De advertentiemarkt van zoekmachines als speltheoretisch model

E.C.J. van der Laan

Bachelor Scriptie Wiskunde
21 januari 2021

Begeleider:
Dr. M. Ruijgrok

Universiteit Utrecht

Inhoudsopgave

1 Inleiding

Zoekmachines als Google en Yahoo! maken per jaar miljarden euro's winst. Dit doen ze door advertenties te laten zien aan gebruikers. Advertentieplekken worden aangeboden per zoekterm, dus de advertenties die je te zien krijgt, hangen af van waarop je zoekt. Daarom is het voor adverteerders effectief om een advertentie te plaatsen. De advertentieplekken per zoekterm worden geveild. In deze scriptie zal onderzocht worden hoe deze advertentiemarkt per zoekterm gezien kan worden als een spel.

In deze scriptie zal worden gekeken naar drie spelen die elk de advertentiemarkt van zoekmachines op een andere manier benaderen.

In sectie 2 bekijken we het toekenningsspel. Dit coöperatieve spel is een variant van matching waarbij geld een speciale rol speelt. Bij matching worden spelers uit twee groepen aan elkaar toegekend, waarbij getracht wordt een toekenning te vinden die de maximale winst geeft. Hier voegen we vervolgens een prijsmechanisme aan toe om een markt te krijgen waarin deze maximale toewijzing behouden blijft.

In sectie 3 zullen we kijken naar het VCG(Vickrey-Clarke-Groves)-mechanisme. Dit mechanisme wijst spelers op basis van hun bod een advertentieplek toe. De prijzen worden berekend door te kijken wat de aanwezigheid van een speler de andere spelers kost. Er zal ook gekeken worden naar een speciale eigenschap van het VCG-mechanisme: Waarheidzeggen is dominant.

In sectie 4 zal de GSP(Generalized Second Prize)-veiling behandeld worden. We zullen kijken naar een speciaal soort Nash-evenwichten en zullen de eigenschappen van deze evenwichten bekijken.

In sectie 5 zullen GSP vergelijken met het VCG-mechanisme en met het toekenningsspel. De GSP-veiling lijkt erg op de veiling met het VCG-mechanisme, maar de eigenschappen ervan verschillen erg. Daarentegen verschillen de GSP-veiling en het toekenningsspel erg, maar blijken deze dezelfde evenwichten te hebben.

2 Het toekenningsspel

In dit hoofdstuk zullen we het toekenningsspel bekijken, zoals beschreven door Shapley en Shubik [1] en door Roth en Sotomayer [2]. In dit coöperatieve spel is een vorm van matching waarbij geld een belangrijke rol speelt. Er zijn twee groepen, kopers en verkopers. Elke speler wil slechts één object kopen of verkopen. Er wordt gekeken naar het toekennen van koppels van één verkoper en één koper zodat een maximale winst behaald kan worden. We kunnen een karakteristieke functie vinden voor de totale waarde van het spel, die we met Linear Programming (LP) kunnen maximaliseren. Vervolgens kennen we met een prijsmechanisme aan elk object een prijs toe zodat voor kopers het object waaraan ze in de optimale toekenning gekoppeld zijn, meer winst geeft dan elk ander object.

2.1 Opbouw van het spel

In dit spel hebben we twee groepen spelers: De verkopers $P = \{p_1, ..., p_m\}$ en de kopers $Q = \{q_1, ..., q_n\}$. Deze twee groepen zijn disjunct. Elke speler $p_i \in P$ heeft één object om te verkopen en elke speler $q_j \in Q$ wil maximaal één object kopen. De objecten in dit spel zijn ondeelbaar, dus een object kan niet voor de helft aan één speler verkocht worden en voor de andere helft aan een andere speler.

Elke speler $p_i \in P$ waardeert zijn object met de geldwaarde c_i. Deze waarde wil hij dus ook minstens ontvangen voor zijn object, anders zal hij het niet verkopen. Elke speler $q_j \in Q$ waardeert het object van speler p_i met de geldwaarde r_{ij}. In dit spel zijn geldtransacties mogelijk tussen alle spelers, maar de objecten kunnen alleen van een speler in P naar een speler in Q overgedragen worden.

Als voor een koppel van een speler $p_i \in P$ en een speler $q_j \in Q$ geldt dat $r_{ij} > c_i$, dus de koper vindt het object van speler p_i meer waard dan speler p_i zelf, dan is er een verkoop mogelijk van het object waarbij beide spelers winst behalen. Als p_i het object meer waard vindt dan q_j, dan zullen deze spelers nooit tot een overeenkomst kunnen komen. Immers is elk bedrag dat p_i voor het object zou willen ontvangen groter dan r_{ij} en kiest q_j er dan altijd voor om het object te niet te kopen. Daarom is de winst van het koppel p_i, q_j gelijk aan $\alpha_{ij} = \max\{0, r_{ij} - c_i\}$.

Voorbeeld. *We bekijken een markt voor auto-verkoop. In deze markt willen de verkopers p_1, p_2 en p_3 elk een auto verkopen en de kopers q_1, q_2, q_3 en q_4 elk een auto kopen. De spelers hebben de volgende waardes voor de verschillende auto's:*

Tabel 1: Waardes in 1.000 euro

Auto's (i)	*Waarde verkopers (c_i)*	*Waarde kopers (r_{i1})*	*(r_{i2})*	*(r_{i3})*	*(r_{i4})*
1	16	14	22	19	18
2	13	18	15	20	14
3	16	17	20	18	21

We kunnen nu de winst van koppels van twee spelers berekenen: $\alpha_{ij} = \max\{0, r_{ij} - c_i\}$. Dit geeft ons de volgende tabel:

Tabel 2: Winst (a_{ij}) per koppel

	q_1	q_2	q_3	q_4
p_1	0	6	3	2
p_2	5	2	7	1
p_3	1	2	2	5

2.2 De karakteristieke functie

We zullen nu waardes van een bepaalde groep van kopers en/of verkopers bekijken. Een groep van kopers en/of verkopers noemen we een coalitie. Elke verzameling in de machtsverzameling $\mathscr{P}(P \cup Q)$ is een coalitie. De verzameling van alle coalities heet $\mathcal{S}$ en is gelijk aan $\mathscr{P}(P \cup Q)$.

We gaan nu een karakteristieke functie $v : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^+$ zoeken, die voor alle coalities $S \in \mathcal{S}$ de waarde van het spel geeft. De waarde van een spel is gelijk aan de som van de winst van alle spelers. Merk op dat een speler er altijd voor kiezen niets te doen en daarmee een totale winst van 0 te behalen. De winst van een speler zal daarom nooit negatief zijn en de totale waarde van een spel zal dus ook nooit negatief zijn.

