeg als een tang op een varken, kwam ik daarna een argument tegen dat wel hout sneed. Aan het begin van het scriptieproces dacht ik dat ik met de oppervlakte van een koordenvierhoek een relatief eenvoudig onderwerp had gekozen. Ik deed immers niets in de categorietheorie of differentiaalmeetkunde en in het lijstje met onderwerpen van mijn medescriptieschrijvers kwamen maar weinig bekende woorden voor. Ik had het fout. Nooit had ik kunnen bevroeden dat achter een formule die zo eenvoudig voorkomt zo'n verhaal schuil zou gaan. Juist de uitdaging van de geschiedenis en het bijzondere verhaal dat achter deze formule schuilging maakte het zo boeiend. Alles heeft een verhaal en alle verhalen hebben meerder kanten. De geschiedenis geeft hierom, ook bij wiskunde, geen duidelijk antwoord. Ik heb gedurende mijn hele scriptieperiode vol herkenning en verbazing mogen kijken naar wat ik tegenkwam en iedere dag weer was het spannend wat ik tegen zou komen. Ik mag dan misschien geen pasklaar antwoord op de vraag over de originaliteit van de formule van Brahmagupta gevonden hebben, maar ik heb meer geleerd dan ik vantevoren had kunnen vermoeden en ik concludeer deze scriptie met een alleen maar groeiende liefde voor de wiskunde en haar geschiedenis.

Referenties

[1] E.J. Atzema, From Brahmagupta to Euler: On the formula for the area of a cyclic quadrilateral, *Bulletin Journal of the British Society for the History of Mathematics* **(1)30** (2014),20-40.

[2] William M. Calder III, Stephan Heilen, David E. Pingree: An Unpublished Autobiography,*Greek, Roman and Byzantine Studies* **47** (2007), 515–523.

[3] H.T. Colebrooke, Brahmagupta, Bhaskaracarya, *Algebra, with Arithmetic and mensuration from the Sanscrit of Brahmegupta and Bháscara; translated by Henry Thomas Colebrooke.*. Sändig, Walluf, 1973.

[4] B. Datta, A short review of Kaye. The Bakshali manuscript–A study in Medieval mathematics *Bulletin of the American Mathematical Society* **35** (1929), no. 4, 579–580.

[5] B. Datta, A.N. Singh, *History of Hindu mathematics: A Source Book Part I; numeral notation and aritmetic*, Asia Publishing House, Bombay, 1935.

[6] R.C. Gupta, Obituary T.A. Sarasvati Amma, *Indian Journal of History of Science*, **(3)38** (2003), 317–320.

[7] T. Hayashi, "Indian mathematics", in I. Grattan-Guinness (red), *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, Hst. 1.12, London 1994.

[8] G.R. Kaye, The source of Hindu mathematics, *The Journal of the Royal Asiatic Society of Great Britain and Ireland* (1910), 749–760.

[9] F. Max Müller, *Chips from a German workshop*. Charles Scribner's sons, New York, 1881.

[10] D. Pingree, Hellenophilia versus the Hisory of Science. *Isis* **83** (1992), no. 4, 554–563.

[11] D. Pingree, The logic of non-Western Science: Mathematical Discoveries in Medieval India. *Daedalus* **132** (2003) no. 4, 45–53.

[12] K. Plofker, *Mathematics in India*. Princeton University Press, Princeton, 2009.

[13] K. Plofker, "Biographical Sketch of David Pingree", in C.S. Seshadri (red), *Studies in the History of Indian Mathematics*, Hst. , New Delhi 2021.

[14] H.N. Randle, George Rusby Kaye, *The Journal of the Royal Asiatic Society of Great Britain and Ireland*, (1930), no. 1, 221–223.

[15] E.W.Said, *Orientalism*. Penguin Books India, Londen, 1995.

[16] T.A. Sarasvati Amma, *Geometry in Ancient and Medieval India*, Motilal Banarsidass Publishers Private Limited, Delhi, 1999.

[17] C.J. Scriba, P. Schreiber, *5000 years of geometry*. Springer Basel, Heidelberg, 2015.

[18] L.G. Simons, Review: History of Hindu Mathematics– A Source Book. Part I. Numeral Notation and Arithmetic. By Bibhutibhusan Datta and Avadhesh Narayan Singh. *The American Mathematical Monthly* **43** (1936), no. 6, 367–368.

[19] G.J. Toomer, Boekbespreking van *History of Hindu mathematics: A source book. Part I: Numerical notation and arithmetic. Part II: Algebra*, American Mathematical Society, 2021.

[20] *Hindupedia* http://www.hindupedia.com/en/Main_Page (geraadpleegd op 13 april 2021).

[21] *Brahmagupta* http://www.hindupedia.com/en/Brahmagupta (geraadpleegd op 13 april 2021).

[22] *Indian Astronomy and the Yavanajataka Date Fabrication* http://indiafacts.org/indian-astronomy-and-the-yavanajataka-date-fabrication/ (geraadpleegd op 20 april 2021).