



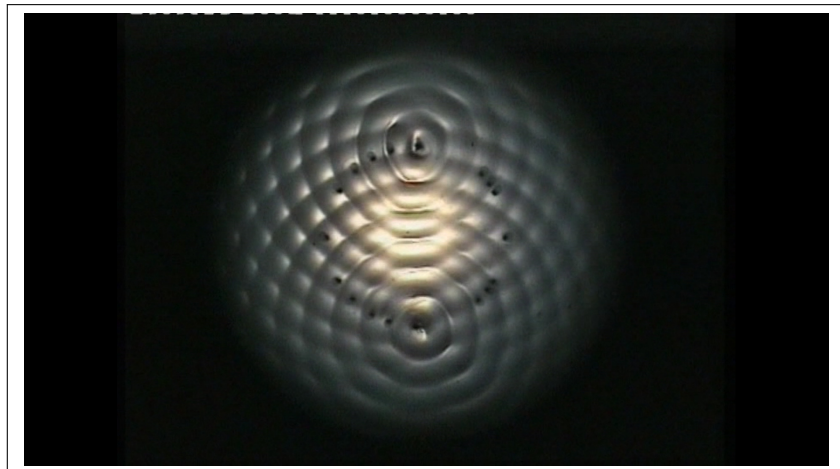
Universiteit Utrecht

Opleiding Natuur- en Sterrenkunde

Greense functies voor oppervlakte golven

BACHELOR ONDERZOEK

Casper de Pagter



Supervisor:

Dr. LEO MAAS

Instituut voor Marien en Atmosferisch onderzoek Utrecht

20-01-2021

Inhoudsopgave

1	Inleiding	2
2	Waarnemingen	3
3	Dispersierelaties	3
4	Meetwijze	4
5	Oplossing PDV	8
5.1	Oplossing homogene PDV	9
5.2	Oplossing inhomogene PDV	11
5.3	Uit fase	15
6	Oplossing met randvoorwaarden	16
6.1	Axisymmetrische forcering in een cylinder	16
6.2	Excentrische forcering in een cylinder	18
6.3	Behoud van massa en energie	21
7	Resonantie	25
7.1	Niet-gedempte harmonische oscillator	26
7.2	Aangedreven, niet-gedempte harmonische oscillator	26
7.3	Aangedreven, gedempte harmonische oscillator	29
7.4	Resonantie in een cylinder	33
8	Conclusie	34
9	Discussie	35

1 Inleiding

Paul de Kort[1], een beeldend kunstenaar, staat bekend om zijn landschappelijke kunstprojecten. Bij een aantal van zijn projecten komt een zekere fascinatie voor golven aan het licht. Zo heeft hij in een weiland tussen Hoofddorp en Schiphol een reeks heuvels zodanig geordend dat de laag reizende geluidsgolven van de opstijgende vliegtuigen worden gedempt. Hierbij is hij geïnspireerd door de 18e -eeuwse natuurkundige Ernst Chladni, die een onzichtbare grondtoon (laag frequent geluid) zichtbaar maakte. Chladni deed dit door een dun laagje zand op een vibrerende plaat te strooien, waarna in het zand een staand golfpatroon zichtbaar werd.

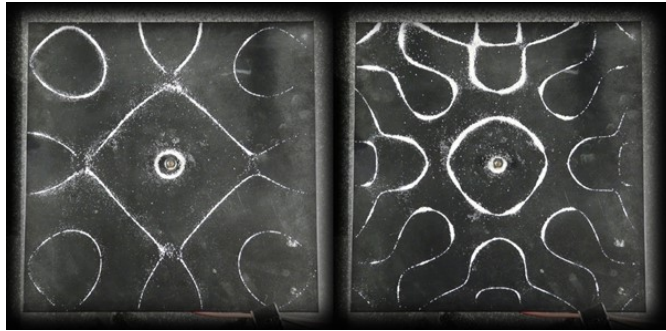


Figure 1: Twee verschillende grondtonen in een dun laagje zand.

Als een grondtoon zichtbaar kan worden gemaakt, kan ook een golfpatroon dat destructief interfereert met het laagfrequente geluid van de vliegtuigen zichtbaar worden gemaakt. Een dergelijk golfpatroon is zichtbaar gemaakt door de hierboven genoemde heuvels. Het kunstwerk leidt dus uiteindelijk tot uitdoving van vliegtuiggeluiden, waardoor bewoners van Hoofddorp minder geluidsoverlast ondervinden van Schiphol.

Een ander interessant project waar Paul de Kort golven bij betreft is een opname van watergolven die zijn geforceerd door oscillerende spijkers. Dit project heeft weliswaar een verminderde praktische toepassing, maar is zeker niet minder fascinerend. We zien in de opname een cilindrische holte die tot een zekere hoogte gevuld is met water, waarin vervolgens twee tot vijf spijkers oscilleren met een constante frequentie over een bepaald tijdsinterval. In opvolgende tijdsintervallen zien we de frequentie oplopen en voor een bepaalde frequentie is er een interessant fenomeen waar te nemen. Bij een bepaalde overgang van twee tijdsintervallen met verschillende frequenties zien we het weglappende golfpatroon veranderen in een staand golfpatroon. Daarbij is ook een sterke toename in amplitude waar te nemen. Dit roept vragen op als: ‘Waarom is het staande karakter van de golven te danken?’ en ‘Wat zorgt voor de sterke toename in amplitude in geval van een staand golfpatroon?’. In dit bachelor-onderzoek zullen we een antwoord proberen te vinden op deze vragen. We zullen beginnen met het bepalen van het soort golf. Daarna zullen we voor verschillende domeinen een theoretisch model opstellen en deze modellen animeren in Python in de hoop een staand golfpatroon waar te kunnen nemen.

2 Waarnemingen

Om erachter te komen welk theoretisch model het beste overeen komt met het systeem dat we beschouwen in de video, is het logischerwijs van belang de video in detail te analyseren. Dit kunnen we het beste doen door naar onderstaande afbeelding te kijken.

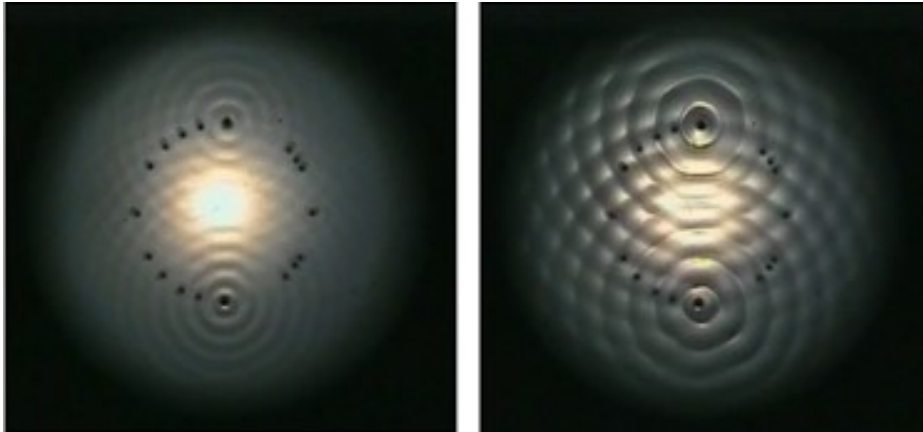


Figure 2: Het golfpatroon in de linker afbeelding heeft een weglopend karakter en het golfpatroon in de rechter afbeelding heeft een staand karakter.

Het systeem betreft een bak met water die tot zekere hoogte gevuld is met water. In figuur 2 zien we dat er geen duidelijke wand van de bak is waar te nemen. Waar deze wand zich bevindt is voor ons onduidelijk. Op de bodem is een cirkel van spijkers te zien die stuk voor stuk kunnen oscilleren. In de video zien we twee tot zes spijkers met verscheidene frequenties in fase oscilleren. De spijkers in de cirkel zijn zo gepositioneerd dat het mogelijk is regelmatige veelhoeken te maken. Drie oscillerende spijkers vormen een gelijkzijdige driehoek, vier spijkers vormen een vierkant, enzovoort. In dit onderzoek zullen we slechts kijken naar twee tegenoverstaande oscillerende spijkers. Deze twee spijkers zijn de oorzaak van de twee golfpatronen die we zien in bovenstaande afbeelding. Voor een bepaalde frequentie heeft het opgewekte golfpatroon een staand karakter. Voor de rest van de frequenties heeft het golfpatroon een weglopend karakter. De amplitude van de staande golven is significant groter dan die van de weglopende golven. In figuur 2 is dit te zien door een groter contrast in grijs tinten in de rechter afbeelding ten opzichte van de linker afbeelding. Bij een grotere amplitude is immers het dal dieper en de top hoger, waardoor het dal minder belicht zal zijn.

3 Dispersierelaties

Dispersie bij oppervlakte-watergolven omvat het fenomeen dat golven met verschillende golf lengtes een verschillende fasesnelheid hebben. Voor de fasesnelheid voor golven in het algemeen geldt: $c = \frac{\omega}{k}$, waarbij c de fasesnelheid is in m/s , ω de hoekfrequentie in rad/s en k het golfgetal in rad/m . Hieruit zien we dat de fasesnelheid een functie is van twee variabelen. Nu is het mogelijk om de hoekfrequentie als functie van het golfgetal

te schrijven, waardoor de fasesnelheid een functie van slechts het golfgetal wordt. Deze relaties worden dispersierelaties ($\omega(k)$) genoemd. Elk type oppervlakte golf vertoont ander gedrag en dit gedrag wordt beschreven door dispersierelaties. Dit is ook meteen de reden dat deze relaties relevant zijn voor dit onderzoek, aangezien we aan de hand van dispersierelaties kunnen herleiden welk type oppervlakte golf we waarnemen. Wanneer het type bekend is, kunnen we de afmetingen van het systeem herleiden, wat we in de volgende paragraaf zullen gaan zien.

De algemene dispersierelatie voor oppervlakte-watergolven is als volgt[6]:

$$\omega(k) = \sqrt{(gk)\tanh(kh) \left(1 + \frac{T}{\rho g} k^2\right)} \quad (1)$$

Hierbij is g de valversnelling in m/s^2 , h de waterdiepte in m , ρ de dichtheid in kg/m^3 en T de oppervlaktetension van water in N/m . Er zijn twee verschillende soorten oppervlakte-water golven: capillaire golven en zwaartekrachtgolven. Bij capillaire golven plant de golf zich voort aan de hand van oppervlaktetension-effecten. Bij zwaartekrachtgolven is dit logischerwijs te danken aan de zwaartekracht. Als we nu naar de term binnen de haken in vergelijking (1) kijken zien we dat we de oppervlaktetension-effecten van het medium (water) in acht moeten nemen indien $\frac{T}{\rho g} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \sim 1$. Hierbij gebruiken we de algemene definitie voor het golfgetal: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, waarbij λ de golflengte in m is. Dit komt overeen met: $\lambda \approx 1.73 \text{ cm}$. Wanneer de golflengte een aantal keer kleiner is dan deze waarde, zal, door de kwadratische term, de term $\frac{T}{\rho g} k^2$ domineren over 1. Hierdoor zullen slechts de oppervlaktetension-effecten relevant zijn en spreken we dus van capillaire golven. De bijbehorende dispersierelatie is als volgt[6];

$$\omega(k) = \sqrt{\frac{T}{\rho} k^3 \tanh(kh)} \quad (2)$$

Als de golflengte een aantal keer groter zal zijn dan 1.73 cm , zal $\frac{T}{\rho g} k^2$ verwaarloosbaar klein zijn ten opzichte van 1 en kunnen we stellen dat de zwaartekracht-effecten het gedrag van de golf zullen bepalen. We zullen dan spreken van zwaartekracht-golven, wiens dispersierelatie wordt gegeven door[6];

$$\omega(k) = \sqrt{(gk)\tanh(kh)} \quad (3)$$

4 Meetwijze

Zoals we in de vorige paragraaf hebben gezien, geven de dispersierelaties een verband tussen de hoekfrequentie en het golfgetal per type golf. Wanneer we de hoekfrequentie en het golfgetal per tijdsinterval kunnen achterhalen uit de video, kunnen we zien welke dispersierelatie het best overeenkomt met de data. Hieruit kunnen we het type golf vaststellen, wat een goede stap is in de richting van het beantwoorden van de onderzoeksvragen. Een tijdsinterval is overigens het interval waarbij een constante frequentie waar te nemen is. De hoekfrequentie is gedefiniëerd als $\omega = \frac{2\pi}{P}$, met P de periode in s . De periode is vastgesteld door het aantal oscillaties van de spijkers over een tijdsinterval

te tellen en dit te delen door de duur van het interval. Het golfgetal, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, heeft als eenheid de inverse van een lengte-eenheid, aangezien λ de golflengte is. De afmetingen van de opstelling zijn nog onbekend. Voor nu zullen we k dus moeten uitdrukken in een zelfgekozen lengte-eenheid. Hiervoor wordt de straal van de cirkel van puntbronnen genomen welke we R zullen noemen. De keuze hiervoor komt voort uit dat de posities van twee overstaande puntbronnen goed zichtbaar zijn in de video, waardoor we de diameter van de cirkel van puntbronnen accuraat kunnen vaststellen.

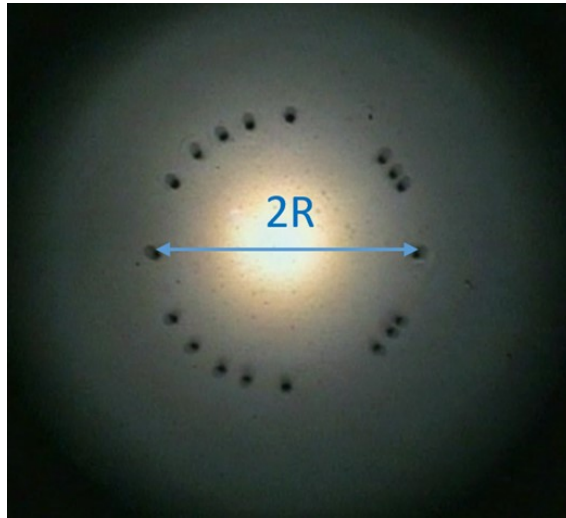


Figure 3: De blauwe pijl geeft de diameter van de cirkel van puntbronnen weer. Deze is gelijk aan twee maal de straal van de cirkel van puntbronnen (R).

Voor het bepalen van lengtes in afbeeldingen wordt het programma ImageJ gebruikt. Dit programma geeft de lengte in pixels, waardoor er een tussenstap gemaakt moet worden om de verkregen data in de gewenste eenheid (R) uit te drukken. De diameter van de cirkel van puntbronnen (figuur 3) bedraagt 428 pixels, wat leidt tot: $R = 214$ pixels. Ter bepaling van één golflengte is een screenshot genomen op een willekeurig moment binnen het betreffende tijdsinterval, welke vervolgens is geüpload in ImageJ. In figuur 4 kunnen we brede lichte en smalle donkere kringen onderscheiden. De golflengte is bepaald door in radiële richting een lijn te trekken tussen twee donkere kringen in ImageJ. Hierbij is er rekening gehouden met dat er slechts één van de twee donkere kringen mee wordt gemeten. Op deze manier wordt er één berg en één dal meegenomen in de meting, wat samen een golflengte bedraagt.



Figure 4: De rode pijlen geven een golflengte aan.