Op de vorige pagina zagen we al dat $v(S) = \alpha_{ij}$ als $S = \{p_i, q_j\}$ voor een $p_i \in P$ en een $q_j \in Q$. In de lege coalitie $S = \emptyset$ zit geen speler, dus zal er geen winst gemaakt worden en dus geldt er dan $v(S) = 0$.

Zodra een coalitie enkel bestaat uit spelers in P, dan kan er geen transactie plaatsvinden die winstgevend is voor beiden partijen, immers zijn er geen spelers die een object willen kopen. In dit geval is de winst van de coalitie $v(S) = 0$. Hetzelfde gaat op zodra de coalitie bestaat uit enkel spelers in Q, immers is er niemand die iets verkoopt. Dus ook in dat geval geldt dat $v(S) = 0$.

Omdat alle objecten ondeelbaar zijn, zijn er maar twee mogelijke transacties: geldtransacties tussen twee willekeurige spelers en het overdragen van een object tussen één speler uit P en één speler uit Q. Een geldtransactie tussen verschillende spelers maakt voor de waarde van het spel niet uit, immers is het winst van de ene speler gelijk aan het verlies van de andere speler. Bij het overdragen van een object neemt de waarde van het spel wel toe, want de verkoper vindt het object minder waard dan de koper.

Elke speler koopt of verkoopt slechts één object en daarom kunnen we de waarde van het spel berekenen door een toekenning te vinden van verkopers aan kopers, zodat een maximale winst behaald kan worden wanneer de verkoper zijn object overdraagt aan de toegekende koper. We zien dat

$$v(S) = \max\{\alpha_{a_1 b_1} + \alpha_{a_2 b_2} + ... + \alpha_{a_k b_k}\}$$

waarbij het maximum genomen wordt over alle mogelijkheden voor $p_{a_1}, p_{a_2}, ..., p_{a_k} \in S \cap P$ en $q_{b_1}, q_{b_2}, ..., q_{b_k} \in S \cap Q$.

2.3 Het LP-probleem en de duale vorm

We hebben opgemerkt dat de waarde van het spel alleen afhankelijk is van de "koppels" die gemaakt kunnen worden tussen een speler in P en een speler in Q. Om een optimale toewijzing te vinden voor de hele markt, willen we $v(S)$ maximaliseren voor $S = P \cup Q$. Met behulp van Linear Programming (LP) kunnen we dit oplossen. We zullen eerst het LP-probleem fomuleren.

We introduceren de variabelen $x_{ij} \geq 0$, die geïntepreteerd kunnen worden als de kans dat er het koppel van $p_i \in P$ en $q_j \in Q$ ontstaat.

We krijgen dan gelijk de volgende twee voorwaardes:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq 1 \text{ voor alle } 1 \leq j \leq n, \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq 1 \text{ voor alle } 1 \leq i \leq m. \tag{2}$$

De kans dat een speler aan een andere wordt gekoppeld is immers niet groter dan 1.

Het doel dat we willen bereiken is het vinden van de maximale waarde van het totale spel. Dit geeft ons het volgende LP-probleem:

$$\text{Maximaliseer } \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \alpha_{ij},$$

waarbij $x_{ij} \geq 0$ en aan voorwaardes (1) en (2) voldaan wordt.

Dantzig [3, pag. 318] heeft laten zien dat die maximum enkel wordt bereikt voor $x_{ij} = 0$ of $x_{ij} = 1$ voor alle i, j. Dit betekent dat het LP-probleem een oplossing geeft waarbij er koppels worden gevormd tussen spelers in P en spelers in Q. Dus geeft de oplossing van het LP-probleem dezelfde waarde van het spel als $v(S)$ voor $S = P \cup Q$.

Zoals bij elk LP-probleem, bestaat er een duale vorm. Bij deze introduceren we variabelen $u_1 \geq 0, ..., u_m \geq 0, v_1 \geq 0, ..., v_n \geq 0$, die beschouwd kunnen worden als de winst voor spelers $p_1, p_2, ..., p_m$ en $q_1, q_2, ..., q_n$ respectievelijk. Dit geeft ons de duale vorm van het LP-probleem:

$$\text{Minimaliseer } \sum_{i=1}^{m} u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j$$

waarbij $u_1 \geq 0, ..., u_m \geq 0, v_1 \geq 0, ..., v_n \geq 0$ en $u_i + v_j \geq \alpha_{ij}$ voor alle $1 \leq i \leq m$ en $1 \leq j \leq n$. We zien dat er een verdeling van de minimale winst wordt gezocht, terwijl elk koppel p_i en q_j wel minstens zijn waarde a_{ij} krijgt en geen enkele speler verlies draait (zijn winst is altijd minstens 0).

Dantzig [3, pag. 129] vertelt ons dat de oplossingen voor deze twee problemen dezelfde totale waarde hebben. Deze waarde is zoals eerder opgemerkt dus ook gelijk aan de waarde $v(S)$ voor $S = P \cup Q$.

Laat $\{x^*_{ij} : 1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq m\}$ een oplossing voor het LP-probleem zijn en laat $\{u^*_1, ..., u^*_m, v^*_1, ..., v^*_n\}$ een oplossing zijn voor het duale LP-probleem. We zien dan dat:

$$v(P \cup Q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x^*_{ij} \alpha_{ij} = \sum_{i=1}^{m} u^*_i + \sum_{j=1}^{n} v^*_j \tag{3}$$

In de kern van het toekenningsspel zitten verzamelingen van winstvariabelen $\{u_1, ..., u_m, v_1, ..., v_n\}$ die aangeven hoeveel winst elke speler behaalt in een toekenning waarbij de maximale totale winst $v(P \cup Q)$ wordt behaald. De oplossingen in de kern van het toekennigsspel kunnen we vergelijken met de oplossingen van het duale LP-probleem.

Stelling 2.1. *De kern van een toekenningsspel is hetzelfde als de oplossingsruimte van het duale LP-probleem. [1]*

Bewijs. Laat $u_1, ..., u_m, v_1, ..., v_n$ een oplossing van het duale LP-probleem zijn. Deze oplossingsvector zit in de kern van het spel als de oplossing haalbaar (feasible) is en elke coalitie minstens de waarde van de coalitie zelf verkrijgt, dus $\sum_{p_i \in S \cap P} u_i + \sum_{q_j \in S \cap Q} v_j \geq v(S)$ voor elke coalitie $S \in \mathcal{S}$.

