

VAKD1+2, Educatief Ontwerponderzoek

Jeroen Maes

3021068

Begeleider: Ad Mooldijk

Titel:

Geïntegreerd differentiaalrekening-kinematica onderwijs

Inhoud:

□:	Abstract	2
I:	Introductie	3
II:	Theorie	4
III:	Leerprobleem en onderzoeksvraag	8
IV:	Ontwerp: 3-lessen-op-een-rij en HLT	9
V:	Evaluatiemethode	16
VI:	Resultaten, conclusie en discussie	19
VII:	Visie	28
VIII:	Reflectie op het leerproces	29
IX:	Literatuurlijst	31

□: Abstract

Als gevolg van weinig overleg tussen de secties en verschillen in taal en notatie sluiten de programma's van wiskunde en natuurkunde op het Goois lyceum niet op alle punten even goed op elkaar aan. Twee onderwerpen die elkaar beter aan kunnen vullen zijn de kinematica vanuit de natuurkunde en de afgeleide vanuit de wiskunde. In klas 4 vwo wiskunde B bleek uit vooronderzoek dat conceptueel begrip van de afgeleide bij leerlingen beperkt is. Veelvoorkomende problemen waar zij tegen aanliepen bij het leren van de afgeleide zijn *weinig inzicht in achterliggende concepten, de overgang van lokaal naar globaal, en toepassen en transfer*. In mijn onderzoek wordt dit leerprobleem gedeeltelijk opgelost door geïntegreerd differentiaalrekening-kinematica onderwijs aan te bieden in de vorm van door mij ontworpen 3-lessen-op-een-rij, bestaande uit een practicum, diverse opgaven over de afgeleide in een kinematica context en een onderwijsleergesprek over de overeenkomsten en verschillen tussen de afgeleide bij wiskunde en natuurkunde. Hiermee wordt aangesloten op de onderzoeksvraag: *in hoeverre verminderen de veelvoorkomende problemen die leerlingen hebben bij het leren van de afgeleide gedurende een reeks van 3-lessen-op-een-rij waarin zij geïntegreerd differentiaalrekening-kinematica onderwijs aangeboden hebben gekregen?* Aan dit onderzoek nemen drie focusleerlingen deel, die beogen klas 4 vwo wiskunde B goed te representeren. De ingezette middelen voor dataverzameling zijn uitwerkbijlages en interviews. De data worden geanalyseerd door een hypothetisch en actueel leertraject te vergelijken. Uit het onderzoek komt naar voren dat de veelvoorkomende problemen die de (focus)leerlingen hebben bij het leren van de afgeleide verminderen gedurende de reeks van 3-lessen-op-een-rij.

I: **Introductie**

Er vindt op het Goois lyceum onderling weinig overleg plaats tussen de secties natuurkunde en wiskunde. Dit heeft tot gevolg dat de onderwijscurricula van wiskunde en natuurkunde inhoudelijk niet op alle punten evengoed op elkaar aansluiten. Daarnaast sluiten de gebruikte wiskundige taal en notatie bij wiskunde en natuurkunde niet altijd goed op elkaar aan. Laatstgenoemde wordt ook veroorzaakt doordat de gebruikte lesmethodes reeds andere notaties hanteren. Dit alles is jammer, aangezien leerlingen hierdoor minder in staat lijken te zijn verbanden te leggen tussen beide vakken en kennis van het ene vak niet altijd nuttig in kunnen zetten bij het andere vak.

Twee onderwerpen die elkaar, mijns inziens, beter aan zouden kunnen vullen zijn de kinematica vanuit de natuurkunde en de afgeleide vanuit de wiskunde. Vaardigheden met differentiëren en in de kinematica zijn vereist voor respectievelijk vwo wiskunde B en vwo natuurkunde leerlingen en worden gespecificeerd in respectievelijk subdomeinen C1/C2 en subdomein C1 van de examenprogramma's wiskunde en natuurkunde (Slo, 2019, p. 11-12)(Slo 2, 2019, p. 20-21). Een s,t -diagram, de gemiddelde snelheid over een tijdsinterval en de hellingen op de opeenvolgende tijdstippen (de snelheden op die opeenvolgende tijdstippen) zijn een mooie opstap naar de definitie van de afgeleide.