Voor een betrouwbaar resultaat per tijdsinterval is er, voor zowel het golfgetal als de hoekfrequentie, een gemiddelde genomen over acht metingen. Dit betekent dat er voor een tijdsinterval acht keer een periode is bepaald (waaruit een hoekfrequentie volgt). Voor het golfgetal betekent dit dat er in een screenshot acht keer een golflengte is bepaald. Voor het bepalen van een gemiddelde gebruiken we de volgende definitie;

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (4)$$

Hierbij is n het aantal metingen en x_i de i -de meting. De onzekerheid op de gemiddelden is als volgt bepaald;

$$\hat{\sigma}_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (5)$$

Nu dit bekend is kunnen we datapunten (inclusief onzekerheden) uitzetten in een diagram met de hoekfrequentie op de y-as en het golfgetal op de x-as (zie figuur 5). De hoekfrequentie en het golfgetal waarbij een staand golfpatroon en een groei in amplitude optreedt is 15.84 rad/s en 20.85 rad/R , respectievelijk. Interessant is om te zien dat naarmate het golfgetal toeneemt, de onzekerheid in het golfgetal ook toeneemt. De onzekerheid op alle golflengtes bedraagt een bepaald aantal pixels. De verhouding tussen dit aantal en het aantal pixels van een golflengte is logischerwijs groter voor een kleinere golflengte. Dit verklaart de grotere onzekerheid op een groter golfgetal, aangezien een groter golfgetal correspondeert met een kleinere golflengte.

We hebben in vorige paragraaf gezien dat een dispersierelatie per type golf de hoekfrequentie geeft als functie van het golfgetal ($\omega(k)$). Het diagram in figuur 5 is dus van de juiste vorm om dispersierelaties in te plotten. Om een "best-fit" door de datapunten heen te plotten wordt de 'Orthogonal Distance Regression'(ODR)-module in Python gebruikt. Deze module werkt als volgt; Er wordt een functie ingevoerd met daarin een paar onbekende parameters. Vervolgens geeft de module waarden, inclusief onzekerheden, aan deze parameters op een manier dat de meegegeven functie het beste door de datapunten loopt. In dit geval geven we de algemene dispersierelatie voor oppervlakte-watervolven (vergelijking (1)) en de dispersierelatie voor zwaartekrachtgolven (vergelijking (3)) mee

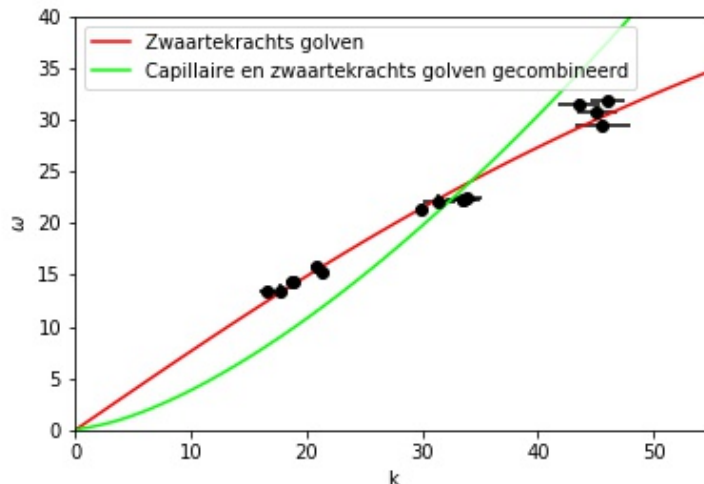


Figure 5: De blauwe pijl geeft een golflengte aan.

als functies. We nemen als oppervlaktespanning (T) die van water bij kamertemperatuur ($293K$): $T = 0.073N/m$), als dichtheid nemen we de dichtheid van water bij kamertemperatuur: $\rho = 997kg/m^3$. Tot slot nemen we voor de valversnelling: $g = 9.81m/s^2$. Voor beide dispersierelaties zal de waterdiepte (h) fungeren als onbekende parameter die door het programma zal worden bepaald. Zoals reeds is genoemd, is het golfgetal gedefinieerd in de verzonnen lengte-eenheid R . Echter zijn de constanten gedefinieerd in meters. Voor beide dispersierelaties heeft dit het volgende als gevolg: $[\omega^2] = [gk] = \frac{m}{s^2} \frac{1}{R} = \frac{1}{s^2} \frac{m}{R} = S \frac{1}{s^2}$. De schaalfactor ($S = \frac{1}{R}$) is hierbij de inverse van de dimensieloze R . Deze factor introduceren we, in de ODR-module, als tweede onbekende parameter om de hoekfrequentie in de gewenste eenheid ($[\omega^2] = \frac{1}{s^2}$) te krijgen. Deze schaalfactor wordt vervolgens gebruikt om de termen binnen de tangens-hyperbolicus functies dimensieloos te maken: $kh \rightarrow \frac{k}{S}h$. De term $\left(1 + \frac{T}{\rho g}k^2\right)$ in vergelijking (1) zal ook dimensieloos moeten worden: $\frac{T}{\rho g}k^2 \rightarrow \frac{T}{\rho g} \left(\frac{k}{S}\right)^2$.

In figuur 5 kunnen we duidelijk zien dat de dispersierelatie voor zwaartekrachts golven de beste "best-fit" geeft. Voor nu stellen we dat de zwaartekrachtseffecten domineren over de oppervlaktespanningseffecten, waardoor we spreken van zwaartekrachts-golven. Of deze aanname realistisch is zullen we zodadelijk zien. De parameters voor de zwaartekrachts-golven zijn: $h = 0.0602 \pm 0.003m$, $S = 2.63 \pm 0.03$. De diepte van de waterbak is dus $6 \pm 0.3 \text{ cm}$. De waarde voor R komt voort uit: $R = \frac{1}{S}$. De onzekerheid in R kunnen we herleiden uit de onzekerheid in S aan de hand van de differentieermethode[2]; $\sigma_R = \left|\frac{dR(S)}{dS}\right|\sigma_S = 0.05$. Voor de straal van de cirkel van puntbronnen geldt dan: $R = 38 \pm 5 \text{ cm}$. In figuur 3 is te zien dat de diameter van het grijze cilindrische oppervlak ongeveer $4R$ bedraagt. Dit komt overeen met een diameter van 1.52 m .

Nu R bekend is kunnen we daadwerkelijk waardes toekennen aan de golflengtes. Uit

figuur 5 kunnen we zien dat het golfgetal niet groter wordt dan circa $46 \text{ rad}/R$. Dit komt overeen met een golflengte van 5.19 cm . Deze waarde is precies drie keer zo groot als 1.73 cm (de golflengte waarbij oppervlaktespannings- en zwaartekrachtseffecten even zwaar meewegen), wat neerkomt op; $\frac{T}{\rho g} k^2 = \frac{1}{9}$. Dit is enigzins verwaarloosbaar klein ten opzichte van 1. Bij deze golflengtes betreft het echter een weglappend golfpatroon en wij zijn, kijkend naar de onderzoeksvragen, voornamelijk geïnteresseerd in de golflengte van de staande golven. Tot nu toe weten we dat $k = 20.85 \text{ rad}/R$ het golfgetal van de staande golven is. Dit komt overeen met een golflengte van ongeveer 11.44 cm . Voor deze golflengte geldt: $\frac{T}{\rho g} k^2 \approx \frac{1}{44}$. Deze waarde is met een ruime benadering verwaarloosbaar ten opzichte van 1. De aanname dat we in de video alleen zwaartekrachtsgolven waarnemen is dan vrij realistisch.

5 Oplossing PDV

We hebben in de vorige paragraaf gezien dat de golflengtes ongeveer tussen de 5 en 12 cm liggen. Voor de term binnen de tangens-hyperbolicus betekent dit: $3.14 < kh < 7.54$. Voor $\theta \ll 1$ geldt; $\tanh(\theta) = \frac{\sinh(\theta)}{\cosh(\theta)} = \frac{\theta}{1} = \theta$. Voor $h \ll \lambda \rightarrow kh \ll 1$, betekent dit: $\tanh(kh) = kh$. De dispersierelatie voor zwaartekrachtsgolven (vergelijking(3)) reduceert dan tot: $\omega(k) = \sqrt{gk^2 h}$. De algemene definitie voor de voortplantingsnelheid van golven is: $c = \frac{\omega}{k}$. Voor zwaartekrachtsgolven betekent dit dat: $c = \sqrt{gh}$, mits de golflengte veel groter is dan de waterdiepte. Golven met deze eigenschap worden ook wel lange golven genoemd. In dit geval is de voortplantingssnelheid geen functie van k , maar constant (indien de waterdiepte (h) constant is), wat leidt tot de differentiaalvergelijking die lange golven beschrijft. Wanneer er geen sprake is van lange golven, zullen de golven worden beschreven door een Laplace-vergelijking in combinatie met randvoorwaarden aan het oppervlak en de bodem. Dit zal leiden tot een ingewikkelde dispersierelatie. Voor het vinden van oplossingen is hierdoor zeer waarschijnlijk een numerieke methode vereist. De focus van dit onderzoek ligt op het analytisch beschrijven van verschillende systemen om zo een antwoord te vinden op de onderzoeksvragen. Ondanks de hoge waardes voor kh , veronderstellen we daarom dat we in het vervolg met lange golven te maken hebben ($kh \ll 1$), zodat we deze analytische aanpak kunnen toepassen.

In de video zien we meerdere oscillerende spijkers in een twee-dimensionaal vlak. Het oppervlak van de spijker, ofwel het oppervlak waarmee het water wordt geforceerd, is relatief klein ten opzichte van het wateroppervlak. Hierom zullen de oscillerende spijkers als oscillerende puntbronnen worden benaderd. We zullen in paragraaf 6.3 zien of deze benadering realistisch is. Daarnaast moet er gezegd worden dat het afdoende is een oplossing voor één puntbron te vinden. Door het superpositie principe, dat toepasbaar is op golven, kan er namelijk met deze oplossing vervolgens gemakkelijk een oplossing voor meerdere puntbronnen worden gevonden. Om te beginnen zullen we het eenvoudigste model beschouwen voor golven in een twee dimensionaal vlak. Dit model is dat van één oscillerende puntbron in de oorsprong waarbij een harde wand ontbreekt. Er zal geen terugkaatsing van golven plaatsvinden en de golven zullen in het oneindige vlak propageren. Hoewel het ontbreken van een harde wand in praktijk niet realistisch is kan dit een goede benadering zijn van het systeem. Een systeem met één oscillerende puntbron in de oorsprong wordt beschreven door de onderstaande inhomogene lineaire

partiële differentiaal vergelijking (PDV) van de tweede orde. Door de oscillerende aard van de puntbron stellen we dat $\omega = \frac{2\pi}{P}$, waarbij P één periode bedraagt.

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \eta(\vec{x}, t) = e^{-i\omega t} \delta(x) \delta(y) \quad (6)$$

Waarbij $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ en $\delta(x)$ de Dirac delta functie is. Het linkerlid omvat de tweedimensionale golfvergelijking. Het rechterlid van de vergelijking omvat de aandrijving van golven, namelijk een periodieke verstoring op de bodem in de vorm van een oscillerende puntbron in de oorsprong.

5.1 Oplossing homogene PDV

De homogene partiële differentiaal vergelijking voor het systeem is de tweedimensionale golfvergelijking; $(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2})\eta(\vec{x}, t) = 0$, met $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ de Laplaciaan in twee dimensies. Om deze vergelijking op te lossen passen we de methode van scheiding van variabelen toe. $\eta(\vec{x}, t) = X(\vec{x})T(t)$, waarbij we de golf functie opsplitsen in een plaats- en tijdsafhankelijk deel, $X(\vec{x})$ en $T(t)$ respectievelijk. Bij substitutie in de golfvergelijking krijgen we;

$$T(t) \nabla^2 X(\vec{x}) = \frac{1}{c^2} X(\vec{x}) \frac{\partial^2}{\partial t^2} T(t) \quad (7)$$

Als we de plaatsafhankelijke functies naar de linkerkant van de vergelijking halen en de tijdsafhankelijkheden naar de rechterkant, krijgen we het volgende;

$$\frac{\nabla^2 X}{X} = \frac{1}{c^2 T} \frac{d^2 T}{dt^2} \quad (8)$$

We zien dat het linkerlid van de vergelijking slechts afhankelijk is van de positie en het rechterlid slechts een tijdsafhankelijkheid heeft. Dit heeft als gevolg dat beide kanten van de vergelijking gelijk moeten zijn aan dezelfde willekeurige constante. Voor latere redenen is het gemakkelijk om $-k^2$ als constante te kiezen, waarbij $k \in \mathbb{R}$. Hierdoor kunnen we de tweedimensionale golfvergelijking opsplitsen in een plaatsafhankelijke en tijdsafhankelijke differentiaalvergelijking;

$$\frac{\nabla^2 X}{X} = -k^2 \quad (9)$$

$$\frac{1}{c^2 T} \frac{d^2 T}{dt^2} = -k^2 \quad (10)$$

De oplossing voor het tijdsafhankelijke deel is van de volgende vorm;

$$T(t) = Ae^{ikct} + Be^{-ikct} \quad (11)$$

Doordat we een reële waarde voor k hebben gekozen zijn de machten volledig imaginair. $T(t)$ zal hierdoor niet divergeren voor $t \rightarrow \infty$ of voor $t \rightarrow -\infty$, ofwel $T(t)$ bestaat.

De plaatsafhankelijke differentiaalvergelijking (vergelijking (9)) is om te schrijven tot de Helmholtz vergelijking;

$$\nabla^2 X + k^2 X = 0 \quad (12)$$

Het golfpatroon komt voort uit een verstoring op de bodem in de vorm van een oscillerende puntbron. Doordat het een puntbron betreft, is het plaatsafhankelijke deel van $\eta(\vec{x}, t)$ rotatiesymmetrisch. Dit betekent dat het golfpatroon richtingsonafhankelijk is. Hierdoor maken we de volgende aanname: $X(\vec{x}) = f(r)$, met $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Dit komt overeen met een coördinaten transformatie van een Cartesisch coördinatenstelsel naar een poolcoördinatenstelsel. In dit coördinatenstelsel is de Laplaciaan als volgt gedefinieerd;

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (13)$$

Wanneer we deze definitie voor de Laplaciaan in de Helmholtz vergelijking substitueren, deze uitwerken en vervolgens vermenigvuldigen met r^2 krijgen we de volgende vergelijking:

$$r^2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + r \frac{\partial f}{\partial r} + r^2 k^2 f + \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} = 0 \quad (14)$$

Voor de hoekafhankelijkheid van f , maken we de volgende ansatz: $f \sim e^{in\phi}$. Hierdoor is de tweede afgeleide naar ϕ als volgt: $\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} = (in)^2 f = -n^2 f$. In vergelijking (14) herkennen we de Besselvergelijking[4]:

$$z^2 \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + z \frac{\partial y}{\partial z} + (z^2 - n^2)y = 0 \quad (15)$$

Besselfuncties, als $J_n(z)$ en $Y_n(z)$, zijn oplossingen van de Besselvergelijking. Aangezien de oplossing die wij zoeken moet voldoen aan de Besselvergelijking zoeken we periodieke functies van ϕ als oplossing. Hierdoor moet n een integer getal zijn, $n \in \mathbb{Z}$. Zoals eerder is genoemd is het golfpatroon dat wordt opgewekt door een puntbron rotatiesymmetrisch, ofwel hoekonafhankelijk. Uit de tweede afgeleide naar ϕ in vergelijking (14) behoort dan nul te komen, wat door de keuze voor onze ansatz er noodgedwongen voor zorgt dat n slechts nul kan zijn.

