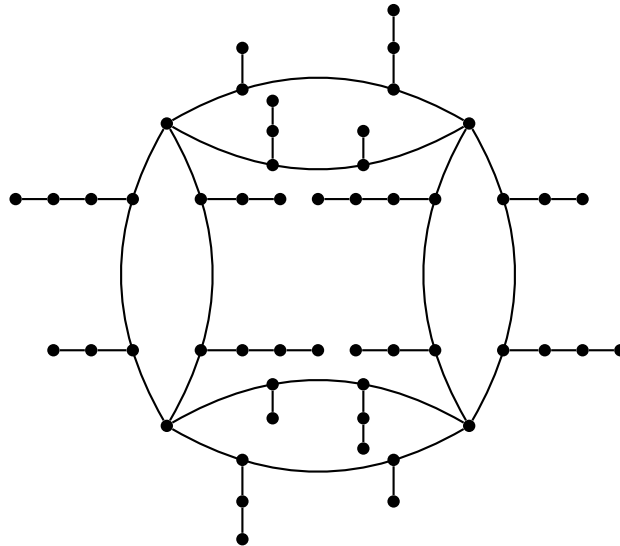


Over de Stelling van Frucht en de universaliteit van verschillende klassen eindige grafen



Bachelorscriptie Wiskunde

Fien van Berkel

Begeleid door Prof. dr. Gunther Cornelissen

22 januari 2021



Universiteit Utrecht

Inhoudsopgave

1	Inleiding	3
2	Achtergrondinformatie over Frucht en zijn stelling	4
3	Grafen	6
3.1	Gerichte grafen	9
4	Automorfismegroepen van grafen	11
5	Cayley grafen	15
6	Stelling van Frucht	20
7	Universaliteit: planaire grafen	23
8	Conclusie	33
A	Verificaties	34

Hoofdstuk 1

Inleiding

Ik zal me in deze scriptie onder andere bezig houden met de Stelling van Frucht en het bewijs hiervan. Deze stelling zegt het volgende.

Stelling 1.1 (Stelling van Frucht, [11, p. 42]). *Zij Γ een eindige groep. Dan bestaat er een eindige graaf G zodat $\text{Aut}(G) \cong \Gamma$, oftewel, zodat de automorfismegroep van G isomorf is aan Γ .*

In deze stelling staat een aantal begrippen die meer toelichting nodig hebben, bijvoorbeeld de begrippen *graaf* en *automorfismegroep van een graaf*. Om deze reden zal ik voordat we de stelling gaan bewijzen eerst een aantal definities en voorbeelden geven, waarbij ik begin met uitleggen wat een graaf is.

Nadat ik deze definities en voorbeelden heb gegeven, zal ik overgaan tot het definiëren van Cayley grafen en zal ik een aantal stellingen over Cayley grafen bewijzen, welke we ook zullen gebruiken in het bewijs van de Stelling van Frucht. Gewapend met deze nieuwe definities en stellingen zal ik een bewijs formuleren van de Stelling van Frucht.

Nadat ik de Stelling van Frucht heb bewezen, zal ik me richten op de universaliteit van grafen, en in het bijzonder op de universaliteit van planaire grafen. Dit zal ik doen aan de hand van het artikel ‘Automorphism groups of planar graphs’ van László Babai. [2]

Om de bewijzen in deze scriptie niet te langdradig te maken, heb ik een aantal bewijzen van lemma’s die in de literatuur niet worden bewezen toegevoegd als bijlage. Wanneer een van deze lemma’s wordt gebruikt in een bewijs, zal er naar deze bijlage worden verwezen.

Ten slotte zal ik, voor ik begin met het wiskundige deel van deze scriptie, eerst wat achtergrondinformatie geven over het ontstaan van de stelling en over Frucht zelf.

Hoofdstuk 2

Achtergrondinformatie over Frucht en zijn stelling

Dit hoofdstuk is gebaseerd op het artikel ‘How I became Interested in Graphs and Groups’; een artikel dat is geschreven door Robert Wertheimer Frucht zelf en gepubliceerd is in het tijdschrift *Journal of Graph Theory*. [8] Frucht schrijft in dit artikel dat hij in 1924 begon met het studeren van wiskunde aan de Universiteit van Berlijn; hij was toen achttien jaar. Hij vervolgt zijn studie met een PhD in de richting van groepentheorie. Nadat hij in 1930 zijn PhD afrondt is het op wiskundig vlak een behoorlijke tijd erg rustig in het leven van Frucht. Het was in die tijd namelijk voor wiskundigen erg lastig om aan werk te komen en Frucht kon door zijn Tsjecho-Slowaakse nationaliteit nog geen eens leraar op een middelbare school worden. Hij verhuist daarom naar Italië om daar als actuaaris voor een verzekeringsbedrijf te gaan werken en doet weinig meer met zijn wiskundige achtergrond.

Hier komt verandering in als Frucht op een dag in 1936 een catalogus toegestuurd krijgt van het Akademische Verlagsgesellschaft waarin een beschrijving staat van het boek *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen* van Dénes König. [10] Omdat in de beschrijving staat dat het boek toepassingen in de groepentheorie bevat, bestelt Frucht het boek gelijk en vanaf de dag dat het boek arriveert is hij een enthousiast grafentheoreticus.

König formuleert in zijn boek twee problemen over de automorfismegroepen van grafen die de aandacht van Frucht trekken. Een van deze problemen is de volgende vraag die König op pagina 5 van het boek stelt:

‘Wanneer kan een gegeven abstracte groep opgevat worden als de groep van een graaf en, wanneer dit het geval is, hoe kan de desbetreffende graaf geconstrueerd worden?’

Na een aantal maanden vergeefse pogingen gedaan te hebben vindt Frucht het antwoord op deze vraag; de Stelling van Frucht is geboren. Hij ontdekt dat het antwoord op de vraag relatief gemakkelijk te vinden is door gebruik te maken van zogeheten Cayley grafen, een begrip wat ik in hoofdstuk 5 zal introduceren. Frucht publiceert zijn bevindingen in 1939 in het artikel ‘Herstellung von Graphen mit vorgegebener abstrakter Gruppe’ in het tijdschrift *Compositio Mathematica* [7].

In 1939 vertrekt Frucht voor het uitbreken van de Tweede Wereldoorlog vanuit Italië naar Zuid-Amerika. Na een korte tijd opnieuw te hebben gewerkt als actuaaris, krijgt hij een aanstelling aan

de Santa Maria Universiteit in Chili. Hij had verwacht dat hij door deze nieuwe baan genoeg tijd zou hebben om zijn onderzoek over grafen en automorfismegroepen voort te zetten, maar om verscheidene redenen was dit niet het geval.

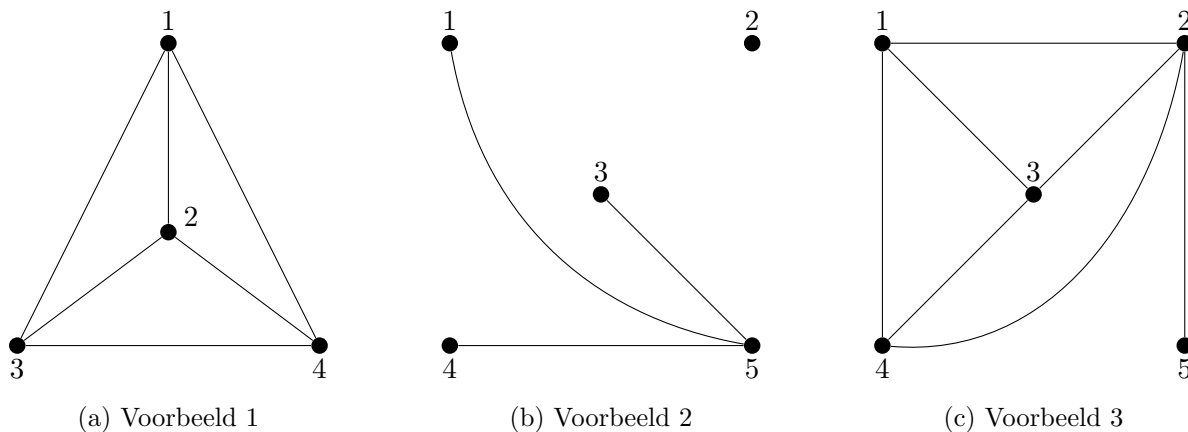
Pas een aantal jaar later gaat Frucht hier weer mee aan de slag, namelijk wanneer hij gevraagd wordt om een artikel te schrijven voor het nieuwe tijdschrift de *Canadian Journal of Mathematics*. Hij schrijft een artikel over de hierboven besproken vraag uit het boek van König, waar hij dit keer de eis dat de grafen 3-regulier moeten zijn aan toevoegt. [9] Wat het precies betekent voor een graaf om 3-regulier te zijn, leg ik uit in hoofdstuk 3. Na het schrijven van dit artikel heeft Frucht nog veel onderzoek gedaan in de grafentheorie, waarbij hij zich niet alleen heeft beperkt tot onderwerpen met betrekking tot automorfismegroepen.

Hoofdstuk 3

Grafen

De definities in dit hoofdstuk heb ik, tenzij anders aangegeven, gebaseerd op de definities in de boeken [11] en [6], waarbij ik voor het vertalen gebruik heb gemaakt van [15].

Een *graaf* G is een paar $G = (V(G), E(G))$ dat bestaat uit twee disjuncte verzamelingen, waarbij geldt dat $E(G)$ bestaat uit ongeordende paren $\{u, v\}$ van verschillende elementen u en v van $V(G)$. De elementen van de verzameling $V(G)$ worden *punten* genoemd en de elementen van $E(G)$ *lijnen*. In deze scriptie zal, tenzij anders aangegeven, de verzameling $V(G)$ altijd een eindige verzameling zijn. Als er voor twee grafen G en G' geldt dat $V(G') \subseteq V(G)$ en dat $E(G') \subseteq E(G)$, dan heet G' ook wel een *subgraaf* van G . Wanneer er sprake is van strikte deelverzamelingen en dus geldt dat $V(G') \subset V(G)$ en dat $E(G') \subset E(G)$, dan heet G' een *echte subgraaf* van G . We kunnen grafen ook afbeelden; hierbij worden de punten afgebeeld met een stip en wordt een lijn $\{u, v\}$ afgebeeld als lijnstuk tussen de stippen die horen bij de punten u en v . Om een beeld te schetsen van hoe grafen eruit kunnen zien, zijn hieronder een paar voorbeelden van grafen afgebeeld.



Figuur 3.1: Voorbeelden van grafen

Het is echter onbelangrijk hoe een graaf precies wordt afgebeeld; het is namelijk slechts van belang welke paren van punten een lijn vormen en welke niet. Twee punten u en v van een graaf G heten *verbonden* als $\{u, v\} \in E(G)$, oftewel als het paar $\{u, v\}$ een lijn vormt. Als dit het geval is, dan heet u een *buur* van v en andersom. Als alle punten van een graaf G buren van elkaar zijn, dan

heet de graaf *volledig*. Een volledige graaf met n punten wordt genoteerd met K_n . Figuur 3.1a is een voorbeeld van een volledige graaf; dit is namelijk de volledige graaf K_4 . Verder heet een punt v *verbonden* met een lijn e als $v \in e$ en heten verschillende lijnen e en f *verbonden* als ze eenzelfde punt bevatten.

De *graad* van een punt v is gelijk aan het aantal verschillende lijnen waarmee v verbonden is en wordt genoteerd met $\deg(v)$. Merk op dat de graad van een punt v dus ook gelijk is aan het aantal burens van v . Als alle punten van een graaf dezelfde graad hebben, dan wordt de graaf *regulier* genoemd. Hebben alle punten graad k , dan heet de graaf *k-regulier*. Een voorbeeld van een reguliere graaf is Figuur 3.1a; dit is namelijk een 3-reguliere graaf. Verder worden punten waarvan de graad gelijk is aan 1 de *eindpunten* van de graaf genoemd. Naast dat punten een graad hebben, hebben grafen als geheel ook een soort graad, twee zelfs; die de orde en de grootte van de graaf worden genoemd. De *orde* van een graaf G wordt gedefinieerd door het aantal punten van G en wordt genoteerd met $|G|$, waarbij dus geldt dat $|G| = |V(G)|$. De *grootte* van een graaf G is gelijk aan het aantal lijnen en wordt genoteerd met $\|G\|$, waarbij dus geldt dat $\|G\| = |E(G)|$.

Grafen kennen ook een complement; het *complement* van de graaf G heeft dezelfde verzameling punten als G , maar twee punten zijn burens dan en slechts dan als ze geen burens zijn in G . Het complement van een graaf G wordt genoteerd met \overline{G} . In Figuur 3.1 is te zien dat Figuur 3.1b en Figuur 3.1c elkaars complement zijn.

Verder is het mogelijk om punten en lijnen te verwijderen uit grafen. Als G een graaf is en S een verzameling punten van G , dan wordt met $G - S$ de graaf bedoeld met als verzameling punten de verzameling $V(G) \setminus S$ en als verzameling lijnen de verzameling die verkregen wordt door alle lijnen uit $E(G)$ te verwijderen waarvoor geldt dat ze verbonden zijn met een of meerdere punten uit S . Als F een verzameling lijnen is van een graaf G , dan wordt met $G - F$ de graaf bedoeld met $V(G)$ als verzameling punten en $E(G) \setminus F$ als verzameling lijnen. Als S en F maar uit één punt of lijn bestaan, en dus geschreven kunnen worden als $S = \{u\}$ en $F = \{e\}$, dan worden $G - S$ en $G - F$ ook wel genoteerd met respectievelijk $G - u$ en $G - e$.

Zij nu G opnieuw een graaf en S weer een verzameling punten van G . De door S *geïnduceerde subgraaf* van G is de subgraaf van G met als verzameling punten de verzameling S en als verzameling lijnen alle lijnen $\{u, v\} \in E(G)$ waarvoor geldt dat $u, v \in S$. De door S geïnduceerde subgraaf van G wordt genoteerd met $G[S]$.

Een rij punten v_1, v_2, \dots, v_{k+1} van een graaf G , zodanig dat $\{v_i, v_{i+1}\}$ voor elke $i = 1, \dots, k$ een lijn van G is, heet een *wandeling*. Als de punten v_1, v_2, \dots, v_k onderling verschillend zijn, dan heet de wandeling een *pad*, en als geldt dat v_1 en v_k als enige twee punten gelijk zijn, dan heet de wandeling een *cykel*. De *lengte* van een wandeling wordt gegeven door het aantal lijnen in de wandeling. Als v_1, v_2, \dots, v_{k+1} een wandeling is, dan geldt er dat deze wandeling v_1 en v_{k+1} *verbindt*. Er volgt nu een stelling die verband houdt met wandelingen en paden. Deze stelling, en ook het bewijs ervan, is gebaseerd op Theorem 1.16 uit [5, p. 32].

Stelling 3.1. *Zij u en v twee punten van een graaf G . Voor elke wandeling W die u met v verbindt, geldt er dat er een pad P bestaat zodat elke lijn uit P ook deel uitmaakt van W .*

Bewijs. Om deze stelling te bewijzen, stellen we dat W een wandeling is die u en v verbindt. Stel vervolgens dat P de kortste wandeling is die u en v verbindt en waarvan alle lijnen deel uitmaken van W , en dat we deze wandeling kunnen schrijven als $u = p_1, p_2, \dots, p_{k+1} = v$. De lengte van deze wandeling is gelijk aan k . We willen nu bewijzen dat P niet alleen een wandeling, maar zelfs een pad is dat u en v verbindt. Dit doet we met behulp van een contradictie. Stel dus dat P geen pad is. Dan geldt er dat er een punt van G bestaat dat meerdere keren voorkomt in P . Er geldt dus dat er een i en j met $1 \leq i < j \leq k+1$ bestaan zodat $u_i = u_j$. Als we nu de punten u_{i+1} tot en met u_j verwijderen uit P , verkrijgen we de wandeling $u = u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i = u_j, u_{j+1}, \dots, u_{k+1} = v$. Dit is een wandeling die u en v verbindt en waarvan alle lijnen deel uitmaken van W , maar met een lengte die kleiner is dan k . Dit is een tegenspraak, aangezien we hadden aangenomen dat P de kortste wandeling was waarvoor dit geldt. Hieruit kunnen we concluderen dat P inderdaad een pad is dat u en v verbindt en waarvan alle lijnen deel uitmaken van W . \square

Een graaf G heet *samenhangend* als tussen elk tweetal punten een pad loopt. In de gegeven voorbeelden geldt dat Figuur 3.1a en Figuur 3.1c samenhangende grafen zijn, maar Figuur 3.1b niet. Het is namelijk zo dat er in Figuur 3.1b bijvoorbeeld tussen de punten 1 en 2 geen enkel pad loopt. Punten $v \in V(G)$ van een samenhangende graaf G waarvoor geldt dat $G - v$ geen samenhangende graaf meer is, heten ook wel de *snijpunten* van de graaf G . In een samenhangende graaf wordt de *afstand* tussen twee punten u en v gedefinieerd als de lengte van het kortste pad wat u en v verbindt; dit wordt genoteerd met $d(u, v)$. In Figuur 3.1c geldt bijvoorbeeld dat $d(4, 5)$, de afstand tussen het punt 4 en het punt 5, gelijk is aan 2; namelijk gelijk aan de lengte van het pad 4, 2, 5.