Mijn ervaring vorig jaar (2019-2020) met het aanleren van de afgeleide in een 4 vwo wiskunde B klas is dat zij het berekenen van de afgeleide zien als het toepassen van een recept met rekenregels, zonder goed te begrijpen wat de afgeleide echt is. Uit dit vooronderzoek bleek namelijk dat bij de opgaves uit Getal en Ruimte (Dijkhuis, 2014) waarin de afgeleide met de definitie moest worden berekend leerlingen niet wisten hoe ze moesten beginnen, terwijl de opgaves waarbij de afgeleide moest worden berekend met een verzameling gegeven rekenregels in veel gevallen correct werden uitgevoerd. Doordat de definitie van de afgeleide niet is ingebed in of vooraf wordt gegaan door een natuurkundige context waarbij leerlingen zich iets voor kunnen stellen bij wat de afgeleide eigenlijk is, lijkt conceptueel inzicht verloren te gaan.

II: Theorie

In deze sectie zal de relevante theorie voor dit onderzoek worden geïntroduceerd.

Afstemming van wiskunde en natuurkunde onderwijs:

Grafieken spelen een belangrijke rol bij het leren van en communiceren binnen de wiskunde en natuurwetenschappen, maar bij verschillende vakken heersen echter vaak verschillende conventies omtrent het maken en gebruiken van grafieken (Doorman en Eijkelhof, 2017). Voor leerlingen kan dit verwarrend zijn en de samenhang tussen de bèta vakken belemmeren.

Een poging om de samenhang tussen wiskunde en natuurkunde te verbeteren is het rapport *Afstemming wiskunde-natuurkunde tweede fase* van de SLO (Konijnenberg et al., 2015, in Doorman en Eijkelhof, 2017). De werkgroep beveelt aan dat bij alle bètavakken in het algemeen en bij natuurkunde en wiskunde in het bijzonder op eenzelfde manier met grafieken wordt omgegaan. Daartoe is volgens de werkgroep in ieder geval nodig:

- het kennen van elkaars taalgebruik;
- nadrukkelijke aandacht bij wiskunde voor de verwerking van meetresultaten en grafieken;
- nadrukkelijke en afgestemde aandacht in beide vakken voor het analyseren en interpreteren van grafieken;
- het leren van standaardverbanden.

Problemen en misvattingen bij het leren van de afgeleide:

Een aantal problemen en misvattingen die zich voordoen bij het leren van het concept afgeleide zijn (Roorda en Daemen, in Drijvers, 2018):

- *Weinig inzicht in achterliggende concepten.* Er wordt bijvoorbeeld gevraagd naar een momentane verandering, maar studenten lezen de y-waarde af. Ook heeft men moeite met het interpreteren van bijvoorbeeld $dy/dx = -2$.
- *De overgang van lokaal naar globaal.* Aanvankelijk wordt de afgeleide vaak geïntroduceerd als een lokaal benaderingsproces, waarmee de helling van de raaklijn aan de grafiek van een functie f in een vast punt $(a, f(a))$ wordt bepaald. Daarbij speelt het proces van het verkleinen van de differentie in de horizontale richting een rol, in feite een limietproces. In tweede instantie krijgt de afgeleide echter een globaal karakter, want de helling kun je bepalen in elk punt waar de functie differentieerbaar is.
- *Toepassen en transfer.* Leerlingen vinden het moeilijk om kennis uit een schoolvak toe te passen in een ander schoolvak. Ze zien bijvoorbeeld vaak pas later in dat bepaalde natuurkundeformules uit elkaar zijn af te leiden door te differentiëren.

De eerste twee genoemde problemen zijn ook herkenbaar bij het reeds onder 1 genoemde vooronderzoek. Het niet kunnen toepassen van de definitie van de afgeleide functie duidt namelijk op *weinig inzicht in achterliggende concepten*. Mogelijk worden de concepten limiet en differentiequotiënt niet voldoende goed

begrepen. Tevens kan het niet kunnen toepassen van de definitie van de afgeleide een indicatie zijn dat *de overgang van lokaal naar globaal* lastig bleek voor de leerlingen. De limiet die de afgeleide bepaalt is namelijk gedefinieerd voor iedere x (globaal), terwijl de differentiaal quotiënten in eerdere opgaven steeds in een vast punt werden bepaald (lokaal).