De homogene differentiaalvergelijking impliceert het ontbreken van een puntbron in de oorsprong, aangezien het rechterlid van de vergelijking gelijk aan nul is. Dit betekent dat er geen singulariteit in de oorsprong zal zijn. Ofwel, de oplossing voor de homogene PDV moet eindig zijn in de oorsprong. Nu zijn Besselfuncties van de eerste soort ($J_n(z)$) oplossingen die voldoen aan deze voorwaarde, dus kunnen we aannemen dat $J_n(z)$ de oplossing is voor de homogene PDV, i.e. $J_n(z) = f(r)$. Vergelijking (14) komt overeen met de Besselvergelijking als $z = kr$ en $n = 0$. Dat n gelijk moet zijn aan nul komt voort uit de rotatiesymmetrische eigenschappen van de golf functie. Wanneer deze symmetrie afwezig is, zal n andere waardes dan nul aan kunnen nemen. Hier zullen we later op ingaan.

Er lijken extra k -termen te verschijnen voor de eerste en tweede afgeleiden in vergelijking (15). Deze termen kunnen we als volgt verklaren: $r \frac{df(r)}{dr} = r \frac{dJ_0(kr)}{dr} = r \frac{k}{k} \frac{dJ_0(kr)}{dr} = kr \frac{dJ_0(kr)}{d(kr)} = z \frac{dJ_0(z)}{dz}$. Doordat we k als constant hebben gekozen kunnen we deze binnen de afgeleide halen. Bij de tweede afgeleide vermenigvuldigen we niet met $\frac{k}{k}$, maar met $\frac{k^2}{k^2}$: $r \frac{d^2 f(r)}{dr^2} = r \frac{d^2 J_0(kr)}{dr^2} = r \frac{k^2}{k^2} \frac{d^2 J_0(kr)}{dr^2} = (kr)^2 \frac{d^2 J_0(kr)}{d(kr)^2} = z^2 \frac{d^2 J_0(z)}{dz^2}$. We kunnen nu stellen dat $J_0(z)$ een oplossing is van de homogene Helmholtz vergelijking. Hiervan is in figuur 6 een grafiek weergegeven.

5.2 Oplossing inhomogene PDV

Bij het afleiden van de oplossing voor de homogene PDV hebben we een uitdrukking gevonden voor $T(t)$ (vergelijking (40)). Wanneer we deze definitie substitueren in de golf-functie, $\eta(\vec{x}, t) = X(\vec{x})T(t)$, krijgt de oorspronkelijke PDV (vergelijking (6)) de volgende vorm;

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) X(\vec{x})(Ae^{ikct} + Be^{-ikct}) = e^{-i\omega t} \delta(x)\delta(y) \quad (16)$$

Hieruit zien we dat $A = 0$ en dat $T(t) \propto e^{-ikct}$. In de tweedimensionale golfvergelijking is c gedefinieerd als de voortplantingssnelheid. Doordat de golven voortkomen uit de oscillerende puntbron is het noodzaak dat de tijdsafhankelijkheden in beide leden van vergelijking (16) van dezelfde vorm zullen zijn. Hieruit zien we dat: $c = \frac{\omega}{k}$. Een algemene definitie voor de voortplantingssnelheid is de hoekfrequentie gedeeld door het golfgetal. Hieruit stellen we dat k het golfgetal is en ω de hoekfrequentie: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ en $\omega = \frac{2\pi}{P}$, waarbij P de periode is.

Nu kunnen we de golf-functie als volgt definiëren: $\eta(r, t) = f_{par}(r)e^{-i\omega t}$, waarbij we wederom gebruik hebben gemaakt van de rotatiesymmetrische eigenschappen van η . De constante B is opgenomen in de plaatsafhankelijke oplossing. Wanneer we $\eta(r, t)$ substitueren in vergelijking (6), de tijdsafhankelijkheid wegstrepen en de afgeleiden uitwerken, krijgen we de volgende vergelijking;

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r}\right) + k^2\right) f_{par}(|\vec{x}|) = \delta(x)\delta(y) \quad (17)$$

Door de hoekonafhankelijkheid van η wordt slechts de r -afhankelijke deel van de Lapla-ciaan genomen. Een eigenschap van de Greense functie is; $LG(x) = \delta(x)$, met L een willekeurige lineaire operator. Hieruit kunnen we stellen dat $f_{par}(|\vec{x}|) = G(\vec{x})$, indien $L = \nabla^2 + k^2$. Dit is de Helmholtz operator voor een tweedimensionaal domein. De Greense functie die voldoet aan de oplossing is degene voor de tweedimensionale Helmholtz vergelijking;

$$G(\vec{x}) = DH_0(kr) = f_{par}(r) \quad (18)$$

Waarbij $r = |\vec{x}|$, $H_0(kr)$ de Hankelfunctie (Besselfunctie van de derde soort) is. D is een nader te bepalen constante, die ervoor zal moeten zorgen dat de Greense functie de singulariteit vertoont die overeenkomt met de aanwezigheid van de puntbron in het systeem (het rechterlid in vergelijking (16)).

De Hankelfunctie is op twee verschillende manieren gedefinieerd[4];

$$H_0^{(1)}(x) = J_0(x) + iY_0(x) \quad (19)$$

$$H_0^{(2)}(x) = J_0(x) - iY_0(x) \quad (20)$$

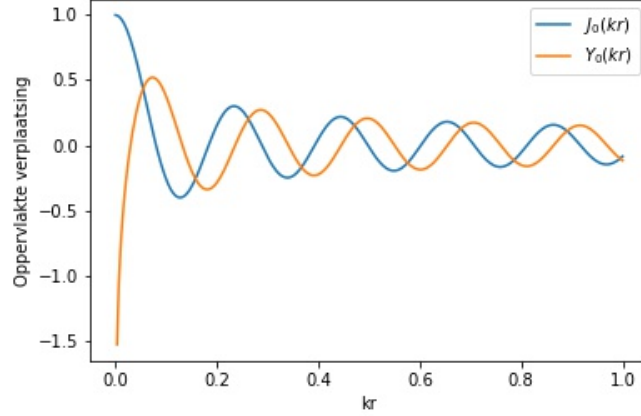


Figure 6: $J_0(kr)$ en $Y_0(kr)$ zijn de Besselfuncties van de eerste en tweede soort respectievelijk. Allebei zijn van de nulde orde.

Om te kijken welke van de twee functies met het systeem overeenkomt, gaan we kijken naar het gedrag van deze functies wanneer $x \rightarrow \infty$. In deze limiet zijn $J_0(x)$ en $Y_0(x)$ als volgt gedefinieerd[4]:

$$J_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) \quad (21)$$

$$Y_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) \quad (22)$$

Dit heeft voor de twee Hankelfuncties het volgende als gevolg[4];

$$\lim_{x \rightarrow \infty} H_0^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\cos\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) + i \sin\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) \right] = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)} \quad (23)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} H_0^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\cos\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) - i \sin\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) \right] = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)} \quad (24)$$

Wanneer we de bovenstaande bevindingen verwerken in de golfvunctie krijgen we twee oplossingen voor $\eta(r, t)$ door de twee verschillende Hankelfuncties;

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \eta_1(r, t) = \lim_{r \rightarrow \infty} H_0^{(1)}(kr) e^{-i\omega t} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i(kr - \omega t - \frac{\pi}{4})} \quad (25)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \eta_2(r, t) = \lim_{r \rightarrow \infty} H_0^{(2)}(kr) e^{-i\omega t} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i(kr + \omega t + \frac{\pi}{4})} \quad (26)$$

$\eta_1 = F(kr - \omega t)$, wat betekent dat de propagatie van de golf in de positieve radiële richting is. $\eta_2 = F(kr + \omega t)$ impliceert dat de golf in de negatieve radiële richting reist. Dit zou betekenen dat alle energie in het systeem spontaan naar de oorsprong zou moeten vloeien, wat bij afwezigheid van een cylinderwand fysisch gezien niet mogelijk is. Daarom zal in de partiële oplossing gebruik worden gemaakt van $H_0^{(1)}(kr)$ in plaats van $H_0^{(2)}(kr)$.

Nu zullen we gaan kijken welke waarde D , in vergelijking (18), aan zal moeten nemen om te voldoen aan de periodieke eigenschappen van het systeem. De eerste stap voor het bepalen van deze constante is het kijken naar hoe het product van Dirac delta functies in vergelijking (17) transformeert onder een coördinatentransformatie van een Cartesisch coördinatenstelsel naar een poolcoördinaten stelsel;

$$\delta(x)\delta(y) = \frac{1}{2\pi r}\delta(r) \quad (27)$$

We zien dat deze definitie overeenkomt met de voorwaarde waaraan een Dirac delta functie moet voldoen, namelijk $\int \delta(x)dx = 1$. Bij deze voorwaarde is het belangrijk dat het domein waarover we integreren het punt $x = 0$ omvat.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y)dy = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} r dr \frac{1}{2\pi r} \delta(r) = 1 \quad (28)$$

Vergelijking (17) kunnen we nu definiëren in poolcoördinaten en vervolgens integreren over een schijf met straal R , waarbij de schijf axisymmetrisch is in de oorsprong. Hierdoor wordt de oorsprong, voor elke willekeurige straal, omvat door het volume waarover we integreren. Dit is essentieel om uit de volume integraal over de Dirac-delta functie de waarde 1 terug te krijgen.

$$D \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R r dr (\nabla^2 + k^2) H_0^{(1)}(kr) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R r dr \frac{1}{2\pi r} \delta(r) \quad (29)$$

De tweedimensionale Helmholtz-operator bevat twee termen. Voor het vergemakkelijken van het probleem splitsen we voor het linkerlid van vergelijking 25 op in twee integralen. Eerst gaan we kijken naar de k^2 -term. We kiezen als volume waarover we integreren een infinitesimaal dunne schijf met straal R , waarbij $R \ll 1$. Ofwel, we zitten in de limiet van $R \rightarrow 0$. Aangezien het golfgetal k eindig is, kunnen we de definitie voor $H_0^{(1)}(kr)$ in de limiet van $kr \rightarrow 0$ gebruiken.

$$\lim_{kr \rightarrow 0} H_0^{(1)}(kr) = \frac{2i}{\pi} \ln(kr) \quad (30)$$

Wanneer we deze definitie substitueren in de integraal met de k^2 -term en deze aan de hand van partiële integratie uitwerken, krijgen we;

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow 0} D \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R r dr k^2 \frac{2i}{\pi} \ln(kr) &= \lim_{R \rightarrow 0} 4iD \left(\left[\frac{1}{2} (kr)^2 \ln(kr) \right]_0^R - \int_0^R dr \frac{1}{2r} (kr)^2 \right) = \\ &= \lim_{R \rightarrow 0} 4iD \left[-\frac{(kr)^2}{4} \right]_0^R = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

Hieruit kunnen we concluderen dat de k^2 -term niet bijdraagt aan het bepalen van constante D . Echter heeft dit ook als gevolg dat we geen rekening hoeven te houden met deze term in de limiet van $R \rightarrow 0$. Voordat we gaan kijken naar de Laplaciaan-term binnen de integraal in vergelijking (29), hebben we twee definities nodig [4];

$$\frac{\partial y_n(kr)}{\partial r} = k \frac{\partial y_n(kr)}{\partial (kr)} = \frac{k}{2} (y_{n-1} - y_{n+1}) \quad (32)$$

$$y_{-n} = (-1)^n y_n \quad (33)$$

Hierbij is $y_n(kr)$ een Besselfunctie van de n -de orde. Bij het uitwerken van de integraal maken we gebruik van de stelling van Gauss.

$$D \int_V \nabla^2 H_0^{(1)}(kr) dV = D \int_S \hat{n} \cdot \nabla H_0^{(1)}(kr) dA = D \oint_C \frac{\partial}{\partial r} \left(H_0^{(1)}(kr) \right) ds \quad (34)$$

In de laatste stap wordt gebruik gemaakt van het feit dat de normaalvector op de twee cirkelvlakken van de schijf loodrecht staat op de gradiënt van $H_0^{(1)}$. Deze is namelijk slechts afhankelijk van r , waardoor de gradient van $H_0^{(1)}$ alleen een radiële component heeft. Ook maken we gebruik van het feit dat we een infinitesimaal dunne schijf gebruiken als domein, waardoor een oppervlakte-integraal over de rand van de schijf kan worden benaderd als een kring-integraal. Overigens zijn de normaalvector van de buitenrand van de schijf, genaamd C , en $\nabla H_0^{(1)}$ allebei in de radiële richting, waardoor het inproduct wegvalt. Aan de hand van vergelijking (32) en (33) kunnen we de afgeleide van $H_0^{(1)}$ definiëren, waarna volgt;

$$D \oint_C \frac{\partial}{\partial r} \left(H_0^{(1)}(kr) \right) ds = D \oint_C -k H_1^{(1)}(kr) ds \quad (35)$$

In de limiet van $kr \rightarrow 0$ is $H_1^{(1)}$ als volgt gedefinieerd;

$$\lim_{kr \rightarrow 0} H_1^{(1)}(kr) = - \left(\frac{i}{\pi} \right) \left(\frac{1}{2} kr \right)^{-1} = - \left(\frac{2i}{\pi kr} \right) \quad (36)$$

Door de rotatie-symmetrische eigenschappen van $H_n^{(1)}(kr)$ is deze functie niet afhankelijk van het lijnelement ds . Voor het uitwerken van de integraal wordt daarom het product genomen van de omtrek van de cirkel en de integrand die is geëvalueerd in $r = R$. Nu dit bekend is kan vergelijking (29) worden geschreven als;

$$\lim_{R \rightarrow 0} D \oint_{C_R} k \left(\frac{2i}{\pi kr} \right) ds = \lim_{R \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R r dr \frac{1}{2\pi r} \delta(r) \quad (37)$$

$$2\pi R \frac{2iD}{\pi R} = 1 \quad (38)$$

$$D = \frac{1}{4i} = -\frac{i}{4} \quad (39)$$

De golffunctie moet reëel zijn, waardoor we voor $\eta(kr)$ het reële deel van de oplossing nemen.

$$\begin{aligned} \eta(r, t) &= \text{Re} \left[-\frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr) e^{-i\omega t} \right] = \text{Re} \left[-\frac{i}{4} (J_0(kr) + iY_0(kr)) (\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)) \right] \\ &= \frac{1}{4} Y_0(kr) \cos(\omega t) - \frac{1}{4} J_0(kr) \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (40)$$

De definitie van de homogene PDV impliceert het ontbreken van een oscillerende puntbron in het systeem zoals eerder genoemd. De aandrijvende kracht van de golven

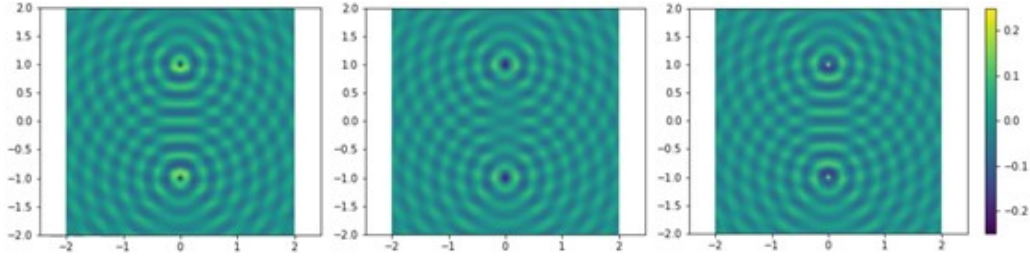


Figure 7: Deze golfpatronen komen voort uit de superpositie van de oplossing voor één oscillerende puntbron uit vergelijking (40). Het systeem bevat twee puntbronnen op posities $\vec{r} = (0, 1)$ en $\vec{r} = (0, -1)$. Deze puntbronnen oscilleren met een hoekfrequentie van 15.84 rad/s , wat overeenkomt met een golfgetal van 20.85 rad/R . Van links naar rechts zien we golfpatronen bij $\omega t = 0$, $\omega t = \frac{\pi}{2}$, $\omega t = \pi$.

die waarneembaar zijn in de video komt voort uit de puntbron. Bij het ontbreken van deze bron zou het systeem zich in een rusttoestand bevinden en zouden er geen golven waarneembaar zijn. Daarom is de homogene oplossing, in het geval van geen randvoorwaarden, niet relevant en zullen wij de partiële oplossing beschouwen als de oplossing voor dit systeem.