Bij het duale LP-probleem hebben we gezien dat $u_i + v_j \geq \alpha_{ij}$ voor alle $1 \leq j \leq n$ en $1 \leq i \leq m$. Laat $S \subset P \cup Q$ een willekeurige coalitie zijn met waarde $v(S) = \alpha_{a_1 b_1} + \alpha_{a_2 b_2} + ... + \alpha_{a_k b_k}$ voor $p_{a_1}, ..., p_{a_k} \in S \cap P$ en $q_{b_1}, ..., q_{b_k} \in S \cap Q$. We zien dan dat:

$$\sum_{p_i \in S \cap P} u_i + \sum_{q_j \in S \cap Q} v_j \geq \sum_{i=1}^{k} u_{a_i} + \sum_{j=1}^{k} v_{b_j} \geq \alpha_{a_1 b_1} + \alpha_{a_2 b_2} + ... + \alpha_{a_k b_k} = v(S).$$

Dus we zien dat elke coalitie minstens zijn eigen waarde verkrijgt. Bij het duale LP-probleem gelden de voorwaardes $u_1 \geq 0, ..., u_m \geq 0, v_1 \geq 0, ..., v_n \geq 0$, dus is de oplossing haalbaar. Daarom zit elke oplossing van het duale LP-probleem in de kern van het toekenningsspel.

Laat $u_1, ..., u_m, v_1, ..., v_n$ nu een oplossing in de kern van het toekenningsspel zijn. Omdat de oplossing haalbaar is, geldt dat $u_1, ..., u_m, v_1, ..., v_n \geq 0$. Omdat $u_1, ..., u_m, v_1, ..., v_n$ in de kern zit, weten we dat elke coalitie minstens zijn eigen waarde verkrijgt, in het bijzonder elke tweepersoons-coalitie. Dus we zien dat $u_i + v_j \geq \alpha_{ij}$ voor elke $p_i \in P$ en $q_j \in Q$.

We weten ook dat $v(P \cup Q) = \sum_{i=1}^{m} u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j$. Door vergelijking (3) weten we dat dit het minimale is wat de som $\sum_{i=1}^{m} u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j$ als waarde aan kan nemen. Deze oplossing voldoet dus aan alle voorwaardes van het duale LP-probleem en neemt het minimum van de som aan. We concluderen dat $u_1, ..., u_m, v_1, ..., v_n$ ook een oplossing is voor het duale LP-probleem.

$\square$

2.4 Prijsmechanisme

We hebben nu een manier gevonden om oplossingen in de kern van het toekenningsspel te vinden. Uit deze oplossing volgen de koppels die gevormd worden om de maximale waarde van het spel te behalen. Als $p_i \in P$ en $q_j \in Q$ een koppel vormen in de oplossing, dan geldt er $u_i + v_j = \alpha_{ij}$ (dit volgt uit vergelijking (3)). Als deze spelers geen koppel vormen, dan geldt er $u_i + v_j > \alpha_{ij}$. In deze paragraaf zullen we kijken naar een prijsmechanisme dat aan het object van verkoper p_i een prijs π_i toekent op een manier die ervoor zorgt dat deze koppels behouden blijven.

Laat $u_1, ..., u_n, v_1, ..., v_n$ een oplossing zijn in de kern (en dus ook een oplossing van het duale LP-probleem). In dit geval krijgt verkoper p_i dan een winst van $u_i = \pi_i - c_j$. Dit maakt dat de prijs voor zijn object gelijk is aan $\pi_i = u_i + c_i$. Elke speler $q_j \in Q$ kan dan een keuze maken uit n verschillende objecten. Elk object geeft deze speler een winst van $r_{ij} - \pi_i$. Omdat $\pi_i = u_i + c_i$, zien we dat deze winst gelijk is aan $r_{ij} - u_i - c_i$.

Elk object dat de speler een negatieve winst geeft, zal deze speler niet kiezen, want niets doen geeft hem dan een hogere winst (namelijk een winst van 0). Zo zal een speler ook besluiten om niets te kopen als elk object hem een negatieve winst geeft.

Stel dat het kopen van het object van speler p_i speler q_j winst zou geven, dus $r_{ij} - u_i - c_i \geq 0$. In dat geval geldt dan $r_{ij} - c_i \geq 0$, want $u_i \geq 0$. Dus we zien dat $\alpha_{ij} = \max\{0, r_{ij} - c_i\} = r_{ij} - c_i$. Hieruit volgt dat de winst voor speler q_j bij het kopen van het object van speler p_i gelijk is aan $a_{ij} - u_i$. In de kern geldt voor elke i en j dat $v_i + v_j \geq \alpha_{ij}$, dus we weten dat voor speler q_j geldt dat $\alpha_{ij} - u_i \leq v_j$ voor alle i. We weten echter ook dat er een i is zodat $\alpha_{ij} - u_i = v_j$. Dit geldt namelijk voor het object van speler p_i waarin speler q_j aan gekoppeld is in de toekenning. We zien dat voor alle $k \neq i$ geldt dat $v_j = r_{ij} - u_i \geq r_{kj} - u_k$. Dus de maximale winst van speler q_j is v_j.

Speler q_j zal altijd zijn eigen winst willen maximaliseren. Daarom zal hij als hij de keuze krijgt tussen de n verschillende objecten waarvan de prijs vast staat, altijd kiezen voor het object van de speler waar hij in de kern aan toegekend is. Door de prijzen op deze manier vast te stellen, zorgen we ervoor dat de toekenningen (zoals die in de kern vastgesteld waren) behouden blijven en de maximale totale waarde van het spel behaald wordt.

Voorbeeld. *Dit voorbeeld is het vervolg van het voorbeeld uit paragraaf 2.1. Uit tabel 2 kunnen door combinaties van koppels te proberen, redeneren dat we de totale winst kunnen behalen door speler p_1 aan speler q_2, speler p_2 aan speler q_3 en speler p_3 aan speler q_4 te koppelen. Dan krijgen we*

$$v(S) = \alpha_{12} + \alpha_{23} + \alpha_{34} = 6 + 7 + 5 = 18.$$

Stel $u_1 = 3, u_2 = 6, u_3 = 2, v_1 = 0, v_2 = 3, v_3 = 1$ en $v_4 = 3$. Dan zien we dat $\sum_{i=1}^{3} u_i + \sum_{j=1}^{4} v_j = 18$. We zien ook dat voor deze waardes geldt dat $u_i + v_j \geq \alpha_{ij}$ voor alle $1 \geq i \geq 3$ en alle $1 \geq j \geq 4$. Dus deze waardes zijn een oplossing voor het duale LP-probleem en dus zit de oplossing ook in de kern. Deze waardes geven de volgende prijzen: $\pi_1 = c_1 + u_1 = 16 + 3 = 19, \pi_2 = 19$ en $\pi_3 = 18$. Elke koper heeft de keuze tussen 3 auto's. We kunnen per koper de winst uitrekenen die per auto verdient kan worden.