Een samenhangende graaf die geen enkele cykel bevat, heet een *boom*. In de onderstaande figuur is aan de linkerkant een graaf afgebeeld die een boom is en aan de rechterkant een graaf die geen boom is. De aan de linkerkant afgebeelde graaf bevat namelijk geen enkele cykel, terwijl de aan de rechterkant afgebeelde graaf de cykel 1, 3, 5, 7, 6, 4, 1 bevat.



Figuur 3.2: Afbeeldingen van een graaf die een boom is en een graaf die geen boom is

Zij $G = (V(G), E(G))$ een graaf en zij $S \subseteq V(G)$. De door S geïnduceerde subgraaf van G heet een *component* van G als deze samenhangend is, en als voor alle punten in S geldt dat ze niet verbonden zijn met punten in $G - S$. We zien dus dat in Figuur 3.1 geldt dat de grafen afgebeeld in Figuur 3.1a en Figuur 3.1c bestaan uit 1 component en dat de graaf afgebeeld in Figuur 3.1b bestaat uit 2 componenten.

Het volgende deel van dit hoofdstuk is gebaseerd op Theorem 2.10 uit [5, p. 62] en op de tekst die voorafgaat aan Theorem 2.10. Een lijn $e = \{u, v\}$ in een samenhangende graaf G heet een *brug* als het verwijderen van deze lijn ervoor zorgt dat de graaf niet meer samenhangend is. Er geldt

dan dus dat $G - e$ bestaat uit twee componenten, waarbij één van de componenten u bevat en de ander v . We zullen nu de volgende stelling over bruggen bewijzen.

Stelling 3.2. *Een lijn $e = \{u, v\}$ van een samenhangende graaf G is een brug dan en slechts dan als e van geen enkele cykel van G deel uitmaakt.*

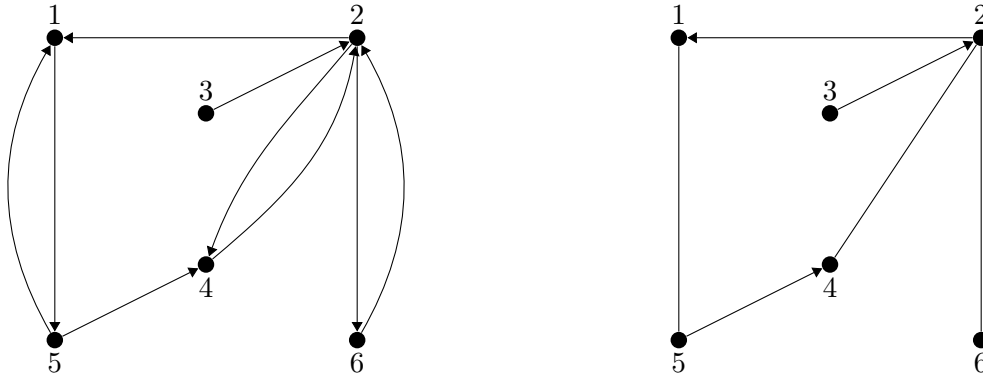
Bewijs. We bewijzen eerst de stelling van rechts naar links. Dit doen we met een bewijs op basis van contrapositie. Stel dus dat $e = \{u, v\}$ geen brug is, wat hetzelfde is als stellen dat $G - e$ een samenhangende graaf is. Dan geldt er dat er een pad P bestaat tussen u en v . In de graaf G geldt dan dat het pad P samen met de lijn e een cykel vormt van G waar de lijn e deel van uitmaakt, waarmee we de stelling van rechts naar links hebben bewezen.

Vervolgens bewijzen we de stelling van links naar rechts. We maken opnieuw gebruik van een bewijs op basis van contrapositie. Stel hiervoor dat $e = \{u, v\}$ deel uitmaakt van een cykel van G . Dan geldt er dat er een pad P' tussen u en v bestaat waar e geen deel van uitmaakt. Vervolgens willen we bewijzen dat e geen brug is, en dus dat de graaf $G - e$ een samenhangende graaf is. Stel hiervoor dat x en y willekeurige punten in de graaf G zijn. Omdat G een samenhangende graaf is, weten we dat er een pad Q bestaat tussen x en y . Als e geen deel uitmaakt van Q , dan weten we dat x en y ook in $G - e$ verbonden zijn, namelijk door het pad Q . Stel nu dat e wel deel uitmaakt van Q . Dan kunnen we e in het pad Q vervangen door het pad P' . Hieruit volgt dat er in de graaf $G - e$ een wandeling bestaat tussen de punten x en y , en kunnen we met behulp van Stelling 3.1 concluderen dat de punten x en y in de graaf $G - e$ verbonden zijn door een pad. Hiermee hebben we de stelling ook van links naar rechts bewezen. \square

3.1 Gerichte grafen

Een ander soort grafen zijn de gerichte grafen. Een *gerichte graaf* D is een paar $D = (V(D), A(D))$ dat bestaat uit twee disjuncte verzamelingen, waarbij geldt dat $A(D) \subset V(D) \times V(D)$ bestaat uit geordende paren van verschillende elementen van $V(D)$. De elementen van $V(D)$ heten net zoals in een ongerichte graaf *punten*, maar de elementen van $A(D)$ heten in een gerichte graaf geen lijnen maar *pijlen*.

Gerichte grafen kunnen we ook weergeven in een afbeelding. Hierbij worden de punten afgebeeld als stippen en pijlen tussen twee punten als pijlen tussen de bijbehorende stippen. Wanneer er voor bepaalde $u, v \in V(D)$ geldt dat zowel (u, v) als (v, u) element is van $A(D)$, wordt dit in plaats van met twee pijlen ook wel aangegeven met een lijn. Een voorbeeld hiervan is hieronder gegeven, waarbij de afgebeelde grafen dezelfde graaf weergeven.



Figuur 3.3: Verschillende afbeeldingen van dezelfde gerichte graaf

Ook in gerichte grafen kunnen we wandelingen en paden definiëren; dit doen we op de volgende manier. Een rij punten v_1, v_2, \dots, v_{k+1} van een gerichte graaf D , zodanig dat (v_i, v_{i+1}) voor elke $i = 1, \dots, k$ een pijl van D is, heet een *wandeling*. Als de punten v_1, v_2, \dots, v_k onderling verschillend zijn, dan heet de wandeling een *pad*, en als geldt dat v_1 en v_k als enige twee punten gelijk zijn, dan heet de wandeling een *cykel*. De *lengte* van een wandeling wordt gegeven door het aantal lijnen in de wandeling. Als v_1, v_2, \dots, v_{k+1} een wandeling is, dan geldt er dat deze wandeling v_1 en v_{k+1} *verbindt*.

Een gerichte graaf D heet *sterk samenhangend* als voor elk tweetal punten u en v er zowel een pad van u naar v bestaat als een pad van v naar u .

Hoofdstuk 4

Automorfismegroepen van grafen

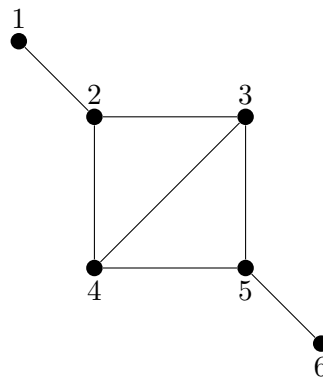
In dit hoofdstuk behandel ik het andere onbekende begrip uit de Stelling van Frucht, namelijk het begrip automorfismegroep van een graaf. Om dit begrip uit te kunnen leggen, zal ik eerst definiëren wat een isomorfisme is. De definities uit dit hoofdstuk zijn gebaseerd op de definities in het boek [11].

Definitie 4.1 (Isomorfisme). Zij G en G' twee grafen. Een functie $\alpha : V(G) \rightarrow V(G')$ is een *isomorfisme* als α bijectief is en als voor alle $u, v \in V(G)$ geldt dat $\{u, v\} \in E(G)$ dan en slechts dan als $\{\alpha(u), \alpha(v)\} \in E(G')$. De grafen G en G' worden in dit geval *isomorf* genoemd; dit wordt genoteerd met $G \cong G'$.

Op dezelfde manier kunnen we definiëren wat een isomorfisme tussen twee gerichte grafen D en D' is, daarbij geldt dan dat $(u, v) \in A(D)$ dan en slechts dan als $(\alpha(u), \alpha(v)) \in A(D')$.

Nu ik heb gedefinieerd wat een isomorfisme is, kan ik verdergaan met het definiëren van een automorfisme. Als de grafen G en G' uit de definitie van een isomorfisme namelijk dezelfde graaf zijn, dan heet α een *automorfisme* van G . Hetzelfde geldt in het geval van gerichte grafen D en D' . Een automorfisme is dus een functie die als het ware de structuur van een graaf onveranderd laat. Ik zal dit illustreren met een voorbeeld.

Voorbeeld 4.1. In dit voorbeeld bekijken we de onderstaande graaf G .

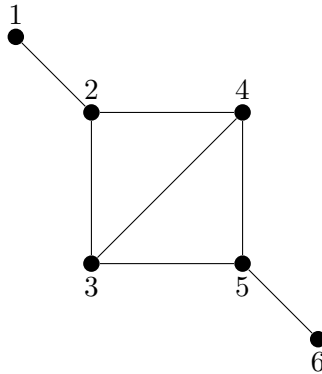


Figuur 4.1: Graaf G

Het is gemakkelijk in te zien dat de functie $\alpha_1 : V(G) \rightarrow V(G)$ die alle punten naar zichzelf stuurt, de identiteit op $V(G)$ dus, een automorfisme van G is. Dit is overigens niet alleen in dit voorbeeld het geval, maar geldt voor alle grafen; dit wordt bewezen in het bewijs van Lemma A.1. Verder geldt dat de functie

$$\alpha_2(u) = \begin{cases} u & \text{als } u \in \{1, 2, 5, 6\} \\ 3 & \text{als } u = 4 \\ 4 & \text{als } u = 3 \end{cases}$$

ook een automorfisme is van G . Dit is gemakkelijk te zien als we naar het beeld van deze functie kijken; dat is afgebeeld in de onderstaande figuur.

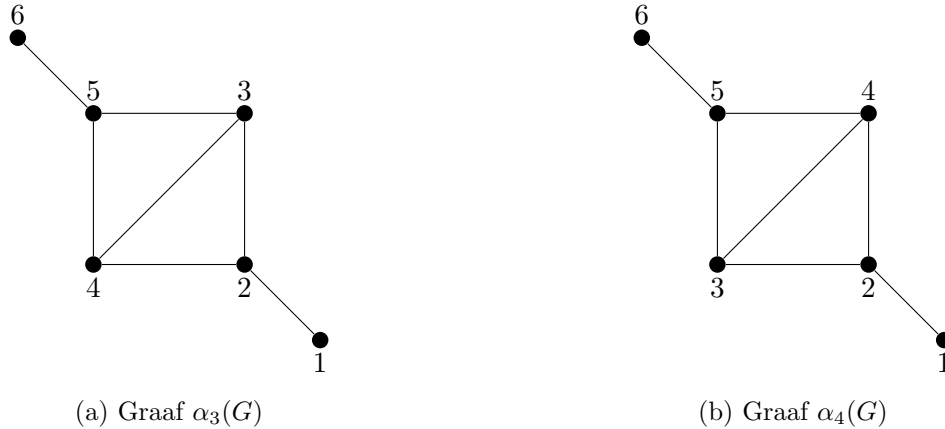


Figuur 4.2: Graaf $\alpha_2(G)$

De andere twee mogelijke automorfismes van G zijn

$$\alpha_3(u) = \begin{cases} u & \text{als } u \in \{3, 4\} \\ 1 & \text{als } u = 6 \\ 2 & \text{als } u = 5 \\ 5 & \text{als } u = 2 \\ 6 & \text{als } u = 1 \end{cases} \quad \text{en} \quad \alpha_4(u) = \begin{cases} 1 & \text{als } u = 6 \\ 2 & \text{als } u = 5 \\ 3 & \text{als } u = 4 \\ 4 & \text{als } u = 3 \\ 5 & \text{als } u = 2 \\ 6 & \text{als } u = 1 \end{cases},$$

met als bijbehorend beeld de onderstaande figuren.



Figuur 4.3: Beelden van G onder α_3 en α_4

Ik zal nu bewijzen dat deze vier automorfismen ook echt alle mogelijke automorfismen van G zijn. Dit zal ik doen door alle verschillende mogelijkheden voor automorfismen van G af te gaan.

We bekijken ten eerste alle automorfismen die op het punt 1 gelijk zijn aan de identiteit. Aangezien punt 1 en punt 6 de enige twee punten zijn die graad 1 hebben, moet er dan ook gelden dat deze automorfismen op het punt 6 gelijk zijn aan de identiteit. Er geldt namelijk dat automorfismen de graad van een punt behouden; zie voor het bewijs Lemma A.2. Verder moet er dan gelden dat deze automorfismen ook op de punten 2 en 5 gelijk zijn aan de identiteit. De reden hiervoor is dat automorfismen de afstand tussen punten behouden; zie voor het bewijs Lemma A.3. Omdat dit het geval is, moeten deze automorfismen op de punten 2 en 5 dus wel gelijk zijn aan de identiteit, anders kan de afstand tussen het punt 1 en het beeld van punt 2 nooit gelijk zijn aan 1; hetzelfde geldt voor de punten 6 en 5. Dan zijn er nog de punten 3 en 4 over. We kunnen ervoor kiezen om het automorfisme ook op deze punten gelijk te laten zijn aan de identiteit; dit resulteert in het automorfisme α_1 . Ook kunnen we ervoor kiezen om deze punten op elkaar af te beelden; dat resulteert in het automorfisme α_2 .

We hebben nu alle automorfismen bekeken die op het punt 1 gelijk zijn aan de identiteit. Vervolgens zullen we de automorfismen bekijken die op punt 1 niet gelijk zijn aan de identiteit. Zoals ik hierboven al had opgemerkt, geldt het dat automorfismen de graad van punten behouden. Als een automorfisme op het punt 1 dus niet gelijk is aan de identiteit, dan moet het wel gelden dat dit automorfisme de punten 1 en 6 op elkaar afbeeldt, aangezien dit de enige punten zijn met graad 1. Omdat automorfismen de afstand tussen punten behouden, moet dan ook gelden dat de automorfismen die de punten 1 en 6 op elkaar afbeelden, ook de punten 2 en 5 op elkaar afbeelden, anders kan de afstand tussen het beeld van punt 1 en het beeld van punt 2 nooit gelijk zijn aan 1; hetzelfde geldt voor de punten 6 en 5. Ten slotte bekijken we weer de punten 3 en 4. We kunnen er weer voor kiezen om het automorfisme op deze punten gelijk te zijn aan de identiteit; dit resulteert in het automorfisme α_3 . Ook kunnen we er weer voor kiezen om deze punten om te wisselen; dat resulteert in het automorfisme α_4 .

We zijn nu zowel alle mogelijke automorfismen die de identiteit zijn op het punt 1 afgegaan als alle mogelijke automorfismen die dat niet zijn en hebben hiermee dus alle automorfismen van G

behandeld. Hiermee is nu bewezen dat de automorfismes α_1 , α_2 , α_3 en α_4 alle mogelijke automorfismes van de graaf G zijn.

Nu we hebben gedefinieerd wat een automorfisme van een graaf G is, zijn we ook in staat om te definiëren wat een automorfismegroep van een graaf G is. Er geldt namelijk dat de verzameling automorfismes van G samen met de operatie samenstelling van functies een groep vormt; dit wordt bewezen in het bewijs van Lemma A.4. Deze groep wordt de *automorfismegroep* van de graaf G genoemd en wordt genoteerd met $\text{Aut}(G)$.