De tijdsafhankelijkheid in de oplossing is een combinatie van een sinus en een cosinus term. Om deze reden verwachten we dat golf functie lopende golven beschrijft. In de volgende sectie zullen we zien dat dit niet altijd het geval hoeft te zijn.

5.3 Uit fase

Tot nu toe is er voor een systeem gekozen van twee puntbronnen die oscilleren in fase. Dit is namelijk ook wat er te zien is in de video. In deze paragraaf zullen we gaan kijken naar wat er gebeurt als de twee puntbronnen uit fase oscilleren, ofwel wanneer er een faseverschil van π aanwezig is.

Een knoop bevindt zich op de plek waar de golf een amplitude van nul heeft. Bij een één-dimensionale staande golf is deze plek precies in het midden van een lokaal minimum en een lokaal maximum, ook wel buiken genoemd. In het één-dimensionale model is de uitwijking tussen twee knopen geheel positief dan wel negatief. In het twee-dimensionale model zien we dit terug, doordat de uitwijking van een oppervlak tussen vier knopen geheel positief dan wel negatief is. In afbeelding 8 zijn de lokale minima en maxima te onderscheiden door de hoogste concentratie blauw en geel, respectievelijk. Laten we de afstand tot de ene puntbron r_1 noemen en de afstand tot de andere puntbron r_2 . Wanneer de puntbronnen in fase oscilleren liggen de maxima en minima op de punten waarvoor geldt: $\frac{r_1 - r_2}{\lambda} = n$. Hierbij is $n \in \mathbb{Z}$ en λ de golflengte. Voor deze punten versterken de twee golfpatronen elkaar maximaal doordat het faseverschil tussen de twee golven nul is. Dit wordt constructieve interferentie genoemd. Voor de punten waar knopen zich bevinden moet gelden; $\frac{r_1 - r_2}{\lambda} = n + \frac{1}{2}$. Voor deze punten is het faseverschil tussen de twee golven gelijk aan π , waardoor de golven elkaar volledig uitdoven. Dit wordt destructieve interferentie genoemd. Bij een staand golfpatroon zijn de posities van de

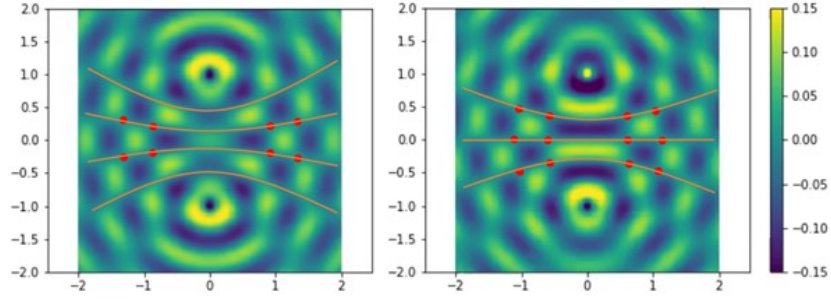


Figure 8: In beide afbeeldingen zien we een golfpatroon met $k = 10 \text{ rad}/R$. Het systeem is hetzelfde als voorheen. De twee puntbronnen in de linker afbeelding oscilleren in fase. Tussen de twee puntbronnen in de rechter afbeelding zit een faseverschil van π . De rode punten zijn knopen en de oranje lijnen zijn knooplijnen. Knooplijnen zijn te herkennen door de wazige diagonale blauwe strepen.

knopen stationair. Wij hebben echter te maken met een weglopend golfpatroon, waardoor de knopen ook weg zullen lopen. Het traject dat de knopen afleggen heten knooplijnen (de oranje lijnen in figuur 8). De maxima en minima volgen lijnen die hier tussen liggen. Wanneer de oscillerende puntbronnen uit fase zijn, loopt een van de twee puntbronnen als het ware een halve golflengte achter. Destructieve en constructieve interferentie zijn dan omgedraaid en daarom ook de relaties voor maxima/minima en knopen. De knooplijnen en minima/maxima lijnen verwisselen hierdoor tussen beide figuren.

6 Oplossing met randvoorwaarden

Wanneer we een cilindrische wand aanbrengen zal de energie van de golf niet meer moeiteloos naar het oneindige kunnen vloeien en zullen we in de oplossing voor het systeem rekening moeten houden met teruggekaatste golven. Voor nu gaan we uit van een elastische botsing. Ofwel, bij de botsing van de golf met de harde wand zal er geen kinetische energie verloren gaan. De teruggekaatste golven zijn eindig in de oorsprong en zullen daarom worden gedefinieerd door Besselfuncties van de eerste soort. Hierdoor is de homogene oplossing van het systeem weer relevant. Aangezien in een later stadium de oplossing hoekafhankelijk zal zijn, zullen we de homogene oplossing van voorheen duidelijker moeten definiëren. Dit doen we door middel van een cilindrische golfexpansie, waardoor de homogene oplossing de volgende vorm aanneemt;

$$f_{hom}(r, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n J_n(kr) e^{in\phi} \quad (41)$$

Hierbij is A_n de expansie coëfficiënt van de Besselfunctie van de n-de orde.

6.1 Axisymmetrische forcering in een cylinder

Laten we een oscillerende puntbron in de oorsprong plaatsen met daaromheen een cilindrische wand op $r = 1$. In dit geval zijn zowel de uitgaande als de ingaande (teruggekaat-

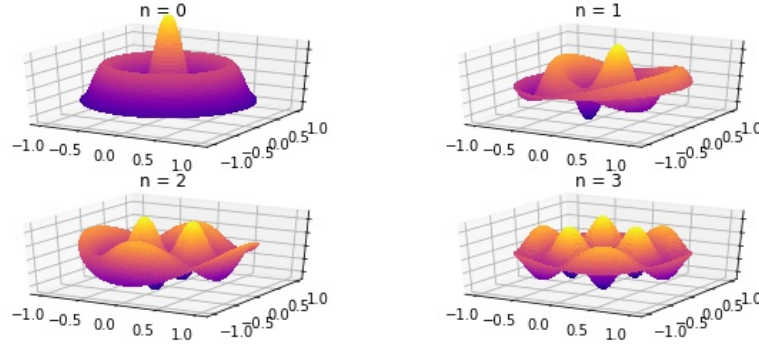


Figure 9: Een weergave van een aantal componenten van de cilindrische golfexpansie, waarbij n de orde van de Besselfunctie van de eerste soort is. Zoals te zien is in vergelijking (41) bestaat deze expansie uit de som van meer componenten dan slechts bovenstaande vier. Wel geeft deze afbeelding een visualisatie van hoe de componenten afhankelijk zijn van de hoek ϕ bij oplopende n . Omdat we kijken naar de vorm van de componenten zijn de coëfficiënten A_n buiten beschouwing gelaten. De eenheid van de x- en y-as is kr , met $k = 10$.

ste) golf in de radiële richting, waardoor de golf functie rotatiesymmetrisch is. Bij de afleiding voor de homogene en partiële oplossing hebben we gezien dat deze symmetrie impliceert dat er geen oplossingen zijn voor $n \neq 0$, ofwel $A_n = 0$ voor $n \neq 0$. De algemene bekendheid dat de oplossing de som bedraagt van de partiële oplossing en de homogene oplossing geeft dan;

$$\eta(r, t) = \text{Re} \left[\left(A_0 J_0(kr) - \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr) \right) e^{-i\omega t} \right] \quad (42)$$

A_0 is hierbij een expansie coëfficiënt die we zullen bepalen aan de hand van de volgende randvoorwaarde;

$$\left. \frac{\partial \eta}{\partial r} \right|_{r=1} = 0 \quad (43)$$

Deze voorwaarde komt voort uit: $\nabla \psi = \vec{u}$. Deze relatie houdt in dat de gradiënt van potentiaal ψ gelijk is aan het stromingsveld \vec{u} . Aangezien de golven in dit systeem zwaartekrachtsgolven zijn, zoals reeds is aangetoond, is de potentiaal ϕ gelijk aan de zwaartekrachtspotentiaal: $\phi = m\eta g$, met m de massa van het verplaatste volume in kg en g de valversnelling in m/s^2 . Aangezien zowel m als g constanten zijn kunnen we deze wegdelen, wat vergelijking (43) geeft. De radiële component van de stroming op de wand moet gelijk zijn aan nul, aangezien water niet door de wand heen kan stromen. De normaalvector op de cilindrische wand is gelijk aan \hat{r} , waardoor we slechts de radiële component van \vec{u} gelijk moeten stellen aan nul. De afgeleide van elke willekeurige Besselfunctie $y_n(x)$ is gedefinieerd in vergelijking (32). In combinatie met vergelijking (33) kunnen we vergelijking (43) schrijven als: $-A_0 J_1(k) + \frac{i}{4} H_1^{(1)}(k) = 0$, waaruit volgt dat

$A_0 = \frac{i}{4} \frac{H_1^{(1)}(k)}{J_1(k)}$. De oplossing voor een axisymmetrische forcering in een cylinder is dan;

$$\begin{aligned}
\eta(r, t) &= Re \left[\left(\frac{i}{4} \frac{H_1^{(1)}(k)}{J_1(k)} J_0(kr) - \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr) \right) e^{-i\omega t} \right] \\
&= Re \left[\left(\frac{i}{4} \left(\frac{J_1 + iY_1(k)}{J_1(k)} \right) J_0(kr) - \frac{i}{4} (J_0(kr) + iY_0(kr)) \right) (\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)) \right] \\
&= Re \left[\left(-\frac{1}{4} \frac{Y_1(k)}{J_1(k)} J_0(kr) + \frac{1}{4} Y_0(kr) \right) (\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)) \right] \\
&= \frac{1}{4} \left(Y_0(kr) - \frac{Y_1(k)}{J_1(k)} J_0(kr) \right) \cos(\omega t)
\end{aligned} \tag{44}$$

6.2 Excentrische forcering in een cylinder

Wanneer er een puntbron buiten het middelpunt van de cylinder wordt geplaatst is het systeem niet meer rotatiesymmetrisch. Het is immers niet meer een gegeven dat de weglopende en teruggekaatste golven in de radiële richting lopen. De oplossing heeft dus een hoekafhankelijkheid, waardoor we rekening moeten houden met de tweede afgeleide naar ϕ in de Laplaciaan (vergelijking (13)).

We schrijven de oplossing als de som van de homogene en partiële oplossing die beide zijn uitgedrukt in cilindrische golfexpansies. De cilindrische golfexpansie voor de homogene oplossing is reeds gedefinieerd in vergelijking (41). De cilindrische golfexpansie voor de partiële oplossing is als volgt[3];

$$-\frac{i}{4} H_0^{(1)} \left(k \left| \vec{r} - \vec{r}' \right| \right) = -\frac{i}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(kr_{<}) H_n^{(1)}(kr_{>}) e^{in(\phi - \phi')} \tag{45}$$

Hier is de positie van de puntbron: $\vec{r}' = \begin{pmatrix} r' \\ \phi' \end{pmatrix}$. Voor een punt met $r < r'$ zal de ruimtelijke variatie in de tweede term in vergelijking (45) worden bepaald door $J_n(kr_{<})$, ofwel $r_{<} = r$. Dit heeft als gevolg dat $H_n(kr_{>})$ zal fungeren als coëfficiënt welke een waarde zal aannemen van $H_n(kr')$. Voor een punt met $r > r'$ zal de ruimtelijke variatie worden bepaald door $H_n(kr_{>})$, ofwel $r_{>} = r$, met $J_n(kr_{<}) = J_n(kr')$ als coëfficiënt.

Nu zullen we gaan kijken naar hoe deze expansie tot stand komt[7]. Aan de hand van de cosinusregel kunnen we $\left| \vec{r} - \vec{r}' \right|$ (de afstand tot de puntbron in \vec{r}') omschrijven in termen van r, r' en ϕ , waarbij $r = \left| \vec{r} \right|$, $r' = \left| \vec{r}' \right|$ en ϕ de hoek tussen \vec{r} en \vec{r}' is. We krijgen dan; $\left| \vec{r} - \vec{r}' \right| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\phi)}$. Om de notatie beknopt te houden stellen we; $z = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\phi)}$. Een definitie in integraalvorm voor de Besselfunctie van de eerste soort van orde m is;

$$J_m(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp[i(z \sin(\theta) - m\theta)] d\theta \tag{46}$$

De term binnen de integraal betreft een periodieke functie met een periode $P = 2\pi$. De grenzen waarover we integreren zijn $-\pi$ en π , wat betekent dat we precies over één

periode integreren. Hierdoor kunnen we een faseverschuiving toepassen zonder dat dit de uitkomst van de integraal verandert. Wanneer we, om latere redenen, voor $m = 0$ kiezen, kan vergelijking (46) dan worden geschreven als;

$$\begin{aligned} J_0(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp[i(z\sin(\theta - \alpha))] d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp[iz(\sin(\theta)\cos(\alpha) - \cos(\theta)\sin(\alpha))] d\theta \end{aligned} \quad (47)$$

Hierbij is α de faseverschuiving. We definiëren α op een manier zodat: $z\cos(\alpha) = r - r'\cos(\phi)$ en $z\sin(\alpha) = -r'\sin(\phi)$. Vergelijking (47) kunnen we dan schrijven als;

$$\begin{aligned} J_0(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp[i\cos(\theta)r'\sin(\phi)] \exp[i\sin(\theta)(r - r'\cos(\phi))] d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp[ir\sin(\theta)] \exp[ir'(\cos(\theta)\sin(\phi) - \sin(\theta)\cos(\phi))] d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(r)e^{im\theta} \right) \exp[ir'\sin(\phi - \theta)] d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(r) \int_{-\pi}^{\pi} \exp[ir'\sin(\phi - \theta) + im\theta] d\theta \end{aligned} \quad (48)$$

Nu passen we wederom een faseverschuiving toe: $\theta \rightarrow -\theta + \phi$.

$$\begin{aligned} J_0(z) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(r) \int_{-\pi}^{\pi} \exp[ir'\sin(\theta) + im(-\theta + \phi)] d\theta \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(r)e^{im\phi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp[i(r'\sin(\theta) - m\theta)] d\theta = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(r)J_m(r')e^{im\phi} \end{aligned} \quad (49)$$

In de tweede stap wordt er gebruik gemaakt van de Jacobi-Anger expansie.

$$\exp[ir\sin(\theta)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(r)e^{im\theta} \quad (50)$$

Nu worden beide kanten vermenigvuldigd met $\exp[-in\theta]$ en geïntegreerd over θ ;

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \exp[ir\sin(\theta) - in\theta] d\theta &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(r) \int_{-\pi}^{\pi} \exp[im\theta - in\theta] d\theta \\ \int_{-\pi}^{\pi} \exp[i(rs\sin(\theta) - n\theta)] d\theta &= 2\pi J_n(r) \end{aligned} \quad (51)$$

De laatste stap volgt uit het feit dat voor $m \neq n$ een cosinus functie wordt geïntegreerd over één periode, waardoor hier nul uit komt. Echter geldt voor $m = n$; $\int_{-\pi}^{\pi} d\theta = 2\pi$. Als we in de laatste regel $J_n(r)$ naar één kant halen krijgen we het volgende;

$$J_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp[i(rs\sin(\theta) - n\theta)] d\theta \quad (52)$$

Dit is inderdaad de definitie voor de Besselfunctie van de eerste soort uit vergelijking (46). Hiermee is de Jacobi-Anger expansie bewezen.

