



Universiteit Utrecht

TNO innovation
for life

Faculteit Betawetenschappen
Departement Natuur- en Sterrenkunde

Geografische positiebepaling aan de hand van een astronomische observatie

MASTER THESIS PART II (NS - 554M)

Laura Scheffer

5644615

Opleiding: Experimental Physics

Supervisors:

dr. C. P. C. Elenbaas
TNO

Intelligent Autonomous Systems

Prof. dr. A. P. Mosk
Universiteit Utrecht
Debye Institute for Nanomaterials Science

28 juni 2021

Samenvatting

Sterrennavigatie is een eeuwenoud concept, maar is sinds de komst van GPS minder op de voorgrond aanwezig. De laatste jaren is het bewustzijn rondom de gevaren van GPS gegroeid en is er hernieuwde interesse in navigatie die niet beïnvloed kan worden van buitenaf. Sterrennavigatie zou hier een uitkomst voor kunnen zijn. Navigeren op astronomische informatie gebeurt al in de lucht- en ruimtevaart waar het zicht goed is. In dit onderzoek is gekeken naar de effecten van achtergrond in een waarneming en hoe de signaal-ruisverhouding van de sterren in een waarneming invloed heeft op de positiebepaling. Voor de positiebepaling moeten verschillende stappen worden doorlopen: de sterren moeten gelocaliseerd worden, het centrum van de sterren moet worden bepaald, de sterren moeten worden geïdentificeerd, de oriëntatie van de camera wordt bepaald waarna de positie bepaald kan worden met behulp van de rotatiematrices van de aarde, de tijd en een inclinometer. De minimale waarde van de signaal-ruisverhouding om voor een ster nog als zodanig herkend te worden lijkt tussen de 3-4 te liggen. De positiebepaling is stabiel voor verschillende achtergrondniveaus met de mediaan van de absolute fout van ~ 0.2 km.

Inhoudsopgave

1	Introductie	1
1.1	De gevaren van GPS	1
1.2	Sterrennavigatie als alternatieve PNT dienst	2
2	Referentiesystemen	4
2.1	Van ECI naar ECEF	4
2.1.1	ECEF	4
2.1.2	ECI	5
2.2	ECI naar sensorkader	8
2.2.1	Oriëntatiehoeken	8
2.3	Inclinometer naar lokale systeem	9
2.3.1	Sensor naar inclinometer	9
2.4	Van waarneming naar positie	9
3	Positiebepaling a.d.h.v. astronomische waarnemingen	10
3.1	Waarnemingen met een sterrenvolger	10
3.2	Localisatie en centrumbe­paling van mogelijke sterren	11
3.2.1	Localisatie	11
3.2.2	Fitting	12
3.3	Identificatie	13
3.3.1	Driehoek algoritme	13
3.4	Oriëntatiebepaling met het TRIAD-algoritme	13
4	Simulatie	15
4.1	Stercatalogus	15
4.2	Creëren van observaties	15
4.3	Centrumbe­paling en identificatie	17
4.4	Oriëntatie- en positie­bepaling	17
4.5	Signaal en achtergrond	18
5	Resultaten	19
5.1	Centrumbe­paling	19
5.2	Positie­bepaling	23
5.3	Uitschieters	24
6	Conclusie	25
7	Verdere vooruitzichten	27
7.1	Alternatieve algoritmes voor centrumbe­paling en identificatie	27
7.2	Toevoegen van (realistische) externe factoren	27
A	Extra cijfers	IV

Notatie

Afkorting	Betekenis
HMNAO	Her Majesty's Nautical Almanac Office
USNO	US Naval Observatory
GNSS	Global Navigational Satellite Systems
GPS	Global Positioning System
PNT	Position, Navigation and Timing
CCD	Charged-Coupled-Device
ECI	Earth-Centered Inertial
ECEF	Earth-Centered-Earth-Fixed
CIO	Conventional International Origin
GAST	Greenwich Apparent Sidereal Time
GMST	Greenwich Mean Sidereal Time
IERS	International Earth Rotation and Reference Systems Service
GV	Gezichtsveld
SNR	Signaal-ruisverhouding

Hoofdstuk 1

Introductie

De mens heeft altijd al astronomische informatie gebruikt om kalenders, tijd en seizoenen te bepalen, maar ook het bepalen van een positie aan de hand van hemellichamen is al eeuwenoud [1]. Zeevaarders gebruikten hun vingers, knopen of kwadranten om de hoek met Polaris te meten en zo hun latitude te kunnen bepalen. Het probleem was alleen dat het bepalen van longitude een stuk lastiger was. Het was dan ook pas met de komst van de eerste nautische almanak in 1767 (geïntroduceerd door Nevil MASKelyne) dat het mogelijk werd om ook de longitude te kunnen bepalen en een redelijk nauwkeurig positiebepaling te doen. Sindsdien zijn het Engelse *Her Majesty's Nautical Almanac Office* (HMNAO) en de Amerikaanse *US Naval Observatory* (USNO) opgericht en die werken tot op heden samen om de Nautische Almanak (NA) en de Astronomische Almanak (AsA) te leveren. Met de komst van GPS leek sterrennavigatie naar de achtergrond te verdwijnen.

1.1 De gevaren van GPS

Het Amerikaanse 'Global Positioning System' (GPS) is onderdeel van de Global Navigational Satellite Systems (GNSS) die verder bestaan uit het Russische 'Global'naya Navigatsionnaya Sputnikovaya Sistema' (GLONASS), het Europese Galileo en het Chinese Beidou. Een groot deel van de maatschappij is dagelijks afhankelijk van technologie die gebruikt maakt van de GNSS. Voorbeelden van toepassingen die afhankelijk zijn van de GNSS zijn navigatiesystemen in auto's, schepen en vliegtuigen, geografische toepassingen (zoals het monitoren van de continentverschuivingen) en agrarische toepassingen zoals precisielandbouw [2]. Ondanks het wijdverspreide gebruik van de GNSS in de samenlevingen zijn er ook nadelen aan het gebruik van satellieten als Position, Navigation en Timing (PNT) dienst.

Het signaal van de satellieten wat op aarde aankomt heeft een laag vermogen ($\sim 130dBm$) en de signaalruisverhouding is laag door de hoeveelheid witte ruis. Dit zorgt ervoor dat de GNSS signalen gevoelig zijn voor interferentie van buitenaf. Interferentie kan optreden door een radio- of televisie-uitzending in dezelfde bandbreedte, maar interferentie kan ook opzettelijk zijn. Zo kan een stoorzender gebruikt worden om het signaal te onderdrukken/verstoren waardoor het niet meer mogelijk is de toepassing te gebruiken. Dit heet ook wel 'jamming'. Daarnaast is er nog het uitzenden van foutieve signalen om de apparatuur te misleiden met als doel verkeerde Position, Velocity en Timing (PVT) informatie te verstrekken, dit heet 'spoofing' [3].

De GNSS zijn de meest gebruikte, en momenteel meest nauwkeurige (voor smartphones al tot op 4.9 meter [4]), PNT diensten, maar deze diensten zijn dus ook kwetsbaar. Er is dan ook een groeiende behoefte aan een PNT dienst die minder te beïnvloeden is van buitenaf [3][5][6]. Er zijn wel manieren om spoofing te herkennen zoals afwijkingen in de klok en de kwaliteit van het signaal en er zijn ook technieken die hiervan gebruik maken om spoofing tegen te gaan [7]. Het herkennen van spoofing is de eerste stap naar het nemen van maatregelen tegen spoofing aldus Hu et al. ([7]) en het is daarom vooral interessant om te kijken naar het mitigeren van spoofing. De auteurs komen met een op array gebaseerde storingsonderdrukkingstechniek om verstoringen en spoofing te onderdrukken en de bruikbare signalen te versterken. In [5] bekijken Grejner-Brzezinska et al. de vooruitgang van PNT over de afgelopen jaren en trekken de conclusie dat het meeste voordeel gehaald wordt uit een hybride systeem dat GNSS combineert met traagheidsnavigatie ¹. Er is dan

¹Traagheidsnavigatie is niet afhankelijk van externe factoren, maar dit systeem bepaalt de positie van een bewegend voertuig

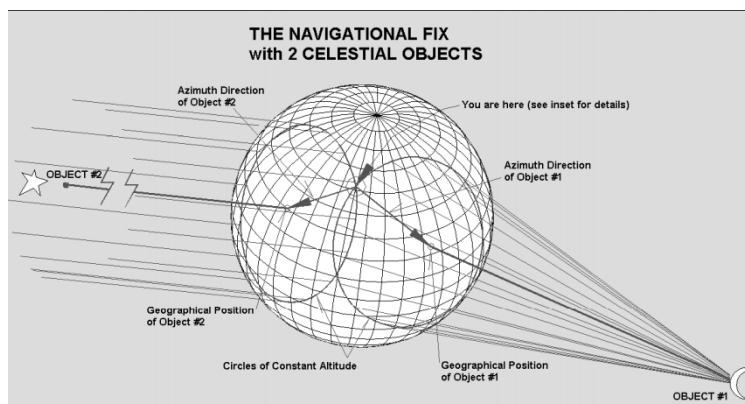
ook een hernieuwde interesse in sterrennavigatie, want "It can't be jammed, and it does not crash." aldus verscheidene leden van de HMNAO en USNO ([1]).

1.2 Sterrennavigatie als alternatieve PNT dienst

Astronavigatie is een techniek om iemands geografische positie te bepalen door observatie van geïdentificeerde sterren, geïdentificeerde planeten, de zon en de maan.

Dit is de definitie zoals gegeven door Van Allen in *Basic Principles of celestial navigation* ([9]) en voor sterrennavigatie geldt hetzelfde alleen worden andere hemellichamen achterwege gelaten. Bij sterrennavigatie wordt de positie op aarde bepaald aan de hand van een astronomische waarneming van twee sterren (of één ster op twee verschillende tijdstippen). Een positie bepaling kan analoog gedaan worden met behulp van een sextant, de nautische almanak van dat jaar en de tijd [10].

Om een positie te bepalen wordt een waarneming gedaan van een ster met een sextant. Met behulp van de tijd en de hoek met de horizon (zoals gemeten met de sextant) wordt in de almanak de lijn van positie gevonden. Met een tweede waarneming wordt een tweede lijn van positie gevonden. De twee cirkels overlappen op twee punten en deze punten zijn de mogelijke posities van de waarnemer. Op basis van omgevingskenmerken wordt dan een punt uitgesloten [10]. In figuur 1.1 is voorbeeld te zien van deze methode.



Figuur 1.1: Afbeelding uit [11]. De twee lijnen van positie zijn bepaald en de intercepties zijn op de locatie van de waarnemer en een paar graden latitude lager. Op basis van omgevingskenmerken kan de waarnemer de zuidelijke positie uitsluiten en zijn geografische positie bepalen.

Inmiddels is er ook software beschikbaar, NavPac, die de waarnemer ondersteunt in het bepalen van de positie met een sextant [1]. Daarnaast is het ook mogelijk om met beeldapparatuur zoals een CCD (Charge-Coupled-Device) of een CMOS (Complementary-Metal-Oxide-Semiconductor) digitale astronomische waarnemingen te doen en de positie te bepalen [12]. Het navigatieproces kan dan meer geautomatiseerd worden. Deze vorm van astronomische navigatie werd ontwikkeld en gebruikt door de Amerikaanse en Russische legers in de Koude Oorlog. Toen werd er nog geen gebruik gemaakt van CCD's, maar van cardanische optica en er was slechts een kleine set met data van voorgeprogrammeerde observaties. De technologie is sindsdien veel verbeterd en daarmee zijn er meer mogelijkheden op het gebied van automatische sterrennavigatie.

Sterrennavigatie is tegenwoordig vooral te vinden in twee verschillende sectoren ([13]):

1. in toepassingen die worden gebruikt om de geografische positie van schepen, vliegtuigen of ruimtevoertuigen te bepalen.
2. in toepassingen die worden gebruikt om de oriëntatie van geleide raketten, ruimtevoertuigen en satellieten.

met behulp van meetinstrumenten zoals een versnellingsensor en gyroscopen. Dit houdt dus wel in dat een traagheidsnavigatiesysteem een accurate startpositie nodig heeft als referentiepunt. Daarnaast zit er een meetonnauwkeurigheid in de metingen van de instrumenten die over tijd accumuleren [8].

Er zijn verschillende manieren om direct de geografische positie te berekenen, maar in essentie lijken ze allemaal op de analoge methode die eerder is genoemd. Dat houdt in dat er kennis moet zijn van welke hemellichamen zijn waargenomen en er accurate hoekbepaling met de horizon gedaan kan worden. Dit maakt het vooral geschikt voor genoemde toepassingen (zeevaart, luchtvaart, ruimtevaart), omdat hier over het algemeen sprake is van vrij uitzicht².

Het doel van dit project is om de mogelijkheden te onderzoeken van een sterrennavigatiesysteem op aarde. Het gaat hier specifiek om een nauwkeurige positiebepaling met een mobiel navigatiesysteem wat bijvoorbeeld op drones gemonteerd kan worden als een alternatief voor GPS. De toepassing zou ook moeten kunnen functioneren wanneer men zich in bebost gebied bevindt of geen kennis heeft van de waargenomen hemellichamen. Er is dan ook gekozen om de tweede methode te onderzoeken. In dit geval wordt eerst de oriëntatie van de sterrenvolger bepaald en aan de hand van de gevonden oriëntatiematrix wordt een positiebepaling gedaan.

Er zijn al onderzoeken gedaan naar een positiebepaling met behulp van mobiele sterrennavigatiesystemen. Zo heeft Marbel [14] gekeken naar de mogelijkheden om een oriëntatiebepaling te doen met smartphones als sterrenvolger en zijn er positiebepalingen gedaan met behulp van een sterrenvolger en inclinometer in [15] en [16]. Het doen van een positiebepaling met een sterrenvolger op aarde is mogelijk en in deze thesis wordt gekeken hoe de nauwkeurigheid van deze positiebepaling af hangt van de signaal-ruisverhouding.