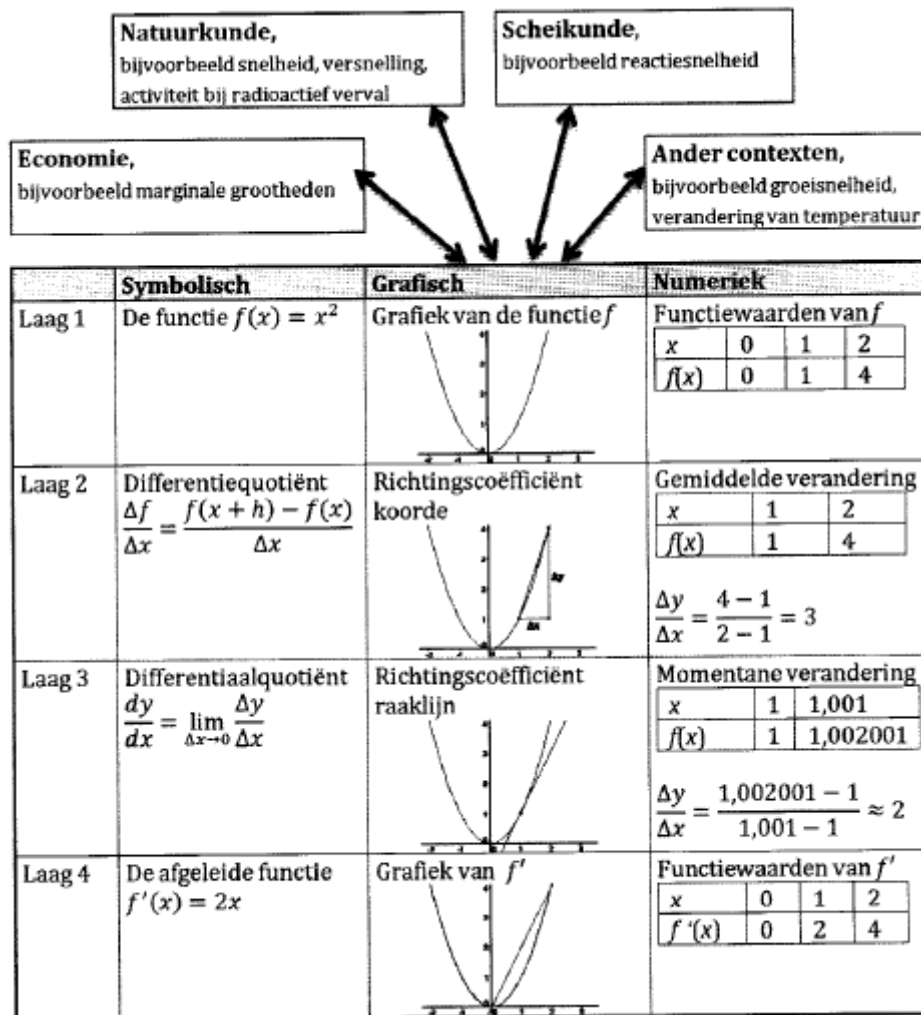
Een cognitief schema voor de afgeleide:

Kennis van de afgeleide in het langetermijngeheugen (kennis die beklijft) is alleen toegankelijk als die geordend is in *cognitieve schema's*. Dit zijn "mentale structuren, die we ons kunnen voorstellen als netwerken van knooppunten (feiten, concepten, procedures, beelden) die onderling verbonden zijn door relaties ertussen" (Drijvers, 2018, pp. 26).

Een cognitief schema voor de afgeleide is de samenkomst en onderlinge versterking van de volgende aspecten (Roorda en Daemen, in Drijvers, 2018):

- *Verschillende representaties.* Om het concept afgeleide goed te begrijpen en in probleemsituaties toe te passen, moeten leerlingen de relaties zien tussen de symbolische, de grafische, de numerieke en de verbale representatie van de afgeleide.
- *Lagen binnen een representatie.* Een functie en zijn afgeleide zijn beide onderdeel van dezelfde symbolische representatie, maar betekenen iets anders en behoren derhalve ook tot een verschillende laag binnen de symbolische representatie. Ook zijn de raaklijn aan een grafiek en de grafiek van de afgeleide beide grafische representaties, maar wel op een verschillende laag. Leerlingen moeten met deze verschillende lagen in aanraking komen om tot goed begrip te komen van het concept afgeleide.
- *Toepassingen en contexten.* Het concept afgeleide wordt gebruikt in andere schoolvakken, zoals de natuurkunde, scheikunde en economie. Leerlingen moeten met zo veel mogelijk van deze toepassingen en contexten in aanraking komen om tot een zo goed mogelijk begrip te komen van de afgeleide.