Tabel 3: Winst van koper j per auto i

i	$r_{i1} - u_i - c_i$	$r_{i2} - u_i - c_i$	$r_{i3} - u_i - c_i$	$r_{i4} - u_i - c_i$
1	-5	3	0	-1
2	-1	-4	1	-5
3	-1	2	0	3

We zien dat speler q_1 een negatieve winst zou behalen bij het kopen van een auto. Dus zal speler q_1 volledig uit de markt blijven. Voor speler q_2 zien we dat de winst bij het kopen van auto 1 gelijk is aan 3, terwijl de winst bij de andere twee auto's respectievelijk -4 en 0 is. Zijn winst is het hoogst bij auto 1 en dus zal q_2 daarvoor kiezen. Op dezelfde manier zien we dat speler q_3 zal kiezen voor auto 2 en speler q_4 voor auto 3. De toekenning blijft dus behouden onder de prijzen.

3 VCG-mechanisme

In dit hoofdstuk bekijken we het bekende Vickrey-Clarke-Groves (VCG) mechanisme. We zullen hier het mechanisme behandelen zoals Varian [4] en Edelman [5] dit in hun artikelen hebben besproken. De suggestie voor stelling 3.1 wordt in Varian [4] impliciet gegeven, maar wordt in deze scriptie expliciet benoemd en bewezen.

In dit spel worden advertentieplekken per zoekterm geveild. Zodra spelers hun biedingen hebben gedaan, wordt de spelers een plek toegewezen. De prijs die ze moeten betalen is gelijk aan wat hun aanwezigheid de andere spelers kost.

3.1 Opzet van de veiling

Zoekmachines veilen hun advertentieplekken per zoekterm. Bij deze veiling gebeurt dat ook en willen de spelers $a = 1, ..., A$ een van de advertentieplekken $s = 1, ..., S$ bemachtigen. Plek 1 wordt bovenaan de zoekpagina weergegeven en plek S onderaan.

Elke advertentieplek heeft een eigen doorklikratio x_s. Deze ratio geeft aan hoeveel kliks een plek krijgt krijgt in een bepaald tijdsbestek. Hoe hoger een advertentie op een pagina staat, hoe groter de kans dat een bezoeker van de zoekmachine erop klikt. We nemen aan daarom aan dat de doorklikratio groter is als de advertentie hoger op de pagina wordt weergegeven, dus $x_1 > x_2 > ... > x_S$. De advertentie van de speler die plek $s > S$ toegewezen krijgt, wordt niet getoond op de pagina en daarom definiëren we dat $x_s = 0$ voor $s > S$.

Alle spelers brengen tegelijkertijd een bod b_a uit. Dit bod hoeft niet perse gelijk te zijn aan hoeveel ze een klik waard vinden of hoeveel ze uiteindelijk gaan betalen voor hun advertentieplek. Elke speler a heeft zijn eigen waardering v_a, wat beschouwd kan worden als zijn winst per klik. Speler a waardeert plek s met de waarde $u_{as} = v_a x_s$, zijn eigen waarde per klik vermenigvuldigd met het aantal verwachte kliks. De biedingen zijn algemeen bekende waardes, de waarderingen zijn niet algemeen bekend.

Een autoriteit zoekt nu een een toewijzing van adverteerders aan plekken waarmee de totale winst gemaximaliseerd wordt. Het probleem is dat de waardes v_a niet bekend zijn bij de autoriteit. De autoriteit kent enkel de biedingen b_a. Als bij een toewijzing z van adverteerders aan advertentieplekken speler a toegekend wordt aan plek s, dan is de beschouwt de autoriteit zijn gerapporteerde waarde als $r_a(z) = b_a x_s$. De autoriteit zoekt nu een toewijzing z^* die ervoor zorgt dat de totale waarde $t(z^*) = \sum_{a=1}^{A} r_a(z^*)$ gemaximaliseerd wordt.

We hernummeren nu de spelers op een dusdanige manier, zodat de speler die zijn advertentie op plek a mag laten zien volgens de oplossing z^*, nu speler a heet en zijn bod b_a is. Met de volgende stelling zullen we zien dat deze manier van plekken toekennen erin resulteert dat we eigenlijk de spelers indelen op de hoogte van hun bod.

Stelling 3.1. *Voor de hernummerde biedingen in de maximale toewijzing geldt dat* $b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_A$.

Bewijs. Laat $1 < i \leq A$. We weten dat de spelers dusdanig ingedeeld zijn, zodat $\sum_{i=1}^{A} b_i x_i$ gemaximaliseerd is. Dus als we de spelers i en $i-1$ omwisselen van plek, weten we dat deze som minder groot is. Dus we zien:

$$\sum_{i=1}^{A} b_i x_i \geq b_1 x_1 + b_2 x_2 + ... + b_{i-2} x_{i-2} + b_i x_{i-1} + b_{i-1} x_i + b_{i+1} x_{i+1} ... + b_A x_A.$$

Alle termen behalve degene met indices i en $i-1$ vallen weg. Hieruit volgt dat $b_{i-1}x_{i-1}+b_ix_i \geq b_ix_{i-1}+b_{i-1}x_i$, oftewel $b_i(x_i - x_{i-1}) \geq b_{i-1}(x_i - x_{i-1})$.

We weten dat hoe hoger de advertentie op de zoekpagina staat, des te lager zijn index is en des te meer kliks de advertentie krijgt. Dus voor elke i geldt $x_{i-1} > x_i$. Hieruit volgt dat $(x_i - x_{i-1}) < 0$, dus $b_i \leq b_{i-1}$. Omdat $1 < i \leq A$ willekeurig gekozen is, zien we dat $b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_A$.

□

De autoriteit zal vervolgens een prijs p_s per klik bepalen voor elke plek. De totale prijs p_sx_s die speler $s \leq S$ moet betalen voor zijn aangewezen advertentieplek wordt bepaald door het verschil in winst van de andere spelers door de aanwezigheid van speler s.

Het verschil tussen de winst die andere spelers behalen als s meedoet aan veiling en de winst die andere spelers behalen als s niet meedoet aan de veiling, bepaalt de prijs die speler s moet betalen voor zijn plek. Als speler s uit de veiling stapt, dan maakt die voor spelers met een hoger bod dan speler s niet uit, immers blijven ze dezelfde plek houden en dus dezelfde winst. Als speler s uit de markt stapt, dan komt speler i met een lager bod dan speler s een plek hoger te staan en behaalt daardoor meer winst. Door één advertentieplek omhoog te gaan zal zijn doorklikratio verhogen, dus zijn winst zal met $b_i(x_{i-1} - x_i)$ toenemen.