Om dit te bereiken wordt er gewerkt met gesimuleerde observaties waarvan het mogelijk is om de hoeveelheid ruis aan te passen. Van deze testafbeeldingen wordt de oriëntatie en de positie bepaald. Door de ruis te verhogen, en dus de signaal-ruisverhouding te verlagen, kan worden onderzocht hoe (en of) de positiebepaling verandert. In de komende hoofdstukken wordt er besproken hoe; een oriëntatiebepaling kan leiden tot een positiebepaling en wat hier voor nodig is, de oriëntatiebepaling van een waarneming tot stand komt, de observaties worden gesimuleerd, en tot slot de resultaten en conclusies van dit onderzoek.

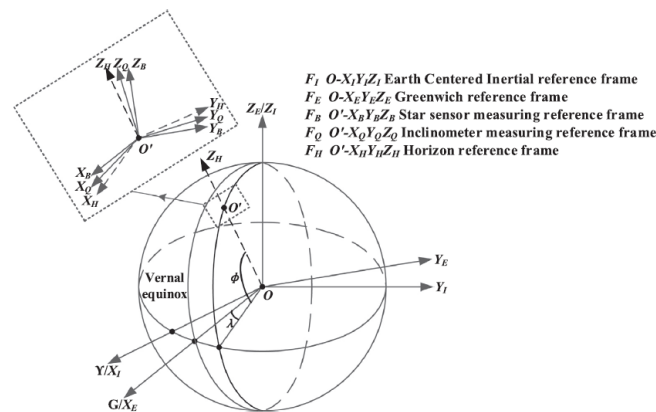
²In een berg- of bosachtige omgeving is het veel lastiger (al dan niet onmogelijk) om een accurate hoekmeting te doen.

Hoofdstuk 2

Referentiesystemen

Om van de waarneming naar een positiebepaling te gaan zijn er verschillende coördinatentransformaties nodig. In figuur 2.1 zijn deze verschillende referentiekaders weergegeven. De referentiekaders zullen in dit hoofdstuk allemaal worden beschreven en de nodige transformaties toegelicht.

1. Van ECI naar ECEF
2. Van ECEF naar de sensor
3. Van de inclinometer naar de het lokale systeem
4. Van de sensor naar de inclinometer



Figuur 2.1: Weergave van de verschillende referentiekaders (afbeelding uit [16])

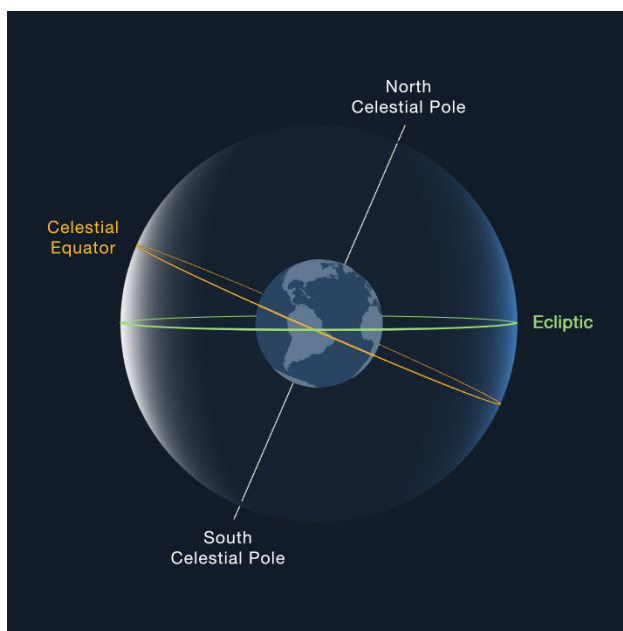
2.1 Van ECI naar ECEF

2.1.1 ECEF

Het Earth-Centered Earth Fixed (ECEF) is een geocentrisch rechtshandig Cartesisch coördinatensysteem met de x-as richting de meridiaan van Greenwich (nulmeridiaan) en de z-as ligt op de gemiddelde rotatieas van de aarde (ook wel de Conventional International Origin, CIO, de gemiddelde locatie van de pool). De coördinaten worden meestal weergegeven door een sferisch coördinatensysteem (r, ϕ, λ) waar r de radius is van het punt (x, y, z) en ϕ en λ zijn de geocentrische latitude en longitude. De longitude wordt oostwaarts gemeten vanaf de nulmeridiaan [17].

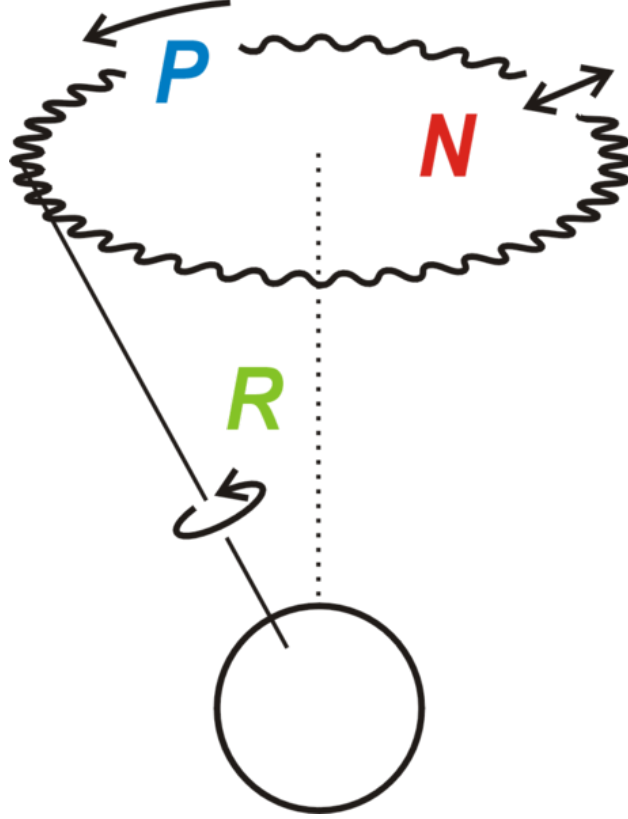
2.1.2 ECI

Een Earth Centered Inertial Reference Frame (ECI) is een geocentrisch coördinatensysteem en staat stil ten opzichte van de sterren. Het xy-vlak (de hemelevenaar) van het stelsel ligt in het vlak van de evenaar, zie figuur 2.2, en de x-as is gericht op de equinox J2000 (de toestand op de Juliaanse dag 1 januari 2000 om 12.00). De z-as komt ook overeen met de CIO. Dit systeem is het equatoriale coördinatensysteem met astronomische longitude en latitude en worden respectievelijk ook wel rechte klimming en declinatie genoemd. Het lentepunt is het snijpunt van de hemelevenaar en het ecliptisch vlak (het vlak waarin de aarde om de zon heen draait). De rechte klimming wordt oostwaarts gemeten vanaf het lentepunt en de declinatie geeft aan of het punt ten noorden of ten zuiden van de hemelevenaar ligt [17].



Figuur 2.2: De hemelevenaar t.o.v. de ecliptische vlak. Afbeelding van [18]

De aarde zelf is niet perfect stil (i.a.w. zonder versnellingen) en het ECI systeem is dan ook een quasi-traagheidskader. De aarde is onderhevig aan de koppels die de maan, de zon en de andere planeten in ons zonnestelsel er op uitoefenen. Deze koppels zijn verantwoordelijk voor de precessie van de aarde met een periode van ongeveer 26.000 jaar [19]. Daarnaast staat de baan van de maan onder een hoek van ongeveer 5° ten opzichte van het ecliptisch vlak en dit leidt tot periodieke variaties van de hemelevenaar ten opzichte van het ecliptisch vlak, nutatie in obliquiteit. De excentriciteit van de baan van de aarde leidt tot nutatie in longitude [19]. De periode van nutatie varieert van 14 dagen tot 18.6 jaar [17]. In figuur 2.3 zijn de effecten van precessie en nutatie schematisch weergegeven. Wanneer nutatie en precessie worden meegenomen wordt de daadwerkelijke pool van de aarde omschreven (i.p.v. de CIO).



Figuur 2.3: De beweging van de pool van de aarde door precessie en nutatie. [19]

De rotatie van de huidige equinox ten opzichte van de nulmeridiaan wordt Greenwich Apparent Sidereal Time (GAST) genoemd, deze rotatie transformeert het gemiddelde ECI systeem naar het huidige equatoriale coördinatensysteem. Het enige verschil tussen de ECEF en ECI is dan nog de poolbeweging.

Om van ECI naar ECEF te kunnen gaan moet er dus rekening gehouden worden met nutatie, precessie, de rotatie van de aarde en de poolbeweging. De transformatie komt neer op ([17]):

$$X_{ECEF} = R_M R_S R_N R_P X_{ECI} \quad (2.1)$$

Met X de plaatsvector in de referentiekaders en R_* de rotatiematrices van de precessie (P), de nutatie (N), de rotatie van de aarde (S) en de poolbeweging (M). Deze matrices worden gegeven door ([17], [19]):

$$\begin{aligned} R_p &= R_3(-z)R_2(\theta)R_3(-\zeta) \\ &= \begin{pmatrix} \cos z \cos \theta \cos \zeta - \sin z \sin \zeta & -\cos z \cos \theta \sin \zeta - \sin z \cos \zeta & -\cos z \sin \theta \\ \sin z \cos \theta \cos \zeta + \cos z \cos \zeta & -\sin z \cos \theta \sin \zeta + \cos z \cos \zeta & -\sin z \sin \theta \\ \sin \theta \cos \zeta & -\sin \theta \sin \zeta & \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Met z, θ, ζ de precessieparameters¹, die worden gegeven door

$$z = 2306.''2181T + 1.''09468T^2 + 0.''018203T^3 \quad (2.3a)$$

$$\theta = 2004.''3109T + 0.''42665T^2 + 0.''041833T^3 \quad (2.3b)$$

$$\zeta = 2306.''2181T + 0.''30188T^2 + 0.''017998T^3 \quad (2.3c)$$

hier is T de tijd in Juliaanse eeuwen vanaf J2000 (de standaardepoche).

¹Dit zijn benaderingen met een nauwkeurigheid van meer dan een micro-boogseconde.[20]

$$\begin{aligned}
R_N &= R_1(-\epsilon_T)R_3(-\Delta\psi)R_1(\epsilon_A) \\
&= \begin{pmatrix} \cos \Delta\psi & & -\sin \Delta\psi \cos \epsilon_A & & -\sin \Delta\psi \sin \epsilon_A \\ \sin \Delta\psi \cos \epsilon_T & \cos \Delta\psi \cos \epsilon_T \cos \epsilon_A + \sin \epsilon_T \sin \epsilon_A & \cos \Delta\psi \cos \epsilon_T \sin \epsilon_A - \sin \epsilon_T \cos \epsilon_A & & \\ \sin \Delta\psi \sin \epsilon_T & \cos \Delta\psi \sin \epsilon_T \cos \epsilon_A - \cos \epsilon_T \sin \epsilon_A & \cos \Delta\psi \sin \epsilon_T \sin \epsilon_A + \cos \epsilon_T \cos \epsilon_A & & \end{pmatrix} \quad (2.4)
\end{aligned}$$

Hier is ϵ_T de huidige obliquiteit en is gedefinieerd als $\epsilon_T = \epsilon_A + \Delta\epsilon$. ϵ_A is de gemiddelde obliquiteit van het ecliptische vlak en wordt gegeven door:

$$\epsilon_A = 84381.''448 - 46.''8150T - 0.''00059T^2 + 0.''001813T^3 \quad (2.5)$$

De parameters $\Delta\psi$ en $\Delta\epsilon$ zijn de nutatiehoeken in longitude en obliquiteit, respectievelijk. Deze hoeken worden berekend met het nutatiemodel van de International Earth Rotation and Reference Systems Service (IERS) [21] en zijn gedefinieerd als:

$$\Delta\psi = \sum_{i=1}^{106} (A_i + A'_i T) \sin \beta \quad (2.6a)$$

$$\Delta\epsilon = \sum_{i=1}^{106} (B_i + B'_i T) \cos \beta, \text{ en} \quad (2.6b)$$

$$\beta = N_{1i}l + N_{2i}l' + N_{3i}F + N_{4i}D + N_{5i}\Omega \quad (2.6c)$$

met l, l', D, F, Ω parameters die afhankelijk zijn van de longitudes van de maan en de zon.

$$\begin{aligned}
R_S &= R_3(\text{GAST}) \\
\text{GAST} &= \text{GMST} + \Delta\psi \cos \epsilon_A + 0.''00264 \sin \Omega + 0.''000063 \sin 2\Omega \quad (2.7)
\end{aligned}$$

Ω is de gemiddelde longitude van de klimmende knoop van de maan en GMST is de Greenwich Mean Sideral Time gedefinieerd als ([17]):

$$\text{GMST} = \text{GMST}_0 + \alpha \text{UT1},$$

$$\begin{aligned}
\text{GMST}_0 &= 6 \times 3600.''0 + 41 \times 60.''0 + 50.''54841 \\
&+ 8640184.''812866T_0 + 0.''093104T_0^2 - 6.''2 \times 10^{-6}T_0^3, \quad (2.8)
\end{aligned}$$

$$\alpha = 1.002737909350795 + 5.9006 \times 10^{-11}T_0 - 5.9 \times 10^{-15}T_0^2$$

Hier is GMST_0 de GMST om middernacht op de dag waarvan de rotatie bepaald moet worden en α is de snelheid van verandering, UT1 is de Universal Time gecorrigeerd voor de poolbewegingen en T_0 de tijd in Juliaanse eeuwen gemeten vanaf de standaardepoche tot middernacht (0.00h UT1) op de dag van meten.

$$\begin{aligned}
R_M &= R_2(-x_p)R_1(-y_p) \\
&= \begin{pmatrix} \cos x_p & \sin x_p \sin y_p & \sin x_p \cos y_p \\ 0 & \cos y_p & -\sin y_p \\ -\sin x_p & \cos x_p \sin y_p & \cos x_p \cos y_p \end{pmatrix} \quad (2.9)
\end{aligned}$$

De waarden voor x_p en y_p zijn te vinden op de website van het IERS ([21]). De totale rotatie wordt gegeven door $A_I^E = R_M R_S R_N R_P$.