Voorbeeld 4.2. In dit voorbeeld zullen we de automorfismegroep van de graaf G uit Voorbeeld 4.1 bekijken. We hebben in Voorbeeld 4.1 gezien dat de verzameling automorfismes van G bestaat uit de elementen α_1 , α_2 , α_3 en α_4 . Wanneer we deze elementen nader bekijken, is het gemakkelijk om in te zien dat er geldt dat $\alpha_1 = \text{Id}$, dat $\alpha_2^2 = \alpha_3^2 = \alpha_4^2 = \text{Id}$ en dat voor verschillende elementen i , j en k van $\{2, 3, 4\}$ geldt dat $\alpha_i\alpha_j = \alpha_k$. We zien dus dat deze groep isomorf is aan de viergroep van Klein, en dus ook isomorf aan $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

We hebben nu gezien wat alle begrippen uit de Stelling van Frucht inhouden, maar ook in het bewijs van de stelling komen begrippen voor die uitleg behoeven. Voordat ik de stelling ga bewijzen, zal ik daarom in het volgende hoofdstuk nog een aantal begrippen en stellingen over deze begrippen introduceren.

Hoofdstuk 5

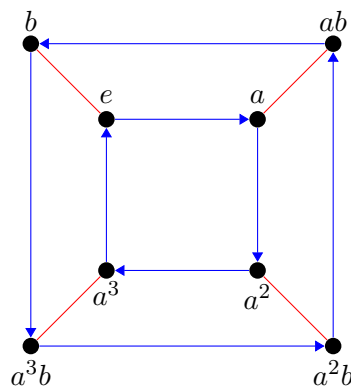
Cayley grafen

In het bewijs van de Stelling van Frucht gaan we gebruik maken van Cayley grafen. Wat dat precies zijn, zal ik in dit hoofdstuk uitleggen. Een Cayley graaf is een manier om uit een gegeven groep een graaf te construeren. Dat gaat op de volgende manier.

Definitie 5.1 (Cayley graaf). Zij Γ een eindige groep en $X \subseteq \Gamma$ een deelverzameling van de elementen van Γ . De *Cayley graaf* van Γ ten opzichte van X is een gerichte graaf, met als punten de elementen van Γ en als pijlen de verzameling $\{(\gamma, \gamma x) \mid \gamma \in \Gamma, x \in X \text{ en } \gamma \neq \gamma x\}$. Verder wordt aan de pijl $(\gamma, \gamma x)$ het label x gegeven. Deze labels worden ook wel kleuren genoemd, vandaar dat de Cayley graaf van Γ ten opzichte van X genoteerd wordt met $\text{Col}(\Gamma, X)$.

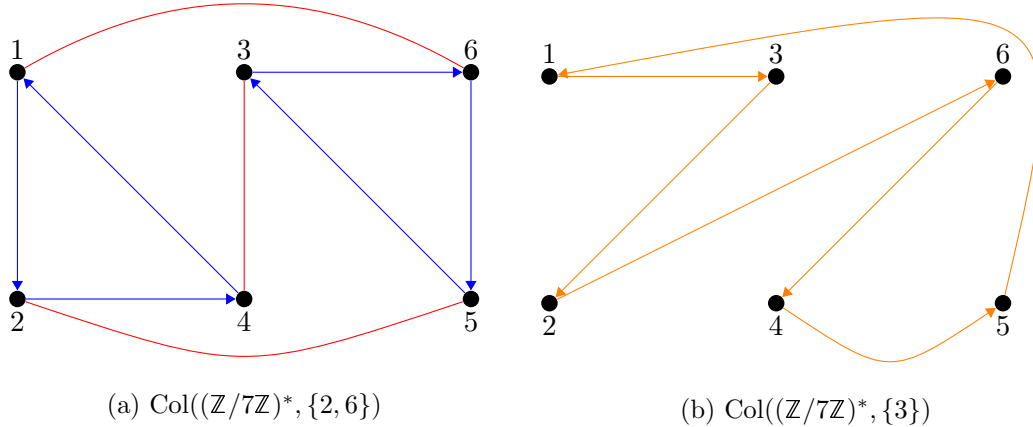
Omdat deze definitie op het eerste zicht erg onduidelijk kan zijn, zal ik proberen wat duidelijkheid te scheppen met behulp van een aantal voorbeelden.

Voorbeeld 5.1 (Cayley graaf van D_4). In dit voorbeeld bekijken we een Cayley graaf van de dihedrale groep D_4 . Deze groep kan worden geschreven als $D_4 = \langle a, b \mid a^4 = b^2 = e, ab = ba^3 \rangle = \{e, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$. De verzameling $X = \{a, b\}$ is dus een deelverzameling van de elementen van D_4 , waarvoor verder ook nog geldt dat X de groep D_4 voortbrengt. Als we nu a associëren met de kleur blauw en b met de kleur rood, dan kunnen we de Cayley graaf van D_4 ten opzichte van $\{a, b\}$ als volgt weergeven.



Figuur 5.1: $\text{Col}(D_4, \{a, b\})$

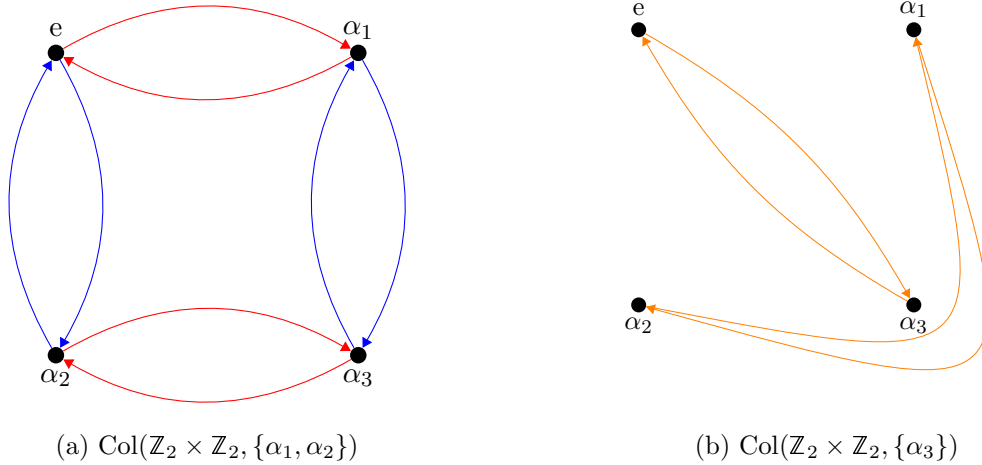
Voorbeeld 5.2 (Cayley grafen van $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*$). In dit voorbeeld bekijken we twee Cayley grafen van de groep $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*$. Deze groep wordt gegeven door de verzameling $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ samen met de operatie \circ_7 , waarbij $a \circ_7 b = a \cdot b \pmod{7}$. We bekijken de Cayley grafen ten opzichte van twee verzamelingen die beide de groep voortbrengen, namelijk ten opzichte van de verzameling $\{2, 5\}$ en ten opzichte van de verzameling $\{3\}$. Hierbij associëren we 2 met de kleur blauw, 6 met de kleur rood en 3 met de kleur oranje. De Cayley grafen zien er dan als volgt uit.



Figuur 5.2: Cayley grafen van $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*$

Er geldt dat de Cayley graaf van een groep Γ ten opzichte van een verzameling X sterk samenhangend is dan en slechts dan als X een verzameling is die Γ voortbrengt. Dit wordt bewezen in het bewijs van Lemma A.5. Het is ook terug te zien als we kijken naar een Cayley graaf van een groep ten opzichte van een verzameling die de groep niet voortbrengt; een voorbeeld hiervan is hieronder te vinden.

Voorbeeld 5.3 (Cayley grafen van $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$). In dit voorbeeld bekijken we twee Cayley grafen van de groep $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. De elementen van deze groep kunnen worden weergegeven als $\{e, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, waarbij er verder geldt dat $\alpha_2^2 = \alpha_3^2 = \alpha_4^2 = e$ en dat voor verschillende elementen i, j en k van $\{2, 3, 4\}$ geldt dat $\alpha_i \alpha_j = \alpha_k$. We bekijken nu de Cayley graaf van $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ten opzichte van de verzameling $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ en ten opzichte van de verzameling $\{\alpha_3\}$. Hierbij associëren we α_1 met de kleur rood, α_2 met de kleur blauw en α_3 met de kleur oranje. Er geldt dat $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ een verzameling is die $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ voortbrengt en dat $\{\alpha_3\}$ een verzameling is die dat niet doet en dit is ook terug te zien in de Cayley grafen. Zoals te zien geldt er namelijk dat $\text{Col}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \{\alpha_1, \alpha_2\})$ een sterk samenhangende graaf is en dat $\text{Col}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \{\alpha_3\})$ dat niet is.



Figuur 5.3: Cayley grafen van $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

Op dezelfde manier dat we op gewone gerichte grafen automorfismes kunnen bekijken, kunnen we op Cayley grafen automorfismes bekijken. Een bijzonder soort automorfismes op Cayley grafen zijn de zogeheten kleurbehoudende automorfismes; die als volgt zijn gedefinieerd.

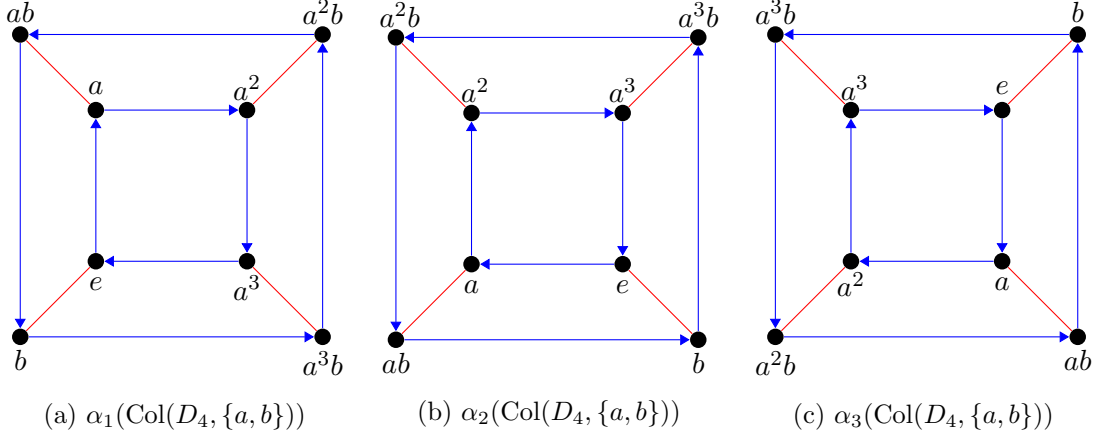
Definitie 5.2 (Kleurbehoudend automorfisme). Zij $\text{Col}(\Gamma, X)$ de Cayley graaf van een groep Γ ten opzichte van een verzameling X . Een element α van $\text{Aut}(\text{Col}(\Gamma, X))$ heet een *kleurbehoudend automorfisme* van $\text{Col}(\Gamma, X)$ als voor alle $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ en alle $x \in X$ geldt dat (γ_1, γ_2) een pijl met de kleur x is dan en slechts dan als $(\alpha(\gamma_1), \alpha(\gamma_2))$ een pijl met de kleur x is.

De verzameling kleurbehoudende automorfismes van $\text{Col}(\Gamma, X)$ is een ondergroep van $\text{Aut}(\text{Col}(\Gamma, X))$; dit wordt bewezen in het bewijs van Lemma A.6. We zullen deze groep noteren met $\text{Aut}_{\text{Col}}(\text{Col}(\Gamma, X))$. Om het begrip kleurbehoudend automorfisme nog wat meer toe te lichten, volgt hieronder een voorbeeld.

Voorbeeld 5.4 (Kleurbehoudende automorfismes van $\text{Col}(D_4, \{a, b\})$). In dit voorbeeld bekijken we een aantal kleurbehoudende automorfismes van de Cayley graaf $\text{Col}(D_4, \{a, b\})$, die is afgebeeld in Figuur 5.1. Voorbeelden van kleurbehoudende automorfismes van deze graaf zijn de functies α_1 , α_2 en α_3 , die gegeven worden door

$$\alpha_1(u) = au, \quad \alpha_2(u) = a^2u \quad \text{en} \quad \alpha_3(u) = a^3u.$$

Het is gemakkelijk in te zien dat dit kleurbehoudende automorfismes zijn als we de beelden van deze functies bekijken. De beelden van $\text{Col}(D_4, \{a, b\})$ onder α_1 , α_2 en α_3 kunnen als volgt afgebeeld worden.



Figuur 5.4: Beelden van $\text{Col}(D_4, \{a, b\})$ onder α_1, α_2 en α_3

We zullen nu twee belangrijke stellingen over Cayley grafen bewijzen die we ook zullen gebruiken in het bewijs van de stelling van Frucht. Ik heb deze stellingen en bewijzen gebaseerd op Lemma 3.1 en Theorem 3.2 uit [11, p. 41-42] en op Theorem 5.4 en Theorem 5.5 uit [5, p. 209].

Stelling 5.1. *Zij Γ een niet triviale eindige groep en $X \subseteq \Gamma$ een verzameling die Γ voortbrengt. Zij verder α een permutatie van $V(\text{Col}(\Gamma, X))$. Dan is α een kleurbehoudend automorfisme van $\text{Col}(\Gamma, X)$ dan en slechts dan als $\alpha(\gamma x) = \alpha(\gamma)x$ voor alle $\gamma \in \Gamma$ en $x \in X$.*

Bewijs. We bewijzen eerst de bewering van links naar rechts. Stel hiervoor dat α een kleurbehoudend automorfisme is en zij $\gamma \in \Gamma$ en $x \in X$. We weten dat er geldt dat $(\gamma, \gamma x)$ een pijl is die de kleur x heeft. Omdat α een kleurbehoudend automorfisme is, geldt er dan ook dat $(\alpha(\gamma), \alpha(\gamma x))$ een pijl is die de kleur x heeft, en dus dat $\alpha(\gamma x) = \alpha(\gamma)x$.

Vervolgens bewijzen we de bewering van rechts naar links. Stel hiervoor dat voor alle $\gamma \in \Gamma$ en $x \in X$ geldt dat $\alpha(\gamma x) = \alpha(\gamma)x$ en zij $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ en $y \in X$ zodat (γ_1, γ_2) een pijl is met de kleur y . Dit is het geval dan en slechts dan als $\gamma_2 = \gamma_1 y$, en dus dan en slechts dan als $\alpha(\gamma_2) = \alpha(\gamma_1 y) = \alpha(\gamma_1)y$, en dus ook dan en slechts dan als $(\alpha(\gamma_1), \alpha(\gamma_2))$ een pijl is met de kleur y . Hieruit volgt vervolgens dat α een kleurbehoudend automorfisme is, waarmee we de stelling hebben bewezen. \square

Stelling 5.2. *Zij Γ een niet triviale eindige groep en $X \subseteq \Gamma$ een verzameling die Γ voortbrengt. Dan is $\text{Aut}_{\text{Col}}(\text{Col}(\Gamma, X))$, de groep van kleurbehoudende automorfismen van de Cayley graaf van Γ ten opzichte van X , isomorf aan Γ .*

Bewijs. Om te beginnen, zij de orde van Γ gelijk aan n , dan kunnen we Γ schrijven als $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$. We definiëren vervolgens voor elke $1 \leq i \leq n$ de functie $\alpha_i : V(\text{Col}(\Gamma, X)) \rightarrow V(\text{Col}(\Gamma, X))$ door $\alpha_i(\gamma_s) = \gamma_i \gamma_s$ voor alle $1 \leq s \leq n$. Dit is een injectieve functie. Stel namelijk dat $\alpha_i(\gamma_s) = \alpha_i(\gamma_t)$, dan geldt er dat $\gamma_i \gamma_s = \gamma_i \gamma_t$. Omdat Γ een groep is, weten we dat er een element γ_i^{-1} bestaat zodat $\gamma_i^{-1} \gamma_i = e$. Er geldt dus ook dat $\gamma_i^{-1} \gamma_i \gamma_s = \gamma_i^{-1} \gamma_i \gamma_t$, en dus dat $\gamma_s = \gamma_t$, waaruit volgt dat α_i injectief is. Omdat α_i een injectieve functie is van een eindige verzameling naar zichzelf, weten we ook dat α_i surjectief is, en dus bijectief. Zij nu γ een willekeurig element van Γ en x een willekeurig element van X . Er geldt dan dat $\alpha_i(\gamma x) = \gamma_i \gamma x = \alpha_i(\gamma)x$, waaruit met

behulp van Stelling 5.1 volgt dat α_i een kleurbehoudend automorfisme van $\text{Col}(\Gamma, X)$ is.