Samen met de de cilindrische expansie voor de homogene oplossing (vergelijking (41) kan de algemene oplossing worden geschreven als;

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{i}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(A_n J_n(kr) - J_n(kr_{<}) H_n^{(1)}(kr_{>}) \right) e^{in(\phi - \phi')} \quad (53)$$

Voor het bepalen van coëfficiënt A_n wordt wederom de randvoorwaarde in vergelijking (43) gebruikt.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(A_n J_n(kr) - J_n(kr_{<}) H_n^{(1)}(kr_{>}) \right) \Big|_{r=1} &= 0 \\ A_n J'_n(k) - J_n(kr') H_n^{(1)'}(k) &= 0 \\ A_n &= \frac{H_n^{(1)'}(k)}{J'_n(k)} J_n(kr') \end{aligned} \quad (54)$$

In de tweede stap wordt er gebruik gemaakt van het feit dat we de afgeleide evalueren op de cylinderwand. Voor een punt op de wand is het gegarandeerd dat $r > r'$, waardoor $J_n(kr_{<}) = J_n(kr')$ dient als coëfficiënt en $H_0(kr_{>}) = H_0(kr)$ ruimtelijke variatie is.

Na substitutie van de bovenstaande definitie voor A_n in vergelijking (53) krijgen we;

$$\begin{aligned} G(\vec{r}, \vec{r}') &= \frac{i}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{H_n^{(1)'}(k)}{J'_n(k)} J_n(kr') J_n(kr) - J_n(kr_{<}) H_n^{(1)}(kr_{>}) \right) e^{in(\phi - \phi')} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{J'_n(k) + iY'_n(k)}{J'_n(k)} J_n(kr') J_n(kr) - J_n(kr_{<}) (J_n(kr_{>}) + iY_n(kr_{>})) \right) \\ &\quad \left(\frac{i}{4} \cos(n(\phi - \phi')) - \frac{1}{4} \sin(n(\phi - \phi')) \right) \end{aligned} \quad (55)$$

Voor het vereenvoudigen van deze vergelijking gebruiken we vergelijking (32) en (33).

Aan de hand van deze twee identiteiten kunnen we zien dat $\frac{H_n^{(1)'}(k)}{J'_n(k)} = \frac{H_{-n}^{(1)'}(k)}{J'_{-n}(k)}$. De rest van de r -afhankelijke-termen betreft een product van twee Besselfuncties. Door hier vergelijking (33) op toe te passen wordt het duidelijk dat de volledige r -afhankelijke term binnen de haken voor n en $-n$ hetzelfde zal zijn. De cosinus-term is voor positieve en negatieve orde ook hetzelfde, aangezien $\cos(x) = \cos(-x)$. Aan de hand van de goniometrische identiteit $\sin(-x) = -\sin(x)$ zien we dat bij het sommeren van een orde n en $-n$ de twee sinus-termen tegen elkaar wegvallen. De orde $n = 0$ kent geen negatieve variant, waardoor deze niet zal wegvallen. Echter geldt: $\sin(0) = 0$. Hierdoor zijn er geen sinus-termen in de plaats-afhankelijke oplossing. Dit duidt op dat we een symmetrisch golfpatroon verwachten in $\phi = \phi'$, aangezien de plaats-afhankelijke oplossing gedefinieerd is door cosinussen, welke symmetrische functies zijn.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} s(n) \left(\frac{J'_n(k) + iY'_n(k)}{J'_n(k)} J_n(kr') J_n(kr) - J_n(kr_{<}) (J_n(kr_{>}) + iY_n(kr_{>})) \right) \\ \frac{i}{4} \cos(n(\phi - \phi')) \end{aligned} \quad (56)$$

Hierbij geldt: $s(n = 0) = 1$ en $s(n) = 2$ als $n > 0$. Voor het verkrijgen van de oplossing dient het reële deel van het product van de plaatsafhankelijke en tijdsafhankelijke oplossing genomen te worden.

$$\begin{aligned} \eta(\vec{r}, t) &= \operatorname{Re} \left[\sum_{n=0}^{\infty} s(n) \left(\frac{J'_n(k) + iY'_n(k)}{J'_n(k)} J_n(kr') J_n(kr) - J_n(kr_{<}) (J_n(kr_{>}) + iY_n(kr_{>})) \right) \right. \\ &\quad \left. \frac{i}{4} \cos(n(\phi - \phi')) (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s(n)}{4} \left(-\frac{Y'_n(k)}{J'_n(k)} J_n(kr') J_n(kr) + J_n(kr_{<}) Y_n(kr_{>}) \right) \cos(n(\phi - \phi')) \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (57)$$

Omdat de tijdsafhankelijkheid slechts wordt bepaald door een cosinus-term beschrijft deze golf functie staande golven.

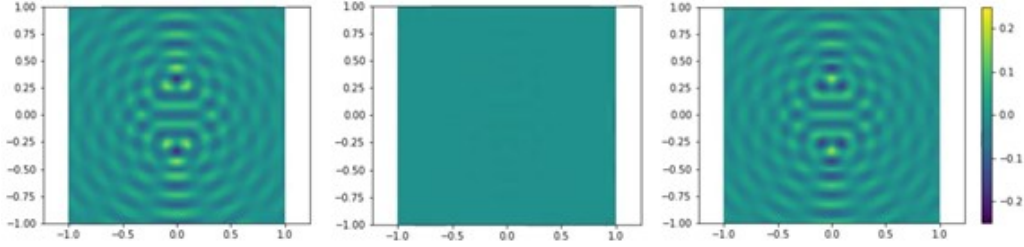


Figure 10: Deze golfpatronen komen voort uit de superpositie van de oplossing voor één oscillerende puntbron uit vergelijking (57). Het systeem bevat twee puntbronnen op posities $\vec{r} = (0, \frac{1}{2})$ en $\vec{r} = (0, -\frac{1}{2})$. Van links naar rechts geldt: $\omega t = 0$, $\omega t = \frac{\pi}{2}$ en $\omega t = \pi$. Om de berekening te verkleinen sommeren we tot en met $n = 10$. In de afbeelding is te zien dat het golfpatroon een staand karakter heeft doordat er t 's bestaan waarvoor geldt: $\eta(\vec{r}, t) = 0$, voor alle \vec{r} . Overigens lopen de assen van -1 tot 1 , omdat in de afleiding van de vergelijking die het systeem beschrijft (vergelijking (57)) voor een cylinderwand op $r = 1$ is gekozen. De lengte-eenheid is nu niet meer de straal van de cirkel van puntbronnen, maar de straal van de cylinder.

6.3 Behoud van massa en energie

Voor het verkrijgen van oplossing (57) hebben we de aanname gemaakt dat een oscillerende spijker hetzelfde golfpatroon opwekt als een oscillerende puntbron. In het geval van de spijker beschouwen we een systeem waarbij de hoeveelheid water constant is. Het water kan immers niet wegvloeiën en er komt ook geen water bij. We kunnen dus uitgaan dat in dit systeem de massa behouden is. Voor bepaalde tijdsintervallen oscilleren de spijkers met een constante frequentie, ofwel het wateroppervlak wordt constant geforceerd. In de video is bij deze constante forcering geen groei of demping van de golven waar te nemen. De maximale uitwijking voor een bepaald tijdsinterval is immers constant. Dit impliceert dat er evenveel energie in het systeem wordt gebracht als dat er verdwijnt,

ofwel; de netto-energie flux, voor een bepaald tijdsinterval in de video, is gelijk aan nul. Voor het model heeft dit als gevolg dat de energie per periode constant moet zijn.

Een oscillerende puntbron vertoont op een bepaald tijdstip eigenschappen van een bron (een punt waaruit water komt) en een halve periode later vertoont deze puntbron eigenschappen van een put (een punt waar water wegvloeit). Door het wegvloeien en toevoegen van water is behoud van massa en energie bij een bron-put-constructie niet gegarandeerd. Dit moet echter wel gelden indien we het systeem met een oscillerende spijker willen beschouwen als dat van een oscillerende puntbron.

Om het behoud van massa na te gaan zullen we kijken of de oppervlakte integraal over de gevonden oplossing gelijk is aan nul voor elk willekeurig tijdstip. In rusttoestand ($\eta(\vec{r}, t) = 0$) is deze integraal immers ook gelijk aan nul. Voordat de integraal berekend wordt gaan we kijken naar de uitkomst van $\int_a^b r J_0(kr) dr$. Hiervoor gebruiken we de definitie voor de Besselfunctie van de eerste soort van de nulde orde en eerste orde in sommatie vorm;

$$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}}{(m!)^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{x^2}{4}\right)^m}{(m!)^2} \quad (58)$$

$$J_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+1}}{m!(m+1)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x \left(-\frac{x^2}{4}\right)^m}{2 m!(m+1)!} \quad (59)$$

Het is noodzaak dat $x = kr$. Dit heeft als gevolg dat: $dr = \frac{dx}{k}$.

$$\begin{aligned} \int_a^b r J_0(kr) dr &= \frac{1}{k} \int_a^b kr J_0(kr) dr = \frac{1}{k^2} \int_{ak}^{bk} x J_0(x) dx = \frac{1}{k^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m!)^2} \int_{ak}^{bk} x \left(-\frac{x^2}{4}\right)^m dx \\ &= \frac{1}{k^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(-4)^m (m!)^2} \int_{ak}^{bk} x^{2m+1} dx = \left[\frac{1}{k^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(-4)^m (m!)^2} \frac{(x^2)^{m+1}}{2(m+1)} \right]_{x=ak}^{x=bk} \\ &= \left[\frac{x}{k^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x}{2} \frac{\left(-\frac{x^2}{4}\right)^m}{m!(m+1)!} \right]_{ak}^{bk} = \left[\frac{x}{k^2} J_1(x) \right]_{ak}^{bk} = \left[\frac{r}{k} J_1(kr) \right]_{r=a}^{r=b} \end{aligned} \quad (60)$$

In het geval van de Besselfunctie van de tweede soort geldt: $\int_a^b r Y_0(kr) dr = \left[\frac{r}{k} Y_1(kr) \right]_{r=a}^{r=b}$. Nu dit bekend is gaan we de oplossing voor een axisymmetrische puntbron (vergelijking (44)) integreren over het oppervlak van de cylinder (een cirkel met straal $r = 1$).

$$\begin{aligned} &\frac{\cos(\omega t)}{4} \int_0^1 r \left(Y_0(kr) - \frac{Y_1(k)}{J_1(k)} J_0(kr) \right) dr \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= \frac{\pi \cos(\omega t)}{2} \left(\int_0^1 r Y_0(kr) dr - \frac{Y_1(k)}{J_1(k)} \int_0^1 r J_0(kr) dr \right) \\ &= \frac{\pi \cos(\omega t)}{2k} \left(Y_1(k) - \frac{Y_1(k)}{J_1(k)} J_1(k) \right) = 0 \end{aligned} \quad (61)$$

Bij een axisymmetrische oscillerende puntbron is er dus op elk tijdstip behoud van massa. Nu zullen we nagaan of er behoud van massa is bij een excentrische oscillerende puntbron. Hiervoor integreren we ditmaal vergelijking (57) over hetzelfde oppervlak.

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 r dr \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s(n)}{4} \left(-\frac{Y'_n(k)}{J'_n(k)} J_n(kr') J_n(kr) + J_n(kr_{<}) Y_n(kr_{>}) \right) \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n(\phi - \phi')) d\phi \cos(\omega t) \\
&= 2\pi \int_0^1 r dr \frac{s(0)}{4} \left(-\frac{Y'_0(k)}{J'_0(k)} J_0(kr') J_0(kr) + J_0(kr_{<}) Y_0(kr_{>}) \right) \cos(\omega t) \\
&= \pi \cos(\omega t) \left(-\frac{Y_1(k)}{J_1(k)} J_0(kr') \int_0^1 r J_0(kr) dr + Y_0(kr') \int_0^{r'} r J_0(kr) dr + J_0(kr') \int_{r'}^1 r Y_0(kr) dr \right) \\
&= \pi \cos(\omega t) \left(-\frac{Y_1(k)}{J_1(k)} J_0(kr') \frac{r' J_1(kr')}{k} + Y_0(kr') \frac{J_1(k)}{k} + J_0(kr') \frac{Y_1(k) - r' Y_1(kr')}{k} \right) \\
&= \pi \cos(\omega t) \left(-J_0(kr') \frac{Y_1(k)}{k} + Y_0(kr') \frac{r' J_1(kr')}{k} + J_0(kr') \frac{Y_1(k)}{k} - J_0(kr') \frac{r' Y_1(kr')}{k} \right) \\
&= \frac{r' \pi \cos(\omega t)}{k} (Y_0(kr') J_1(kr') - J_0(kr') Y_1(kr'))
\end{aligned} \tag{62}$$

In de eerste stap wordt er gebruik gemaakt van $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n(\phi - \phi')) d\phi = 0$ voor $n > 0$. In de laatste regel herkennen we de algemene definitie van de Wronskiaan: $W(f, g) = fg' - f'g$. Hierbij zijn f en g functies die ten minste één keer differentieerbaar zijn. De Wronskiaan van een Besselfunctie van de eerste en tweede soort van orde m is als volgt;

$$W(J_m(x), Y_m(x)) = J_{m+1}(x)Y_m(x) - J_m(x)Y_{m+1}(x) = \frac{2}{\pi x} \tag{63}$$

Hiermee kunnen we vergelijking (62) vereenvoudigen tot:

$$\frac{r' \pi \cos(\omega t)}{k} (Y_0(kr') J_1(kr') - J_0(kr') Y_1(kr')) = \frac{r' \pi \cos(\omega t)}{k} \frac{2}{\pi kr'} = \frac{2}{k^2} \cos(\omega t) \tag{64}$$

Kortom; wanneer we de oplossing uit vergelijking (57) integreren over het oppervlak van de cylinder, krijgen we een tijdsafhankelijke functie in de vorm van een cosinus. Nu nemen we het gemiddelde over een periode ($t = P$);

$$\frac{1}{P} \int_0^P \frac{2}{k^2} \cos(\omega t) dt = \frac{1}{\omega P} \int_0^{\omega P} \frac{2}{k^2} \cos(\omega t) d(\omega t) = \frac{1}{k^2 \pi} \int_0^{2\pi} \cos(\omega t) d(\omega t) = 0 \tag{65}$$

Bij de laatste stap wordt er gebruik gemaakt van de algemene definitie voor de hoekfrequentie ($\omega = \frac{2\pi}{P}$). Er is dus massabehoud per periode.