We zien dus dat de totale prijs van speler s voor plek s moet betalen is gelijk aan

$$p_sx_s = \sum_{i>s} b_i(x_{i-1} - x_i).$$

De winst van speler s is dan gelijk aan $v_sx_s - p_sx_s$.

Voorbeeld. *Stel dat bij een bepaalde zoekterm er twee advertentie plekken te vergeven zijn met doorklikratio* $x_1 = 0,9$ *en* $x_2 = 0,6$. *Stel dat er drie spelers (spelers* $1,2$ *en* 3*) zijn die willen adverteren bij deze zoekterm. Deze spelers bieden* $b_1 = 4, b_2 = 1$ *en* $b_3 = 8$. *Hiermee kunnen we de gerapporteerde waarde functie r mee uitrekenen. Zo wordt* $r_1(z) = 4 \cdot 0,9$ *voor een oplossing z waarin persoon* 1 *aan plek* 1 *wordt toegekend.*

Voor elke oplossing z geldt dat er één speler wordt toegewezen aan plek 1 en één speler aan plek 2. De derde speler wordt dan aan plek 3 toegewezen. Deze plek wordt op de zoekpagina niet getoond en dus krijgt deze speler geen winst.

We maximaliseren de totale waarde door speler 3 *aan plek* 1 *toe te kennen, speler* 1 *aan plek* 2 *en speler* 2 *aan plek* 3. *We noemen nu speler* 3 *speler* 1, *speler* 1 *speler* 2 *en speler* 2 *speler* 3. *Dit maakt dat nu* $b_1 = 8$, $b_2 = 4$ *en* $b_3 = 1$. *Stel dat de waarderingen van de spelers* $b_1 = 9$, $b_2 = 4$ *en* $b_3 = 3$. *We zien dat:*

$$p_1x_1 = \sum_{i>1} b_i(x_{i-1} - x_i) = b_2(x_1 - x_2) + b_3(x_2 - x_3) = 4 \cdot (0,9 - 0,6) + 1 \cdot (0,6 - 0) = 1,8.$$

Dit maakt dat de winst van speler 1 *gelijk is aan* $v_1x_1 - p_1x_1 = 9 \cdot 0,9 - 1,8 = 6,3$.
Voor speler 2 *zien we dat:*

$$p_2x_2 = \sum_{i>2} b_i(x_{i-1} - x_i) = b_3(x_2 - x_3) = 1 \cdot (0,6 - 0) = 0,6.$$

Dit maakt dat de winst voor speler 2 *gelijk is aan* $v_2x_2 - p_2x_2 = 4 \cdot 0,6 - 0,6 = 1,8$.
Voor speler 3 *zien we dat* $p_3x_3 = \sum_{i>2} b_i(x_{i-1} - x_i) = 0$. *Dit maakt dat voor speler* 3 *de winst gelijk is aan* $v_3x_3 - p_3x_3 = 3 \cdot 0 - 0 = 0$. *Dit is een logische waarde, aangezien de zoekmachine de advertentie van deze speler niet laat zien en dus maakt de speler geen winst.*

3.2 Waarheidzeggen

Elke speler a kiest een bepaalde strategie in de vorm van een bod b_a met als doel zijn eigen winst te maximaliseren. Een veel besproken strategie in vele spelen is waarheidzeggen, waarbij speler a als bod zijn daadwerkelijke waarde uitbrengt, dus $b_a = v_a$. Het is een bekende eigenschap van het VCG-mechanisme dat de waarheid zeggen een dominante strategie is.

Stelling 3.2. *Waarheidzeggen is een dominante strategie.*

Bewijs. Speler a wil zijn winst optimaliseren door een bod te kiezen. Laat biedingen $b_1, b_2, .., b_{a-1}, b_{a+1}, ..., b_A$ bekend zijn. Als speler a een bod b_a uitbrengt, dan wordt zijn gerapporteerde waarde $r_a(z) = b_a x_s$. Laat $u_a(z) = v_a x_s$ de daadwerkelijke waardefunctie van speler a zijn. Door de autoriteit wordt $r_a(z) + \sum_{i \neq a}^{A} r_i(z)$ gemaximaliseerd. Speler a wil natuurlijk dat $u_a(z) + \sum_{i \neq a} r_i(z)$ gemaximaliseerd wordt. Dus om ervoor te zorgen dat de autoriteit maximaliseert wat speler a wil dat gemaximaliseerd wordt, moet speler a $b_a = v_a$ bieden.

□

Omdat waarheidzeggen een dominante strategie is, kunnen we aannemen dat iedereen naar waarheid biedt en dus $b_i = v_i$. Hieruit volgt dat de totale prijs die speler a moet betalen gelijk is aan

$$p_a x_a = \sum_{i > a} v_i (x_{i-1} - x_i).$$

4 GSP veiling

In dit hoofdstuk bekijken we de Generalized Second-Price (GSP) veiling. Dit is een veiling die (met enige aanpassingen, zie [4, pag. 1174]) gebruikt wordt door Google. De tekst over deze veiling is gebaseerd op Varian [4] en Edelman et al. [5].

Deze veiling lijkt op de veiling met het VCG-mechanisme, echter worden de prijzen die een speler moet betalen voor een bepaalde plek anders bepaald. Net zoals bij de veiling met het VCG-mechanisme, worden in deze veiling verschillende plekken voor advertenties bij bepaalde zoektermen geveild.

4.1 Opzet van de veiling

Bij deze veiling wordt net als bij het VCG-mechanisme advertentieplekken per zoekterm geveild. In deze veiling wijzen we de spelers $a = 1, ..., A$ toe aan advertentieplekken $s = 1, .., S$. We nemen aan dat er meer spelers zijn dan advertentieplekken, ofwel $A > S$.

Elke advertentieplek heeft zijn eigen doorklikratio x_s. Net als bij het VCG-mechanisme, nummeren we de plekken van boven naar benede. We nemen aan dat een advertentie op een hogere positie op de pagina meer klikken krijgt, dus dat $x_1 > x_2 > .... > x_S$, zoals verwacht kan worden bij een online advertentiemarkt. Voor x_s met $s > S$ nemen we aan dat $x_s = 0$. De advertentie van de spelers die aan deze plekken worden toegekend, worden niet getoond op de zoekpagina en dus zullen deze advertenties ook geen kliks krijgen.