We bekijken een willekeurig element α in $\text{Aut}_{\text{Col}}(\text{Col}(\Gamma, X))$ en stellen dat $\gamma_1 = e$. Stel vervolgens dat $\alpha(\gamma_1) = \gamma_r$ en zij γ_s een willekeurig element van Γ . Dan kunnen we, omdat X de hele groep voortbrengt, γ_s schrijven als $\gamma_s = x_1x_2\dots x_t = \gamma_1x_1x_2\dots x_t$, waarbij $x_i \in X$ voor alle $1 \leq i \leq t$. Ook geldt er dan, met behulp van Stelling 5.1, dat

$$\alpha(\gamma_s) = \alpha(\gamma_1x_1x_2\dots x_t) = \alpha(\gamma_1x_1x_2\dots x_{t-1})x_t = \dots = \alpha(\gamma_1)x_1x_2\dots x_t = \gamma_r\gamma_s.$$

Hieruit volgt nu dat $\alpha = \alpha_r$.

Ten slotte bekijken we de functie $\phi : \Gamma \rightarrow \text{Aut}_{\text{Col}}(\text{Col}(\Gamma, X))$, gegeven door $\phi(\gamma_i) = \alpha_i$ voor alle $1 \leq i \leq n$. We willen bewijzen dat deze functie een groepsisomorfisme is. Uit het voorgaande deel van het bewijs volgt al dat deze functie bijectief is, dus hoeven we alleen te bewijzen dat er voor alle $\gamma_i, \gamma_j \in \Gamma$ geldt dat $\phi(\gamma_i\gamma_j) = \phi(\gamma_i) \circ \phi(\gamma_j)$. Dit doen we door willekeurige elementen γ_i en γ_j van Γ te bekijken. We noemen verder het product $\gamma_i\gamma_j = \gamma_k \in \Gamma$. Er geldt dan dat $\phi(\gamma_i\gamma_j) = \phi(\gamma_k) = \alpha_k$ en dat $\phi(\gamma_i) \circ \phi(\gamma_j) = \alpha_i \circ \alpha_j$. We willen bewijzen dat deze functies dezelfde functie zijn; dit doen we door voor een willekeurig element $\gamma_s \in \Gamma$ te kijken naar

$$\alpha_k(\gamma_s) = \gamma_k\gamma_s = (\gamma_i\gamma_j)\gamma_s = \gamma_i(\gamma_j\gamma_s) = \alpha_i(\gamma_j\gamma_s) = \alpha_i(\alpha_j(\gamma_s)) = \alpha_i \circ \alpha_j(\gamma_s).$$

Hieruit volgt nu dat ϕ een isomorfisme is, en dus dat $\Gamma \cong \text{Aut}_{\text{Col}}(\text{Col}(\Gamma, X))$, wat precies is wat we wilden bewijzen. \square

Hoofdstuk 6

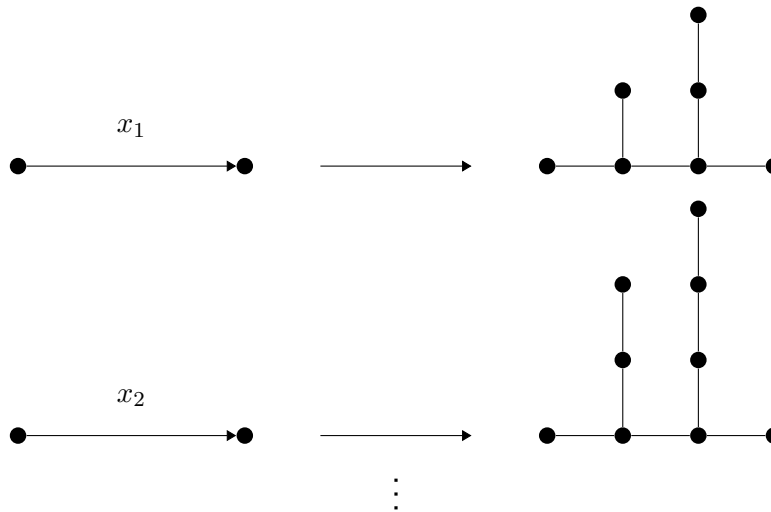
Stelling van Frucht

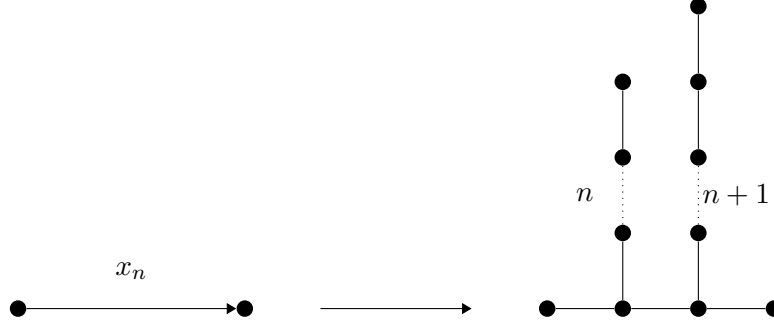
Nu ik alle benodigde begrippen heb geïntroduceerd en een aantal voorbereidende stellingen heb bewezen, zijn we in staat om de stelling van Frucht te bewijzen, wat ik nu dan ook zal doen. Het bewijs heb ik gebaseerd op het bewijs van Theorem 3.3 in [11, p. 42], het bewijs van Theorem 5.6 in [5, p. 210-211], de uitwerking van opgave 5 uit paragraaf 12 in [12, p. 496] en Frucht's eigen tekst in [7].

Stelling 6.1 (Stelling van Frucht, [11, p. 42]). *Zij Γ een eindige groep. Dan bestaat er een eindige graaf G zodat $\text{Aut}(G) \cong \Gamma$, oftewel, zodat de automorfismegroep van G isomorf is aan Γ .*

Bewijs. We beschouwen eerst het geval dat Γ de triviale groep is. In dit geval geldt er voor $G = K_1$, de volledige graaf met $|V(G)| = 1$, dat $\text{Aut}(G) \cong \Gamma$.

Zij daarom Γ een niet triviale eindige groep, dan bestaat er een verzameling $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ die Γ voortbrengt, waarbij $1 \leq n \leq |\Gamma|$ en $|\Gamma| \geq 2$. Met behulp van Stelling 5.2 weten we dat Γ isomorf is aan $\text{Aut}_{\text{Col}}(\text{Col}(\Gamma, X))$; de groep van kleurbehoudende automorfismes van de Cayley graaf van Γ ten opzichte van X . Om de stelling te bewijzen willen we nu vanuit $\text{Col}(\Gamma, X)$ een ongerichte graaf G construeren waarvan de automorfismegroep isomorf is aan de groep $\text{Aut}_{\text{Col}}(\text{Col}(\Gamma, X))$. Deze graaf G construeren we door in $\text{Col}(\Gamma, X)$ voor elke $1 \leq i \leq n$ elke pijl met de kleur x_i te vervangen door een stukje graaf zoals hieronder afgebeeld.



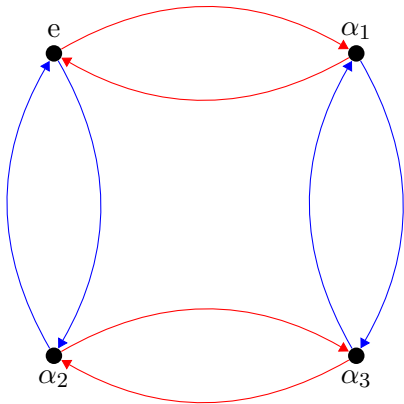


Het enige wat we nu nog hoeven te bewijzen is dat de automorfismegroep van deze graaf isomorf is aan $\text{Aut}_{\text{Col}}(\text{Col}(\Gamma, X))$.

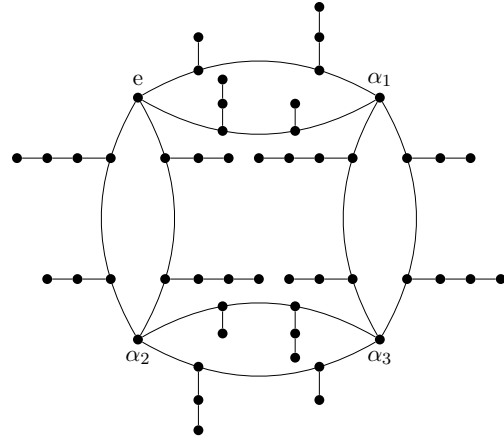
Hiervoor merken we op dat elk kleurbehoudend automorfisme α van de graaf $\text{Col}(\Gamma, X)$ uniek een automorfisme van de graaf G induceert. Het kleurbehoudende automorfisme beeldt namelijk elementen van Γ af op elementen van Γ , waarbij het beeld van een pijl met de kleur x_i opnieuw een pijl met de kleur x_i is. In de graaf G betekent dit dat een punt γ uit $\text{Col}(\Gamma, X)$ afgebeeld wordt op $\alpha(\gamma)$ en dat, in plaats van dat pijlen op pijlen worden afgebeeld, vervangende stukjes graaf op dezelfde soort vervangende stukjes graaf worden afgebeeld. Hieruit volgt dat elk kleurbehoudend automorfisme van $\text{Col}(\Gamma, X)$ inderdaad een uniek automorfisme van G induceert.

Vervolgens laten we zien dat elk automorfisme van G een uniek kleurbehoudend automorfisme van $\text{Col}(\Gamma, X)$ induceert. Daarvoor merken we op dat de punten $V(\text{Col}(\Gamma, X))$ precies de punten van G zijn die zowel geen eindpunt als snijpunt van G zijn. Met behulp van Lemma A.2 weten we dat een automorfisme van G eindpunten op eindpunten afbeeldt en uit Lemma A.7 volgt dat een automorfisme van G snijpunten op snijpunten afbeeldt. Hieruit volgt dat voor alle $\alpha \in \text{Aut}(G)$ geldt dat $\alpha(V(\text{Col}(\Gamma, X))) = V(\text{Col}(\Gamma, X))$. Hieruit volgt ook dat $\alpha(V(G) - V(\text{Col}(\Gamma, X))) = V(G) - V(\text{Col}(\Gamma, X))$, en dus dat de vervangende stukjes graaf op elkaar worden afgebeeld. Deze vervangende stukjes graaf kunnen alleen op elkaar worden afgebeeld als ze een pijl van dezelfde kleur vervangen en zijn ook op een unieke manier gebonden aan een pijl met een bepaalde kleur. Hieruit volgt vervolgens dat in $\text{Col}(\Gamma, X)$ geldt dat voor alle $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ en alle $x \in X$ geldt dat (γ_1, γ_2) een pijl met de kleur x is dan en slechts dan als $(\alpha(\gamma_1), \alpha(\gamma_2))$ een pijl met de kleur x is; en dus dat α een kleurbehoudend automorfisme van $\text{Col}(\Gamma, X)$ induceert. Ten slotte kunnen we concluderen dat er geldt dat $\text{Aut}(G) \cong \text{Aut}_{\text{Col}}(\text{Col}(\Gamma, X)) \cong \Gamma$, en dus dat er een eindige graaf G bestaat zodat de automorfismegroep van G isomorf is aan Γ . \square

Voorbeeld 6.1. Dit is een voorbeeld ter illustratie van het bewijs van de Stelling van Frucht. We bekijken, net als in Voorbeeld 5.3, de Cayley graaf van de groep $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ten opzichte van de verzameling $\{\alpha_1, \alpha_2\}$. Hierbij associëren we α_1 met de kleur rood en α_2 met de kleur blauw. We weten dat er geldt dat de groep van kleurbehoudende automorfismen van de Cayley graaf van $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ten opzichte van $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ isomorf is aan $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Als we nu α_1 zien als de x_1 in het bewijs van de Stelling van Frucht en α_2 als de x_2 , en we de pijlen vervangen door de stukjes graaf zoals beschreven in het bewijs van de Stelling van Frucht, dan verkrijgen we de graaf zoals afgebeeld in Figuur 6.1b. Zoals we net hebben bewezen, geldt er dus dat de automorfismegroep van deze graaf isomorf is aan $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.



(a) $\text{Col}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \{\alpha_1, \alpha_2\})$



(b) $\text{Col}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \{\alpha_1, \alpha_2\})$ met vervangen pijlen

Figuur 6.1: Voorbeeld ter illustratie van het bewijs van de Stelling van Frucht

Hoofdstuk 7

Universaliteit: planaire grafen

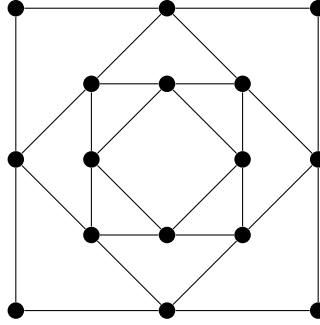
Een *klasse* grafen is een verzameling grafen met een overeenkomende eigenschap. Een voorbeeld van een klasse grafen is de klasse van eindige grafen; oftewel de verzameling van alle grafen met een eindige orde. Een klasse grafen heet *universeel* als er geldt dat voor elke eindige groep Γ er een graaf G in de klasse bestaat zodat de automorfismegroep van G isomorf is aan Γ . De Stelling van Frucht zegt dus ook wel dat de klasse van eindige grafen universeel is. Nu ik de Stelling van Frucht heb bewezen, is het een logische stap om na te gaan denken welke andere klassen grafen universeel zijn en welke niet. Frucht heeft hier zelf, na bewezen te hebben dat de eindige grafen universeel zijn, ook over nagedacht en publiceerde in 1949 een artikel waarin hij bewijst dat ook de 3-reguliere eindige grafen universeel zijn. [9] Wij zullen gaan kijken naar een klasse grafen die niet universeel is; namelijk de klasse van planaire grafen.

László Babai heeft in zijn in 1972 gepubliceerde artikel ‘Automorphism Groups of Planar Graphs, I’ laten zien dat er een klasse grafen bestaat die niet universeel is; namelijk de klasse van planaire grafen. [2] Een *planaire graaf* is een graaf die in het platte vlak kan worden afgebeeld zonder dat er lijnen zijn die elkaar snijden. In deze paragraaf zal ik aan de hand van het artikel van Babai de volgende stelling bewijzen.

Stelling 7.1. *Er zijn oneindig veel groepen die voor elke planaire graaf G niet isomorf zijn aan $\text{Aut}(G)$.*

Merk op dat uit deze stelling volgt dat de klasse van planaire grafen, zoals eerder aangegeven, niet universeel is. Voor we kunnen beginnen met het bewijs van Stelling 7.1, is het eerst belangrijk om een aantal definities te introduceren.

Bij een afbeelding van een planaire graaf waarin er geen twee lijnen zijn die elkaar snijden is het mogelijk om te spreken van *facetten*. De afbeelding van de planaire graaf verdeelt het platte vlak namelijk in een aantal gebieden, en precies deze gebieden zijn de facetten. Hierbij is het zo dat het oneindig grote buitenste gebied ook een facet is. Zo heeft de onderstaande planaire graaf bijvoorbeeld 14 facetten.



Figuur 7.1: Graaf met 14 facetten

Nu we hebben gedefinieerd wat facetten zijn, kunnen we overgaan naar het bewijzen van een stelling die van toepassing is op alle samenhangende planaire grafen en die we zullen gebruiken in het bewijs van Stelling 7.1; de Euler Identiteit. Het bewijs van deze stelling is gebaseerd op het bewijs van Theorem 6.1 in [5, p. 225]. De stelling luidt als volgt.

Stelling 7.2 (De Euler Identiteit). *Zij G een samenhangende planaire graaf met v punten, e lijnen en f facetten. Dan geldt er dat*

$$v - e + f = 2.$$

Bewijs. We bewijzen deze stelling door middel van inductie op het aantal lijnen van G . De inductiebasis is als volgt.

Zij $e = 0$. Er is maar één mogelijke samenhangende planaire graaf met 0 lijnen; en dat is K_1 . K_1 is een graaf met 1 punt, 0 lijnen en 1 facet. Er geldt dus dat $v - e + f = 1 - 0 + 1 = 2$, waaruit volgt dat K_1 voldoet aan de stelling.

We formuleren de inductiehypothese op de volgende manier. Stel dat voor $e > 0$ geldt dat voor alle samenhangende planaire grafen met v' punten, $e' < e$ lijnen en f' facetten geldt dat $v' - e' + f' = 2$. Vervolgens bekijken we de graaf G met v punten, e lijnen en f facetten. We onderscheiden de volgende twee gevallen.