De drie hierboven genoemde aspecten en hun relaties worden in figuur 1 nogmaals weergegeven:



Figuur 1: lagen en representaties van de afgeleide

Figuur 1 maakt duidelijk dat een cognitief schema voor de afgeleide de genoemde problemen en misvattingen die zich voordoen bij het leren van het concept afgeleide minimaliseert. Door leerlingen voldoende te laten trainen met andere toepassingen en contexten zullen ze hun kennis van de afgeleide daar sneller inzetten, waardoor *transfer* plaatsvindt. Wanneer de overgang van laag 3 naar laag 4 goed begrepen wordt (voor de verschillende representaties) zal *de overgang van lokaal naar globaal* ook beter begrepen worden. Tot slot zal een dergelijk cognitief schema voor de afgeleide ook het *inzicht in achterliggende concepten* verbeteren.

Geïntegreerd differentiaalrekening-kinematica onderwijs:

Van Streun en Sinnema (1984, in Drijvers, 2018) hebben in een onderwijsexperiment de natuurkunde- en wiskundelessen rondom differentiaalrekening en kinematica op elkaar afgestemd. In de wiskundelessen werd onder andere ingegaan op de snelheidscontext. Het bleek dat leerlingen die aan dit experiment deelnamen bij het natuurkundeproefwerk significant hoger scoorden dan de controlegroep die de gewone wiskunde- en natuurkundelessen kregen.

Daarna is in het Profi-project (Doorman, 2000) de nieuwe VWO-wiskunde B voor de twee N-profielen in de Tweede Fase ontwikkeld. Hierbij is bij de differentiaalrekening gebruik gemaakt van natuurkundige contexten. Uit het experiment bleek dat geïntegreerd differentiaalrekening-kinematica onderwijs de begripsontwikkeling op beide terreinen ten goede komt en waarborgt dat de onderwerpen geen gescheiden werelden blijven.

Echter bleek ook dat veel leerlingen problemen hadden bij de overgang in het lesmateriaal (Kindt, 1997) van grafische redeneringen naar het limietproces met het differentiequotiënt. Hier is ruimte voor verbetering. Doorman (persoonlijke communicatie, september 2020) geeft aan dat dit probleem mogelijk (gedeeltelijk) opgelost kan worden door met leerlingen een onderwijsleergesprek aan te gaan over de overeenkomsten en verschillen tussen grafische representaties van de afgeleide bij wiskunde en natuurkunde.

Concluderend, maakt de theorie duidelijk dat geïntegreerd differentiaalrekening-kinematica onderwijs vermoedelijk goed bijdraagt aan een cognitief schema voor de afgeleide bestaande uit de voorheen beschreven aspecten. Te meer wanneer dit geïntegreerde differentiaalrekening-kinematica onderwijs zo veel mogelijk gebruik maakt van verschillende representaties van de afgeleide, binnen de representaties aandacht besteed aan de verschillende lagen en hun overgangen, en een onderwijsleergesprek over overeenkomsten en verschillen tussen grafische representaties van de afgeleide bij wiskunde en natuurkunde bevat.

III: Leerprobleem en onderzoeksvraag

In deze sectie zal ik eerst het leerprobleem introduceren. Om tot een gedeeltelijke oplossing van het leerprobleem te komen formuleer ik vervolgens de onderzoeksvraag.

Het leerprobleem:

Het leerprobleem waar mijn onderzoek zich derhalve op richt zijn de problemen waar leerlingen tegenaan lopen bij het leren van het concept afgeleide. Hierbij beperk ik me tot de eerder beschreven problemen: *weinig inzicht in achterliggende concepten, de overgang van lokaal naar globaal, en toepassen en transfer*. Genoemde problemen hangen met elkaar samen. Ik noem deze problemen vanaf hier veelvoorkomende problemen (met het begrijpen van de afgeleide).