2.2 ECI naar sensor kader

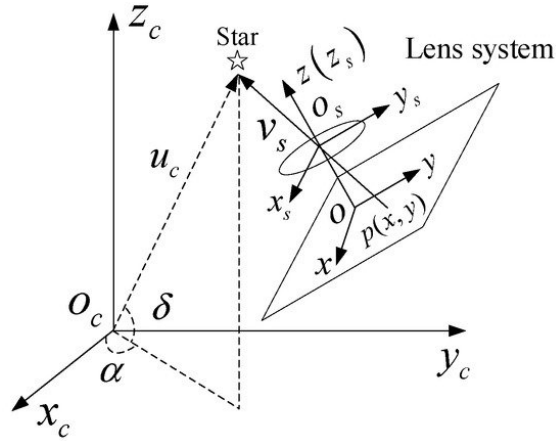
De sensor heeft een oriëntatie ten opzichte van het ECI en deze wordt gegeven door de rotatiematrix, [12],

$$A_B^I = R_z(\alpha_0 - \pi/2)R_x(\delta_0 + \pi/2)R_z(\phi_0) \quad (2.10)$$

Deze rotatiematrix is de 3×3 matrix die de coördinaten van het sensorcoördinatenstelsel (B) naar het ECI-kader (I) transformeert (zie figuur 2.4). De rotatiematrix \mathbf{A}_B^I is een orthogonale matrix, dus $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{1}$. De plaatsvectoren \mathbf{u} in het ECI-systeem worden dan getransformeerd naar de plaatsvectoren \mathbf{v} in het sensorsysteem volgens:

$$\mathbf{v} = (\mathbf{A}_B^I)^T \mathbf{u} \quad (2.11)$$

$$= \mathbf{A}_I^B \mathbf{u} \quad (2.12)$$



Figuur 2.4: De stervector u_c wordt gerooteerd en afgebeeld op pixelpositie $p(x, y)$ de stervector in het sensor kader is dan v_s [22].

2.2.1 Oriëntatiehoeken

Er zijn meerdere representaties van oriëntatie, maar de meest voorkomende representatie voor de oriëntatie van een ster lichaam is met een set van drie Euler hoeken. Deze rotaties worden vaak aangeduid met rollen, gieren en stampen (roll, yaw, pitch) in bijvoorbeeld de lucht- en ruimtevaart ([23]). De oriëntatie van de sterrenvolger zal uitgedrukt worden in $(\alpha_0, \delta_0, \phi_0)$. Hier is α_0 de rechte klimming, δ_0 de declinatie en ϕ_0 de rolhoek. De rotatiematrix van het sensorsysteem naar het astronomisch systeem wordt gegeven door vergelijking 2.10 en geeft:

$$\begin{aligned} A_B^I &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha_0 - \pi/2) & -\sin(\alpha_0 - \pi/2) & 0 \\ \sin(\alpha_0 - \pi/2) & \cos(\alpha_0 - \pi/2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\delta_0 + \pi/2) & -\sin(\delta_0 + \pi/2) \\ 0 & \sin(\delta_0 + \pi/2) & \cos(\delta_0 + \pi/2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \phi_0 & -\sin \phi_0 & 0 \\ \sin \phi_0 & \cos \phi_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin \alpha_0 \cos \phi_0 - \cos \alpha_0 \sin \delta_0 \sin \phi_0 & -\sin \alpha_0 \sin \phi_0 - \cos \alpha_0 \sin \delta_0 \cos \phi_0 & -\cos \alpha_0 \cos \delta_0 \\ -\cos \alpha_0 \cos \phi_0 - \sin \alpha_0 \sin \delta_0 \sin \phi_0 & \cos \alpha_0 \sin \phi_0 - \sin \alpha_0 \sin \delta_0 \cos \phi_0 & -\sin \alpha_0 \cos \delta_0 \\ \cos \alpha_0 \sin \phi_0 & \cos \alpha_0 \cos \phi_0 & -\sin \delta_0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Wanneer alleen de rotatiematrix bekend is dan zijn de oriëntatiehoeken te berekenen door:

$$\alpha_0 = \tan^{-1} \frac{A_B^I(2,3)}{A_B^I(1,3)} \quad (2.14a)$$

$$\delta_0 = -\sin^{-1} A_B^I(3,3) \quad (2.14b)$$

$$\phi_0 = \tan^{-1} \frac{A_B^I(3,1)}{A_B^I(3,2)} \quad (2.14c)$$

2.3 Inclinometer naar lokale systeem

De sensor is uitgerust met een inclinometer die de hoeken (θ_x, θ_y) bepaalt met de horizontaal [16]. De matrix wordt gegeven door:

$$A_Q^H = \begin{pmatrix} \cos \theta_x & \cos \theta_y \sin \theta_0 & -\sin \theta_x \cos \theta_y \cos \theta_0 \\ 0 & \cos \theta_y \cos \theta_0 & \cos \theta_y \sin \theta_0 \sin \theta_x - \cos \theta_x \sin \theta_y \\ \sin \theta_x & \sin \theta_y & \cos \theta_y \cos \theta_0 \cos \theta_x \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

met $\theta_0 = \arcsin(\tan \theta_x \tan \theta_y)$. De matrix wordt hier vooral gegeven voor een volledige omschrijving van het proces. Aangezien er met simulaties wordt gewerkt kan er worden aangenomen dat de sensor altijd recht naar boven kijkt. Dit houdt in dat de sensor parallel loopt met het lokale systeem en de hoek 0° bedraagt. De matrix A_Q^H is dan een eenheidsmatrix.

2.3.1 Sensor naar inclinometer

Deze transformatie is afhankelijk van de hardware en kan dus alleen bepaald worden door de sensor plus inclinometer opstelling te calibreren met behulp van GPS. De transformatie geeft namelijk de rotatie tussen het vlak van de sensor en het vlak van de inclinometer. Als de inclinometer parallel loopt aan de sensor dan wordt de transformatie gegeven door de eenheidsmatrix, maar in werkelijkheid zal de inclinometer nooit perfect parallel lopen aan de sensor en moet daar dus voor gecompenseerd worden ([16]). In dit project wordt gewerkt met simulaties en niet met hardware en wordt er dus aangenomen dat de inclinometer wel perfect parallel is met de sensor. Deze matrix wordt genoteerd met A_B^Q .

2.4 Van waarneming naar positie

Met deze matrices kan de positie worden bepaald door ([24])

$$A_E^H = A_Q^H \cdot A_B^Q \cdot A_I^B \cdot A_E^I \quad (2.16)$$

met A_E^H de rotatiematrix tussen de horizon en de ECEF frame.

$$A_E^H = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \phi \cos \lambda - \sin \theta \sin \lambda & \cos \theta \sin \phi \sin \lambda + \sin \theta \cos \lambda & \cos \theta \cos \phi \\ -\sin \theta \sin \phi \cos \lambda - \cos \theta \sin \lambda & -\sin \theta \sin \phi \sin \lambda + \cos \theta \cos \lambda & \sin \theta \cos \phi \\ \cos \phi \cos \lambda & \cos \phi \sin \lambda & \sin \phi \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

De longitude λ , latitude ϕ en de richting θ worden dan gegeven door:

$$\lambda = \tan^{-1} \frac{A_E^H(3,2)}{A_E^H(3,1)} \quad (2.18a)$$

$$\phi = \sin^{-1} A_E^H(3,3) \quad (2.18b)$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{A_E^H(2,3)}{-A_E^H(1,3)} \quad (2.18c)$$

Hoofdstuk 3

Positiebepaling a.d.h.v. astronomische waarnemingen

Om van de astronomische waarneming naar een positiebepaling te gaan moeten de volgende stappen doorlopen worden (zie figuur 3.1):

1. het maken van de afbeelding,
2. het localiseren van mogelijke sterren en de centrum-bepaling van deze mogelijke sterren,
3. het identificeren van de gevonden sterren,
4. bepalen van de oriëntatie van de sensor,
5. bepalen van de inclinatie van de sensor,
6. coördinatie-transformatie naar het lokale referentiesysteem (i.a.w. het bepalen van de longitude en latitude van de waarnemer).

In dit hoofdstuk zullen deze stappen worden beschreven en toegelicht.



Figuur 3.1: Van waarneming naar positiebepaling. De oriëntatiebepaling kan i.c.m. een inclinometer worden gebruikt om een positiebepaling te doen.

3.1 Waarnemingen met een sterrenvolger

Sterrennavigatie is al een welbekend concept voor de ruimtevaart en wordt gebruikt om de oriëntatie van satellieten en ruimtesondes te bepalen. De satelliet (of ruimtesonde) is dan uitgerust met een sterrenvolger (star-tracker). Deze maakt een afbeelding (de astronomische observatie) en vergelijkt de afbeelding met een astronomische database [25]. Een sterrenvolger is de meest accurate manier om de oriëntatie van een ruimtesonde te bepalen met een onnauwkeurigheid van enkele boogseconden.

Een sterrenvolger is in essentie een camera (CCD) met een microcomputer aan boord. De sterrenvolger gebruikt een afbeelding om sterren te localiseren en identificeren en gebruikt deze informatie om een oriëntatiebepaling te doen. De nauwkeurigheid van een sterrenvolger hangt af van ([25]):

- gevoeligheid voor sterrenlicht
- gezichtsveld (GV)
- nauwkeurigheid van ster centrumbe­paling
- de detectiedrempel voor sterren
- het aantal sterren in het GV
- interne catalogus

Van de voorgaande parameters zijn de gevoeligheid voor sterrenlicht, het GV, de detectiedrempel voor sterren en het aantal sterren in het GV afhankelijk van de hardware van het systeem (te weten: de grootte van de aperture, de hoeveelheid pixels en de lichtgevoeligheid van het focale vlak). De centrumbe­paling van de sterren op de astronomische opname is afhankelijk van de software. Ook de catalogus is onderdeel van de software.

De effecten van de aardatmosfeer zorgen ervoor dat het gebruik van een sterrenvolger bemoeilijkt wordt. De opname van een sterrenvolger wordt in dit geval namelijk negatief beïnvloed door atmosferische verstrooiing en absorptie en dit zorgt voor een lagere signaal-ruisverhouding [26].

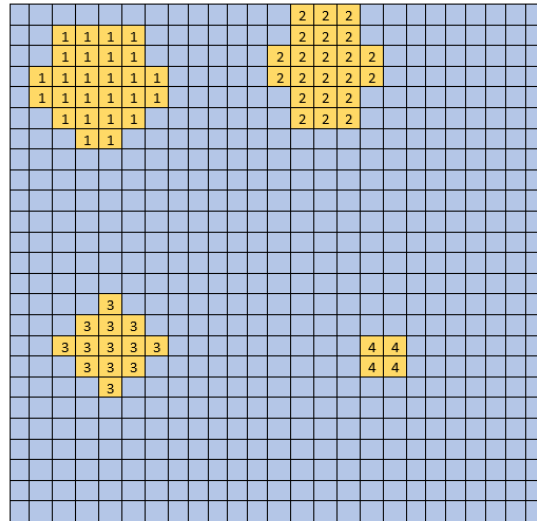
3.2 Localisatie en centrumbe­paling van mogelijke sterren

De centrumbe­paling is een belangrijke stap in het proces om de oriëntatie te bepalen. Om een subpixel nauwkeurigheid te bereiken wordt er meestal bewust een licht onscherpe waarneming gedaan zodat het licht van de sterren over meerdere pixels wordt verspreid [27]. Er zijn meerdere algoritmes ontwikkeld om centrumbe­palingen te verrichten. Een overzicht hiervan is te vinden in [28]. In principe zijn de verschillende algoritmes in te delen in twee groepen: de grijsschaal methode en de fitting methode [29]. De grijsschaal methode bepaalt het zwaartepunt en maakt op basis daarvan een centrumbe­paling. De fitting methode bepaalt het stercentrum door een 2-dimensionale Gaussische functie te fitten aan een mogelijke ster. Sterren staan op grote afstand en kunnen als puntbron beschouwd worden. Daarnaast is het signaal van een ster op de sensor te beschrijven met een 2-dimensionale gaussverdeling. De fitting methode biedt dus de hoogste nauwkeurigheid, maar een nadeel is wel dat deze methode rekenkundig intensief is en daardoor veel tijd kan kosten [29][27][12].

3.2.1 Localisatie

Voordat de fit gedaan kan worden moeten de mogelijke sterren gelocaliseerd worden. Hiertoe stellen we eerst een detectiedrempel in van 5σ boven het gemiddelde achtergrondniveau om mogelijke valse posities uit te sluiten. Daarna wordt gekeken of de gebieden die boven deze detectiedrempel vallen ook bestaan uit meerdere pixels, wederom om valse posities uit te sluiten. In het geval van dit onderzoek wordt er gewerkt met simulaties en is het dus mogelijk om waarnemingen waarin de sterren dicht op elkaar staan niet mee te nemen, echter als er daadwerkelijke waarnemingen worden gedaan zal er nog een extra iteratie nodig zijn om eventuele bronnen bij elkaar in de buurt te onderscheiden [12].

Als de localisatie is gelukt dan zijn de gebieden met een mogelijke ster gemarkeerd (zie figuur 3.2) en kan het betreffende gebied gefit worden.



Figuur 3.2: Illustratie van de mogelijke sterren gemarkeerd met een label. In dit geval wordt nummer 4 niet meegenomen, omdat het zou kunnen gaan om een vals positief.