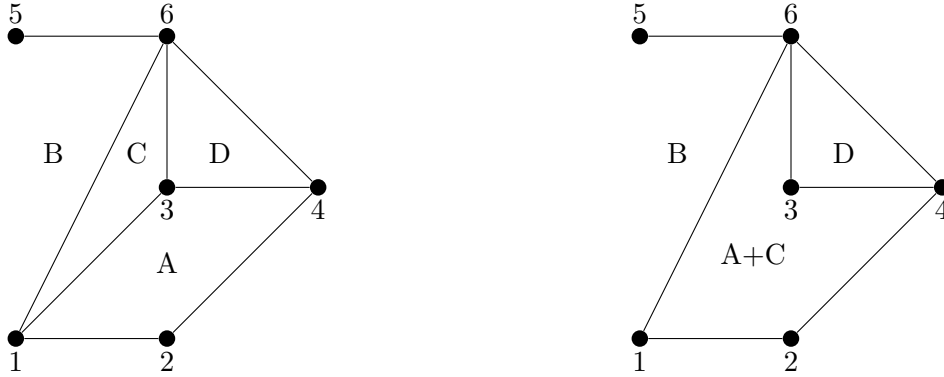
1. G is een boom. In dit geval geldt er dat $e = v - 1$ en dat $f = 1$. Hieruit volgt dat $v - e + f = v - (v - 1) + 1 = v - v + 1 + 1 = 2$.
2. G is geen boom. Er geldt dan dat G een cykel bevat. Zij l een lijn die deel uitmaakt van deze cykel. Dan weten we met behulp van Stelling 3.2 dat de lijn l geen brug is, en dat er dus geldt dat $G - l$ een samenhangende graaf is. Deze lijn l is onderdeel van de rand van twee verschillende facetten, die door de verwijdering van l worden samengevoegd tot één facet.

Om dit idee wat te verduidelijken, heb ik Figuur 7.2 toegevoegd. Zoals is te zien is de lijn $\{1, 3\}$ in de graaf die in het linkerfiguur is afgebeeld onderdeel van meerdere cyclen, bijvoorbeeld van de cykel $1, 3, 6, 1$. Verder behoort deze lijn tot de rand van de facetten A en C . Als de lijn $\{1, 3\}$ wordt verwijderd, worden deze facetten samengevoegd tot één facet, zoals is te zien in de rechterfiguur.

De graaf die ontstaat door verwijdering van de lijn l uit de graaf G , ook wel genoteerd met

$G-l$, is dus een graaf met v punten, $e-1$ lijnen en $f-1$ facetten. Omdat $e-1 < e$ kunnen we nu met behulp van de inductiehypothese concluderen dat $v - (e-1) + (f-1) = v - e + f = 2$.

Op basis van inductie kunnen we nu concluderen dat voor elke samenhangende planaire graaf met v punten, e lijnen en f facetten geldt dat $v - e + f = 2$. \square



Figuur 7.2: Afbeelding ter verduidelijking van het bewijs van Stelling 7.2

Om Stelling 7.1 te bewijzen, gaan we bewijzen dat voor elke gegeneraliseerde quaternionengroep Q^n geldt dat er geen planaire graaf G bestaat zodat Q^n isomorf is aan $\text{Aut}(G)$. Voordat we dit gaan bewijzen, is het natuurlijk van belang om te weten wat de gegeneraliseerde quaternionengroep is. Deze groep is voor elke $n \geq 3$ gedefinieerd als

$$Q^n = \langle \alpha, \beta \mid \alpha^{2^{n-1}} = 1, \beta\alpha\beta^{-1} = \alpha^{-1}, \beta^2 = \alpha^{2^{n-2}} \rangle.$$

Deze groep heet ook wel de dicyclische groep van orde 2^n , voor meer informatie over deze groep, zie bijvoorbeeld [13, p. 347-348]. Er geldt dat de orde van de groep Q^n gelijk is aan $|Q^n| = 2^n$ en dat $\gamma = \beta^2$ het enige element van orde 2 is. Verder weten we dat voor elk element $x \in Q^n$ geldt dat de orde van x , genoteerd met $\text{ord}(x)$, de orde van de groep, 2^n dus, moet delen. Zie voor het bewijs hiervan Corollary 11.2 in [1, p. 58]. Voor alle x met $\text{ord}(x) \geq 2$, en dus voor alle x ongelijk aan e , volgt hier vervolgens uit dat $\text{ord}(\gamma) = 2 \mid \text{ord}(x)$, en ook dat $\text{ord}(x^{\frac{1}{2}\text{ord}(x)}) = 2$, waar weer uit volgt dat $\gamma = x^{\frac{1}{2}\text{ord}(x)}$. Er geldt dus dat γ voor alle elementen x van Q^n ongelijk aan e geschreven kan worden als een macht van x .

Voor we beginnen met het bewijs van Stelling 7.1, is het belangrijk om nog een aantal andere definities te introduceren. We beginnen met definiëren wat een relationeel systeem is.

Een *relationeel systeem* X is een paar $(V(X), \mathcal{R}(X))$, waarbij $V(X)$ de niet-lege verzameling punten van X is en $\mathcal{R}(X) = \{R_\alpha \mid \alpha \in A\}$ een familie van relaties gedefinieerd op $V(X)$ is. In ons geval zullen we kijken naar relationele systemen X met alleen *unaire* en *binair* relaties; respectievelijk deelverzamelingen van $V(X)$ en $V(X) \times V(X)$. De verzameling van unaire relaties op $V(X)$ wordt ook wel genoteerd met $\mathcal{R}_1(X)$, die van binaire relaties met $\mathcal{R}_2(X)$.

Als er geldt dat $\mathcal{R}(X) = \mathcal{R}_2(X) = \{R\}$, dan is het relationele systeem X een graaf met als

verzameling punten de verzameling $V(X)$ en als verzameling lijnen de verzameling $E(X) = R$. Als R *symmetrisch* is; dat wil zeggen dat voor alle $(u, v) \in R$ ook geldt dat $(v, u) \in R$, dan is X een ongerichte graaf. Als voor $u, v \in V(X)$ geldt dat $(u, v) \in R_\alpha \in \mathcal{R}_2(X)$, dan zeggen we ook wel dat er een pijl met kleur α van u naar v bestaat.

Net als op grafen kunnen we ook op relationele systemen automorfismes definiëren. Zij hiervoor $X = (V(X), \mathcal{R}(X))$ een relationeel systeem. Een functie $p : V(X) \rightarrow V(X)$ heet een *automorfisme* als p bijectief is en als voor alle $\alpha \in A$ en $u, v \in V(X)$ geldt dat $(u, v) \in R_\alpha$ dan en slechts dan als $(p(u), p(v)) \in R_\alpha$. Op dezelfde manier dat de verzameling automorfismes van een graaf een groep vormt, vormt de verzameling automorfismes van een relationeel systeem X samen met de operatie samenstelling van functies ook een groep; deze groep zullen we net als voor grafen noteren met $\text{Aut}(X)$.

Ook als een relationeel systeem geen graaf is, is het wel mogelijk om vanuit het relationele systeem een graaf te construeren; deze graaf wordt ook wel de schaduw van het relationele systeem genoemd en is op de volgende manier gedefinieerd.

Definitie 7.1 (Schaduw). Zij $X = (V(X), \mathcal{R}(X))$ een relationeel systeem met alleen unaire en binaire relaties; er geldt dus $\mathcal{R}(X) = \mathcal{R}_1(X) \cup \mathcal{R}_2(X)$. De *schaduw* \tilde{X} van X is een ongerichte graaf met de volgende verzamelingen punten en lijnen

$$V(\tilde{X}) = V(X),$$

$$E(\tilde{X}) = \{(u, v), (v, u) \mid u, v \in V(X), u \neq v \text{ en er bestaat een } R_\alpha \in \mathcal{R}_2 \text{ zodat } (u, v) \in R_\alpha\}.$$

Merk op dat er geldt dat $\text{Aut}(X) \subseteq \text{Aut}(\tilde{X})$. Merk verder op dat, wanneer X een graaf is, er geldt dat $\tilde{X} = X$. Hieruit volgt dat er dan ook geldt dat \tilde{X} een planaire graaf is dan en slechts dan als X een planaire graaf is.

Nu we hebben geïntroduceerd wat een schaduw is, kunnen we overgaan tot het bewijzen van een lemma dat we nodig zullen hebben in het bewijs van Stelling 7.1. Dit lemma luidt als volgt.

Lemma 7.3. *Zij X een verzameling die de gegeneraliseerde quaternionengroep Q^n voortbrengt. Dan geldt voor elke $n \geq 3$ dat de schaduw van de Cayley graaf $\text{Col}(Q^n, X)$ geen planaire graaf is.*

Bewijs. We weten dat Q^n een niet-commutatieve groep is. Omdat X de groep Q^n voortbrengt volgt hieruit dat X twee niet-commuterende elementen a en b moet bevatten; elementen waarvoor dus geldt dat $ab \neq ba$. Zij nu $Y = \text{Col}(Q^n, \{a, b\})$ en bekijk \tilde{Y} .

Er moet gelden dat $\text{ord}(a) \neq 2$ en $\text{ord}(b) \neq 2$. Zoals eerder opgemerkt, geldt namelijk dat het element van orde 2 geschreven kan worden als macht van elk willekeurig element van Q^n . Als a of b orde 2 zou hebben, zou het dus een macht van de ander zijn en dit is tegenspraak met de aanname dat a en b niet commuteren. Uit het feit dat beide elementen niet orde 2 hebben volgt dat voor elke $x \in Q^n$ de elementen xa, xa^{-1}, xb en xb^{-1} vier verschillende elementen zijn, en dus dat \tilde{Y} een 4-reguliere graaf is.

Vervolgens willen we bewijzen dat \tilde{Y} geen driehoeken bevat. Dit doen we door te kijken naar alle mogelijke producten van drie elementen uit de verzameling $\{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$ en vervolgens te

laten zien dat al deze producten ongelijk zijn aan het eenheidselement van Q^n . We laten dit zien door gebruik te maken van een bewijs op basis van contradictie. Stel dus dat er juist wel geldt dat $a^{\pm 1}a^{\pm 1}b^{\pm 1} = 1$, dat $a^{\pm 1}b^{\pm 1}a^{\pm 1} = 1$ of dat $b^{\pm 1}a^{\pm 1}a^{\pm 1} = 1$. Uit elk van deze gelijkheden zou volgen dat b een macht is van a , maar dit leidt tot een contradictie. Als dit namelijk het geval zou zijn, dan zouden a en b commuteren, en we hebben juist aangenomen dat dit niet zo is. Stel vervolgens dat er geldt dat $a^{\pm 1}a^{\pm 1}a^{\pm 1} = 1$. We weten dat $\text{ord}(a) \mid 2^n$, waaruit volgt dat $\text{ggd}(\text{ord}(a), 3) = 1$. Verder weten we ook dat $a^{\pm 1}a^{\pm 1}a^{\pm 1} \in \{a, a^3, a^{-1}, a^{-3}\}$, waaruit we kunnen concluderen dat $\text{ord}(a) = 1$, en dus dat $a = 1$. Dit leidt ook weer tot een contradictie, aangezien a en b niet-commuterende elementen zijn en elk element commuteert met het eenheidselement. We kunnen dit bewijs uitbreiden door de rollen van a en b om te draaien. Op deze manier hebben we alle mogelijke producten van drie elementen uit de verzameling $\{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$ bekeken en bewezen dat deze allemaal ongelijk zijn aan het eenheidselement van Q^n , waarmee we hebben bewezen dat \tilde{Y} geen driehoeken bevat.

Stel nu dat \tilde{Y} getekend kan worden in het vlak zonder dat er lijnen zijn die elkaar snijden. Zij v het aantal punten van \tilde{Y} , e het aantal lijnen en f het aantal facetten. Omdat \tilde{Y} een 4-reguliere graaf is, weten we dat er geldt dat $e = 2v$. Verder geldt er dat, omdat \tilde{Y} geen driehoeken bevat, de rand van elk facet bestaat uit tenminste 4 lijnen en dat elke lijn behoort tot de rand van 2 verschillende facetten. Hieruit volgt dat $e \geq 2f$, waaruit we kunnen afleiden dat $2v \geq 2f$, en dus dat $v \geq f$. Hieruit volgt vervolgens dat $e = 2v = v + v \geq v + f$. Aangezien \tilde{Y} een 4-reguliere graaf is, en dus een samenhangende graaf, kunnen we de Euler Identiteit gebruiken. Deze vertelt ons dat er ook geldt dat $v - e + f = 2$, en dus dat $v + f > e$. Dit is een tegenspraak en dus kunnen we concluderen dat er geldt dat voor elke $n \geq 3$ de schaduw van de Cayley graaf $\text{Col}(Q^n, X)$ geen planaire graaf is. \square

Nu we dit lemma hebben bewezen, zullen we verdergaan met het bewijzen van Stelling 7.1. Voor we hiermee kunnen beginnen, is het noodzakelijk nog een aantal nieuwe definities en nieuwe notatie te introduceren. We beginnen met de notatie van de restrictie van de permutatiegroep.

We zullen, wanneer deze goed gedefinieerd is, met $P|_T$ de restrictie van de permutatiegroep P op de verzameling T noteren. Deze restrictie is goed gedefinieerd als T invariant is onder alle elementen van P .

De *reguliere representatie* P_G van een groep G bestaat uit de permutaties π_g van de elementen van G , waarbij $g \in G$, die voor $x \in G$ zijn gedefinieerd als $\pi_g(x) = gx$. Voor de reguliere representatie geldt dat $P_G \cong G$. Verder geldt er voor alle $H \subseteq G$ dat $P_G \subseteq \text{Aut}(\text{Col}(G, H))$. Ook geldt er voor elke graaf Y met $P_G \subseteq \text{Aut}(Y)$ dat er een $H \subseteq G$ bestaat zodat Y gelijk is aan de schaduw van $\text{Col}(G, H)$. Dit is een gevolg van Theorem 2 in [14, p. 431], wat we gebruiken zonder een bewijs te geven. Deze schaduw is een samenhangende graaf dan en slechts dan als H een verzameling is die G voortbrengt; dit is een gevolg van Lemma A.5.

Definitie 7.2 (Contractie). Zij X en Y twee grafen en zij $V(X) = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ en $V(Y) = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$. Een afbeelding $\Psi : V(X) \rightarrow V(Y)$, gegeven door

$$\Psi(x_i) = \begin{cases} y_1 & \text{als } i = 0, \\ y_i & \text{als } i \neq 0, \end{cases}$$

heet een *contractie* van de lijn $\{x_0, x_1\}$ als de grafen voldoen aan het volgende

- $\{x_0, x_1\} \in E(X)$,
- voor alle $2 \leq i < j \leq n$ geldt dat $\{x_i, x_j\} \in E(X) \iff \{y_i, y_j\} \in E(Y)$,
- voor alle $2 \leq j \leq n$ geldt dat $\{x_1, x_j\} \in E(X)$ of $\{x_0, x_j\} \in E(X) \iff \{y_1, y_j\} \in E(Y)$.

Als dit het geval is, dan schrijven we ook wel $Y = \Psi(X)$.

Zij nu $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_k$ contracties van lijnen van X . Dan heet de afbeelding $\phi = \Psi_k \Psi_{k-1} \dots \Psi_1$ een *verbonden-homomorfisme*. Zij vervolgens $Z = \phi(X)$. Er geldt dan dat Z net als X een graaf is en dat, als X een planaire graaf is, Z ook planair is.

Gewapend met al deze nieuwe definities zijn we klaar om te beginnen aan het bewijs van Stelling 7.1; en dat is wat we dan ook zullen doen.

Bewijs Stelling 7.1. Zij $X = (V(X), \mathcal{R}(X))$ een relationeel systeem van orde k met alleen unaire en binaire relaties; er geldt dus dat $|V(X)| = k$ en dat $\mathcal{R}(X) = \mathcal{R}_1(X) \cup \mathcal{R}_2(X)$. We zullen bewijzen dat uit de aanname dat $\text{Aut}(X) \cong Q^n$ volgt dat de schaduw \tilde{X} van X geen planaire graaf is. Als we dit hebben bewezen, dan weten we ook dat voor elke gegeneraliseerde quaternionengroep Q^n geldt dat er geen planaire graaf G bestaat met $\text{Aut}(G) \cong Q^n$, aangezien een planaire graaf ook een relationeel systeem is en er geldt dat de schaduw van een planaire graaf gelijk is aan de planaire graaf zelf. Hieruit volgt vervolgens dat de klasse van planaire grafen niet universeel is, omdat er oneindig veel groepen bestaan die niet isomorf zijn aan de automorfismegroep van een planaire graaf.

Om te bewijzen dat uit de aanname dat $\text{Aut}(X) \cong Q^n$ volgt dat de schaduw \tilde{X} van X geen planaire graaf is, stellen we dat $\text{Aut}(X) = P \cong Q^n$. Zij verder $p \in P$ het enige element van P van orde 2; het element wat correspondeert met het element γ in Q^n . We weten dat p ongelijk is aan de identiteit en dus dat er een $x \in V(X)$ bestaat zodat $p(x) \neq x$. Verder geldt er voor elke $q \in P$ dat uit $q(x) = x$ volgt dat $q = \text{Id}$. Stel namelijk dat voor een $q \in P$ ongelijk aan Id geldt dat $q(x) = x$. Dan geldt er ook dat $q^{\frac{1}{2}\text{ord}(q)} = p(x) = x$, maar dit is in tegenspraak met de aanname dat $p(x) \neq x$. Hieruit volgt dus dat voor elke $q \in P$ uit $q(x) = x$ volgt dat $q = \text{Id}$.