De onderzoeksvraag:

Ik wil bovengenoemd leerprobleem in mijn 4 vwo wiskunde B klas gedeeltelijk oplossen door het in de theorie beschreven geïntegreerd differentiaalrekening-kinematica onderwijs aan te bieden in de vorm van 3-lessen-op-een-rij. Dit zou bij moeten dragen aan een samenhangend cognitief schema voor de afgeleide, zodat de veelvoorkomende problemen met het begrijpen van de afgeleide minder op zullen treden.

Dit brengt me tot de volgende **onderzoeksvraag**:

In hoeverre verminderen de veelvoorkomende problemen die leerlingen hebben bij het leren van de afgeleide gedurende een reeks van 3-lessen-op-een-rij waarin zij geïntegreerd differentiaalrekening-kinematica onderwijs aangeboden hebben gekregen?

In geval de veelvoorkomende problemen verminderen kan dit een indicatie zijn dat een betere afstemming van het wiskunde- en natuurkundecurriculum leidt tot meer leerrendement bij leerlingen, ook voor gebieden buiten de differentiaalrekening en kinematica.

IV: Ontwerp: 3-lesse-op-ee-rij en HLT

In deze sectie komen achtereenvolgens de onderbouwing van de lesplannen aan de hand van het Model Didactische Analyse en het aan de 3-lesse-op-ee-rij gekoppelde hypothetische leertraject (HLT) aan de orde.

De 3-lesse-op-ee-rij:

De lesplannen van de 3-lesse-op-ee-rij in bijlages I t/m III kunnen globaal worden opgedeeld in zes fases, waarbij elk van de zes fases een eigen thema heeft:

Les	Start – Eind	Fase	Thema
1	14:20-14:40	1	Startmeting
	14:40-15:10	2	Practicum
2	14:20-14:35	3	Gemiddelde snelheid
	14:35-15:10	4	Van globaal naar lokaal en andersom
3	14:20-14:50	5	Vergelijken van de afgeleide bij wiskunde en natuurkunde
	14:50-15:10	6	Eindmeting

Deze opdeling van de 3-lesse-op-ee-rij in fases maakt het duidelijk ze in een doorlopende leerlijn zijn geplaatst volgens de constructivistische leertheorie (Geerts, 2016, pp. 62-65). De doorlopende leerlijn wordt verder duidelijk gemaakt bij de onderbouwing van het HLT. Deze constructivistische benadering van het leren is in de praktijk van het onderwijs te herkennen aan vier sleutelkenmerken (Geerts, 2016, pp. 64):

1. De lerende heeft een actieve rol.
2. Voorkennis is het vertrekpunt voor nieuwe informatie.
3. Een leerproces is een individueel proces.
4. Leren is een sociale ervaring.

Deze 3-lesse-op-ee-rij zijn ingericht volgens het didactisch analysemodel, zoals beschreven in paragraaf 2.1.3 van het boek 'handboek voor leraren' (Geerts, 2016, pp. 74-75). In dit kader worden na elkaar de beginsituatie van de leerlingen, de leerdoelen, de activiteiten en de bijdrage van de activiteiten aan het behalen van de leerdoelen, en de vaststelling van de leeropbrengst van de les besproken.

De beginsituatie (niveau en kenmerken) van de leerlingen:

Klas 4 vwo wiskunde B bestaat uit 19 leerlingen. De leerlingen hebben kennis van de afgeleide functie, zoals uitgewerkt in de methode Getal en Ruimte vwo B deel 1 (Dijkhuis et al., 2014) en beschreven in het vooronderzoek in sectie II. Normaliter is om wiskunde B te kunnen volgen in klas 4 vwo hier in klas 3 vwo voor gekozen, onder voorwaarde dat het eindgemiddelde 6,5 of hoger is. Als gevolg van gemiste toets momenten door COVID-19 is echter door de schoolleiding van het Goois