3.2.2 Fitting

De sterren kunnen worden beschouwd als een puntbron en om sub-pixel nauwkeurigheid te bereiken wordt de sensor iets uit focus gebracht (ong. 3-5 pixels), [27] [29]. Het binnenkomende signaal van de ster kan worden benaderd met een 2-dimensionale gaussische functie. Het totale signaal wordt dan gegeven door:

$$f(x_i, y_i, \beta) = A \cdot \exp\left(-\frac{(x_i - x_b)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y_i - y_b)^2}{2\sigma_y^2}\right) + B \quad (3.1)$$

Hier is $\beta = (A, x_b, y_b, \sigma_x, \sigma_y)$ de vector waarvan de parameters bepaald moeten worden, V_{x_i, y_j} de pixelwaarde op (x_i, y_j) , x_b en y_b zijn de centrumcoördinaten van de ster en σ_x en σ_y de standaard deviatie in x en y respectievelijk. B is het achtergrondsignaal.

De waarden van de gebieden uit de localisatie worden meegegeven als initiële parameters voor de fitting. De fit wordt gevonden met de kleinste-kwadratenmethode. De som die geminimaliseerd moet worden ([27]):

$$\min S(\beta) = \sum_{i=-n_b}^{n_b} \sum_{j=-n_b}^{n_b} [V_{x_i, y_j} - f(x_i, y_j, \beta)]^2. \quad (3.2)$$

Hier is n_b gedefinieerd als:

$$n_b = \frac{n_{pr} - 1}{2} \quad (3.3)$$

waar n_{pr} het aantal pixels in een rij of kolom is.

Met deze gaussische fit worden x_b en y_b (het centrum) van de ster bepaald. Deze waarden worden vervolgens gebruikt in het identificatieproces en een nauwkeurige centrubepaling is dan ook van belang. Binnen de astrometrie is de vuistregel dat de nauwkeurigheid van de positiebepaling ongeveer gelijk is aan [30]:

$$\sigma_x = \frac{1}{(FWHM \times S/N)^2} \quad (3.4)$$

Met σ_x de afwijking van het centrum in pixels op de x -as, $FWHM$ de halfwaardebreedte, en S/N de signaal-ruisverhouding. De afwijking op de y -as wordt op dezelfde manier gevonden.

3.3 Identificatie

De resultaten van de centrubepaling zijn de input voor de volgende stap, te weten de identificatie van de sterren. De identificatie is tevens de laatste stap voor de oriëntatiebepaling (zie figuur 3.1). Ook voor de identificatie geldt dat er meerdere algoritmen ontwikkeld zijn, maar de meeste van deze technieken maken gebruik van de hoeken tussen de verschillende sterren[31]. Voorbeelden van dergelijke identificatie algoritmen zijn de pyramide methode [32] en driehoek algoritmes [33]. Een andere groep identificatie algoritmes maakt gebruik van het patroon zoals het rooster algoritme [34]. De algoritmes die gebruik maken van de hoeken tussen de sterren (de algemene groep 'driehoek-algoritmes') wordt veel gebruikt [12] en zal in dit onderzoek ook worden toegepast.

3.3.1 Driehoek algoritme

Het driehoek algoritme dat wordt gebruikt in dit project is afgeleid uit [12] en is als volgt.

Voor een succesvolle identificatie is een minimum van twee sterren nodig zodat de hoekafstand gebruikt kan worden als eigenschap van het paar. In het geval van de driehoek algoritmes zijn er drie sterren nodig. De rechte klimming en declinatie coördinaten van de sterren i en j worden gegeven door (α_i, δ_i) en (α_j, δ_j) , de hoekafstand (in het astronomisch coördinatensysteem) is dan:

$$d(i, j) = \cos^{-1} \left(\frac{u_i \cdot u_j}{|u_i| \cdot |u_j|} \right) \quad (3.5)$$

Met $u_{i,j} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_{i,j} \cos \delta_{i,j} \\ \sin \alpha_{i,j} \cos \delta_{i,j} \\ \sin \delta_{i,j} \end{pmatrix}$ als de plaatsvectoren van de sterren i en j . Op dezelfde wijze wordt de hoekafstand van de waargenomen sterren in het sensor coördinatensysteem bepaald.

$$d_m^{12} = \cos^{-1} \left(\frac{v_1 \cdot v_2}{|v_1| \cdot |v_2|} \right) \quad (3.6)$$

De plaatsvectoren van de waargenomen sterren zijn $v_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{X_{1,2}^2 + Y_{1,2}^2 + f^2}} \begin{pmatrix} X_{1,2} \\ Y_{1,2} \\ -f \end{pmatrix}$. Als de hoekafstand van de waargenomen sterren overeenkomt met de hoekafstand van de navigatiesterren dan geldt dat:

$$|d(i, j) - d_m^{12}| \leq \epsilon \quad (3.7)$$

Hier is ϵ de foutmarge op de meting van de hoekafstand. In het algemeen is deze conditie alleen niet genoeg om een unieke match te vinden en wordt er gekeken naar het matchen van een driehoek. In dat geval moet aan de volgende voorwaarden worden voldaan:

$$|d(i, j) - d_m^{12}| \leq \epsilon \quad (3.8a)$$

$$|d(j, k) - d_m^{23}| \leq \epsilon \quad (3.8b)$$

$$|d(i, k) - d_m^{13}| \leq \epsilon \quad (3.8c)$$

Als aan deze voorwaarden wordt voldaan dan is er een match gevonden en zijn de sterren in de driehoek geïdentificeerd.

3.4 Oriëntatiebepaling met het TRIAD-algoritme

Om de rotatiematrix A_I^B (hoofdstuk 2.2) te bepalen wordt gebruik gemaakt van het TRIAD algoritme. De naam TRIAD komt van '*TRI*axial *Attitude Deter*mination'¹ en het algoritme gebruikt twee vectoren om de drie oriëntatiehoeken te bepalen [35]. De berekende plaatsvectoren worden gebruikt om de rotatiematrix

¹In het Engels staat de naam ook direct voor triad. Een triad (of triade in het Nederlands) is een groep van drie.

te bepalen. Stel dat er een triade van orthonormale rechtshandige vectoren is in het astronomisch systeem $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ en een overeenkomende triade van orthonormale rechtshandige vectoren in het sensorsysteem $\{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3\}$ dan wordt de rotatiematrix gegeven door ([35]):

$$A_I^B \equiv [\mathbf{s}_1 \ \mathbf{s}_2 \ \mathbf{s}_3] [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3]^T \quad (3.9)$$

De triades worden bepaald met behulp van de berekende plaatsvectoren volgens ([35]):

$$\mathbf{s}_1 = v_1 \quad \mathbf{s}_2 = \frac{v_1 \times v_2}{\|v_1 \times v_2\|} \quad \mathbf{s}_3 = v_1 \times s_2 \quad (3.10a)$$

$$\mathbf{a}_1 = u_1 \quad \mathbf{a}_2 = \frac{u_1 \times u_2}{\|u_1 \times u_2\|} \quad \mathbf{a}_3 = u_1 \times a_2 \quad (3.10b)$$

Met het bepalen van de oriëntatiematrix kan vergelijking 2.16 gebruikt worden om de longitude en latitude te vinden².

²De rotatiematrix tussen ECI en ECEF is bekend en in de simulaties wordt handmatig de waardes voor de inclinometer ingevuld.

Hoofdstuk 4

Simulatie

Zoals omschreven in hoofdstuk 3 zijn er verschillende stappen die genomen moeten worden om tot een positiebepaling te komen. De eerste stap is het maken van een afbeelding. Om te kijken hoe de signaalruisverhouding de positiebepaling beïnvloedt worden er geen werkelijke waarnemingen gedaan, maar waarnemingen gesimuleerd. Voor de simulaties en verwerking is gebruik gemaakt van *Python Programming Language*.

4.1 Stercatalogus

Een stercatalogus is een dataset waarin bepaalde eigenschappen van sterren zoals de rechte klimming, declinatie en (visuele) magnitude terug te vinden zijn. De stercatalogus wordt gebruikt in het identificatieproces en is tevens input voor het simuleren van een waarneming. Er is gekozen voor de Smithsonian Astrophysical Observatory Star Catalog (SAO) [36][37], omdat hier de rechte klimming en declinatie t.o.v. de J2000 epoch worden gegeven in radialen¹. Met het blote oog kunnen sterren tot ongeveer een schijnbare magnitude van 6 worden waargenomen wat hier als ondergrens is genomen voor de magnitude van de sterren. De SAO omvat 258997 sterren, maar dit reduceert tot 5103 wanneer alleen de sterren van een magnitude 6 of helderder worden geselecteerd. Een kleinere database is wenselijk, omdat bij de identificatiestap de gevonden hoekafstanden worden vergeleken met de hoekafstanden in de catalogus waarmee de sensor is uitgerust. Het identificatieproces zal dus sneller gaan met een kleinere catalogus.

4.2 Creëren van observaties

Uit de stercatalogus worden de rechte klimming en declinatie van de sterren gehaald en zodat deze kunnen worden geconverteerd naar pixelcoördinaten. Daartoe moet er eerst worden bepaald welke sterren in het gezichtsveld (GV) vallen [12]. In sectie 2.2 wordt de oriëntatie van de sensor uitgedrukt in $\alpha_0, \delta_0, \phi_0$ en voor een gegeven oriëntatie van de sensor geldt dat de coördinaten (α, δ) van een ster in het GV vallen wanneer:

$$\alpha \in (\alpha_0 - R/\cos \delta_0, \alpha_0 + R/\cos \delta_0) \quad (4.1)$$

$$\delta \in (\delta_0 - R, \delta_0 + R) \quad (4.2)$$

De rotatie tussen de stercóördinaten en het sensorframe wordt gegeven door de getransponeerde te nemen van de matrix A_B^I (2.13). De plaatsvector van de ster in het astronomisch coördinatensysteem wordt gegeven door u_i uit vergelijking 3.5. De drie-dimensionale vector in het sensorsysteem wordt dan gegeven door:

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = A_I^B \cdot u_i \quad (4.3)$$

¹De manier waarop deze stercatalogi zijn samengesteld maakt het lastig(er) om de rechte klimming en declinatie in uurhoeken, graden, boogminuten en boogseconden te converteren naar radialen.

Grootheid	Waarde	Eenheid
$\alpha_0, \delta_0, \phi_0$	Willekeurig	°
Brandpuntsafstand	58.4563	mm
GZ	8	°
Resolutie	1024	pixels
Groote apertuurradius	5	cm
Sluitertijd	10	s
Bandbreedte	10	Å
Defocus	3	pixels

Tabel 4.1: De gebruikte waarden voor de simulaties. De observaties wijken alleen af in oriëntatie en zijn verder gelijk.

De twee-dimensionale pixelcoördinaten worden dan gegeven door:

$$X_i = s \cdot f \cdot \frac{x_i}{z_i} \quad (4.4)$$

$$Y_i = s \cdot f \cdot \frac{y_i}{z_i} \quad (4.5)$$

Met f de brandpuntsafstand en s een schaalfactor die afhangt van de resolutie en de brandpuntsafstand. Voor de simulaties in dit onderzoek gelden de waarden in tabel 4.1.

Uit de stercatalogus wordt tevens de visuele magnitude van de sterren gehaald. De magnitude wordt omgezet in flux zodat het aantal fotonen wat op de sensor komt bepaald kan worden. De flux wordt gegeven door [38]:

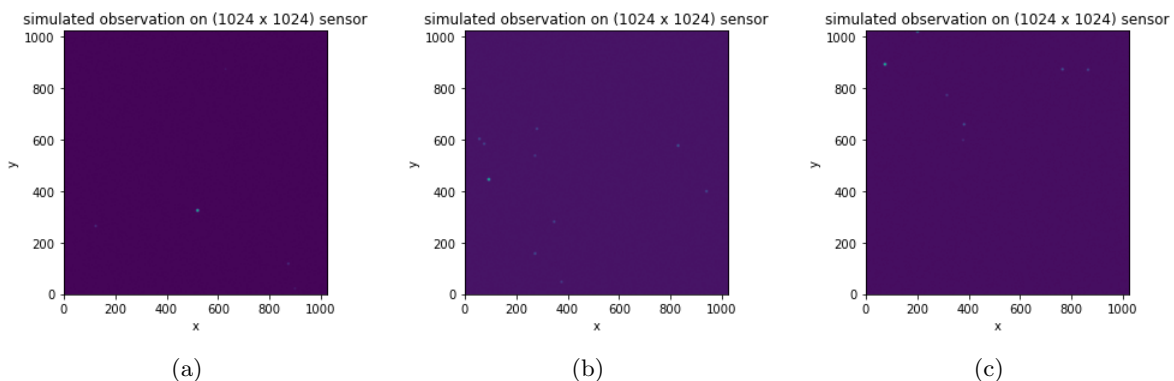
$$F_{star} = F_{ref} \cdot 10^{-M_v/f_p} \quad (4.6)$$

Hier is F_{star} de flux van de ster en F_{ref} een referentieflex ([39]), M_v is de visuele magnitude van de ster en f_p is de Pogson factor $\sqrt[5]{100}$. De flux wordt gegeven in fotonen $cm^{-2} s^{-1} \text{Å}^{-1}$. Het totaal aantal fotonen wordt gegeven door

$$\text{aantal fotonen} = F_{star} \cdot \pi r_a^2 \cdot \text{bandbreedte} \cdot \text{sluitertijd} \quad (4.7)$$

met r_a de radius van de apertuur.

Het signaal van de ster wordt verspreid over 3 pixels (de defocus) en volgt de twee-dimensionale gaussische verdeling uit vergelijking 3.1. Voorbeelden van gesimuleerde waarnemingen voor verschillende oriëntaties zijn te zien in figuur 4.1.