Voor elk punt $a \in V(X)$ noteren we de baan van a onder P met T_a . Er geldt dus dat $T_a = \{q(a) \mid q \in P\}$.

Vervolgens onderscheiden we de volgende twee gevallen.

1. Het eerste geval is het geval dat voor alle $y \in V(X) \setminus T_x$ met $\{x, y\} \in E(\tilde{X})$ geldt dat $p(y) = y$.

Zij K de door T_x geïnduceerde subgraaf van \tilde{X} en zij $S = P|_{T_x}$. Het is gemakkelijk in te zien dat deze restrictie goed gedefinieerd is; er volgt namelijk direct uit de definitie van T_x dat voor alle $q \in P$ geldt dat $q(T_x) = T_x$. Verder is de functie die een element q van Q^n afbeeldt op het element $q(x)$ in T_x een bijectieve functie. Het is gemakkelijk in te zien dat dit een surjectieve functie is, dus zullen we bewijzen dat deze functie injectief is. Zij daarvoor q_1 en q_2 elementen van Q^n waarvoor geldt dat $q_1(x) = q_2(x)$. Dan geldt er ook dat $q_2^{-1}(q_1(x)) = q_2^{-1}(q_2(x)) = x$. Hieruit volgt vervolgens dat $q_2^{-1} \circ q_1 = \text{Id}$, en dus dat $q_2 = q_1$. Nu we weten dat dit een bijectieve functie is, verkrijgen we dat S de reguliere representatie is van Q^n . Hieruit kunnen we vervolgens concluderen dat $S \cong P \cong Q^n$. Verder geldt er dat

$S \subseteq \text{Aut}(K)$, waaruit volgt dat er een $H \subseteq Q^n$ bestaat zodat K gelijk is aan de schaduw van de Cayley graaf $\text{Col}(Q^n, H)$. We kunnen nu opnieuw twee gevallen onderscheiden.

- (a) H is een verzameling die de gegeneraliseerde quaternionengroep Q^n voortbrengt. Volgens Lemma 7.3 geldt in dit geval dat K geen planaire graaf is, en omdat geldt dat $K \subseteq \tilde{X}$ kan \tilde{X} ook geen planaire graaf zijn en zijn we klaar.
- (b) H is een verzameling die de gegeneraliseerde quaternionengroep Q^n niet voortbrengt. Dan geldt er, omdat p geschreven kan worden als macht van elk element van P ongelijk aan Id , ook dat $H' = H \cup \{p\}$ de gegeneraliseerde quaternionengroep Q^n niet voortbrengt. Hieruit volgt dat de schaduw van $\text{Col}(Q^n, H')$ onsamenhangend is; we noemen deze schaduw K' . Zij nu L een component van K' dat het punt x niet bevat.

We definiëren de permutatie q van $V(X)$ als

$$q(u) = \begin{cases} u & \text{als } u \notin V(L), \\ p(u) & \text{als } u \in V(L). \end{cases}$$

Omdat $p \in H'$ geldt er dat $p(V(L)) = V(L)$; oftewel dat het beeld van $V(L)$ onder p gelijk is aan $V(L)$. Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned} q(V(X)) &= q(V(X) \setminus V(L)) \cup q(V(L)) \\ &= (V(X) \setminus V(L)) \cup p(V(L)) \\ &= (V(X) \setminus V(L)) \cup V(L) \\ &= V(X), \end{aligned}$$

en dus dat q een permutatie van $V(X)$ is. We zullen nu bewijzen dat er ook geldt dat $q \in \text{Aut}(X)$. Stel hiervoor dat R een verzameling van binaire relaties van X is en zij u en v elementen van $V(X)$ waarvoor geldt dat $(u, v) \in R$. Dan zijn er vier gevallen die we kunnen onderscheiden om te bewijzen dat q een automorfisme van X is. Deze gevallen zijn als volgt.

- (i) In het eerste geval stellen we dat geldt dat zowel u als v geen element van $V(L)$ is. Er geldt dan dat $q(u) = u$ en $q(v) = v$. Hieruit volgt vervolgens dat $(u, v) \in R$ dan en slechts dan als $(q(u), q(v)) = (u, v) \in R$.
- (ii) In het tweede geval stellen we dat zowel u als v wel een element van $V(L)$ is. Er geldt dan dat $q(u) = p(u)$ en dat $q(v) = p(v)$. We weten al dat p een automorfisme van X is. Hieruit volgt dat $(u, v) \in R$ dan en slechts dan als $(q(u), q(v)) = (p(u), p(v)) \in R$.
- (iii) In het derde en laatste geval stellen we dat $u \in V(L)$ en dat $v \notin V(L)$. In dit geval volgt uit $(u, v) \in R$ dat $v \notin T_x$. Stel namelijk dat het tegendeel het geval is, en dus dat $v \in T_x$. Dan geldt er dat $v \in V(K)$, waar uit volgt dat $v \in V(K')$. Omdat er geldt dat $u \in V(L)$ en dat L een component is van K' , weten we dat er ook geldt dat $u \in V(K')$. Dan volgt er nu uit $(u, v) \in R$ dat u en v verbonden zijn in de graaf K' . Omdat L een component van K' is en $u \in V(L)$, volgt hier ook uit dat $v \in V(L)$, maar dit is in tegenspraak met wat we hebben aangenomen. We kunnen dus concluderen dat $v \notin T_x$.

Stel nu dat $p(v) = v$. Dan geldt er, omdat p een automorfisme van X is, dat $(u, v) \in R$ dan en slechts dan als $(q(u), q(v)) = (p(u), v) = (p(u), p(v)) \in R$.

We bekijken vervolgens het geval dat $p(v) \neq v$. We zullen bewijzen dat er dan uit $(u, v) \in R$ volgt dat $(x, v) \in E(\tilde{X})$.¹ We doen dit met behulp van een bewijs op basis van een tegenspraak. Stel daarom dat $(x, v) \notin E(\tilde{X})$. Zij nu ϕ een automorfisme van X waarvoor geldt dat $\phi(u) = x$. We weten dat dit automorfisme bestaat; er geldt namelijk dat u een element is van $V(L)$ en dus van T_x . Vervolgens definiëren we $w = \phi(v)$; het beeld van v onder ϕ . Dan geldt er, omdat ϕ een automorfisme van X is, dat uit $(u, v) \in R$ volgt dat $(\phi(u), \phi(v)) = (x, w) \in R$. Omdat we hebben aangenomen dat $(x, v) \notin E(\tilde{X})$, volgt er uit $(u, v) \in R$ dat $v \neq w$. Verder volgt er uit $v \notin T_x$ dat $w \notin T_x$, waar, in combinatie met de aanname dat $(x, w) \in E(\tilde{X})$, weer uit volgt dat $p(w) = w$.

We bekijken nu het automorfisme $\psi = \phi^{-1} \circ p \circ \phi$. We weten dat er geldt dat

$$\psi(v) = \phi^{-1}(p(\phi(v))) = \phi^{-1}(p(w)) = \phi^{-1}(w) = v.$$

Omdat er geldt dat $p(v) \neq v$, volgt hieruit dat $\psi = e$, en dus dat $\psi(u) = u$. Er geldt dus dat $\phi^{-1}(p(\phi(u))) = \phi^{-1}(p(x)) = u$. Omdat $\phi(u) = x$ volgt hieruit dat $p(x) = x$, maar dit is in tegenspraak met wat we aan hebben genomen. We kunnen dus concluderen dat er moet gelden dat uit $(u, v) \in R$ volgt dat $(x, v) \in E(\tilde{X})$.

We weten nu dat uit $(u, v) \in R$ volgt dat $v \notin T_x$ en dat $(x, v) \in E(\tilde{X})$. Hieruit volgt dat er geldt dat $p(v) = v$, en dus, zoals eerder bewezen, dat $(u, v) \in R$ dan en slechts dan als $(q(u), q(v)) \in R$.

- (iv) Het vierde en laatste geval is het geval dat $u \notin V(L)$ en dat $v \in V(L)$. Het bewijs van dit geval verkrijgen we door de rollen van u en v in het geval (iii) te verwisselen.

Door deze vier gevallen te combineren, kunnen we concluderen dat er geldt dat $q \in \text{Aut}(X)$.

We weten ook dat $q(x) = x$, omdat $x \notin V(L)$, en dat $q \neq e$, omdat geen van de punten van L onveranderd blijven onder q . Stel namelijk dat er elementen u en v van $V(L)$ bestaan waarvoor $q(u) = q(v)$, dan geldt er dus dat $p(u) = p(v)$. Als we nu p op beide kanten laten werken, verkrijgen we dat $u = v$. Dit leidt tot een contradictie, aangezien voor alle $q \in \text{Aut}(X)$ geldt dat uit $q(x) = x$ volgt dat $q = e$. Hieruit volgt vervolgens dat H een verzameling moet zijn die de gegeneraliseerde quaternionengroep Q^n voortbrengt en zijn we klaar met het bewijs van het eerste geval; wat betekent dat we door kunnen gaan met het bewijzen van het tweede geval.

2. Het tweede geval is het geval dat er een $y \in V(X) \setminus T_x$ met $\{x, y\} \in E(\tilde{X})$ bestaat waarvoor geldt dat $p(y) \neq y$.

Voor alle $q, r \in P$ geldt er dat

$$q(x) = r(x) \iff q(y) = r(y) \iff q = r.$$

¹Ik wil Marieke van der Wegen bedanken voor het aanleveren van dit bewijs.

Zij nu z een punt waarvoor geldt dat $z \notin V(X)$. We schrijven de elementen in T_z , de baan van z onder P , als z_q , waarbij $q \in P$. Met behulp van deze nieuwe notatie kunnen we een nieuw relationeel systeem X_1 definiëren; een relationeel systeem wat, net als X , alleen unaire en binaire relaties bevat. De verzameling punten van dit systeem is de volgende verzameling

$$V(X_1) = (V(X) \cup T_z) \setminus (T_x \cup T_y).$$

Voordat we de verzameling relaties van X_1 kunnen definiëren, moeten we eerst een aantal nieuwe relaties op de punten van X_1 definiëren. Voor een willekeurige $R \in \mathcal{R}_1(X)$ definiëren we de volgende nieuwe relatie

$$R' = R \cap V(X_1).$$

Voor een willekeurige $R \in \mathcal{R}_2(X)$ definiëren we de relaties

$$\begin{aligned} R^i &= \{(u, v) \mid (u, v) \in R, u, v \in V(X) \cap V(X_1)\} \\ &\quad \cup \{(u, z_q) \mid (u, q(x)) \in R, u \in V(X) \cap V(X_1)\} \\ &\quad \cup \{(z_q, v) \mid (q(x), v) \in R, v \in V(X) \cap V(X_1)\} \\ &\quad \cup \{(z_q, z_r) \mid (q(x), r(x)) \in R\}, \\ R^{ii} &= \{(u, z_q) \mid (u, q(y)) \in R, u \in V(X) \cap V(X_1)\} \\ &\quad \cup \{(z_q, v) \mid (q(y), v) \in R, v \in V(X) \cap V(X_1)\} \\ &\quad \cup \{(z_q, z_r) \mid (q(y), r(y)) \in R\}, \\ R^{iii} &= \{(z_q, z_r) \mid (q(x), r(y)) \in R\}, \\ R^{iv} &= \{(z_q, z_r) \mid (q(y), r(x)) \in R\}. \end{aligned}$$

Nu we deze nieuwe relaties hebben gedefinieerd, kunnen we de verzamelingen unaire en binaire relaties van X_1 definiëren. Deze definiëren we als volgt

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1(X_1) &= \{T_z\} \cup \{R' \mid R \in \mathcal{R}_1(X)\}, \\ \mathcal{R}_2(X_1) &= \{R^i, R^{ii}, R^{iii}, R^{iv} \mid R \in \mathcal{R}_2(X)\}. \end{aligned}$$

Vervolgens definiëren we voor elke $q \in P$ een permutatie q' van $V(X_1)$ op de volgende manier

$$q'(u) = \begin{cases} q(u) & \text{als } u \in V(X) \cap V(X_1), \\ z_{qr} & \text{als } u \in T_z \text{ en } u = z_r \text{ voor een } r \in P. \end{cases}$$

Er geldt voor elke $q \in P$ dat q' een automorfisme van X_1 is. Een idee van het bewijs hiervan is te vinden in het bewijs van Lemma A.8. Verder is de functie die een element q van P naar q' in de verzameling $\{q' \mid q \in P\}$ stuurt een bijectieve functie. Deze functie is duidelijk surjectief, dus we zullen bewijzen dat er ook geldt dat de functie injectief is. Stel hiervoor dat q_1 en q_2 elementen zijn van P waarvoor geldt dat $q_1 \neq q_2$. Dan geldt er dat er een $u \in X$ bestaat zodat $q_1(u) \neq q_2(u)$. Als er geldt dat deze $u \in V(X) \cap V(X_1)$, dan weten we dat er ook geldt dat $q'_1(u) \neq q'_2(u)$, en dus dat $q'_1 \neq q'_2$. Als deze u een element is van T_z en geschreven kan worden als $u = z_r$, dan geldt er ook dat $q'_1(u) = z_{q_1 r} \neq z_{q_2 r} = q'_2(u)$. Het is namelijk zo dat uit $q_1 \neq q_2$ volgt dat $q_1 \circ r \neq q_2 \circ r$, en hieruit volgt dat $z_{q_1 r} \neq z_{q_2 r}$.

Uit het feit dat deze functie bijectief is volgt dat de verzameling $P' = \{q' \mid q \in P\}$ een

ondergroep van $\text{Aut}(X_1)$ is en dat $P' \cong P \cong Q^n$. We zullen nu bewijzen dat P' niet alleen een ondergroep van $\text{Aut}(X_1)$ is, maar zelfs gelijk is aan $\text{Aut}(X_1)$; en dus dat elk element van $\text{Aut}(X_1)$ van de vorm q' is, voor een $q \in P$. Stel hiervoor dat $t \in \text{Aut}(X_1)$. We definiëren de permutatie q van $V(X)$ als volgt

$$q(u) = \begin{cases} t(u) & \text{als } u \in V(X) \cap V(X_1), \\ r(x) & \text{als } u = s(x) \text{ en } t(z_s) = z_r, \\ r(y) & \text{als } u = s(y) \text{ en } t(z_s) = z_r, \text{ waarbij } r, s \in P. \end{cases}$$

Voor deze q geldt nu, vanwege hoe $\mathcal{R}_1(X_1)$ en $\mathcal{R}_2(X_1)$ zijn gedefinieerd, dat $q \in \text{Aut}(X)$. Een idee van het bewijs hiervan is te vinden in het bewijs van Lemma A.9. Verder geldt er dat $t = q'$. Het is evident dat er geldt dat $q'(u) = t(u)$ voor alle elementen $u \in V(X) \cap V(X_1)$. Verder geldt er voor alle $r \in P$ dat $t(z_r) = z_{qr}$. Stel namelijk dat er een $r \in P$ bestaat zodat $t(z_r) \neq z_{qr}$, dan volgt hieruit dat voor $u = r(x)$ geldt dat $q(u) = q(r(x)) \neq q(r(x))$, maar dit is een tegenspraak. Hieruit volgt dus dat er geldt dat $q' = t$, waaruit we kunnen concluderen dat $P' = \text{Aut}(X_1)$.