De hoeveelheid energie in het systeem wordt bepaald door de som van de kinetische en potentiële energie in het systeem. Wanneer de totale energie in het systeem per periode behouden is, zal deze som per periode constant zijn. Voor het bepalen van de totale energie kiezen we een tijdstip waarbij de uitwijking maximaal is, ofwel de kinetische

energie gelijk aan nul is. Hierdoor hoeven we voor de totale energie slechts de potentiële energie te bepalen. Deze is als volgt gedefinieerd;

$$V(t) = \frac{1}{2}m^2g^2 \int_A \eta(\vec{r}, t)^2 dA \quad (66)$$

Hierbij is A een cirkel met straal 1 en $\eta(\vec{r}, t)$ is wederom de oplossing voor een excentrisch gepositioneerde puntbron (vergelijking (57)). Voor onder andere $t = 0$ is $\cos(\omega t)$ maximaal en gelijk aan 1.

$$\begin{aligned} E_{tot} = V(t=0) &= \frac{1}{2}m^2g^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{s(n)s(m)}{4^2} \int r dr \left(-\frac{Y'_n(k)}{J'_n(k)} J_n(kr') J_n(kr) + J_n(kr_{<}) Y_n(kr_{>}) \right) \\ &\quad \left(-\frac{Y'_m(k)}{J'_m(k)} J_m(kr') J_m(kr) + J_m(kr_{<}) Y_m(kr_{>}) \right) \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n(\phi - \phi')) \cos(m(\phi - \phi')) d\phi \\ &= \frac{1}{32}m^2g^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} s(n)s(m) \int r dr \left(-\frac{Y'_n(k)}{J'_n(k)} J_n(kr') J_n(kr) + J_n(kr_{<}) Y_n(kr_{>}) \right) \\ &\quad \left(-\frac{Y'_m(k)}{J'_m(k)} J_m(kr') J_m(kr) + J_m(kr_{<}) Y_m(kr_{>}) \right) \\ &\quad \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos((n-m)(\phi - \phi')) + \cos((n+m)(\phi - \phi'))] d\phi \end{aligned} \quad (67)$$

$\int_{-\pi}^{\pi} \cos((n-m)(\phi - \phi')) d\phi = 0$ voor $n-m \neq 0$, ofwel $n \neq m$. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos((n+m)(\phi - \phi')) d\phi = 0$ voor $n+m \neq 0$, ofwel $n \neq -m$. Voor $n = m$ is de eerste integraal gelijk aan π en dit is ook de uitkomst van de tweede integraal voor $n = -m$. Per waarde voor n hoeven we slechts rekening te houden met twee waarden voor m , namelijk $m = n$ en $m = -n$. Daarnaast is de radiële afhankelijkheid invariant onder het verwisselen van teken in de index. E_{tot} kunnen we dan vervolgens schrijven als:

$$E_{tot} = \frac{\pi}{32}m^2g^2 \sum_{n=0}^{\infty} s(n)^2 \int r dr \left(-\frac{Y'_n(k)}{J'_n(k)} J_n(kr') J_n(kr) + J_n(kr_{<}) Y_n(kr_{>}) \right)^2 \quad (68)$$

Doordat de radiële afhankelijkheid gekwadrateerd is, geeft dit voor alle n een positieve waarde. Wanneer deze term divergeert als $n \rightarrow \infty$ heeft dit als gevolg dat $E_{tot} \rightarrow \infty$, wat in fysisch opzicht niet mogelijk is. Het is dus noodzakelijk dat de radiële afhankelijkheid moet convergeren als $n \rightarrow \infty$. Om te kijken of dit het geval is gebruiken we een definitie voor de Besselfunctie van de eerste soort van de n -de orde in een integraalvorm. Deze is gegeven in vergelijking (52). In het geval van een cilindrische wand op $r = 1$, kan $x(=kr)$ een maximale waarde aannemen voor zekere k . In het geval van de oscillerende spijker is k eindig, waardoor voor een zekere n het volgende zal gelden; $x \sin(\tau) \ll n\tau$. Voor deze n is de Besselfunctie van de eerste soort als volgt;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\tau} d\tau \quad (69)$$

Wanneer we hiervan het reële deel nemen en uitwerken krijgen we;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{n} \sin(n\tau) \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad (70)$$

Hieruit kunnen we stellen dat $J_n(x)$ zal convergeren voor $n \rightarrow \infty$. Jammer genoeg impliceert dit niet dat de radiële afhankelijkheid ook zal convergeren. Door de grote hoeveelheid termen in de som zou een numerieke aanpak bevorderlijk zijn om te kijken of E_t tot een eindige waarde aanneemt. In dit onderzoek zal hier jammer genoeg niet verder op in worden gegaan.

7 Resonantie

Zoals in paragraaf 2 is besproken is in de video voor een bepaalde frequentie een significante groei in amplitude waar te nemen. Dit fenomeen staat ook wel bekend als resonantie. In deze paragraaf zullen we dit in fysisch opzicht proberen te doorgronden. Om een beeld te krijgen van de principes van resonantie zullen we eerst kijken naar een één-dimensionale situatie om dit vervolgens uit te breiden naar een twee-dimensionale situatie. Het systeem dat we beschouwen in dit onderzoek is immers twee-dimensionaal.

Wanneer een voorwerp, dat oscilleert met een bepaalde frequentie, in contact staat met een medium, zoals bijvoorbeeld water of lucht, zal dit voorwerp energie doorgeven aan het medium in de vorm van trillingen van dezelfde frequentie. Wanneer een ander voorwerp ook in contact staat met dit medium zal dit mee gaan trillen. Ofwel, energie in de vorm van oscillaties kan worden doorgegeven van voorwerp op voorwerp indien deze in contact staan met hetzelfde medium. Elk voorwerp heeft een bepaalde eigenfrequentie welke wordt bepaald door de stijfheid en massa van dit voorwerp. Wanneer het medium in trilling wordt gebracht met deze eigenfrequentie en deze trillingen vervolgens overbrengt op het voorwerp zal dit significant harder gaan meetrillen dan bij andere frequenties. Dit fenomeen wordt resonantie genoemd. Hoe hard een voorwerp meetrilt wordt bepaald door de mate van interne damping. Elk voorwerp heeft een specifieke interne damping wat kan worden gezien als de mate van weerstand dat het voorwerp biedt om mee te trillen. Deze damping zorgt ervoor dat de energie die wordt toegevoerd door de forcering een uitweg heeft, bijvoorbeeld in de vorm van wrijving. Aangezien het voorwerp bij zijn eigenfrequentie het hardst meetrilt, kunnen we stellen dat de interne damping bij deze frequentie voor minimale weerstand zorgt ten opzichte van andere frequenties. Door deze minimale weerstand gaat er bij de eigenfrequentie het minste energie verloren, ofwel bij de eigenfrequentie zal er in het systeem de grootste interne opslag van energie te vinden zijn. Dit resulteert vervolgens in een vergrootte amplitude.

In het geval van dit onderzoek laat de oscillerende spijker het wateroppervlak oscilleren. Wanneer de spijker oscilleert met de eigenfrequentie van het wateroppervlak in de cilindrische holte, welke afhankelijk is van onder andere de straal en waterdiepte, zal er dus een groei in amplitude waar te nemen zijn. Als we kijken naar de video gebeurt dit bij een hoekfrequentie van $\omega = 15.84 \text{ rad/s}$. Ofwel, wanneer de spijker met deze frequentie trilt, treedt er resonantie op in het systeem. Om meer te weten te komen over deze resonantie zullen we ingaan op de fysica van het type oscillator van dit systeem. Dit is een gedempte, aangedreven harmonische oscillator in twee dimensies, aangezien we een oscillerend wateroppervlak beschouwen wat voortkomt uit een aandrijving in de vorm van een oscillerende spijker. We kijken naar water dat in beweging is, waardoor onder andere de viskeuze eigenschappen van het water voor damping zullen zorgen. Voordat we dieper ingaan op resonantie in een tweedimensionaal vlak zullen we eerst gaan kijken naar een

paar versimpelde varianten in één dimensie.

7.1 Niet-gedempte harmonische oscillator

Dit soort oscillator wordt beschreven door de Wet van Hooke: $F = -kx$. Hierbij is F een tegenwerkende kracht[5]. In de vorm van een bewegingsvergelijking wordt dit: $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$. Deze vergelijking beschrijft het gedrag van een niet-gedempte harmonische oscillator, ofwel een oscillatie zonder enig energieverlies. Een oplossing voor de bewegingsvergelijking is: $x(t) = A\cos(\omega_0 t - \theta)$, voor $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Dit is de hoekfrequentie die het systeem zal aannemen nadat deze uit de evenwichtspositie is gebracht en wordt de niet-gedempte hoekfrequentie genoemd. Deze hoekfrequentie zal later van pas komen.

7.2 Aangedreven, niet-gedempte harmonische oscillator

Nu voegen we een externe kracht van oscillerende aard toe aan het systeem die werkt op een massa m . De bewegingsvergelijking, die voortkomt uit de tweede wet van Newton, neemt dan voor dit type oscillator de volgende vorm aan;

$$m\ddot{x} = -kx + F_0\cos(\omega t) \quad (71)$$

Hierbij is k de veerconstante in N/m , $F_0\cos(\omega t)$ is de periodieke aandrijvingskracht (in N), met F_0 de amplitude en ω de hoekfrequentie. Voordat we deze differentiaalvergelijking gaan oplossen gaan we ervanuit dat de we naar een stabiele toestand kijken, ofwel de harmonische oscillator is dermate lang aangedreven dat deze de frequentie van de aandrijving heeft overgenomen. In dit geval kunnen we de volgende ansatz maken;

$$x(t) = A\cos(\omega t - \theta) \quad (72)$$

Met θ het faseverschil tussen de aandrijving en de oscillator in radialen. Wanneer we dit substitueren in bovenstaande differentiaal vergelijking krijgen we;

$$-m\omega^2 A\cos(\omega t - \theta) + kA\cos(\omega t - \theta) = F_0\cos(\omega t) \quad (73)$$

We zien dat deze ansatz werkt voor $\theta = 0$ of $\theta = \pi$, aangezien we met behulp van de goniometrische eigenschap $-\cos(x) = \cos(x - \pi)$, de cosinus-termen tegen elkaar weg kunnen strepen. Voor de amplitude krijgen we vervolgens twee oplossingen;

$$A = \frac{F_0}{k - m\omega^2} = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2}, \theta = 0 \quad \omega < \omega_0 \quad (74)$$

$$A = \frac{F_0}{m\omega^2 - k} = \frac{F_0/m}{\omega^2 - \omega_0^2}, \theta = \pi \quad \omega > \omega_0 \quad (75)$$

Hierbij volgt de definitie voor ω_0^2 , $\omega_0 = \frac{k}{m}$, uit de bevindingen in paragraaf 7.1.

Als we vervolgens weer gaan kijken naar de oplossingen voor A zien we dat er een groei in amplitude ($A \rightarrow \infty$) is, ofwel resonantie, wanneer $\omega^2 \rightarrow \omega_0^2$. Met de definitie voor de niet-gedempte hoekfrequentie uit paragraaf 6.1, kunnen we dit schrijven als $\omega^2 \rightarrow \frac{k}{m}$. Ook zien we dat er een discontinuïteit zit in het faseverschil wanneer we de hoekfrequentie laten oplopen. Dit is mooi te visualiseren door een pen in uw hand te nemen en deze

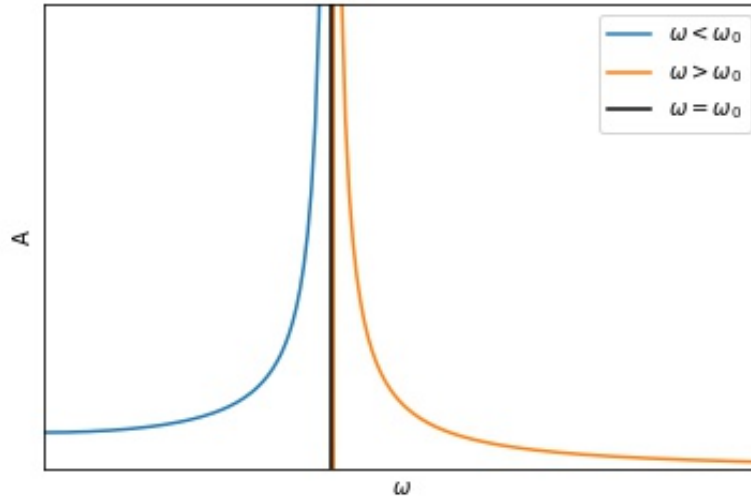


Figure 11: In het figuur is te zien dat voor beide grafieken, $\omega = \omega_0$ de verticale asymptoot is. Als we naar de definities voor A kijken zien we dat deze asymptoot overeen komt met $\omega = \omega_0$. Overigens geldt: $A = \frac{F_0}{k}$ voor $\omega = 0$, wat gelijk is aan de initiële verplaatsing uit de evenwichtstoestand.

zachtjes, in horizontale richting, op en neer te laten bewegen. In dit geval is uw hand de aandrijvende kracht en de pen zal als gevolg hiervan harmonisch gaan oscilleren. Als het goed is beweegt nu het uiteinde van de pen in dezelfde richting als uw hand, waardoor we kunnen spreken van een faseverschil van nul. Bij het opvoeren van de frequentie zal op een gegeven moment uw pen in tegengestelde richting van uw hand bewegen, wat overeenkomt met een faseverschil van π . Ook is het interessant om op te merken dat rond de frequentie waarbij deze overgang plaatsvindt met een minimale verplaatsing van uw hand de oscillatie van de pen een zeer grote amplitude aanneemt. Dit duidt op dat we rond de niet-gedempte hoekfrequentie resonantie kunnen verwachten.

Ook kunnen we in figuur 11 zien dat voor $\omega \rightarrow \omega_{0+}$ of $\omega \rightarrow \omega_{0-}$ de amplitude naar oneindig gaat. Dit is fysisch gezien onmogelijk, maar houdt in het achterhoofd dat we zijn uitgegaan van een ideale situatie. Door het weglaten van demping is het niet vreemd dat de amplitude drastisch groter wordt bij $\omega = \omega_0$. Het is echter wel een indicatie dat we, indien we een minimale demping toevoegen aan het systeem, rond de niet-gedempte hoekfrequentie ook een groei in amplitude, ofwel resonantie, kunnen waarnemen.