Elke speler a heeft een eigen waardering $v_a > 0$, wat beschouwd wordt als de winst per klik. Dit maakt dat de waardering van speler a voor plek s gelijk is aan $u_{as} = v_a x_s$, zijn eigen waarde per klik vermenigvuldigd met het aantal verwachte kliks.

Alle spelers brengen nu tegelijkertijd een bod b_a uit. De speler met het hoogste bod krijgt plek 1 toegekend, de speler met het een-na-hoogste bod krijgt plek 2 toegekend, etcetera. We hernummeren de spelers op de plek die ze toegekend krijgen, dus nu is de speler aan wie plek 1 toegekend is speler 1.

De prijs die speler s moet betalen is gelijk aan het bod van de persoon onder hem, dus $p_s = b_{s+1}$. Deze prijs moet per klik betaald worden door de adverteerder. Dit maakt dat de winst van speler s gelijk is aan $u_s = (v_s - p_s)x_s = (v_s - b_{s+1})x_s$.

Voorbeeld. *Stel dat bij een bepaalde zoekterm er twee advertentie plekken te vergeven zijn met doorklikratio* $x_1 = 0,9$ *en* $x_2 = 0,6$ *respectievelijk. Stel dat er drie spelers* $1, 2$ *en* 3 *zijn die willen adverteren bij deze zoekterm. We nummeren de spelers gelijk op het bod dat ze uitbrengen; de spelers bieden respectievelijk* $b_1 = 8, b_2 = 4$ *en* $b_3 = 2$. *De spelers hebben de volgende waardes per klik: speler* 1 *heeft* $v_1 = 10$, *speler* 2 *heeft* $v_2 = 3$ *en speler* 3 *heeft* $v_3 = 2$. *We zien dat* $p_1 = b_2 = 4$ *en* $p_2 = b_3 = 2$.

We zien dat voor speler 1 *de winst gelijk is aan* $u_1 = (v_1 - p_1)x_1 = (10 - 4) \cdot 0,9 = 5,4$. *Voor speler* 2 *is de winst gelijk aan* $u_2 = (v_2 - p_2)x_2 = (3 - 2) \cdot 0,6 = 0,6$. *De advertentie van speler 3 wordt niet getoond, dus* $x_3 = 0$ *en daarom is zijn winst gelijk aan* $u_3 = 0$.

4.1.1 Uitstapje naar de klassieke Engelse veiling

Als er slechts één advertentieplek te verkopen is, dan is deze veiling gelijk aan de klassieke Engelse veiling. Bij de Engelse veiling wordt er één object geveild. Er wordt een klok op 0 gestart en zitten alle spelers in de veiling. De klok begint op te lopen en een speler kan op elk moment uit de markt stappen. Zijn bod is dan gelijk aan de prijs die op de klok staat. Dit gaat door totdat er nog twee spelers in de markt aanwezig zijn. Zodra er dan een speler uit de markt stapt, wint de speler die nog als enige over is gebleven. De prijs die hij moet betalen is de prijs op de klok op het moment dat de een-na-laatste speler uit de markt stapt. We zien dat deze veiling overeenkomt met de GSP-veiling waarin één advertentieplek wordt geveild.

4.2 Nash-evenwichten

In deze veiling kunnen we Nash-evenwichten bekijken. Bij Nash-evenwichten kan geen enkele speler zijn winst verbeteren door een andere strategie te spelen. In de GSP-veiling is de strategie die een speler speelt zijn bod. We zien dat de biedingen direct verbonden zijn aan de prijzen van de advertentieplekken en daarom kunnen we dus de Nash-evenwichten definiëren aan de hand van de prijzen.

Als speler s een aantal plekken omhoog wil gaan om zo op positie $t < s$ te komen, dan moet hij het bod van speler t verslaan, dus $b_s > b_t$. In dit geval komt speler t dan op positie $t - 1$ te staan, dus wordt de prijs die speler s moet betalen gelijk aan $p_{t-1} = b_t$.

Als een speler s een aantal plekken naar beneden wil gaan om op positie $t > s$ te komen, dan moet hij hoger bieden dan de speler op plek $t + 1$. Dus voor deze plek zou speler s dan $p_t = b_{t+1}$ moeten betalen. Nu kunnen we de Nash-evenwichten in deze veiling definiëren. Een speler zal nooit naar een plek $t > S$ willen verplaatsen, dan wordt immers zijn advertentie niet getoond en zal hij dus geen enkele winst maken.

Definitie 4.1. Een set prijzen $p_1, ..., p_S$ vormt een **Nash-evenwicht** als aan de volgende twee voorwaardes wordt voldaan voor elke speler $s \leq S$:

1. Een speler s kan geen hogere winst behalen door naar een hogere positie te gaan, dus $(v_s - p_s)x_s \geq (v_s - p_{t-1})x_t$ voor $t < s$,
2. Een speler s kan geen hogere winst behalen door naar een lagere positie te gaan, dus $(v_s - p_s)x_s \geq (v_s - p_t)x_t$ voor $S \geq t > s$.

We kunnen nu ook symmetrische Nash-evenwichten definiëren.

Definitie 4.2. Een set prijzen $p_1, ..., p_S$ vormt een **Symmetrisch Nash-evenwicht** voor elke speler s en positie t geldt dat $(v_s - p_s)x_s \geq (v_s - p_t)x_t$.

Het is niet gelijk duidelijk dat elk symmetrisch Nash-evenwicht een Nash-evenwicht is. Dit zal de volgende stelling bewijzen.

Stelling 4.3. *Elk symmetrisch Nash-evenwicht is een Nash-evenwicht.*

Bewijs. Laat $p_1, ..., p_S$ een symmetrisch Nash-evenwicht zijn. Dan geldt $(v_s - p_s)x_s \geq (v_s - p_t)x_t$ voor elke s en t, dus in het bijzonder voor $t > s$. Dus aan de eerste voorwaarde van een Nash-evenwicht wordt voldaan. We weten dat $b_t \geq b_{t+1}$ voor elke t, dus er geldt dat $p_{t-1} \geq p_t$. We zien dat $(v_s - p_s)x_s \geq (v_s - p_t)x_t \geq (v_s - p_{t-1})x_t$ voor elke t en s, dus in het bijzonder voor $t < s$. Dus aan de voorwaarde 2 van een Nash-evenwicht wordt ook voldaan. We concluderen dat $p_1, ..., p_S$ ook een Nash-evenwicht is. □

Voorbeeld. *Dit voorbeeld is het vervolg van het voorbeeld uit paragraaf 4.1. We hebben al gezien dat* $(v_1 - p_1)x_1 = 5,4$ *en* $(v_2 - p_2)x_2 = 0,6$. *We zien dat* $(v_1 - p_2)x_2 = (10-2)0,6 = 4,8$ *en* $(v_2 - p_1)x_1 = (3-4)0,9 = -0,9$. *Dus we zien dat* $(v_1 - p_1)x_1 \geq (v_1 - p_2)x_2$ *en* $(v_2 - p_2)x_2 \geq (v_2 - p_1)x_1$. *Dus* $p_1 = 4$ *en* $p_2 = 2$ *is een Symmetrisch Nash-evenwicht.*

4.3 Boven- en ondergrenzen voor biedingen in symmetrische Nash-evenwichten

We zullen nu boven- en ondergrenzen voor biedingen in een symmetrische Nash-evenwichten bepalen. Daarmee kan gemakkelijker biedingen en daarmee prijzen gevonden worden die voldoen aan de eisen van een symmetrisch Nash-evenwicht.