Zij nu de afbeelding $\phi : V(X) \rightarrow V(X_1)$ als volgt gedefinieerd:

$$\phi(u) = \begin{cases} u & \text{als } u \in V(X) \cap V(X_1), \\ z_q & \text{als } u = q(x) \text{ of } u = q(y) \text{ voor een } q \in P. \end{cases}$$

Vanuit hoe ϕ is gedefinieerd volgt dat ϕ een verbonden-homomorfisme van \tilde{X} naar \tilde{X}_1 is. Er geldt namelijk, wanneer we P schrijven als $P = \{q_1, q_2, \dots, q_{2^n}\}$, dat ϕ de samenstelling van de contracties Ψ_1 tot en met Ψ_{2^n} is, waarbij Ψ_i voor alle $1 \leq i \leq 2^n$ gedefinieerd is als

$$\Psi_i(u) = \begin{cases} z_{q_i} & \text{als } u = q_i(x) \text{ of } u = q_i(y), \\ u & \text{in alle andere gevallen.} \end{cases}$$

Verder weten we dat er geldt dat $|V(X_1)| < |V(X)|$. Stel nu dat \tilde{X} een planaire graaf is, dan geldt er, omdat ϕ een verbonden-homomorfisme van \tilde{X} naar \tilde{X}_1 is, dat \tilde{X}_1 ook een planaire graaf is. We kunnen nu voor X_1 het volledige bewijs opnieuw doorlopen. Als geldt dat X_1 onder het eerste geval van het bewijs valt, dan leidt dit tot een tegenspraak, omdat uit het eerste geval volgt dat \tilde{X}_1 geen planaire graaf is. Stel daarom dat X_1 onder het tweede geval van het bewijs valt. We verkrijgen dan een X_2 waarvoor we weer het volledige bewijs kunnen doorlopen. Dit kunnen we blijven herhalen tot we een relationeel systeem X_i verkrijgen waarvoor geldt dat $|V(X_i)| < 2$, maar ook dit leidt tot een tegenspraak. We weten namelijk dat er een element in de automorfismegroep van X_i bestaat dat ongelijk is aan de identiteit, maar het bestaan van dit element is niet mogelijk in een relationeel systeem met een orde kleiner dan 2. Hieruit kunnen we ten slotte concluderen dat \tilde{X} geen planaire graaf is en zijn we klaar met het bewijs. Uit het bewijs volgt nu namelijk dat de schaduw \tilde{X} van een relationeel systeem X met alleen unaire en binaire relaties en waarvoor geldt dat $\text{Aut}(X) \cong Q^n$ nooit een planaire graaf is, en dus ook dat de automorfismegroep van een planaire graaf nooit isomorf kan zijn aan de gegeneraliseerde quaternionengroep Q^n . Aangezien dit geldt voor elke $n \geq 3$, volgt er inderdaad dat er oneindig veel groepen bestaan die voor elke planaire graaf G niet isomorf zijn aan $\text{Aut}(G)$. \square

Hoofdstuk 8

Conclusie

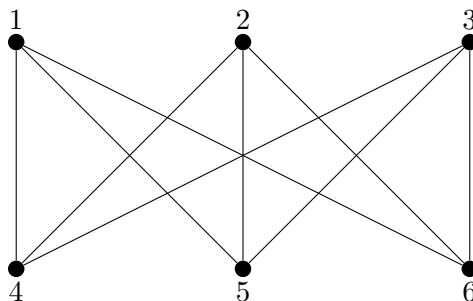
We hebben nu de Stelling van Frucht en het bewijs ervan gezien, en hebben bewezen dat de klasse van planaire grafen niet universeel is. Op het gebied van de universaliteit van grafen zijn er echter nog veel andere interessante resultaten bekend. Een van deze resultaten is een resultaat met betrekking tot minoren, die als volgt zijn gedefinieerd. Ik heb deze definitie gebaseerd op de definitie in [5, p. 241-242].

Definitie 8.1 (Minor). Een graaf H heet een *minor* van een graaf G als ofwel geldt dat $H \cong G$ ofwel dat H verkregen kan worden uit een subgraaf van G door een opeenvolging van contracties.

Babai schrijft in [3, p. 1499] dat er voor elke eindige graaf Y een eindige groep G bestaat zodat voor elke graaf X met $\text{Aut}(X) \cong G$ geldt dat Y een minor is van X ; het bewijs hiervan is te vinden in Babai's artikel [4]. Met behulp van de Stelling van Wagner kunnen we opmerken dat de stelling die zegt dat de klasse van planaire grafen niet universeel is een gevolg is van dit resultaat. De Stelling van Wagner zegt namelijk het volgende.

Stelling 8.1 (Stelling van Wagner, [5, p. 243]). *Een graaf G is een planaire graaf dan en slechts dan als zowel K_5 als $K_{3,3}$ geen minor van G is.*

Hierbij geldt dat de graaf $K_{3,3}$ op de volgende manier afgebeeld kan worden.



Figuur 8.1: Afbeelding van $K_{3,3}$

Na het voorgaande resultaat formuleert Babai het vermoeden dat de grafen in de klasse van eindige grafen met Y als minor maar eindig veel niet-abelse eindige simpele groepen als automorfismegroep hebben; iets wat ook zeker stof tot nadenken biedt. [3, p. 1499]

Bijlage A

Verificaties

In dit hoofdstuk staat een aantal bewijzen van lemma's die in de literatuur niet worden bewezen, waarschijnlijk aangezien ze redelijk gemakkelijk te verifiëren zijn. Voor de volledigheid heb ik de lemma's zelf bewezen en de bewijzen via dit hoofdstuk aan mijn scriptie toegevoegd.

Lemma A.1. *Zij G een graaf. De functie $\text{Id} : V(G) \rightarrow V(G)$, gegeven door $\text{Id}(u) = u$, is een automorfisme van G .*

Bewijs. Om te bewijzen dat Id een automorfisme is van G , moeten we bewijzen dat Id bijectief is en dat voor alle $u, v \in V(G)$ geldt dat $\{u, v\} \in E(G)$ dan en slechts dan als $\{\text{Id}(u), \text{Id}(v)\} \in E(G)$. We bewijzen eerst dat Id injectief is. Zij hiervoor $u, v \in V(G)$ met $u \neq v$, dan geldt dat $\text{Id}(u) = u \neq v = \text{Id}(v)$, waaruit volgt dat Id injectief is. Omdat Id een injectieve functie van $V(G)$ naar zichzelf is, volgt er dat Id ook surjectief, en dus bijectief, is. Verder geldt er ook dat $\{u, v\} \in E(G)$ dan en slechts dan als $\{\text{Id}(u), \text{Id}(v)\} \in E(G)$, aangezien er geldt dat $\{u, v\} = \{\text{Id}(u), \text{Id}(v)\}$. Hieruit volgt nu dat er inderdaad geldt dat Id een automorfisme is van G . \square

Lemma A.2. *Zij G een graaf en α een automorfisme van G . Dan geldt er voor alle punten $u \in V(G)$ dat de graad van u gelijk is aan de graad van $\alpha(u)$.*

Bewijs. Zij u een willekeurig element van $V(G)$ en zij k de graad van u . We kunnen dan de verzameling buuren van u weergeven als $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$. Voor alle $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ geldt dus dat $\{u, v_i\} \in E(G)$. Omdat α een automorfisme is, geldt er dan ook dat $\{\alpha(u), \alpha(v_i)\} \in E(\alpha(G))$. Verder geldt er, aangezien α bijectief is, dat $\alpha(v_i) \neq \alpha(v_j)$ voor alle $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ met $i \neq j$. Hieruit volgt al dat de graad van $\alpha(u)$ groter of gelijk is aan de graad van u . Stel nu dat w een buur is van $\alpha(u)$, dan geldt er ook dat $\alpha^{-1}(w)$ een buur is van u , en dus dat $w = \alpha(x_i)$ voor een $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Hieruit volgt dat de graad van $\alpha(u)$ kleiner of gelijk is aan de graad van u , waaruit vervolgens volgt dat de graad van $\alpha(u)$ gelijk is aan de graad van u . \square

Lemma A.3. *Zij G een graaf en α een automorfisme van G . Dan geldt er voor alle punten $u, v \in V(G)$ dat de afstand tussen u en v gelijk is aan de afstand tussen $\alpha(u)$ en $\alpha(v)$.*

Bewijs. Zij u en v willekeurige elementen van $V(G)$ en zij k de afstand tussen deze twee elementen. Dan geldt er dat het kortste pad tussen de punten u en v geschreven kan worden als $u, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, v$. Er geldt dan ook dat $\alpha(u), \alpha(x_1), \alpha(x_2), \dots, \alpha(x_{k-1}), \alpha(v)$ een pad is tussen $\alpha(u)$ en $\alpha(v)$. Hieruit volgt dat de afstand tussen u en v groter of gelijk is aan de afstand tussen $\alpha(u)$ en $\alpha(v)$. Zij nu l de afstand tussen $\alpha(u)$ en $\alpha(v)$. Dan kunnen we het kortste pad tussen $\alpha(u)$ en

$\alpha(v)$ schrijven als $\alpha(u), y_1, y_2, \dots, y_{l-1}, \alpha(v)$. We weten dan ook dat $u, \alpha^{-1}(y_1), \alpha^{-1}(y_2), \dots, \alpha^{-1}(y_{l-1}), v$ een pad is tussen u en v , en dus dat de afstand tussen u en v kleiner of gelijk is aan de afstand tussen $\alpha(u)$ en $\alpha(v)$. Hieruit volgt ten slotte dat de afstand tussen u en v gelijk is aan de afstand tussen $\alpha(u)$ en $\alpha(v)$. \square

Lemma A.4. *Zij G een graaf. De verzameling automorfismes van G vormt met de operatie samenstelling van functies een groep.*

Bewijs. We zullen de verzameling automorfismes van G noteren met $\text{Aut}(G)$, en samenstelling van functies met \circ . Om te bewijzen dat $\text{Aut}(G)$ samen met de operatie \circ een groep vormt, bewijzen we de volgende dingen:

- (i) Voor alle $\alpha_1, \alpha_2 \in \text{Aut}(G)$ geldt dat $\alpha_1 \circ \alpha_2 \in \text{Aut}(G)$.

We bekijken $\alpha_1 \circ \alpha_2$ voor willekeurige $\alpha_1, \alpha_2 \in \text{Aut}(G)$. Om te bewijzen dat de functie $\alpha_1 \circ \alpha_2 : V(G) \rightarrow V(G)$ een element is van $\text{Aut}(G)$, moeten we bewijzen dat het een bijectieve functie is en dat voor alle $u, v \in V(G)$ geldt dat $\{u, v\} \in E(G)$ dan en slechts dan als $\{\alpha_1 \circ \alpha_2(u), \alpha_1 \circ \alpha_2(v)\} \in E(G)$. Dat $\alpha_1 \circ \alpha_2$ een bijectieve functie van $V(G)$ naar $V(G)$ is, volgt uit het feit dat zowel α_1 als α_2 een bijectieve functie van $V(G)$ naar $V(G)$ is. Verder weten we ook dat voor alle $u, v \in V(G)$ geldt dat $\{u, v\} \in E(G)$ dan en slechts dan als $\{\alpha_2(u), \alpha_2(v)\} \in E(G)$, omdat $\alpha_2 \in \text{Aut}(G)$. Hieruit volgt vervolgens dat voor alle $u, v \in V(G)$ geldt dat $\{u, v\} \in E(G)$ dan en slechts dan als $\{\alpha_1(\alpha_2(u)), \alpha_1(\alpha_2(v))\} = \{\alpha_1 \circ \alpha_2(u), \alpha_1 \circ \alpha_2(v)\} \in E(G)$, aangezien $\alpha_1 \in \text{Aut}(G)$.

- (ii) Voor alle $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \text{Aut}(G)$ geldt dat $\alpha_1 \circ (\alpha_2 \circ \alpha_3) = (\alpha_1 \circ \alpha_2) \circ \alpha_3$.

Zij $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \text{Aut}(G)$. Dan geldt er dat $\alpha_1 \circ (\alpha_2 \circ \alpha_3) = \alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \alpha_3 = (\alpha_1 \circ \alpha_2) \circ \alpha_3$.

- (iii) Er bestaat een element $e \in \text{Aut}(G)$ zodat voor alle $\alpha \in \text{Aut}(G)$ geldt dat $e \circ \alpha = \alpha = \alpha \circ e$.

We bekijken het element $\text{Id} \in \text{Aut}(G)$, zoals gedefinieerd in het vorige lemma. Zij nu α een willekeurig element in $\text{Aut}(G)$. Er geldt dat $\text{Id} \circ \alpha(u) = \text{Id}(\alpha(u)) = \alpha(u) = \alpha(\text{Id}(u)) = \alpha \circ \text{Id}(u)$ voor alle $u \in V(G)$, en dus dat $\text{Id} \circ \alpha = \alpha = \alpha \circ \text{Id}$. Hieruit volgt dat Id een element van $\text{Aut}(G)$ is zodat voor alle $\alpha \in \text{Aut}(G)$ geldt dat $\text{Id} \circ \alpha = \alpha = \alpha \circ \text{Id}$.

- (iv) Voor elk element $\alpha \in \text{Aut}(G)$ bestaat er een element $\beta \in \text{Aut}(G)$ zodat $\alpha \circ \beta = e = \beta \circ \alpha$.

Zij α een willekeurig element in $\text{Aut}(G)$, dan geldt er dat α een bijectieve functie is, en dus ook dat er een bijectieve functie $\alpha^{-1} : V(G) \rightarrow V(G)$ bestaat zodat $\alpha \circ \alpha^{-1} = \text{Id} = \alpha^{-1} \circ \alpha$. Nu willen we nog laten zien dat er ook geldt dat $\alpha^{-1} \in \text{Aut}(G)$. Bekijk hiervoor willekeurige $u, v \in V(G)$ met $\{u, v\} \in E(G)$. Er geldt dan, omdat α bijectief is, dat er een $x, y \in V(G)$ bestaan zodat $\{u, v\} = \{\alpha(x), \alpha(y)\}$. Omdat α een automorfisme is van G geldt er dat $\{\alpha(x), \alpha(y)\} \in E(G)$ dan en slechts dan als $\{x, y\} \in E(G)$. Verder weten we dat $\{x, y\} = \{\alpha^{-1}(\alpha(x)), \alpha^{-1}(\alpha(y))\} = \{\alpha^{-1}(u), \alpha^{-1}(v)\}$. Hieruit volgt ten slotte dat voor alle $u, v \in V(G)$ geldt dat $\{u, v\} \in E(G)$ dan en slechts dan als $\{\alpha^{-1}(u), \alpha^{-1}(v)\} \in E(G)$. \square

Lemma A.5. *Zij Γ een groep en X een deelverzameling van de elementen van Γ . Dan is de Cayley graaf van Γ ten opzichte van X , genoteerd met $\text{Col}(\Gamma, X)$ een sterk samenhangende graaf dan en slechts dan als X een verzameling is die Γ voortbrengt.*

Bewijs. We bewijzen eerst het lemma van links naar rechts. Zij hiervoor Γ een groep en X een deelverzameling van de elementen van Γ en schrijf X als $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Stel nu dat $\text{Col}(\Gamma, X)$ een sterk samenhangende graaf is en zij verder γ een willekeurig element van Γ . Om te bewijzen dat X een verzameling is die Γ voortbrengt, moeten we laten zien dat γ geschreven kan worden als een woord van elementen van X . Als $\gamma \in X$, dan is γ zelf al een woord van elementen van X , dus stellen we dat $\gamma \notin X$. Zij nu x_i een willekeurig element van X . Omdat $\text{Col}(\Gamma, X)$ sterk samenhangend is, weten we dat er een pad van x_i naar γ bestaat. Verder weten we, omdat $\text{Col}(\Gamma, X)$ een Cayley graaf is, dat dit pad bestaat uit gekleurde pijlen, waarbij de kleur van de pijl een element van X is. Dit betekent dat we van x_i naar γ kunnen komen door alleen maar van rechts te vermenigvuldigen met elementen uit X , en dus dat γ geschreven kan worden als een woord van elementen van X . Hieruit volgt nu dat X een verzameling is die Γ voortbrengt.

Vervolgens bewijzen we het lemma van rechts naar links. Dit doen we met een bewijs op basis van contrapositie. Zij dus Γ een groep en zij $X \subseteq \Gamma$ een verzameling die Γ niet voortbrengt. We schrijven X opnieuw als $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Omdat X een verzameling is die Γ niet voortbrengt, weten we dat er een element $\gamma \in \Gamma$ bestaat waarvoor geldt dat γ niet geschreven kan worden als een woord in elementen van X . Stel nu dat $\text{Col}(\Gamma, X)$ een sterk samenhangende graaf is. Dan geldt er, volgens het bewijs wat we zojuist hebben uitgevoerd, dat elk element van Γ geschreven kan worden als een woord in elementen van X . Dit is in tegenspraak met het bestaan van γ , en dus geldt er dat $\text{Col}(\Gamma, X)$ geen sterk samenhangende graaf is. We hebben nu het lemma beide kanten op bewezen en zijn daarmee klaar met het bewijs. \square

Lemma A.6. *Zij $\text{Col}(\Gamma, X)$ de Cayley graaf van een groep Γ ten opzichte van een verzameling generatoren X . Dan geldt er dat de verzameling kleurbehoudende automorfismes van $\text{Col}(\Gamma, X)$ een ondergroep is van $\text{Aut}(\text{Col}(\Gamma, X))$.*

Bewijs. We zullen de verzameling kleurbehoudende automorfismes van $\text{Col}(\Gamma, X)$ noteren met $\text{Aut}_{\text{Col}}(\text{Col}(\Gamma, X))$ en de samenstelling van functies met \circ . Om te bewijzen dat $\text{Aut}_{\text{Col}}(\text{Col}(\Gamma, X))$ een ondergroep is van $\text{Aut}(\text{Col}(\Gamma, X))$, moeten we bewijzen dat $\text{Aut}_{\text{Col}}(\text{Col}(\Gamma, X))$ een groep vormt onder de operatie horende bij $\text{Aut}(\text{Col}(\Gamma, X))$; de samenstelling van functies. Om dit te bewijzen, bewijzen we de volgende dingen:

- (i) Voor alle $\alpha_1, \alpha_2 \in \text{Aut}_{\text{Col}}(\text{Col}(\Gamma, X))$ geldt dat $\alpha_1 \circ \alpha_2 \in \text{Aut}_{\text{Col}}(\text{Col}(\Gamma, X))$.