Figuur 4.1: Gesimuleerde observaties voor verschillende oriëntaties: (a) $\alpha_0 = 237.01$, $\delta_0 = -86.55$ en $\phi_0 = 237.68$; (b) $\alpha_0 = 260.51$, $\delta_0 = 71.95$ en $\phi_0 = 302.17$; (c) $\alpha_0 = 83.68$, $\delta_0 = -29.51$ en $\phi_0 = 93.86$

4.3 Centrumbepaling en identificatie

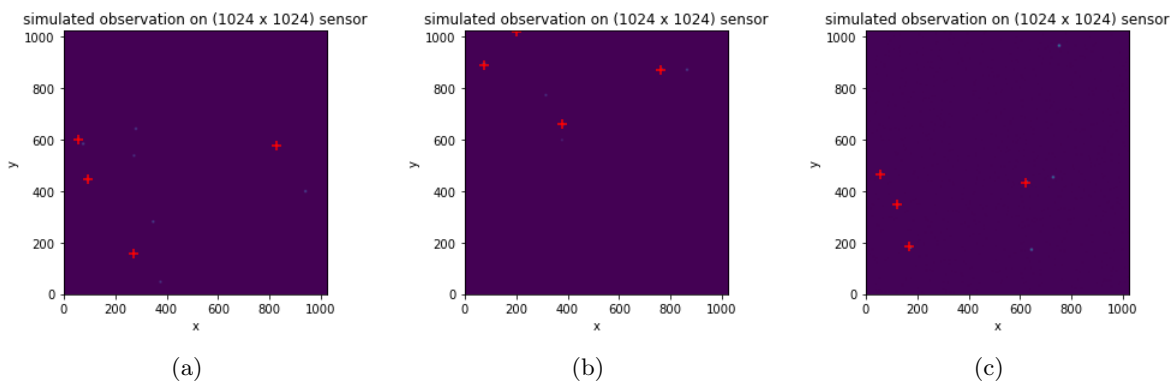
Zoals genoemd in 3.2.1 is de eerste stap in het proces van centrumbepaling de localisatie van mogelijke sterren. Eerst wordt er een detectiedrempel ingesteld om vals positieven te voorkomen. Deze drempel wordt bepaald aan de hand van:

$$T = \mu + 5\sigma \quad (4.8)$$

Hier zijn μ en σ het gemiddelde en de deviatie respectievelijk, en deze worden bepaald aan de hand van de hoeveelheid photondetecties per pixel. Zoals genoemd in 3.2.1 moeten de gebieden die boven deze detectiedrempel vallen ook uit meerdere pixels bestaan om als mogelijke ster gelabeld te worden. De minimale grootte is 5×5 pixels.

Er wordt in dit onderzoek gebruik gemaakt van *Photutils*, een *Astropy* package voor de detectie en fotometrie van astronomische bronnen ([40] [41]). Met *Photutils* worden de gevonden gebieden gefit met een 2-dimensionale gaussische functie en kunnen de centrumcoördinaten van de bron (de ster) worden bepaald.

In figuur 4.2 zijn de centra vier helderste sterren van de waarnemingen uit figuur 4.1 bepaald.



Figuur 4.2: De centrumbepaling van de 4 helderste sterren voor verschillende oriëntaties: (a) $\alpha_0 = 237.01$, $\delta_0 = -86.55$ en $\phi_0 = 237.68$; (b) $\alpha_0 = 260.51$, $\delta_0 = 71.95$ en $\phi_0 = 302.17$; (c) $\alpha_0 = 83.68$, $\delta_0 = -29.51$ en $\phi_0 = 93.86$

De gevonden coördinaten worden gebruikt om (zoals uitgelegd in sectie 3.3.1) de hoekafstanden tussen de sterren te bepalen en te vergelijken met de database. Alle mogelijke driehoeken worden bepaald en vergeleken. De identificatie database bestaat uit alle mogelijke hoekafstanden tussen de sterren uit de (gefilterde) stercatalogus. Dat houdt in dat er meer dan $26 \cdot 10^6$ paren in staan en voor iedere gevonden driehoek moeten alle hoeken worden gematcht. Daarom is er gekozen voor een centrumbepaling van slechts vier sterren om zo het aantal driehoeken te beperken.

4.4 Oriëntatie- en positiebepaling

In sectie 3.4 is toegelicht hoe de oriëntatie bepaald kan worden en in hoofdstuk 2 is te vinden hoe de positie gevonden wordt met behulp van de oriëntatiehoeken. Naast de oriëntatiehoeken moeten ook de precessie (R_P), nutatie (R_N), poolbeweging (R_M) en de rotatie van de aarde (R_S) worden bepaald.

De hoeken $\Delta\psi$, $\Delta\epsilon$, x_p en y_p zijn van 1 april 2021 en de waardes komen uit *Bulletin B* van het IERS [21]. Deze waardes variëren van dag tot dag, maar (met name de nutatiehoeken) zijn complex gedefinieerd en er is hier daarom gekozen om een vaste waarde aan te nemen. Voor de tijd en de GAST hoek wordt gebruikt gemaakt van de *Astropy* package en voor de hoeken ζ , z , θ en ϵ_A wordt de *Kapteyn* package gebruikt [42].

Om te berekenen hoe ver de bepaalde positie afwijkt van de daadwerkelijke positie wordt er gebruik gemaakt van de Haversine formule.

$$d = 2R_e \arcsin \left(\sqrt{\sin^2 \left(\frac{\phi_2 - \phi_1}{2} \right) + \cos \phi_1 \cos \phi_2 \sin^2 \left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} \right)} \right) \quad (4.9)$$

Met R_e de radius van de aarde, 6371 km, en ϕ_i en λ_i de latitude en de longitude (van plaats 1 en 2) respectievelijk. Dit is slechts een schatting omdat de Haversine formule de afstand tussen twee punten op een bol berekent en de aarde is niet perfect bolvormig.

4.5 Signaal en achtergrond

Het aantal fotonen afkomstig van een bron, het signaal S , wordt gegeven door vergelijking 4.7. De achtergrond van een waarneming zijn de incidentele fotondetecties die niet bij het signaal van de ster horen. De achtergrond B wordt gegeven in fotonen per pixel en volgt een Poisson verdeling.

$$f(k; \lambda) = \frac{\lambda^k \exp^{-\lambda}}{k!} \quad (4.10)$$

Het gemiddelde achtergrondniveau ² λ wordt in de simulaties aangepast en zo kan de signaal-ruisverhouding worden beïnvloed.

De signaal-ruisverhouding (SNR) wordt gegeven door [43]:

$$SNR = \frac{S}{\sqrt{S + N}} \quad (4.11)$$

De signaal-ruisverhouding geeft aan hoe goed de kwaliteit van het signaal is (wat de kwaliteit van de opname is).

In dit project wordt gekeken naar de relatie tussen de signaal-ruisverhouding en de nauwkeurigheid van de centrubepaling en hoe dat invloed heeft op de positiebepaling. Er zijn simulaties gedaan met 100 achtergrondniveaus van gemiddeld 1500 tot gemiddeld 200000 extra fotondetecties per pixel.

²Mean background (BG) level

Hoofdstuk 5

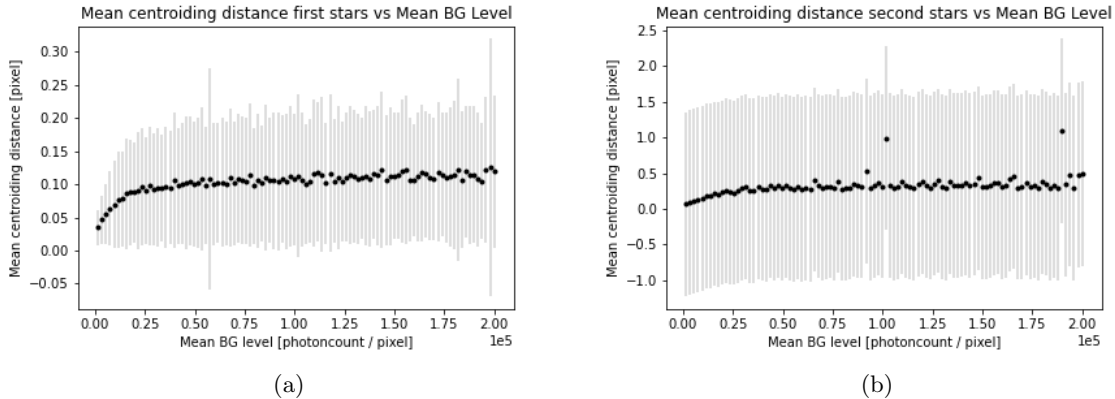
Resultaten

De resultaten zijn een collectie van 1000 waarnemingen met 100 verschillende achtergrondniveaus. De gegevens uit tabel 4.1 worden gebruikt om iedere observatie te genereren. Het verschil tussen de observaties is dus alleen de oriëntatie van de camera. Om te voorkomen dat twee sterren als één grote bron worden gelocaliseerd wordt er eerst gekeken of de sterren in de observatie ten minste tien pixels in zowel de X als de Y richting apart staan. Als de observatie aan deze volwaarde voldoet wordt de oriëntatie opgeslagen. Vervolgens wordt iedere observatie voor 100 verschillende achtergrondniveaus gesimuleerd en wordt gekeken of de centrumbepaling (en als gevolg de positiebepaling) lukt en hoe nauwkeurig deze is. Daarnaast wordt er gekeken naar de nauwkeurigheid van de positiebepaling.

Het is niet gelukt om een stabiele identificatie te maken met het driehoek algoritme. De identificatie lijkt sterk afhankelijk van de waarde van ϵ (vergelijking 3.7). Voor één specifieke waarneming is het gelukt om de identificatie te doen $\alpha = 249$, $\delta = -12$ en $\phi = 13$ met $\epsilon = 3 \cdot (5 \cdot 10^{-4})$. Met deze specifieke instellingen verloopt de identificatie accuraat en vindt de juiste sterren, maar wanneer de observatie details of de ϵ veranderen zijn er direct geen matches of veel te veel. Het betekent wel dat er in de rest van de simulaties wordt aangenomen dat de identificatie lukt wanneer de centrumbepaling slaagt. Er wordt nu een match gemaakt door de centrumbepalingen te vergelijken met de gegeven waarden van de sterren in het GV. De gevonden centra die het minst afwijken van de berekende centra worden gezien als een match en gebruikt voor verdere berekeningen. Ook betekent het dat de centrumbepaling van twee van de vier sterren verder niet gebruikt wordt in de positiebepaling aangezien het TRIAD algoritme gebruikt maakt van slechts twee plaatsvectoren. Daarom is gekozen om te werken met de twee sterren die de kleinste fout in de centrumbepaling hebben.

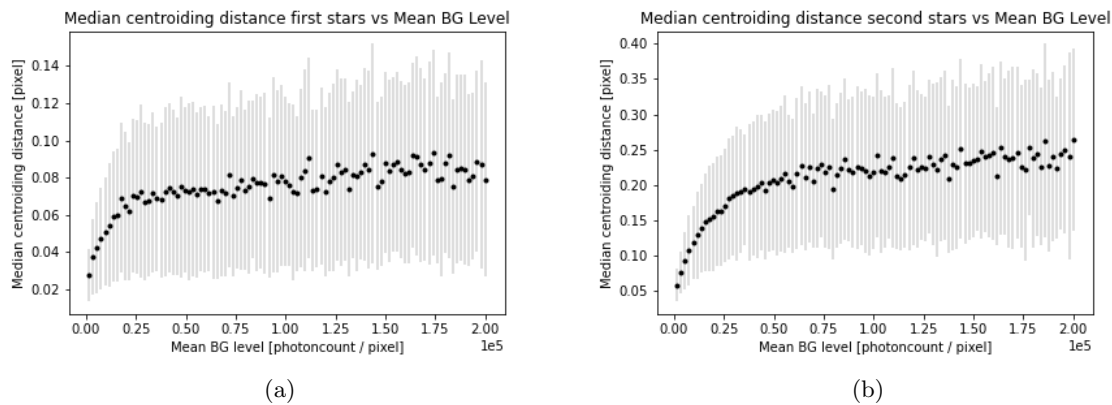
5.1 Centrumbeplating

Per observatie worden de coördinaten van de vier helderste sterren bepaald en vervolgens wordt gekeken hoe ver de coördinaten van het de daadwerkelijke het centrum affiggen. De twee sterren met de kleinste absolute fout in de centrumbepaling worden vervolgens gebruikt om de oriëntatie en daarna de positie te bepalen. De resultaten van de centrumbepaling, met verschillende achtergrondniveaus, van de twee meest nauwkeurige sterren zijn te vinden in figuur 5.1.



Figuur 5.1: In *a* de meest nauwkeurige sterren per observatie en in *b* de tweede meest nauwkeurige sterren.

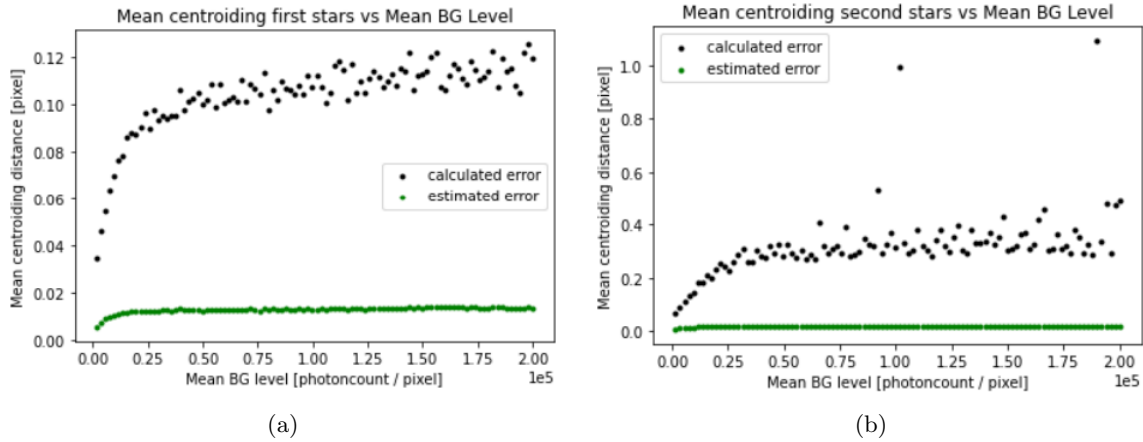
In beide collecties is de standaard deviatie relatief groot (gegeven door de lichtgrijze foutbalken). Voor de set van de tweede sterren geldt dat de standaard deviatie voor bepaalde achtergrondniveaus zodanig groot was dat de individuele punten niet meer waar te nemen waren. Er is dan ook gekozen om de standaard deviatie van de hele set (1.292 pixels) te gebruiken. De figuur met de standaard deviatie per achtergrondniveau is te vinden in Bijlage A (hier zijn ook de figuren *zonder* foutbalken te vinden). Over de gehele sets is de gemiddelde fout voor de eerste sterren 0.09603 ± 0.09397 pixels en voor de tweede sterren 0.28269 ± 1.29296 pixels. De standaard deviatie is in beide gevallen groter dan de fouten en wordt waarschijnlijk flink verstoord door enkele uitschieters. Om de uitschieters minder zwaar te laten tellen kan gekeken worden naar de mediaan van de centrubepalingen in figuur 5.2.