lyceum besloten dat eind schooljaar 2019-2020 alle 3 vwo leerlingen vrij zijn wiskunde B te kiezen in 4 vwo, ongeacht hun eindgemiddelde. Dit heeft tot gevolg dat ook een aantal leerlingen met bijvoorbeeld onvoldoende eindcijfers voor wiskunde in 3 vwo voor wiskunde B in 4 vwo heeft gekozen. Het gemiddelde inhoudelijke niveau, zo blijkt ook uit resultaten voor de eerste toets, ligt daarom bij mijn huidige 4 vwo wiskunde B klas wat lager dan bij een gebruikelijke 4 vwo wiskunde B klas. Hier staat tegenover dat er ook een aantal leerlingen uit de klas zeer hoog heeft gescoord op de eerste toets en veel wiskundig inzicht laat zien. Daarnaast lijken de leerlingen in de klas gemiddeld genomen zeer gemotiveerd voor het vak, kijkend naar de interesse in de klas om het bijzondere programma wiskunde D te volgen en de vrijwillige opgave voor het wekelijkse steunuur.

De (leer)doelen:

De leerdoelen worden opgesplitst in doelen die relevant zijn met betrekking tot de inhoud van de betreffende les (L) en de onderzoeksvraag (OV). Dit is per doel in de lesplannen gespecificeerd. De evaluatie gedurende en aan het einde van ieder van deze 3-lessen-op-een-rij afzonderlijk zal zich richten op de leerdoelen die betrekking hebben op de inhoud van de betreffende les (L). De evaluatie van de leerdoelen die betrekking hebben op de onderzoeksvraag (OV) zal in de volgende sectie worden besproken.

Activiteiten en bijdrage activiteiten aan het behalen van de leerdoelen:

Aangezien het hieronder beschreven HLT verwachtingen baseert op de leerdoelen van de verschillende in de lesplannen beschreven activiteiten (gegroepeerd in fases) kan een verantwoording van de activiteiten en hun bijdrage aan het behalen van de (leer)doelen worden gevonden bij de onderbouwing van het HLT.

Vaststelling leeropbrengst:

Hoe de leeropbrengst in deze les (L) wordt vastgesteld is toegelicht in de kolom 'evaluatie van de leeropbrengst' van de lesplannen. In deze (tussentijdse) evaluaties van de leeropbrengst en het verdere lesplan spelen de zes sleutelbegrippen van effectief leren (Ebbens, 2015, pp. 14-24) een grote rol. Wanneer van toepassing, zijn deze zes sleutelbegrippen ook cursief tussen haakjes in de lesplannen vermeld.

Hypothetisch leertraject:

Het HLT in bijlage XIII spreekt per fase verwachtingen uit over het leergedrag van de leerlingen. Een globale verwachting, op basis van het leerdoel van de betreffende fase, en vervolgens specifieke verwachtingen over de manier waarop zij opdrachten maken of handelingen verrichten.

Onderbouwing fase 1 HLT (globaal):

De veelvoorkomende problemen met het begrijpen van de afgeleide, *weinig inzicht in achterliggende concepten, de overgang van lokaal naar globaal, en toepassen en transfer*, volgend uit de literatuur en het vooronderzoek benoemd in sectie I, worden getoetst in de startmeting. *Weinig inzicht in achterliggende concepten* is een probleem dat met alle onderdelen van de startmeting getoetst wordt. *De overgang van lokaal naar globaal* wordt met name getoetst in onderdeel 2d en *toepassen en transfer* in heel opdracht 2.

Onderbouwing fase 1 HLT (specifiek):

De specifieke verwachtingen bij opdracht 1 zijn gebaseerd op het onderzoek van Orton (1983, in Drijvers et al., 2018, p. 113-114). De specifieke verwachtingen bij opdracht 2 komen deels voort uit de globale verwachtingen. Daarnaast wordt bij opdracht 2 gebruikgemaakt van verschillende manieren om de situatie te representeren: grafisch (doormiddel van de grafiek) en numeriek (doormiddel van de tabel). Volgens sectie II dragen verschillende representaties bij aan een cognitief schema voor de afgeleide. Onderdelen 2a t/m 2c komen uit Netwerk HAVO A2 (1998, in Drijvers et al., 2018, p. 129). Onderdeel 2d is mijn eigen bedenkfel en heeft als doel *de overgang van lokaal naar globaal* te toetsen.