Zij α_1 en α_2 willekeurige elementen van $\text{Aut}_{\text{Col}}(\text{Col}(\Gamma, X))$, dan geldt er dat $\alpha_1, \alpha_2 \in \text{Aut}(\text{Col}(\Gamma, X))$ en dus ook dat $\alpha_1 \circ \alpha_2 \in \text{Aut}(\text{Col}(\Gamma, X))$. Om nu te bewijzen dat $\alpha_1 \circ \alpha_2 \in \text{Aut}_{\text{Col}}(\text{Col}(\Gamma, X))$, hoeven we alleen nog te bewijzen dat er voor alle $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ en alle $x \in X$ geldt dat (γ_1, γ_2) een pijl met de kleur x is dan en slechts dan als $(\alpha_1 \circ \alpha_2(\gamma_1), \alpha_1 \circ \alpha_2(\gamma_2))$ een pijl met de kleur x is. We weten dat er voor alle $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ en alle $x \in X$ geldt dat (γ_1, γ_2) een pijl met de kleur x is dan en slechts dan als $(\alpha_2(\gamma_1), \alpha_2(\gamma_2))$ een pijl met de kleur x is. Omdat $\alpha_2(\gamma_1), \alpha_2(\gamma_2)$ elementen zijn van Γ is dit het geval dan en slechts dan als $(\alpha_1(\alpha_2(\gamma_1)), \alpha_1(\alpha_2(\gamma_2))) = (\alpha_1 \circ \alpha_2(\gamma_1), \alpha_1 \circ \alpha_2(\gamma_2))$ een pijl met de kleur x is. Hieruit volgt dat er inderdaad geldt dat $\alpha_1 \circ \alpha_2 \in \text{Aut}_{\text{Col}}(\text{Col}(\Gamma, X))$.

- (ii) Er geldt dat $\text{Id} \in \text{Aut}_{\text{Col}}(\text{Col}(\Gamma, X))$.

Om te bewijzen dat $\text{Id} \in \text{Aut}_{\text{Col}}(\text{Col}(\Gamma, X))$, moeten we bewijzen dat er voor alle $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ en

alle $x \in X$ geldt dat (γ_1, γ_2) een pijl met de kleur x is dan en slechts dan als $(\text{Id}(\gamma_1), \text{Id}(\gamma_2))$ een pijl met de kleur x is. Dit is inderdaad het geval, omdat er geldt dat $(\text{Id}(\gamma_1), \text{Id}(\gamma_2)) = (\gamma_1, \gamma_2)$.

- (iii) Voor elk element $\alpha \in \text{Aut}_{\text{Col}}(\text{Col}(\Gamma, X))$ bestaat er een element $\beta \in \text{Aut}_{\text{Col}}(\text{Col}(\Gamma, X))$ zodat $\alpha \circ \beta = e = \beta \circ \alpha$.

Zij α een willekeurig element van $\text{Aut}_{\text{Col}}(\text{Col}(\Gamma, X))$, dan bestaat er een element $\beta = \alpha^{-1} \in \text{Aut}(\text{Col}(\Gamma, X))$ zodat $\alpha \circ \beta = \text{Id} = \beta \circ \alpha$. We hoeven dus alleen nog te bewijzen dat er geldt dat $\beta = \alpha^{-1} \in \text{Aut}_{\text{Col}}(\text{Col}(\Gamma, X))$. Stel hiervoor dat $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ en $x \in X$ zodat (γ_1, γ_2) een pijl is met de kleur x . Omdat α een bijectieve functie is, geldt er dat er elementen $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma$ bestaan zodat $(\alpha(\sigma_1), \alpha(\sigma_2)) = (\gamma_1, \gamma_2)$. Omdat α een kleurbehoudend automorfisme is, geldt er dat $(\gamma_1, \gamma_2) = (\alpha(\sigma_1), \alpha(\sigma_2))$ een pijl met de kleur x is dan en slechts dan als (σ_1, σ_2) een pijl met de kleur x is. Verder weten we dat $(\sigma_1, \sigma_2) = (\alpha^{-1}(\alpha(\sigma_1)), \alpha^{-1}(\alpha(\sigma_2))) = (\alpha^{-1}(\gamma_1), \alpha^{-1}(\gamma_2))$. Hieruit volgt vervolgens dat (γ_1, γ_2) een pijl is met de kleur x dan en slechts dan als $(\alpha^{-1}(\gamma_1), \alpha^{-1}(\gamma_2))$ een pijl is met de kleur x , en dus dat er geldt dat $\beta = \alpha^{-1} \in \text{Aut}_{\text{Col}}(\text{Col}(\Gamma, X))$. \square

Lemma A.7. *Zij G en H twee samenhangende grafen en $\alpha : G \rightarrow H$ een isomorfisme tussen G en H . Dan geldt er dat α snijpunten op snijpunten afbeeldt.*

Bewijs. Om dit te bewijzen stellen we dat $g \in G$ een snijpunt is; er geldt dus dat $G - g$ een onsamenvangende graaf is. Omdat α een isomorfisme is tussen G en H , geldt er dat

$$G - g \cong \alpha(G - g) = \alpha(G) - \alpha(g) = H - \alpha(g).$$

Hieruit volgt vervolgens, omdat $G - g$ een onsamenvangende graaf is, dat $H - \alpha(g)$ een onsamenvangende graaf is, en dus dat $\alpha(g)$ een snijpunt van H is. \square

Lemma A.8. *Zij q een automorfisme van X en q' de bijbehorende permutatie van $V(X_1)$ zoals gedefinieerd op pagina 31. Dan is q' een automorfisme van X_1 .*

Bewijs. We zullen geen compleet bewijs geven, maar zullen enige gevallen behandelen. Het is gemakkelijk te bewijzen dat de unaire relaties behouden blijven onder q' , dus zullen we alleen de binaire relaties bekijken. Zij hiervoor u, v elementen van $V(X_1)$ waarvoor geldt dat $(u, v) \in S$ voor een $S \in \mathcal{R}_2(X_1)$.

Als $u, v \in V(X) \cap V(X_1)$, weten we dat er moet gelden dat $(u, v) \in R$ voor een $R \in \mathcal{R}_2(X)$; (u, v) is dus element van R^i . Er geldt dan ook dat $(q'(u), q'(v)) = (q(u), q(v))$. Omdat $u, v \in V(X)$ en $q \in \text{Aut}(X)$, weten we ook dat er geldt dat $(q(u), q(v)) \in R$. Hieruit volgt vervolgens uit dat $(q'(u), q'(v)) \in R^i$.

Stel dan dat $u \in V(X) \cap V(X_1)$ en dat $v \in T_z$, waarbij $v = z_r$ voor een $r \in P$. Dan kan het zo zijn dat $(u, v) = (u, z_r) \in R^i$, en dus dat er een $R \in \mathcal{R}_2(X)$ bestaat met $(u, r(x)) \in R$. Verder geldt er dat $(q'(u), q'(v)) = (q'(u), q'(z_r)) = (q(u), z_{qr})$. Omdat $(u, r(x)) \in R$ en $q \in \text{Aut}(X)$, geldt er dat $(q(u), q(r(x))) \in R$. Hieruit volgt vervolgens dat $(q'(u), q'(v)) = (q(u), z_{qr}) \in R^i$. Het kan ook het geval zijn dat $(u, v) \in R^{ii}$, maar het bewijs van dit geval gaat op eenzelfde manier.

Vervolgens stellen we dat $u, v \in T_z$, waarbij $u = z_r$ en $v = z_s$ voor $r, s \in P$. We bekijken het

geval dat $(u, v) \in R^{iii}$, en dus dat er een $R \in \mathcal{R}_2(X)$ bestaat zodat $(r(x), s(y)) \in R$. Omdat $q \in \text{Aut}(X)$ weten we dat er dan ook geldt dat $(q(r(x)), q(s(y))) \in R$. Verder is het zo dat $(q'(u), q'(v)) = (z_{qr}, z_{qs})$. Als we dit combineren, volgt hieruit dat $(q'(u), q'(v)) \in R^{iii}$.

Alle overige gevallen kunnen op een vergelijkbare manier bewezen worden. We zien dus dat er geldt dat q' de relaties van X_1 behoudt, waaruit volgt dat q' een automorfisme is. \square

Lemma A.9. *Zij t een automorfisme van X_1 en q de permutatie van X zoals gedefinieerd op pagina 32. Dan is q een automorfisme van X .*

Bewijs. Opnieuw zullen we geen compleet bewijs geven, maar enige gevallen behandelen. We beginnen met bewijzen dat de unaire relaties van X behouden blijven onder q . Zij hiervoor u een element van $V(X)$ waarvoor geldt dat er een $R \in \mathcal{R}_1(X)$ bestaat zodat $u \in R$. Als $u \in V(X) \cap V(X_1)$, dan geldt er dat $u \in R'$, en omdat t een automorfisme is van X_1 , geldt er dan ook dat $t(u) \in R'$. Hieruit kunnen we concluderen dat $q(u) = t(u) \in R$.

Als u gelijk is aan $s(x)$ voor een $s \in P$ en er geldt dat $t(z_s) = z_r$, dan geldt er dat $q(u) = r(x)$. Omdat $s(x)$ en $r(x)$ beide in de baan van x zitten, geldt er dat er een automorfisme q_1 van X bestaat zodat $q_1(s(x)) = r(x)$. Omdat dit automorfisme unaire relaties behoudt, geldt er dat er uit $u \in R$ volgt dat $q_1(u) = r(x) = q(u) \in R$. Als u gelijk is aan $s(y)$ voor een $s \in P$, dan kunnen we op eenzelfde manier bewijzen dat uit $u \in R$ volgt dat $q(u) \in R$.

Vervolgens bewijzen we dat ook de binaire relaties behouden blijven onder q . Zij hiervoor u en v elementen van $V(X)$ waarvoor geldt dat er een $R \in \mathcal{R}_2(X)$ bestaat zodat $(u, v) \in R$. Als $u, v \in V(X) \cap V(X_1)$, weten we dat er ook geldt dat $(u, v) \in R^i$, en omdat t een automorfisme is van X_1 , dat $(t(u), t(v)) \in R^i$. Hieruit volgt vervolgens dat $(q(u), q(v)) = (t(u), t(v)) \in R$.

Als $u \in V(X) \cap V(X_1)$ en $v = s(x)$ voor een $s \in P$ en er geldt dat $t(z_s) = z_r$, dan weten we dat $(q(u), q(v)) = (t(u), r(x))$. Verder weten we dat uit $(u, s(x)) \in R$ volgt dat $(u, z_s) \in R^i$, en omdat t een automorfisme van X_1 is, volgt hier weer uit dat $(t(u), t(z_s)) = (t(u), z_r) \in R^i$. Hieruit kunnen we concluderen dat $(q(u), q(v)) = (t(u), r(x)) \in R$.

Als $u = s_1(x)$ en $v = s_2(x)$ voor $s_1, s_2 \in P$ en er geldt dat $t(z_{s_1}) = z_{r_1}$ en dat $t(z_{s_2}) = z_{r_2}$, dan is $(q(u), q(v))$ gelijk aan $(r_1(x), r_2(x))$. Uit het feit dat $(s_1(x), s_2(x)) \in R$ volgt dat $(z_{s_1}, z_{s_2}) \in R^i$. Omdat t een automorfisme van X_1 is volgt hieruit dat $(t(z_{s_1}), t(z_{s_2})) = (z_{r_1}, z_{r_2}) \in R^i$. Hieruit kunnen we concluderen dat $(r_1(x), r_2(x)) \in R$.

Als $u = s_1(x)$ en $v = s_2(y)$ voor $s_1, s_2 \in P$ en er geldt dat $t(z_{s_1}) = z_{r_1}$ en dat $t(z_{s_2}) = z_{r_2}$, dan is $(q(u), q(v))$ gelijk aan $(r_1(x), r_2(y))$. Uit het feit dat $(s_1(x), s_2(y)) \in R$ volgt dat $(z_{s_1}, z_{s_2}) \in R^{iii}$. Omdat t een automorfisme van X_1 is volgt hieruit dat $(t(z_{s_1}), t(z_{s_2})) = (z_{r_1}, z_{r_2}) \in R^{iii}$. Hieruit kunnen we concluderen dat $(r_1(x), r_2(y)) \in R$.

De bewijzen van alle overige gevallen zijn vergelijkbaar met minstens een van de bovenstaande bewijzen en daarom overbodig om hier op te schrijven. Op deze manier zien we dat ook de binaire relaties van X behouden blijven onder q , en dus dat q een automorfisme van X is. \square

Dankwoord

Ik wil Gunther Cornelissen bedanken. Ten eerste voor het voorstellen van dit onderwerp, waar ik erg veel plezier uit heb gehaald, en ten tweede voor zijn begeleiding tijdens het schrijven van deze scriptie. Ook wil ik Marieke van der Wegen bedanken voor het bedenken en delen van het bewijs dat uit $(u, v) \in R$ volgt dat $(x, v) \in E(\tilde{X})$, te vinden op pagina 30. Omdat Babai deze stap in zijn artikel niet had opgeschreven en Gunther en ik er zo snel niet uit kwamen, was het erg fijn dat Marieke dat wel lukte. Verder wil ik Floor ter Haar bedanken. Zonder onze lunchwandelingen en onze pauzes samen waren de lange dagen in de universiteitsbibliotheek vast en zeker een stuk minder dragelijk geweest. Ten slotte wil ik Stein Meereboer bedanken. Ondanks dat je vaak niet eens precies begreep waar mijn vragen überhaupt over gingen, was het erg fijn om altijd met jou te kunnen overleggen als ik ergens niet uitkwam, want alleen al door uit te leggen wat ik niet begreep, snapte ik het vaak al een stuk beter.

Bibliografie

- [1] Mark Armstrong. *Groups and Symmetry*. Springer-Verlag, New York (1988).
- [2] László Babai. ‘Automorphism groups of planar graphs, I’. In: *Discrete Mathematics*. Volume 2, Issue 4 (1972), p. 295-307.
- [3] László Babai. ‘Automorphism Groups, Isomorphism, Reconstruction’. Hoofdstuk 27 in: *Handbook of Combinatorics*. Elsevier Science B.V., Amsterdam (1995), p. 1447-1540.
- [4] László Babai. ‘Automorphism Groups of Graphs and edge-contraction’. In: *Discrete Mathematics*. Volume 8, Number 1 (1974), p. 13-20.
- [5] Gary Chartrand, Linda Lesniak en Ping Zhang. *Graphs & Digraphs, Fifth Edition*. Taylor and Francis Group (2011).
- [6] Reinhard Diestel. *Graph Theory, Third Edition*. Springer (2006).
- [7] Roberto Frucht. ‘Herstellung von Graphen mit vorgegebener abstrakter Gruppe’. In: *Compositio Mathematica*. Volume 6 (1939), p. 239-250.
- [8] Roberto Frucht. ‘How I became Interested in Graphs and Groups’. In: *Journal of Graph Theory*. Volume 6, Issue 2 (1982), p. 101–104.
- [9] Roberto Frucht. ‘Graphs of degree three with given abstract group’. In: *Canadian Journal of Mathematics*, Volume 1 (1949), p. 365-378.
- [10] Dénes König. *Theorie der Endlichen und Unendlichen Graphen, Kombinatorische Topologie der Streckenkomplexe*. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig (1936).
- [11] Josef Lauri en Raffaele Scapellato. *Topics in Graph Automorphisms and Reconstruction, Second Edition*. Cambridge University Press, Cambridge (2016).
- [12] László Lovász. *Combinatorial Problems and Exercises*. Elsevier B.V., Amsterdam en Akadémiai Kiadó, Budapest (1993).
- [13] Steven Roman. *Fundamentals of Group Theory, An Advanced Approach*. Birkhäuser/Springer, New York (2012).
- [14] Gert Sabidussi. ‘Vertex-transitive graphs’. In: *Monatshefte für Mathematik*, Volume 68, Number 5 (1964), p. 426-438.
- [15] Alexander Schrijver. *Grafen: Kleuren en Routeren*. Beschikbaar via <https://homepages.cwi.nl/~lex/files/graphs1.3.pdf>. Geraadpleegd op 26 oktober 2020.