Figuur 5.2: In *a* de meest nauwkeurige sterren per observatie en in *b* de tweede meest nauwkeurige sterren.

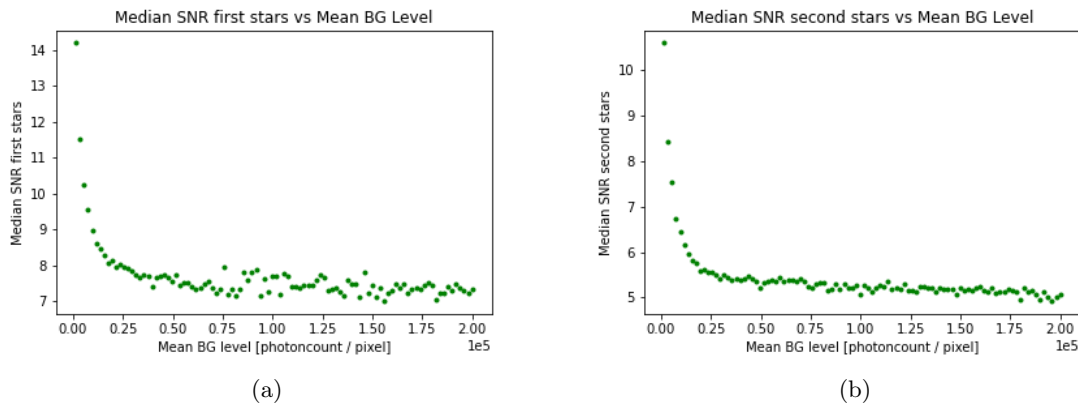
De mediaan van de centrubepalingen van de eerste sterren is 0.06771 pixels met een mediaan van de absolute afwijking (MAD)¹ van 0.04162 pixels en voor de tweede sterren een mediaan van 0.18057 pixels en een MAD van 0.09539 pixels. De waarden voor de standaard deviatie en de mediaan van de absolute afwijking zijn significant anders en dit is aanleiding om in hoofdstuk 5.3 te onderzoeken of er een duidelijk aanwijsbare reden is voor bepaalde uitschieters. In figuur 5.3 is wederom de gemiddelde fout van de centrubepaling uitgezet met ditmaal de verwachte fout, o.b.v. vergelijking 3.4 in dezelfde plot. De verwachte fout ligt een stuk lager dan de waargenomen fout, de lijn lijkt haast vlak in vergelijking met de gevonden waarden. In combinatie met de standaard deviatie en MAD die beiden ook een waarde hebben van dezelfde orde grootte als de fout lijkt de gebruikte methode voor de centrubepaling ondermaats te presteren.

¹Median Absolute Deviation



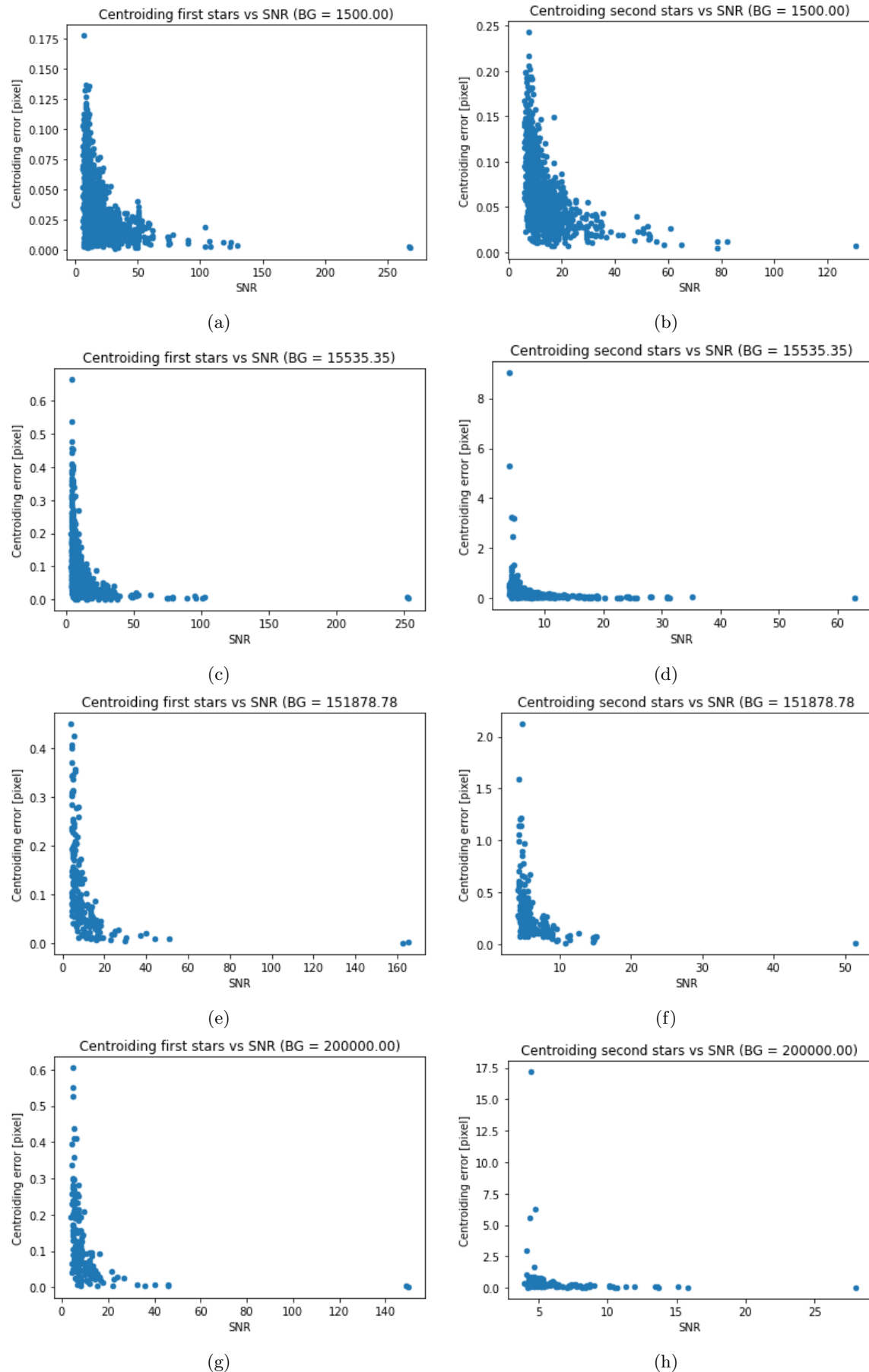
Figuur 5.3: In *a* de meest nauwkeurige sterren per observatie en in *b* de tweede meest nauwkeurige sterren met in het groen de verwachte fout o.b.v. de halfwaardebreedte en de signaal-ruisverhouding.

Per observatie wordt de centrumbepaling en SNR van deze twee nauwkeurigst bepaalde sterren opgeslagen. Er is gekozen om met de mediaan van SNR te werken om het verloop van de SNR te onderzoeken voor verschillende achtergrondniveaus. Wanneer het verloop van de mediaan van de SNR wordt uitgezet tegen de achtergrondniveaus (figuur 5.4) is te zien dat de meest nauwkeurige sterren ook de sterren lijkt te bevatten met de hogere SNR, iets wat ook in de verwachting ligt (o.b.v. vergelijking 3.4). Daarnaast is te zien dat voor beide collecties de SNR afneemt met een toename in het achtergrondniveau.



Figuur 5.4: a) Mediaan van de SNR van de eerste sterren, b) mediaan van de SNR van de tweede sterren

In figuur 5.5 zijn de afwijkingen in de centrumbepaling van deze sterren uitgezet tegen de SNR. Deze resultaten zijn voor de collectie sterren met gemiddelde achtergrondniveaus van 1500.00, 15, 535.35, 151, 878.78 en 200,000.00 extra fotondetecties. Ook hier is te zien dat de collectie van de eerste sterren de sterren lijkt te omvatten met de hogere SNR. Daarnaast is te zien dat in de collectie van tweede sterren meer sterren consequent minder nauwkeurig worden bepaald dan de eerste sterren. Dit is ook wat er verwacht wordt wanneer de SNR standaard lager ligt. Een eventuele andere reden (wanneer de SNR niet significant verschilt) zou kunnen zijn dat er sterren binnen een observatie relatief dicht bij elkaar liggen en er, ondanks de voorwaarde van 10 pixels afstand, toch een minder duidelijke localisatie plaatsvindt waardoor de fit ook meer afwijkt.



Figuur 5.5: Fout in de centrubepaling als functie van SNR. Figuur *a*, *c*, *e* en *g* voor de meest nauwkeurige sterren, figuur *b*, *d*, *f* en *h* voor de tweede meest nauwkeurige sterren.

Ook hier is in beiden collecties te zien dat er enkele uitschieters zijn. In de collectie van de eerste sterren zijn er een paar sterren met een zeer hoge SNR en in de tweede collectie lijkt er een aantal sterren die consequent minder nauwkeurig gefit worden.

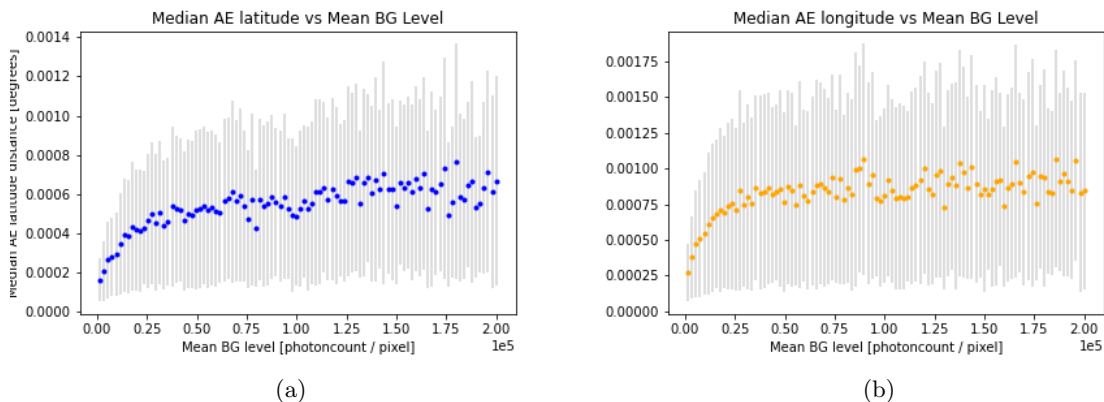
Als de localisatie, en dus de centrubepaling onsuccesvol is dan kan dat betekenen dat er voor een observatie minder dan de benodigde twee sterren gevonden worden. Met slechts één ster is er geen oriëntatiebepaling mogelijk en de observaties met minder dan twee resultaten voor de localisatie worden dan ook genoteerd als een onsuccesvolle oriëntatiebepaling. In tabel 5.1 is te zien hoe het aantal onsuccesvolle oriëntatiebepalingen voor 1000 observaties toeneemt met een toename in het achtergrondniveau en wat de minimale en maximale waarden zijn voor de SNR. Achtergrondniveau 200000 is het hoogste achtergrondniveau van deze simulaties en de minimale waarde voor de SNR voor dit achtergrondniveau is 3.72. Het lijkt er ook sterk op dat de ster niet meer gelocaliseerd wordt voor een SNR lager dan deze minimale waarde. Hoogstwaarschijnlijk komt dit omdat de ster niet meer aan de 'drempelconditie' voldoet en er niet 5×5 pixels boven deze drempelwaarde uitkomen. Dit zorgt er ook voor dat de ster wordt weggegooid voordat de centrubepaling nog meer afwijkt ($\sigma_c > 1.5$ pixels).

Achtergrondniveau [fotonen/pixel]	Onsuccesvolle oriëntatiebepalingen	Min. SNR	Max. SNR
1500.00	0	5.74	267.85
17540.40	102	3.90	255.98
27565.65	249	3.90	240.11
39595.96	382	3.95	225.68
51626.26	501	3.95	215.55
75686.87	627	3.95	197.00
99747.47	695	3.97	185.70
135838.38	775	4.04	169.45
165914.14	800	3.98	161.99
200000.00	839	3.72	149.79

Tabel 5.1: Weergave van 10 verschillende achtergrondniveaus en de hoeveelheid onsuccesvolle oriëntatiebepalingen voor de set met 1000 observaties.