Onderbouwing fase 2 HLT (globaal):

In sectie II wordt al genoemd dat grafieken een belangrijke rol spelen bij het leren van en communiceren binnen de wiskunde en natuurwetenschappen. Om bij wiskunde en natuurkunde op eenzelfde manier met grafieken om te gaan is het nodig dat er bij wiskunde nadrukkelijke aandacht is voor de verwerking van meetresultaten en grafieken en er nadrukkelijke en afgestemde aandacht in beide vakken is voor het analyseren en interpreteren van grafieken. Deze beide aspecten komen goed tot uiting in het practicum met bijbehorend werkblad in bijlage VI.

Het practicum is gebaseerd op het onderzoek van Duijzer et al. (20-01-2017). In het daar beschreven experiment maken leerlingen kennis met grafieken die ze zelf creëren doordat een bewegingssensor hun bewegingen oppikt. “Op deze manier kunnen leerlingen een verbinding gaan leggen tussen de door henzelf gemaakte beweging en de vorm van de grafiek. ... Het is dan aan de leerlingen om te ontdekken welke aspecten van hun bewegingen nu precies zorgen voor veranderingen in de grafieken. ... We denken dat deze (belichaamde) kennis cruciaal is voor het ontwikkelen van nieuwe, fundamentele concepten.” (geciteerd in Duijzer, 20-01-2017). In dit practicum wordt het beschreven experiment in Duijzer et al. gedeeltelijk nagebootst (opdrachten in bijlage VI) en worden vervolgens vragen gesteld waarbij leerlingen hun eigen s, t -grafieken moeten interpreteren, zelf grafieken moeten ‘creëren’ en de relatie met gemiddelde snelheid en de afgeleide moeten beredeneren.

Het hierboven beschreven practicum is een begripspracticum (Kortland et al, 2019, p. 89), aangezien de eigen bewegingen van leerlingen een bekend verschijnsel voor ze vormt dat nu bekeken wordt vanuit de theorie van de afgeleide. In de uitvoering van het practicum wordt de practicuminstructie beschreven in Kortland et al. (p. 93) zo goed mogelijk in acht genomen. Het leerdoel van het practicum wordt omschreven op het werkblad, ik zal het te gebruiken materiaal laten zien en ik deel de leerlingen in groepjes met elk een eigen rol.

Onderbouwing fase 2 HLT (specifiek):

De vragen op het werkblad in bijlage VI zijn mijn eigen ontwerpen. De verwachting dat bij vraag B de verklaring correct is van veel leerlingen komt voort uit het feit dat de leerlingen hun eigen bewegingen in herinnering kunnen roepen, waardoor ze veel intuïtie zullen hebben ontwikkeld voor dit soort vragen. De verwachtingen bij vragen C en D zijn ook gebaseerd op de belichaamde kennis die de leerlingen hebben opgedaan. Bij onderdeel E zijn mijn verwachtingen minder ambitieus dan bij B, C en D, omdat de leerlingen hier niet direct een al bestaande grafiek moeten interpreteren, maar zelf een grafiek die aan zekere criteria voldoet moeten construeren. Het zien van dergelijke verbanden en hierover bepaalde verwachtingen kunnen opstellen, kunnen we voor leerlingen beschouwen als een hogere-orde denkvaardigheid volgens Duijzer et al. en zal daarom naar verwachting tot minder correcte antwoorden leiden dan onderdeel D. Bij onderdeel F zal een conceptueel goed begrip van de afgeleide nodig zijn en dat verwacht ik na één les in de serie van 3-lesse-op-een-rij nog niet, vandaar dat ik verwacht dat slechts een aantal leerlingen hier tot een correct antwoord komt.

Onderbouwing fase 3 HLT (globaal):

Uit een gesprek met Michiel Doorman (persoonlijke communicatie, 22-09-2020) over de afgeleide bleek onder meer dat leerlingen al veel moeite hebben met het betekenisvol relateren van gemiddelde verandering aan het differentiequotiënt. Uit het lagenoverzicht geïntroduceerd in sectie II blijkt dat de overgang van laag 2 naar laag 3 alleen maar zinvol gemaakt kan worden, zodra er eerst volledig begrip is van laag 2, waarin de differentiequotiënt wordt geïntroduceerd. Ik heb daarom besloten een werkblad te ontwerpen dat zich toespitst op de betekenis van het differentiequotiënt en de relatie met gemiddelde verandering. Daarnaast wordt hiermee de veronderstelde voorkennis opgedaan met het practicum verder uitgediept. In het kader van het geïntegreerde differentiaalrekening-kinematica onderwijs zijn de vragen in het jasje van het practicum met de bewegingssensor gegoten, zodat de leerlingen zich een goede voorstelling kunnen maken van de situatie, wat begrip ten goede dient te komen.