We kunnen het faseverschil (θ) ook op een andere manier bepalen. Hiervoor moeten we de bewegingsvergelijking (vergelijking (71)) omschrijven in termen van potentiële en kinetische energie. We beginnen door deze vergelijking te vermenigvuldigen met de snel-

heid (\dot{x});

$$\begin{aligned}
m\ddot{x}\dot{x} &= -kx\dot{x} + \dot{x}F_0\cos(\omega t) \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) &= \dot{x}F_0\cos(\omega t)
\end{aligned} \tag{76}$$

De ansatz hebben we gekozen als: $x(t) = A\cos(\omega t - \theta)$. Dit geeft voor de snelheid; $\dot{x} = -A\omega\sin(\omega t - \theta)$. Zie dat de eerste term in het linkerlid de tijdsafgeleide van de kinetische energie is. Om te kijken hoeveel potentiële energie er in een veer is opgeslagen kunnen we de aandrijvende kracht buiten beschouwing laten. Dit is immers een externe kracht en draagt daarom niet bij aan de interne opslag van energie in het systeem. We krijgen dan $F = -kx$, zoals we reeds hebben gezien. $F = -\nabla\psi$, met ψ de potentiaal en ∇ de gradiënt, welke in geval van dit 1-dimensionale systeem reduceert tot $\frac{\partial}{\partial x}$. De potentiaal, ofwel potentiële energie, is dan: $\frac{1}{2}kx^2$. Hieruit zien we dat de tweede term in het linkerlid de tijdsafgeleide van de potentiële energie is. Nu integreren we beide kanten over een periode (P);

$$\begin{aligned}
\int_0^P \frac{d}{dt}\left(E_{kin} + E_{pot}\right)dt &= -A\omega F_0 \int_0^P \sin(\omega t - \theta)\cos(\omega t)dt \\
E_{tot}(t = P) - E_{tot}(t = 0) &= -A\omega F_0 \int_0^P \sin(\omega t - \theta)\cos(\omega t)dt
\end{aligned} \tag{77}$$

F_0 is onafhankelijk van de tijd, doordat we uitgaan van een constante forcering. Hierdoor kunnen we F_0 buiten de integraal halen. Een verschil in de totale energie per periode, impliceert dat er per periode ΔE_{tot} energie in het systeem wordt gepompt door de arbeid die de externe aandrijvende kracht op het systeem verricht. Gedurende de tijd vordert zal er dus energie ophopen in het systeem. Uiteindelijk zal deze energie naar oneindig gaan. Dit is fysisch gezien niet realistisch, waardoor het verschil in totale energie noodgedwongen gelijk aan nul moet zijn. Het rechterlid in vergelijking (77) zal daarom ook gelijk moeten zijn aan nul;

$$\begin{aligned}
-A\omega F_0 \int_0^P \sin(\omega t - \theta)\cos(\omega t)dt &= 0 \\
-A\omega F_0 \int_0^P \cos(\omega t)(\sin(\omega t)\cos(\theta) - \cos(\omega t)\sin(\theta))dt &= 0 \\
-\frac{1}{2}A\omega F_0\cos(\theta) \int_0^P \sin(2\omega t)dt + A\omega F_0\sin(\theta) \int_0^P \cos^2(\omega t)dt &= 0 \\
\frac{1}{2}A\omega F_0\cos(\theta)[\cos(4\pi) - \cos(0)] + \frac{1}{2}A\omega F_0\sin(\theta) \int_0^P (1 + \cos(2\omega t))dt &= 0 \\
\frac{PA\omega F_0}{2}\sin(\theta) &= 0
\end{aligned} \tag{78}$$

We maken hier onder andere gebruik van het feit dat wanneer er een periodieke functie geïntegreerd wordt over één periode, de uitkomst altijd nul zal zijn. We hebben gesteld dat $F_0 \neq 0$ en $A = \omega = 0$ zijn triviale oplossingen. Er resteren twee mogelijke oplossingen voor de fase; $\theta = 0$ of $\theta = \pi$. Het is mooi om te zien dat we aan de hand van een andere invalshoek het resultaat krijgen wat we reeds hebben ondervonden.

7.3 Aangedreven, gedempte harmonische oscillator

Wanneer we de damping toevoegen aan het model, neemt vergelijking 71 de volgende vorm aan;

$$m\ddot{x} = -c\dot{x} - kx + F_0 e^{i\omega t} \quad (79)$$

Om de afleiding te vergemakkelijken gebruiken we de Formule van Euler; $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$. Dit mogen we doen doordat $Re(F_0 e^{i\omega t}) = F_0 \cos(\omega t)$. We zullen door deze notatie complexe oplossingen vinden, dus is het noodzakelijk dat we voor de uiteindelijke oplossing het reële deel moeten nemen. c is een positieve constante (in Ns/m) waarin de dempingseffecten zijn meegenomen. $-c\dot{x}$ representeert de tegenwerkende kracht ter gevolge van deze dempingseffecten. Als de snelheid (\dot{x}) groter wordt, zullen de dempingseffecten groter worden wat resulteert in een grotere tegenwerkende kracht. Vandaar dat deze term negatief moet zijn. In dit onderzoek zal c gedefinieerd zijn door de viscositeit van water en door de wrijvingsseffecten die optreden tussen de wand en de watermoleculen.

Voor een stabiele toestand maken we de ansatz: $x(t) = Ae^{i(\omega t - \theta)}$. Dit is een geldige oplossing voor vergelijking 79 indien we de constanten A en θ zo kunnen definiëren zodat de reële en imaginaire delen in deze vergelijking gelijk zijn. Bij substitutie van $x(t)$ krijgen we;

$$(-m\omega^2 A + i\omega c A + kA)e^{i(\omega t - \theta)} = F_0 e^{i\omega t} \quad (80)$$

$$-m\omega^2 A + i\omega c A + kA = F_0 e^{i\theta} \quad (81)$$

Nu stellen we de reële en imaginaire delen aan elkaar gelijk:

$$A(k - m\omega^2) = F_0 \cos(\theta) \quad (82)$$

$$\omega c A = F_0 \sin(\theta) \quad (83)$$

Hier kunnen we een vergelijking van maken door het rechterlid van vergelijking (83) te delen met het rechterlid van vergelijking (82), wat weergeeft hoe het faseverschil afhankelijk is van de hoekfrequentie;

$$\tan(\theta) = \frac{\omega c}{k - m\omega^2} \quad (84)$$

Wanneer we θ omschrijven als functie van ω krijgen we;

$$\theta(\omega) = \arctan\left(\frac{\omega c}{k - m\omega^2}\right) \quad (85)$$

Nu zullen we gaan kijken of deze definitie voor de fase overeenkomt met een eindige en constante hoeveelheid energie in het systeem. Ofwel; de netto energie die per periode in het systeem wordt gebracht is nul. We zullen hiervoor dezelfde lijn volgen als in paragraaf 7.2. We zullen daarom weer beginnen met de bewegingsvergelijking (vergelijking (79)) vermenigvuldigen met \dot{x} . Daarnaast zullen we in deze afleiding slechts kijken naar het reële deel van de vergelijking. De hoeveelheid energie is immers een meetbare grootheid en daarom reëel. De ansatz neemt dan de volgende vorm aan: $x = Re[Ae^{i(\omega t - \theta)}] = A\cos(\omega t - \theta)$. De tijdsafgeleide die hieruit volgt is: $\dot{x} = -A\omega\sin(\omega t - \theta)$. Bij deze afleiding zal er wederom gebruik worden gemaakt van $\int_0^P \sin(2\omega t)dt = \int_0^P \cos(2\omega t)dt = 0$.

$$m\ddot{x}\dot{x} = -c\dot{x}^2 - kx\dot{x} + \dot{x}F_0\cos(\omega t) \quad (86)$$

$$\int_0^P \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2\right)dt = -c \int_0^P \dot{x}^2 dt - \int_0^P \dot{x}F_0\cos(\omega t)dt$$

We hebben in paragraaf 7.2 reeds gezien dat het linkerlid van deze vergelijking gelijk aan nul moet zijn. Om het overzicht te behouden in de afleiding, zullen de twee integralen apart geëvalueerd worden.

$$\begin{aligned}
-c \int_0^P \dot{x}^2 dt &= -cA^2\omega^2 \int_0^P \sin^2(\omega t - \theta) dt = -\frac{cA^2\omega^2}{2} \int_0^P (1 - \cos(2\omega t - 2\theta)) dt \\
&= -\frac{cA^2\omega^2}{2} \int_0^P (1 - \cos(2\omega t)\cos(2\theta) - \sin(2\omega t)\sin(2\theta)) dt = -\frac{cA^2\omega^2 P}{2}
\end{aligned} \tag{87}$$

$$\begin{aligned}
-\int_0^P \dot{x}F_0\cos(\omega t) dt &= A\omega F_0 \int_0^P \sin(\omega t - \theta)\cos(\omega t) dt \\
&= A\omega F_0 \int_0^P \cos(\omega t)(\sin(\omega t)\cos(\theta) - \cos(\omega t)\sin(\theta)) dt \\
&= \frac{A\omega F_0}{2}\cos(\theta) \int_0^P \sin(2\omega t) dt - \frac{A\omega F_0}{2}\sin(\theta) \int_0^P (1 + \cos(2\omega t)) dt = \frac{A\omega F_0 P}{2}\sin(\theta)
\end{aligned} \tag{88}$$

Nu de uitkomsten van de twee integralen bekend zijn, is vergelijking (86) te schrijven als:

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{cA^2\omega^2 P}{2} + \frac{A\omega F_0 P}{2}\sin(\theta) \\
A &= \frac{F_0}{c\omega}\sin(\theta)
\end{aligned} \tag{89}$$

Het resultaat van deze afleiding en vergelijking (82) komen voort uit dezelfde reële benadering van het systeem. Voor de afleiding hebben we namelijk als ansatz het reële deel van de complexe ansatz $x = Ae^{i(\omega t - \theta)}$ genomen en vergelijking (82) representeert het reële deel van de bewegingsvergelijking nadat dezelfde complexe ansatz hierin is gesubstitueerd. De uitkomst van de afleiding hierboven en vergelijking (82) kunnen we hierdoor combineren;

$$\begin{aligned}
\frac{F_0}{c\omega}\sin(\theta)(k - m\omega^2) &= F_0\cos(\theta) \\
\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} &= \tan(\theta) = \frac{c\omega}{k - m\omega^2} \\
\theta &= \arctan\left(\frac{\omega c}{k - m\omega^2}\right)
\end{aligned} \tag{90}$$

Dit is vergelijking (85)! We hebben hiermee aangetoond dat de definitie voor de fase die we reeds hadden gevonden overeenkomt met een netto energie toevoer per periode van nul, mits F_0 constant is. Voor fases die niet voldoen aan vergelijking (85) geldt: $E_{tot}(t = P) - E_{tot}(t = 0) \neq 0$. Voor zulke fases zal er dus constante groei of demping van het golfpatroon optreden, waardoor het systeem instabiel zal zijn.

Nu kwadrateren we vergelijkingen (82) en (83) en sommeren we deze, zodat we de goniometrische identiteit $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ kunnen gebruiken.

$$A^2(k - m\omega^2)^2 + A^2\omega^2 c^2 = F_0^2 \tag{91}$$

Wanneer we A als functie van ω schrijven krijgen we het volgende;

$$A(\omega) = \frac{F_0}{[(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2]^{1/2}} \quad (92)$$

Met de definitie voor de niet-gedempte hoekfrequentie kunnen we dit schrijven als;

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\frac{c}{m})^2 \omega^2]^{1/2}} \quad (93)$$

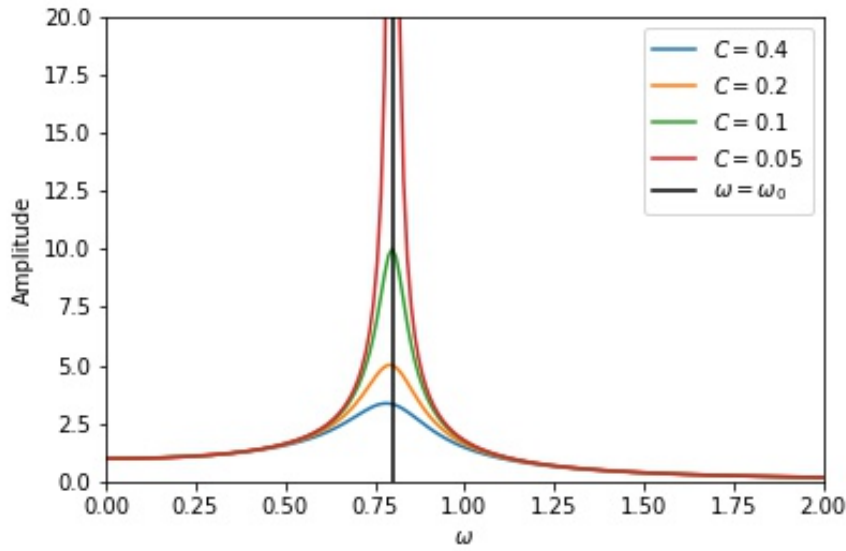


Figure 12: De amplitude is Ak/F_0 en $C = c/\sqrt{mk}$. Dit volgt uit het dimensieloos maken van vergelijking (79). Daarnaast geldt: $\omega_0 = 0.8$. In dit figuur zien we dat de piek steeds smaller en hoger wordt naarmate c afneemt. Dit duidt erop dat we een oneindig hoge en smalle piek zullen zien als $c \rightarrow 0$. Dit komt overeen met wat we hebben gezien in figuur 11 waar we zagen dat bij het ontbreken van demping ($c = 0$) de amplitude naar oneindig gaat rond de hoekfrequentie waarbij resonantie optreedt. De discontinuïteit in deze functie lijkt te ontbreken bij de grafieken in dit figuur. Dit komt doordat in de limiet van $c \rightarrow 0$, c altijd groter dan nul is en voor het realiseren van een discontinuïteit zal c nul moeten zijn.

In geval van resonantie is de amplitude maximaal. Voor het bepalen van de hoekfrequentie waarbij resonantie optreedt kunnen we daarom A afleiden en gelijk stellen aan nul: $\frac{dA}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_r} = 0$. Eerst definiëren we de afgeleide;

$$\frac{dA}{d\omega} = \frac{F_0}{2m} \frac{4(\omega_0^2 - \omega^2)\omega - 2(\frac{c}{m})^2\omega}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\frac{c}{m})^2\omega^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (94)$$

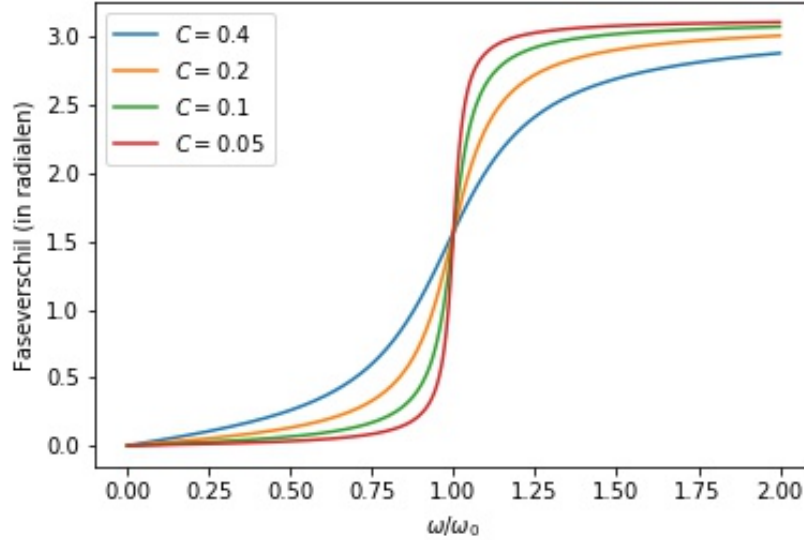


Figure 13: In dit figuur is het faseverschil (θ) weergegeven voor vier dempingsconstanten. Wederom geldt $C = c/\sqrt{mk}$. We zien voor alle dempingsconstanten een toename in faseverschil, tussen de twee asymptoten $\theta = 0$ en $\theta = \pi$, waarbij de grootste stijging plaatsvindt rond $\omega = \omega_0$. Dit komt overeen met wat we hebben gezien in de niet-gedempte situatie ($c = 0$). In vergelijking (92) en vergelijking (93) zagen we dat voor $\omega < \omega_0$ het faseverschil gelijk is aan nul. Voor $\omega > \omega_0$ was dit gelijk aan π . Wat opvalt is dat het faseverschil abrupter toeneemt naarmate de dempingsconstante afneemt. We kunnen dan verwachten dat voor $c \rightarrow 0$ de faseovergang nagenoeg discontinu zal zijn in $\omega = \omega_0$. Dit komt overeen met wat we hebben gezien in figuur 11, waarbij we een discontinuïteit aantreffen in het faseverschil bij dezelfde hoekfrequentie.