5.2 Positiebepaling

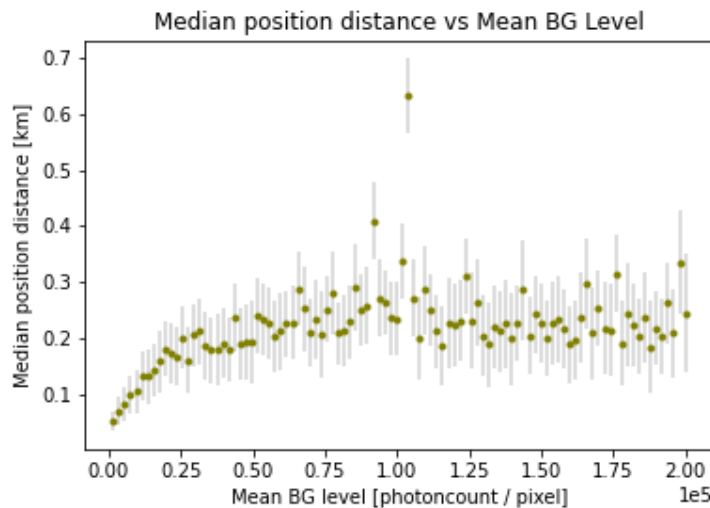
De centrubepalingen zijn de input voor het TRIAD algoritme (zie hoofdstuk 3.4) en vanuit de oriëntatie worden de longitude en latitude bepaald. Deze waarden worden vergeleken met de berekende waarden voor de longitude en de latitude en de absolute fout wordt vervolgens bepaald. De resultaten voor de mediaan van de absolute fout per achtergrondniveau voor de longitude en latitude is weergegeven in 5.6.



Figuur 5.6: a) Mediaan van de absolute fout van de latitude, b) mediaan van de absolute fout van de longitude

De mediaan van de absolute fout in de latitude is systematisch lager dan de mediaan van de absolute fout in de longitude. Dit is lastig te verklaren, maar het verschil zou wellicht te maken kunnen hebben met hoe longitude en latitude gedefinieerd zijn. Voor de longitude geldt immers dat de afstand tussen de longitudebogen op de evenaar verder uit elkaar liggen dan op een hogere (of lagere) latitude. Dit geldt minder voor de latitude waar afstand tussen de bogen minder varieert. De verhouding voor de fouten van alle latitudes en longitudes van alle observaties voor alle achtergrondniveaus is ongeveer $\frac{\pi}{2}$.

Met de gevonden latitude en longitude wordt de fout in positie berekend met behulp van de Haversine vergelijking (4.9). De mediaan van de fout in de positie voor de achtergrondniveaus is gegeven in figuur 5.7 en is isotroop. De gemiddelde mediaan van alle positiebepalingen (voor alle achtergrondniveaus) is 0.2217km met een MAD van 0.0671km. Een nauwkeurigheid van rond de 200 meter is ~ 40 keer slechter dan de huidige nauwkeurigheid van GPS op een gemiddelde smartphone ([4]).



Figuur 5.7: De fout in de positie als functie van de achtergrondniveaus.

5.3 Uitschieters

Voor de resultaten is gewerkt met de mediaan van de verschillende parameters (SNR, latitude, longitude, positie), omdat er bij de collecties een paar zeer heldere sterren tussen zitten die de SNR flink omhoog halen. Daarnaast ook omdat er bij het laagste achtergrondniveau al een handvol sterren zijn met een afwijkende nauwkeurigheid in de centrubepaling. Er is gekeken naar de latitude en de longitude² van de centrubepalingen slechter dan 5 pixels en ook naar de positiebepalingen boven 1 km, maar hier is geen verband tussen gevonden. Dit houdt wel in dat de fouten in het proces van de localisatie en centrubepaling zitten en dus niet te voorspellen zijn.

²Het leek aannemelijk dat een positie op de pool snel voor grote fouten in de longitude kan zorgen.

Hoofdstuk 6

Conclusie

Het doel van dit project was om de mogelijkheden van sterrennavigatie te onderzoeken en te kijken hoe een positiebepaling afhangt van de signaal-ruisverhouding. Om van een astronomische observatie naar een positiebepaling te gaan zijn moeten meerdere stappen worden doorlopen. Er wordt eerst gekeken welke mogelijke sterren op de afbeelding te vinden zijn alvorens deze mogelijke sterren met een twee-dimensionale Gaussische functie te fitten. Uit deze fit volgt een centrumbepaling die gebruikt wordt om de hoekafstand tussen de sterren te bepalen. Met het driehoek algoritme zouden de sterren dan geïdentificeerd kunnen worden, waarna het TRIAD algoritme wordt toegepast om de oriëntatie van de sensor te bepalen. Naast de oriëntatie van de sensor moet ook de inclinatie van de sensor bekend zijn en is er een nauwkeurige tijdmeting nodig. De tijdmeting wordt gebruikt om de rotatie-, nutatie- en precessiematrix van de aarde te bepalen. Daarnaast moet er ook gecompenseerd worden voor de poolbewegingen. Wanneer deze gegevens bekend zijn kan de positie van de waarnemer bepaald worden.

Om te onderzoeken wat het effect is van de signaal-ruisverhouding op de positiebepaling van een astronomische observatie zijn er meerdere simulaties gedaan met verschillende achtergrondniveaus. Van deze observaties worden de vier helderste sterren gelocaliseerd en het centrum bepaald. Er is gekozen voor vier sterren om het proces van identificatie te versimpelen, desondanks bleek de identificatie van de sterren in de observaties niet stabiel genoeg en is er besloten om deze stap achterwege te laten. In plaats daarvan zijn de sterren geïdentificeerd door de centra van de sterren in het GV te vergelijken met de bepaalde centra van de vier bronnen. De kleinste fout in centrumbepaling werd als match erkend. Dit zorgt er wel voor dat de kans op een verkeerde identificatie flink werd verkleind en er ook altijd een succesvolle identificatie is wanneer er een centrumbepaling is gedaan. Vervolgens werden de twee sterren met de meest nauwkeurige centrumbepaling opgeslagen en gebruikt voor het bepalen van de positie.

De gemiddelde absolute fout in de centrumbepaling wijkt niet significant af voor verschillende achtergrondniveaus en is gemiddeld 0.09603 ± 0.09397 pixels voor de eerste sterren en 0.28269 ± 1.29296 pixels voor de tweede sterren. De standaard deviatie is in beide gevallen groter dan de fout zelf en wordt verstoord door de uitschieters. De mediaan van de fout in de centrumbepaling voor de eerste sterren is 0.06771 ± 0.04162 (MAD) en voor de tweede sterren 0.18057 ± 0.09539 (MAD) pixels. Wanneer de standaard deviatie wordt vergeleken met de verwachte fout in de centrumbepaling dan ligt deze een flink stuk lager dan de gevonden fout. Dit zou betekenen dat de centrumbepaling hier ondermaats presteert ondanks de sub-pixel nauwkeurigheid. Dit kan waarschijnlijk (deels) verklaard worden door de eis van de localisatie voor een mogelijke ster. Er moet een gebied van 5×5 pixels boven de detectiedrempel liggen zodat vals positieven worden voorkomen, maar zo wordt de input van centrumbepaling wel beïnvloed. Als gekeken wordt naar de centrumbepaling als functie van de SNR dan is te zien dat de fout van de centrumbepaling groter wordt. De laagste waarde voor de SNR waar nog een centrumbepaling van is gelukt is 3.72.

Uit de centrumbepaling worden de plaatsvectoren in het sensorsysteem bepaald en worden de plaatsvectoren van de matches in het astronomisch systeem bepaald. Vanuit de oriëntatiematrix worden de oriëntatiehoeken bepaald en deze worden gebruikt om de uiteindelijk positie te bepalen. De positie wordt bepaald met behulp van de rotatiematrix die de nutatie, precessie, poolbewegingen en de rotatie van de aarde beschrijven. In deze stap moet ook de rotatiematrix aan de hand van de input van een inclinometer worden meegenomen, maar de matrix is in dit onderzoek een eenheidsmatrix.

De longitude en latitude worden bepaald uit de resulterende matrix en hieruit blijkt de gemiddelde absolute fout van de latitude blijkt systematisch lager dan de gemiddelde absolute fout in de longitude. De verhouding tussen de fout in latitude en de longitude is ongeveer $\frac{\pi}{2}$. Er is hier verder geen duidelijke reden voor, maar het vermoeden is dat dit ontstaat door het verschil in afstand tussen de longitudebogen. Met behulp van de Haversine formule wordt de afstand tussen de gevonden longitude en latitude en de daadwerkelijke longitude en latitude bepaald. De mediaan van de fout in de posities die vervolgens worden bepaald ligt op 0.2217 ± 0.0671 (MAD) voor de verschillende achtergrondniveaus. Deze nauwkeurigheid is ~ 40 keer slechter dan de nauwkeurigheid van GPS. Daarnaast houdt deze waarde geen rekening met het feit dat de aarde een ellipsoïde is en zijn de andere parameters (de tijdwaarneming, de rotatiematrix van de aarde) 'ideaal' en zullen hier in realiteit nog andere onzekerheden bijkomen. De positiebepaling uit dit onderzoek zou vooral kunnen dienen als indicatie van waar de waarnemer zich bevindt en is niet nauwkeurig genoeg om als volwaardig vervanger van GPS te kunnen worden gezien.

In het kort komt het er op neer dat het mogelijk is om een grove positiebepaling te doen aan de hand van een astronomische waarneming wanneer de oriëntatie bepaald kan worden, de inclinatie bekend is en er een tijdmeting wordt gedaan. Als de localisatie lukt dan zijn de centrubepaling en de positiebepaling voor alle achtergrondniveaus ongeveer even nauwkeurig. De signaal-ruisverhouding heeft invloed op de localisatie en wanneer deze te laag is wordt de bron niet als zodanig herkend en is er geen positiebepaling mogelijk.

Er zijn meerdere punten naar voren gekomen waar verder onderzoek voor nodig is of waar nog geoptimaliseerd kan worden. Een uitgebreide omschrijving van deze punten wordt gegeven in het afsluitende hoofdstuk.

Hoofdstuk 7

Verdere vooruitzichten

Deze resultaten zijn verkregen uit een ideale simulatie omgeving en kunnen inzicht geven in het proces van een positiebepaling aan de hand van een astronomische observatie. Tijdens het werken aan dit project zijn er wel meerdere zaken naar voren gekomen die verbeterd of veranderd zouden kunnen worden en ook zijn aannames gemaakt die niet altijd realistisch zijn (denk hierbij aan de inclinatie of de bolling van de aarde die niet zijn meegenomen). De resultaten uit dit onderzoek moeten dan ook vooral gezien worden als een startpunt voor verder onderzoek. In dit hoofdstuk worden mogelijke aanpassingen en toevoegingen besproken.

7.1 Alternatieve algoritmes voor centrubepaling en identificatie

Er is hier gekozen voor het een centrubepaling op basis van een fit van de twee-dimensionale gaussische functie zoals omschreven in [27]. In hoofdstuk 3.2.1 worden de twee groepen algoritmes al benoemd; de grijsschaal en de fitting algoritmes. De grijsschaalmethode is ook al kort toegelicht, maar verder niet onderzocht. In [44] en [45] wordt met de grijsschaalmethode gewerkt en wordt aangetoond dat deze methode ook nauwkeurig kan zijn en wellicht sneller is. Daarnaast zijn er ook meerdere fitting methodes en al is de 2-dimensionale gaussische functie in theorie wel de meest nauwkeurige het is ook een tijdsintensieve methode omdat de het een iteratieve aanpak is. Ook binnen de fitting methodes zijn er meer mogelijkheden om het proces te versnellen ([29], [27]) voor het doel van dit onderzoek was een snelle centrubepaling minder belangrijk, maar voor een (real-time) navigatie applicatie zou de centrubepaling een stuk sneller moeten.

De centrubepaling is in dit onderzoek wel stabiel gebleken¹, maar voor de identificatie gold dat (nog) niet. De identificatie is wel een noodzakelijke stap in het proces en het is dan ook belangrijk dat ook dit proces snel en nauwkeurig kan gebeuren. Met het zicht op de tijd is er nu niet voor gekozen om de focus te leggen op het stabiliseren van de identificatie. Het driehoek algoritme uit [12] is de basis voor veel algoritmes, maar de methode zoals beschreven in 3.3.1 is tijdrovend en vraagt veel aandacht voor de bepaling van de waarde voor ϵ . In plaats daarvan kan er gekeken worden naar algoritmes die hier op gebaseerd zijn zoals de *Pyramid Star Identification Technique* ([32]) of de *Planar Triangle* methode. Er kan ook worden gekozen voor methodes die gebruik maken van sterpatronen zoals [34] of [46].

7.2 Toevoegen van (realistische) externe factoren

Er zijn een aantal zaken vereenvoudigd om zo te kunnen onderzoeken hoe de ruis invloed heeft op de centrubepaling, maar ook om in kaart te brengen hoe het proces van \mathbf{A} naar \mathbf{B} precies verloopt. De vereenvoudigingen worden hieronder samengevat.

De rotatiematrices van de aarde zijn complex en met name de nutatiereeks is ingewikkeld te vinden en uit te rekenen, maar zijn wel belangrijk voor een nauwkeurige positiebepaling. Deze matrices zouden

¹Er valt theoretisch wel te verbeteren op de nauwkeurigheid

nauwkeuriger bepaald kunnen worden. Ook de tijdmeting is hiervoor belangrijk en er kan dan gebruik worden gemaakt van een precisieklok.

De inclinometer is niet meegenomen in dit onderzoek. Er is aangenomen dat de boresight van de camera altijd loodrecht staat (richting zenith) zodat deze matrix een eenheidsmatrix is. De toevoeging van de inclinometer zorgt ook voor meer onzekerheid in de positiebepaling [16].

De kwantum efficiëntie van de sensor (bv. een CCD) is ook niet meegenomen. Het signaal van een bron wordt in de simulatie omgezet in het aantal fotonen dat wordt gedetecteerd, maar in werkelijkheid worden deze fotonen omgezet in elektronen. Niet alle fotonen die binnenkomen worden omgezet in elektronen en hier gaat dus een deel van het signaal verloren [47].

De ruis die wordt toegevoegd is maar één soort (Gaussische) ruis. Om een beter beeld te krijgen zal er gekeken moeten worden naar alle soorten ruis die relevant zijn voor een dergelijke astronomische observatie (bijvoorbeeld atmosferische ruis).

De bolling van de aarde wordt niet meegenomen in de Haversine formule. Dat houdt in dat de bepaling van de fout in de positiebepaling op zichzelf al niet 100% nauwkeurig is. Hier moet dus nog voor gecompenseerd worden.