Laat $p_1, ..., p_S$ een symmetrisch Nash-evenwicht zijn. Dan weten we dat voor elke s en elke t geldt $(v_s - p_s)x_s \geq (v_s - p_t)x_t$. Er geldt in het bijzonder dat

$$(v_s - p_s)x_s \geq (v_s - p_{s-1})x_{s-1} \text{ en} \tag{4}$$

$$(v_{s-1} - p_{s-1})x_{s-1} \geq (v_{s-1} - p_s)x_s. \tag{5}$$

Hieruit volgt dat

$$p_{s-1}x_{s-1} \geq p_s x_s - v_s x_s + v_s x_{s-1} \text{ en}$$

$$p_{s-1}x_{s-1} \leq p_s x_s - v_{s-1}x_s + v_{s-1}x_{s-1}.$$

We weten dat $p_s = b_{s+1}$, dus dit geeft de volgende vergelijking:

$$b_{s+1}x_s + v_{s-1}(x_{s-1} - x_s) \geq b_s x_{s-1} \geq b_{s+1}x_s + v_s(x_{s-1} - x_s).$$

We zien dus dat we de volgende recursieve boven- en ondergrenzen krijgen, namelijk

$$b_s^U x_{s-1} = b_{s+1}x_s + v_{s-1}(x_{s-1} - x_s) \text{ en} \tag{6}$$

$$b_s^L x_{s-1} = b_{s+1}x_s + v_s(x_{s-1} - x_s). \tag{7}$$

We kunnen deze recursieve vergelijking uitwerken en krijgen daarmee de volgende oplossingen:

$$b_s^U x_{s-1} = \sum_{t \geq s} v_{t-1}(x_{t-1} - x_t) \text{ en} \tag{8}$$

$$b_s^L x_{s-1} = \sum_{t \geq s} v_t(x_{t-1} - x_t). \tag{9}$$

Merk op dat $x_s = 0$ voor $s > S$, dus deze sommaties zijn eindig. Door te delen door de bekende constanten x_{s-1}, kunnen de boven en ondergrenzen voor de biedingen bepaald worden.

4.4 Waarheidzeggen

Een bekende strategie is waarheidheidzeggen. Bij deze strategie kiest een speler a voor $b_a = v_a$.

Stelling 4.4. *Waarheidzeggen is geen dominante strategie in een GSP-veiling.*

Bewijs. We zullen deze stelling bewijzen met een voorbeeld. We bekijken een spel met 2 advertentieplekken en 3 spelers. Laat plek 1 een doorklikratio hebben van $x_1 = 0.9$ en plek 2 van $x_2 = 0,8$. Laat speler 1 een waardering van $v_1 = 10$, speler 2 een waardering van $v_2 = 7$ en speler 3 een waardering van $v_3 = 2$ hebben. Laat speler 2 het bod $b_2 = 7$ en speler 3 het bod $b_3 = 2$ bieden. Als speler 1 de waarheid biedt, dus $b_1 = 10$, dan is zijn winst gelijk aan $u_1 = (v_1 - p_1)x_1 = (10 - 7) \cdot 0.9 = 2,7$. Stel nu dat hij echter niet naar waarheid biedt, maar $b_1 = 4$. Dan komt hij op advertentieplek 2 en is zijn winst gelijk aan $u_1 = (v_1 - p_2)x_2 = (10 - 2) \cdot 0,8 = 6,4 > 2,7$. Speler 1 kan meer winst behalen door niet de waarheid te spreken, dus de waarheidzeggen is niet een dominante strategie. □

5 Vergelijken van de modellen

In dit hoofdstuk zal een vergelijking gelegd worden tussen de GSP-veiling en het VCG-mechanisme. Deze vergelijking is gemaakt door zowel Varian [4] als door Edelman et al. [5]. Daarna zal een vergelijking tussen de GSP-veiling en het toekenningsspel worden gemaakt. Deze relatie wordt door Varian al opgemerkt [4], maar zal in deze scriptie extra verduidelijkt worden.

5.1 Vergelijking GSP en VCG

De veiling met het VCG-mechanisme en de GSP-veiling lijken erg op elkaar. Bij beiden veilingen worden de spelers op dezelfde manier ingedeeld, namelijk hoe hoger het bod, des te lager de index van de toegewezen advertentieplek. De prijzen worden bij de twee veilingen echter op een andere manier berekend. Een opvallend verschil dat hieruit volgt is dat waarheidzeggen bij het VCG-mechanisme een dominante strategie is en bij de GSP-veiling niet.

Als er maar één enkele advertentieplek te vergeven is, vallen deze twee veilingen samen. Immers betaalt dan de speler met het hoogste bod b_1 de totale prijs

$$p_1x_1 = b_2x_1 = \sum_{i>1} b_i(x_{i-1} - x_i).$$

De winst van speler 1 is dan in beide veilingen $(v_1 - p_1)x_1$. Van alle andere spelers wordt de advertentie niet op de pagina getoond en dus krijgen de andere spelers een winst van 0.

Omdat de prijzen bij de verschillende veilingen verschillen, verschilt de winst van spelers ook. Deze zullen we vergelijken in de volgende stelling.