Wanneer we deze afgeleide evalueren in de hoekfrequentie waarbij resonantie optreedt ($\omega = \omega_r$) kunnen we dit schrijven als;

$$\omega_r \left(2\omega_0^2 - 2\omega_r^2 - \left(\frac{c}{m} \right)^2 \right) = 0 \quad (95)$$

Hieruit volgt één oplossing voor ω_r , aangezien $\omega_r = 0$ triviaal is.

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{c}{m} \right)^2} \quad (96)$$

Aan de hand van deze definitie zien we dat in de limiet van $c \rightarrow 0$, $\omega_r \rightarrow \omega_0$. Dit komt overeen met wat we hebben gezien bij de niet-gedempte harmonische oscillator ($c = 0$) waar er resonantie optrad bij $\omega = \omega_0$. Ook is te zien dat voor een toenemende dempingsconstante de hoekfrequentie waarbij resonantie optreedt afneemt. Dit komt overeen met figuur 12, waar het maximum van een grafiek steeds verder naar rechts verschuift ten opzichte van de lijn $\omega = \omega_0$, voor een toenemende c .

Door vergelijking (93) te combineren met vergelijking (96) vinden we een uitdrukking voor de amplitude in geval van resonantie.

$$A(\omega_r) = \frac{F_0/m}{\left[\left(\omega_0^2 - \omega_r^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{c}{m} \right)^2 \right)^2 + \left(\frac{c}{m} \right)^2 \omega_r^2 \right]^{1/2}} = \frac{2F_0}{c \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{c}{m} \right)^2 + \omega_r^2}} \quad (97)$$

$$= \frac{2F_0}{c \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{1}{4} \left(\frac{c}{m} \right)^2}}$$

7.4 Resonantie in een cylinder

Zoals reeds al is genoemd wordt resonantie gekenmerkt door een significante groei in amplitude. Om te zoeken naar hoekfrequenties waarbij resonantie optreedt, zullen we dus moeten kijken bij welke hoekfrequentie $\eta(r, t)$ (vergelijking (57)) opblaast. Dit gebeurt wanneer $\frac{Y'_n(k)}{J'_n(k)} \rightarrow \infty$, ofwel; $J'_n(k) \rightarrow 0$. Als we kijken naar vergelijking (32) gebeurt dit wanneer;

$$J_{n-1}(k) = J_{n+1}(k) \quad (98)$$

Nu is het een kwestie om per orde (n) te bepalen bij welke golfgetallen deze gelijkheid geldt. Dit is weergegeven in tabel 1.

n=0	n=1	n=2	n=3
19.24	18.44	19.21	18.39
20.81	20.02	20.78	19.97
22.38	21.58	22.35	21.54

Table 1: De oplossingen k voor vergelijking (98) per n -de component. Het domein van golfgetallen loopt van $k = 18 \text{ rad}/R$ tot $k = 23 \text{ rad}/R$, aangezien dit in de buurt ligt van het golfgetal waarbij we resonantie verwachten ($k = 20.85 \text{ rad}/R$). Dit is immers het golfgetal waarbij we een groei in amplitude waarnemen in de video.

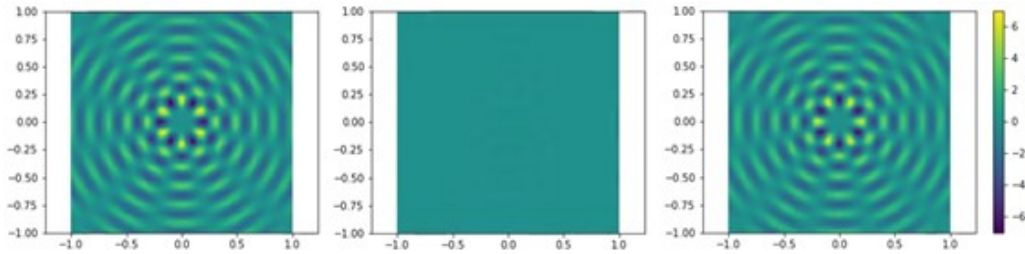


Figure 14: In dit figuur beschouwen we hetzelfde systeem als in figuur 10. Wederom geldt van links naar rechts: $\omega t = 0$, $\omega t = \frac{\pi}{2}$ en $\omega t = \pi$. Het golfgetal (k) is zo gekozen dat $J_5(k) = J_7(k)$, wat overeen komt met $k = 19.00 \text{ rad}/R$. Dit betekent dat de $n = 6$ -component in de cilindrische golfexpansie zal opblazen en daarom zal domineren over de andere componenten. Zie ook dat hierom het bereik anders is geschaald. Door de hoekafhankelijkheid in vergelijking (57) is het naar verwachting dat we zes periodes kunnen onderscheiden in de ϕ -richting.

In figuur 14 zijn de twee puntbronnen niet meer van elkaar te onderscheiden. De maximale amplitude van golven die deze puntbronnen uitzenden ligt rond de 0.15 en wordt daarom compleet overschaduwde door de grotere amplitude van de $n = 6$ -component, wiens maximale amplitude rond de 177 ligt. Het valt op dat het golfpatroon, afkomstig van een hoekafhankelijke forcering, in zekere zin rotatiesymmetrisch is. Wanneer we kijken naar (57) zien we dat de rotatiesymmetrie wordt bepaald door $\cos(n(\phi - \phi'))$. De nulde component representeert dus een volledig rotatiesymmetrisch golfpatroon. Voor $n = 2$ kan het een systeem van twee tegengestelde puntbronnen twee keer over een hoek van π worden gedraaid voor het verkrijgen van hetzelfde golfpatroon. Voor $n = 4$ is dit vier keer over een hoek van $\frac{2\pi}{4}$. We zien hieruit dat bij optelling van de n -de component van twee puntbronnen, het resulterende golfpatroon een rotatiesymmetrie van orde n heeft. Voor $n = 6$ betekent dit dat het golfpatroon zes keer rotatiesymmetrisch is onder een hoek van $\frac{\pi}{3}$. Doordat de $n = 6$ -component domineert boven alle andere componenten (zoals hierboven is genoemd), is dit inderdaad wat we zien in figuur 14. Ook is het interessant om op te merken dat de oneven n 's niet bijdragen aan het golfpatroon bij superpositie van twee golfpatronen van tegengestelde puntbronnen. Wanneer de hoek voor de ene puntbron wordt gegeven door ϕ' is de hoek voor de andere puntbron gelijk aan $\phi' + \pi$. Voor een oneven n zit er altijd een verschil van π tussen het argument van beide cosinussen. Door $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ geeft de superpositie van twee puntbronnen in dit geval nul. Voor resonantie door een andere dominante even component n vinden we een dergelijk golfpatroon als in figuur 14. Hierbij is het verschil, naast een verschillende golflengte, dat er n periodes zijn te onderscheiden in de ϕ -richting in plaats van zes.

Per orde n zijn een aantal oplossingen mogelijk voor $J_{n-1}(k) = J_{n+1}(k)$. In tabel 1 is te zien dat binnen dit domein alleen al voor de eerste vier ordes een dozijn aan oplossingen zijn. Indien de oplossing voor het model met een cilindrische wand (vergelijking 57) daadwerkelijk het golfpatroon beschrijft dat we in de video zien, zouden we voor meerdere frequenties (verschillende golfgetallen komen overeen met verschillende frequenties) resonantie verwachten. Echter vinden we in de video voor slechts één frequentie een golfpatroon dat resonantie vertoont. Daarnaast kunnen we in figuur 2 zien dat het golfpatroon bij resonantie niet bepaald een dominante component n vertoont. Het golfpatroon dat we zien vertoont immers geen rotatiesymmetrie van orde n .

8 Conclusie

Nu zullen we met de bevindingen uit voorgaande theorie onderbouwen wat het staande golfpatroon veroorzaakt en waarom bij dit staande golfpatroon een significante groei in amplitude ten opzichte van het weglopende golfpatroon is waar te nemen. Omwille van de focus van dit onderzoek, namelijk het vinden van analytische oplossingen voor golfpatronen, is de aanname gemaakt dat de golven in de video lange golven ($\lambda \gg h$) zijn. Dit is gedaan ondanks het feit dat de gevonden waterdiepte en golflengtes anders aantonen. Door deze aanname kon een versimpelde vorm van golftheorie, namelijk lange-golftheorie, worden gebruikt, wat het vinden van deze analytische oplossingen mogelijk maakte.

Voor het vinden van een antwoord op de onderzoeksvragen hebben we twee verschillende benaderingen voor het domein van een oscillerende puntbron in een vlak ge-

bruikt. Bij het eerste systeem hebben we een oscillerende puntbron in een oneindig vlak beschouwd. Bij dit systeem ontbreekt dus een cilindrische wand, waardoor de golven, en daardoor de energie, naar het oneindige kunnen vloeien. Door de gevonden golf functie die dit systeem representeert (vergelijking (40)) te animeren in Python vinden we slechts golf patronen met een weglopend karakter. Daarnaast ontbreekt een significante groei in amplitude in de animaties. Voor een significante groei in amplitude is een toename in energie, die opgeslagen is in het systeem, nodig. Het is logisch dat deze toename in energie niet realiseerbaar is, aangezien de energie moeiteloos kan wegvloeien bij het ontbreken van een wand. Wanneer we kijken naar de oplossing voor dit systeem (vergelijking (40)), is dan ook te zien dat η niet de mogelijkheid heeft om een significant grote waarde aan te nemen. Hoewel dit een slecht model is voor de staande golven met een vergrootte amplitude geeft het wel een realistisch resultaat voor de weglopende golven in de video.

Bij het tweede systeem hebben we een oscillerende puntbron in een cylinder beschouwd. Dit had als gevolg dat naast de weglopende golven ook rekening gehouden moest worden met teruggekaatste golven. De weglopende golven werden uitgedrukt in een cilindrische golfexpansie van de partiële oplossing (welke de singulariteit omvat) en de teruggekaatste golven in de vorm van een cilindrische golfexpansie voor de homogene oplossing. De oplossing die uiteindelijk hieruit werd verkregen representeert staande golven. Deze oplossing omvat daarom niet het lopende karakter dat we voor de meeste golfgetallen waarnemen in de video. Wel heeft de oplossing voor dit systeem, in tegenstelling tot de oplossing voor het systeem zonder cilindrische wand (vergelijking (40)), de mogelijkheid tot een opgeblazen amplitude (buiten de puntbron), wat duidt op de mogelijkheid tot resonantie. In deze zin zouden we kunnen stellen dat de cilindrische wand de oorzaak is van de significante groei in amplitude die we waarnemen in de video. Daarnaast is het mooi om te zien dat in het model waar staande golven optreden er een mogelijkheid tot resonantie is. De staande golven die we in de video waarnemen gaan immers gepaard met een significante groei in amplitude, ofwel resonantie.

9 Discussie

Naast dat beide theoretische modellen overeenkomsten vertonen met de waarnemingen in de video, zijn er ook een aantal verschillen. Het model zonder cilindrische wand vertoont slechts weglopende golf patronen en niet de staande golven die we voor een bepaalde frequentie in de video waarnemen. Daarnaast vertoont het model met cilindrische wand slechts staande golf patronen en niet de weglopende golf patronen die we voor de meeste frequenties waarnemen. Hieruit kunnen we stellen dat het systeem dat we beschouwen in de video niet door slechts een van de twee theoretische modellen kan worden beschreven. Ook is er een verschil in het golf patroon te zien tussen dit model en de video in geval van resonantie. Zoals reeds is genoemd is in de video geen rotatiesymmetrie van een bepaalde orde te herkennen. Volgens het model met een cilindrische wand zou dit wel het geval moeten zijn (zie figuur 14). We kunnen daarom twijfels trekken bij hoe goed dit model de resonantie in de video beschrijft. Wellicht is de vergrootte interne opslag van energie die benodigd is voor resonantie aan de visceuze effecten van water te danken in plaats van aan de teruggekaatste golven. We hebben in paragraaf 7.3 gezien dat bij een gedempte, aangedreven harmonische oscillator resonantie plaatsvindt rond de eigenfrequentie (zie figuur 12). De demping zou dan veroorzaakt kunnen worden door de visceuze effecten,

ofwel wrijvingseffecten, in plaats van de teruggekaatste golven. Voor een aanname waarbij teruggekaatste golven kunnen worden verwaarloosd zal de straal van de bak met water veel groter moeten zijn dan de golflengte. De straal van de bak is voor ons onbekend, aangezien de rand van de bak in de video immers niet is waar te nemen. Hierdoor is deze optie niet uit te sluiten. Het voordeel van deze aanname is dat de weglopende golven en de resonantie bij slechts één frequentie goed te verklaren zijn. De benadering van golven in een oneindig vlak, wat overeenkomt met een weglopend golfpatroon, is voor een grotere bak, ofwel groter oppervlak, realistischer. Het grote aantal resonantiefrequenties, die het gevolg zijn van de mogelijkheid tot terugkaatsing, zullen bij deze benadering verdwijnen. Hierdoor blijft slechts één frequentie over waarbij resonantie plaats kan vinden, namelijk de eigenfrequentie van het wateroppervlak.

De verschillen die we aantreffen tussen de twee theoretische modellen en de video zijn wellicht te wijten aan enkele aannames die zijn gemaakt. Zo hebben we de oppervlaktespanningseffecten verwaarloosd ten opzichte van de zwaartekrachtseffecten. We hebben gezien dat de zwaartekrachtseffecten zeker zwaarder meewegen dan de oppervlaktespanningseffecten, maar dat de laatste hierdoor verwaarloosbaar is, is niet een bijzonder sterke aanname. Daarna is de aanname gemaakt dat we met lange golven te maken hebben ($kh \ll 1$) om op een analytische wijze een antwoord te kunnen vinden op de onderzoeksvragen. Echter kan kh waardes aannemen tussen de $3.14 < kh < 7.54$, waardoor de aanname dat $kh \ll 1$ redelijk radicaal is. Daarnaast is in beide modellen de aanname gemaakt dat er geen energie verloren gaat in de vorm van wrijving, ofwel; de visceuze effecten hebben we verwaarloosd. In de toekomst zou het interessant zijn een differentiaalvergelijking op te stellen, waarbij al deze aannames achterwege worden gelaten. In dit geval zal er gebruik moeten worden gemaakt van de golfvergelijking (in plaats van de lange golfvergelijking) en rekening moeten worden gehouden met oppervlaktespanningseffecten en de visceuze effecten van water. Het vinden van een oplossing voor de differentiaalvergelijking zal enorm complex zijn. Echter zal deze oplossing ongetwijfeld beter overeenkomen met wat we zien in de video.

Referenties

- [1] Paul de Kort;
<https://www.pauldekort.nl/>
- [2] Julius Instituut, Universiteit Utrecht, *Dictaat Data-acquisitie en Toegepaste analyse (2017-2018)*, *Data-Verwerking*, pag. 56-58
- [3] Mark Viola, *Green's function for Helmholtz equation for the plane with a hole*;
<https://math.stackexchange.com/questions/1373910/greens-function-for-helmholtz-equation-for-the-plane-with-a-hole>, 2015
- [4] Digital Library of Mathematical Functions (DLMF), Bessel Functions;
<https://dlmf.nist.gov/10>
- [5] Fowles, G.R. en Cassiday, G.L, *Analytical Mechanics*, 2004
- [6] Whitham, G.B., *Linear and Nonlinear Waves*, 1927, pag. 403,404
- [7] Watson, G.N., *Theory of Bessel Functions*, 1966, pag. 358,359