De localisatie van de bronnen is nog niet geoptimaliseerd voor sterren die dicht bij elkaar staan en er is hier ook gewerkt met observaties die dat vermijden. In werkelijkheid is dit natuurlijk wel het geval en het moet ook mogelijk zijn om dergelijke situaties ook een onderscheid te kunnen maken tussen deze bronnen of ze uit te sluiten als dit niet mogelijk is.

Naast al deze factoren is het ook interessant om te kijken naar dynamische oriëntatiebepalingen ([35], [48], [49]) zodat de een eventuele navigatie applicatie niet alleen in stilstand gebruikt kan worden. Ook zou eventueel gekeken kunnen worden naar het doen van waarnemingen in een ander spectrum dan het visuele spectrum bijvoorbeeld in infrarood.

Verder kan er nog gedacht worden aan positioneren gedurende de dag met behulp van de zon. Ook is het belangrijk om te onderzoeken wat de effecten zijn van dynamische bronnen zoals satellieten en planeten op de identificatie van sterren.

Bibliografie

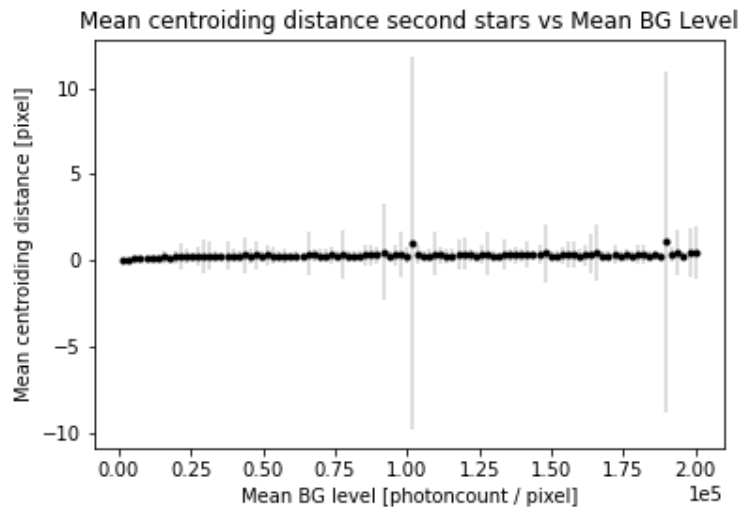
- [1] P. Seidelmann and C. Hohenkerk, *The History of Celestial Navigation Rise of the Royal Observatory and Nautical Almanacs: Rise of the Royal Observatory and Nautical Almanacs* (Springer International Publishing, 2020), ISBN 978-3-030-43630-8.
- [2] *What is GNSS?*, <https://www.gsa.europa.eu/european-gnss/what-gnss>, accessed: februari 2021.
- [3] A. Rügamer and D. Kowalewski, International Federation of Surveyors Working Week: From the Wisdom of the Ages to the Challenges of the Modern World **1**, 1 (2015).
- [4] *Gps accuracy*, <https://www.gps.gov/systems/gps/performance/accuracy/>, accessed: May 26th 2021.
- [5] D. A. Grejner-Brzezinska, C. K. Toth, T. Moore, J. F. Raquet, M. M. Miller, and A. Kealy, Proceedings of the IEEE **104**, 1339 (2016).
- [6] P. Papadimitratos and A. Jovanovic, in *2008 IEEE International Workshop on Satellite and Space Communications* (2008), pp. 167–171.
- [7] Y. Hu, S. Bian, B. Li, and L. Zhou, IEEE Sensors Journal **18**, 2952 (2018).
- [8] Farid Gul and Fang Jiancheng, in *Proceedings of the IEEE Symposium on Emerging Technologies, 2005.* (2005), pp. 7–12.
- [9] J. A. Van Allen, American Journal of Physics **72**, 1418 (2004), <https://doi.org/10.1119/1.1778391>, URL <https://doi.org/10.1119/1.1778391>.
- [10] K. A. Zischka, *Astronavigation: A Method for Determining Exact Position by the Stars* (Springer, 2018), ISBN 9783319479934.
- [11] R. E. Farley, *Celestial Navigation in a Teacup* (Teacup Navigation Publishing, 2014), ISBN 9781105364372.
- [12] G. Zhang, *Star Identification* (Springer, 2017), ISBN 9783662537817.
- [13] W. Quan, J. Li, X. Gong, and J. Fang, *INS/CNS/GNSS integrated navigation technology* (Springer, 2015), ISBN 9783662451595.
- [14] R. Marbel, B. Ben-Moshe, and R. Yozevitch, Sensors **20**, 1106 (2020).
- [15] M. Izadmehr and M. K. Ghomi, Astrophysics and Space Science volume **364**, 75 (2019).
- [16] X. Wei, C. Cui, G. Wang, and X. Wan, Measurement **131**, 132 (2019), ISSN 0263-2241, URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263224118308005>.
- [17] G. Xu and J. Xu, *Orbits* (Springer, 2013), ISBN 978-3-642-32793-3.
- [18] <https://solarsystem.nasa.gov/basics/chapter2-2/>, accessed: April 27, 2021.
- [19] M. Soffel and R. Langhans, *Space-Time Reference Systems*, Astronomy and Astrophysics Library (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013, 2013), ISBN 978-3-642-30225-1.

-
- [20] B. Luzum and G. Petit, Proceedings of the International Astronomical Union **10**, 227–228 (2012).
- [21] *Earth orientation data*, <https://www.iers.org/IERS/EN/DataProducts/EarthOrientationData/eop.html;jsessionid=43741BF0B3668604B3A00E41E54D9BD7.live2>, accessed: April 29, 2021.
- [22] Z. Mu, J. Wang, X. He, Z. Wei, J. He, L. Zhang, Y. Lv, and D. He, Sensors **19**, 4127 (2019), ISSN 1424-8220, URL <http://dx.doi.org/10.3390/s19194127>.
- [23] J. Diebel, *Representing attitude: Euler angles, unit quaternions, and rotation vectors* (2006).
- [24] J. J. PARISH, A. S. PARISH, M. SWANZY, D. WOODBURY, D. MORTARI, and J. L. JUNKINS, NAVIGATION **57**, 1 (2010), <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/j.2161-4296.2010.tb01763.x>, URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/j.2161-4296.2010.tb01763.x>.
- [25] C. C. Liebe, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems **38**, 587 (2002), ISSN 00189251, URL <https://ieeexplore.ieee.org/document/1008988>.
- [26] Y. Ni, D. Dai, W. Tan, X. Wang, and S. Qin, Opt. Express **27**, 15548 (2019), URL <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-27-11-15548>.
- [27] T. Delabie, J. Schutter, and B. Vandebussche, The Journal of the Astronautical Sciences **61**, 60 (2014), URL <http://dx.doi.org/10.1007>.
- [28] R. C. Stone, The Astronomical Journal **97**, 1227 (1989).
- [29] X. Wan, G. Wang, X. Wei, J. Li, and G. Zhang, Sensors (Basel, Switzerland) **18** (2018).
- [30] F. Sanson and C. Frueh, Advances in Space Research **63**, 2436 (2019), ISSN 0273-1177, URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0273117719300067>.
- [31] B. B. Spratling and D. Mortari, Algorithms **2**, 93 (2009), ISSN 1999-4893, URL <https://www.mdpi.com/1999-4893/2/1/93>.
- [32] D. MORTARI, M. A. SAMAAN, C. BRUCCOLERI, and J. L. JUNKINS, NAVIGATION **51**, 171 (2004), <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/j.2161-4296.2004.tb00349.x>, URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/j.2161-4296.2004.tb00349.x>.
- [33] C. Cole and J. Crassidis, Journal of Guidance Control and Dynamics **29**, 64 (2006).
- [34] C. Padgett and K. Kreutz-Delgado, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems **33**, 202 (1997).
- [35] L. Markley and J. Crassidis, *Fundamentals of Spacecraft Attitude Determination and Control* (Springer, 2014), ISBN ISBN: 978-1-4939-0802-8.
- [36] *Sao - smithsonian astrophysical observatory star catalog*, <https://heasarc.gsfc.nasa.gov/W3Browse/star-catalog/sao.html>, accessed: May 10, 2021.
- [37] *SAO Star Catalog J2000 : I/131A*, <https://cdsarc.unistra.fr/viz-bin/cat/I/131A>, accessed: november 2020.
- [38] M. L. Kutner, *Astronomy: A Physical Perspective* (Cambridge University Press, 2003), 2nd ed.
- [39] P. Martini, *Useful astronomical data*, <http://www.astronomy.ohio-state.edu/~martini/usefuldata.html>, accessed: May 14, 2021.
- [40] Astropy Collaboration, A. M. Price-Whelan, B. M. Sipőcz, H. M. Günther, P. L. Lim, S. M. Crawford, S. Conseil, D. L. Shupe, M. W. Craig, N. Dencheva, et al., The Astronomical Journal **156**, 123 (2018), 1801.02634.

-
- [41] L. Bradley, B. Sipőcz, T. Robitaille, E. Tollerud, Z. Vinícius, C. Deil, K. Barbary, T. J. Wilson, I. Busko, H. M. Günther, et al., *astropy/photutils: 1.0.1* (2020), URL <https://doi.org/10.5281/zenodo.4049061>.
- [42] M. G. R. Vogelaar, *Kapteyn package for python 3* (2019), URL <https://www.astro.rug.nl/software/kapteyn/index.html#>.
- [43] F. R. Chromey, *To Measure the Sky: An Introduction to Observational Astronomy* (Cambridge University Press, 2016), 2nd ed.
- [44] Y. He, H. Wang, L. Feng, S. You, J. Lu, and W. Jiang, *Optik* **194**, 162932 (2019), ISSN 0030-4026, URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0030402619308095>.
- [45] L. Luo, L. Xu, and H. Zhang, *IET Image Processing* **9** (2015).
- [46] H. Zhu, B. Liang, and T. Zhang, *Acta Astronautica* **148**, 327 (2018), ISSN 0094-5765, URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0094576517307658>.
- [47] M. Lesser, *Publications of the Astronomical Society of the Pacific* **127**, 1097 (2015), URL <https://doi.org/10.1086/684054>.
- [48] T. Sun, F. Xing, Z. You, and M. Wei, *Opt. Express* **21**, 20096 (2013), URL <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-21-17-20096>.
- [49] W. Zhang, W. Quan, and L. Guo, *Sensors (Basel, Switzerland)* **12**, 6712 (2012).

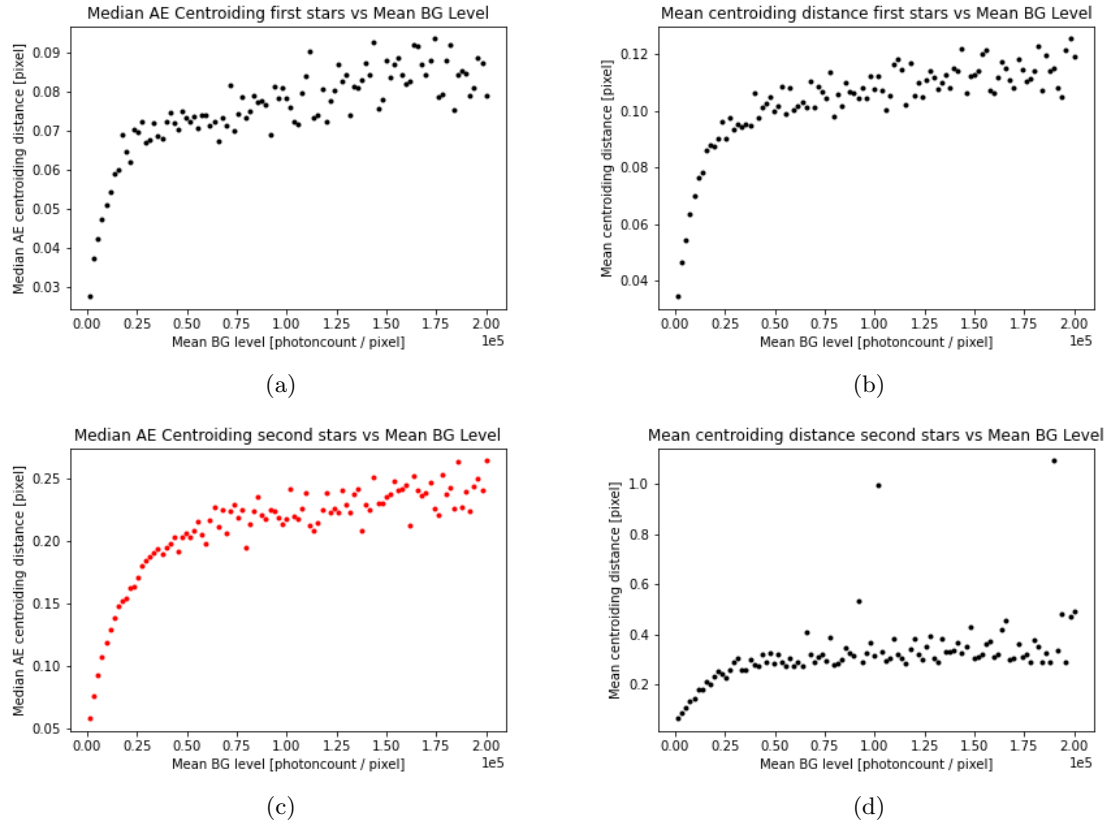
Bijlage A

Extra cijfers



Figuur A.1: De centrubepaling van de tweede sterren met de foutbalken van de standaard deviatie zoals gevonden per achtergrondniveau.

De mediaan en de mean van de centrubepalingen zonder foutbalken (deze zijn relatief groot waardoor de spreiding niet overal even goed te zien was):



Figuur A.2: a) en c) de mediaan van de absolute fout in de centrubepaling van de eerste en tweede sterren respectievelijk, b) en c) de gemiddelde absolute fout in de centrubepaling van wederom de eerste en tweede sterren.