Stelling 5.1. *De winst van spelers in de veiling met het VCG-mechanisme is minstens zo groot als de winst die speler in de GSP-veiling krijgen.*

Bewijs. In vergelijking (8) en (9) van paragraaf 4.3 zagen we in de GSP-veiling de boven- en ondergrenzen voor biedingen. We weten dat $p_{s-1}x_{s-1} = b_sx_{s-1}$ de totale prijs is die speler $s-1$ moet betalen bij de GSP-veiling. Dus we zien dat de totale prijs van speler $s-1$ een bovengrens heeft van

$$p^U_{s-1}x_{s-1} = \sum_{i\geq s} v_{i-1}(x_{i-1} - x_i)$$

en een ondergrens van

$$p^L_{s-1}x_{s-1} = \sum_{i\geq s} v_i(x_{i-1} - x_i).$$

We zien dat hieruit volgt dat voor de totaalprijs voor speler $t = s-1$ een bovengrens geldt van

$$p^U_t x_t = \sum_{i>t} v_{i-1}(x_{i-1} - x_i)$$

en een ondergrens van

$$p^L_t x_t = \sum_{i>t} v_i(x_{i-1} - x_i).$$

In paragraaf 3.1 hebben we gezien dat de totale prijs die speler s moet betalen voor plek s bij de veiling met het VCG-mechanisme gelijk is aan $p_s x_s = \sum_{i>s} b_i(x_{i-1} - x_i)$. We zien dat de ondergrens voor de totale prijs in de GSP-veiling gelijk is aan de prijs onder het VCG-mechanisme. De winst van speler s wordt in beiden veilingen hetzelfde berekend, namelijk $v_s x_s - p_s x_s$. Aangezien $v_s x_s$ gelijk is bij beiden veilingen, maar de prijs bij GSP minstens zo groot als bij VCG, zien we dat de winst voor speler s onder het VCG-mechanisme minstens zo groot is als de winst voor speler s onder GSP. □

5.2 Vergelijking GSP en het toekenningsspel met het prijsmechanisme

We kunnen de advertentiemarkt van zoekmachines analyseren als een toekenningsspel met een prijsmechanisme. In dit geval hebben we echter niet m verschillende verkopers die elk één object wil verkopen, maar één enkele verkoper die meerdere objecten (in dit geval advertentieplekken) verkoopt, elk voor een zo'n hoog mogelijke prijs. Dit verandert voor het model verder niets. De waarde c_i kan beschouwd worden als een soort minimum prijs voor een plek. Zo heeft Google minimumprijs van 5 cent voor de onderste advertentie op een pagina[4, pag. 1174].

In paragraaf 2.4 zagen we in het toekenningsspel met het prijsmechanisme het bestaan van prijzen $p_1, .., p_S$ voor objecten, zodat voor een koper de winst het hoogst is zodra hij het object kiest waaraan in de oplossing in de kern aan toegekend is. Er geldt voor elke koper s dat zijn winst bij het kopen van het object k waar hij aan gekoppeld is, hoger is dan bij elk ander object $l \neq k$. Dus er geldt dat $v_s = r_{ks} - u_k \geq r_{ls} - u_l$. Hierbij is r_{ks} de waardering van speler (koper) s voor plek k. u_k is de winst van de verkoper van advertentieplek k en v_s is de winst van de koper.

In de GSP-veiling wordt de winst van de verkoper voor plek k berekent door $p_k x_k$. De waardering van speler s voor plek k is gelijk aan $v_s x_k$. Om het toekenningsspel te vergelijken met de GSP-veiling stellen we $r_{ks} = v_s x_k$ en $u_k = p_k x_k$. We zien dan dat $r_{ks} - u_k \geq r_{ls} - u_l$ dan overeenkomt met $v_s x_k - p_k x_k \geq v_s x_l - p_l x_l$, oftewel $(v_s - p_k)x_k \geq (v_s - p_l)x_l$. We zien dat dit precies de vereiste is voor een symmetrisch Nash-evenwicht. Dus de oplossingen in de kern van het toekenningsspel komen overeen met de symmetrische Nash-evenwichten van de GSP-veiling als we speciale functies nemen voor de waarde en de winst van de verkopers.

Dit is erg opvallend; het toekenningsspel is een coöperatief spel en de GSP-veiling is een non-coöperatief spel. Daarom is het onverwacht dat deze evenwichten samenvallen.

6 Conclusie

In deze scriptie zijn drie verschillende spelen onderzocht die elk de advertentiemarkt van zoekmachines kunnen beschrijven. Vervolgens zijn deze verschillende spelen met elkaar vergeleken.

Het coöperatieve toekenningsspel maximaliseert eerst de totale winst in de markt door plekken toe te kennen aan adverteerders. Vervolgens wordt met het prijsmechanisme voor elke positie een prijs bedacht waardoor elk van de adverteerders de meeste winst behaald door de plek te kiezen die ze toegewezen is om de maximale totale winst te behalen.

De veiling met het VCG-mechanisme zoekt aan de hand van de biedingen een toewijzing die de winst maximaliseert. We hebben gezien dat dit een toewijzing geeft die de spelers sorteert op hun bod. De prijs die een speler moet bepalen voor zijn plek wordt bepaald door de winst die zijn aanwezigheid de andere spelers kost. We hebben gezien dat bij de veiling met het VCG-mechanisme waarheidzeggen een dominante strategie is.

Bij de GSP-veiling hebben we gezien dat de spelers op volgorde van hun bod een plek toegewezen krijgen. De prijs die de spelers betalen is gelijk aan het bod van de speler die een advertentieplek lager staat. Hieruit volgde een definitie voor Nash-evenwichten en een definitie voor een speciaal type Nash-evenwichten: de symmetrische Nash-evenwichten. Uit deze definitie kan een boven- en een ondergrens voor biedingen in het evenwicht beredeneerd worden. We hebben gezien dat waarheidzeggen geen dominante strategie is bij de GSP-veiling.

Bij het vergelijken van de GSP-veiling met de veiling met het VCG-mechanisme hebben we gezien dat de winst van adverteerders minstens zo groot is bij de veiling met het VCG-mechanisme als bij de GSP-veiling. Bij de vergelijking tussen het toekenningsspel en de GSP-veiling hebben we gezien dat de mogelijke prijzen bij een maximale toekenning overeenkomen met de mogelijke prijzen in symmetrische Nash-evenwichten.

Referenties

[1] Shapley, Lloyd S. & Shubik, Martin. *The Assignment Game I: the Core.* International Journal of Game Theory 1: 111-130, 1972.

[2] Roth, Alvin e. & Sotomayor, Marilda. *Two-sided Matching.* Cambridge University Press, 1992.

[3] Dantzig, George B. *Linear programming and extensions.* Princeton University Press, 1963.

[4] Varian, Hal R. *Position Auctions.* International Journal of Industrial Organization 25: 1163-1178, 2007

[5] Edelman, Benjamin, Ostrovsky, Micheal & Schwarz, Micheal. *Internet advertising and the Generalized Second-Price Auction: Selling Billions of Dollars Worth of Keywords.* The American Economic Review Vol.97 No.1: 242-259, 2007