Onderbouwing fase 3 HLT (specifiek):

Wat betreft mijn verwachtingen bij onderdeel a weet ik uit ervaring dat leerlingen veel moeite hebben met oneindig veel waarden. De oneindig veel waarden in een interval heb ik daarom in de reguliere lessen over het hoofdstuk 'de afgeleide' al behandeld en zullen veel leerlingen vermoedelijk herkennen. Dat het echter in dit geval om oneindig veel functiewaarden gaat (in het bereik), zal waarschijnlijk een stap te ver voeren voor veel leerlingen. Motivatie voor onderdeel b en c is het inzicht dat vele verschillende paden tot dezelfde gemiddelde snelheid leiden, waaronder de rechte lijn! Het plaatje bij figuur 1 zou alleen wat misleidend kunnen zijn, omdat de twee alternatieve paden elkaars spiegelbeeld zijn. Doel van onderdeel d is expliciet te maken dat het differentiequotiënt niets anders is dan de richtingscoëfficiënt van het rechte pad, wat in combinatie met onderdelen b en c tot het inzicht moet leiden dat de gemiddelde snelheid (of meer algemeen: de gemiddelde verandering) hiermee altijd berekend kan worden.

Onderbouwing fase 4 HLT (globaal):

In fase 4, bestaande uit uitleg gevolgd door het werken aan een werkblad, staan de overgangen van laag 2 naar laag 3 en van laag 3 naar laag 4 centraal. Hiervoor worden op het werkblad, uiteraard in een setting van geïntegreerd differentiaalrekening-kinematica onderwijs, de verschillende aspecten nodig voor een cognitief schema voor de afgeleide ingezet: *verschillende representaties, lagen binnen een representatie en toepassingen en contexten*. De opgaves op het werkblad zijn gedeeltelijk een selectie van het lesmateriaal van Kindt (1997) dat eerder is ingezet in het Profi-project (Doorman, 2000) en gedeeltelijk mijn eigen creatie.

Onderbouwing fase 4 HLT (specifiek):

Opgave 1a kan in feite als een verbale representatie van laag 2 en laag 3 worden gezien, waarmee ook inzicht in de overgang van laag 2 naar laag 3 getoetst wordt. Opgave 1b doet een beroep op de grafische representatie van met name laag 1, maar in zekere zin ook van laag 2. Met deze vraag wordt inzicht in de overgang van laag 1 naar laag 2 dan ook getoetst. Opgave 1c doet een beroep op de grafische representatie van laag 3 en toetst begrip van de raaklijnmethode. Ik heb met het werkblad van fase 3 naar verwachting al veel inzicht in laag 2 gecreëerd. Ik verwacht daarom dat de leerlingen bij opgave 1c meer mijn hulp nodig zullen hebben dan bij opgave 1b (en bij opgave 1a).

Opgave 2a doet een beroep op de symbolische, grafische en numerieke representatie van laag 2 (en de grafische representatie van laag 1). Opgave 2b doet het meest een beroep op de grafische representatie van laag 2. In opgave 2c wordt een beroep gedaan op de symbolische en grafische representatie van laag 4. In opgave 2d wordt met de eerste vraag een beroep gedaan op de numerieke representatie van laag 4, terwijl daarna met de tweede vraag een beroep wordt

gedaan op de grafische representatie van laag 3. De overgang tussen laag 3 en laag 4 wordt op deze manier derhalve efficiënt getoetst. Omdat tijdens de reguliere lessen over het hoofdstuk over de afgeleide voorafgaand aan de 3-lessen-op-een-rij het meeste aandacht is besteed aan de symbolische en numerieke representatie, verwacht ik dat er meer hulpvragen zijn bij de vragen over de grafische representatie.

Opgave 3a is zeer vergelijkbaar met opgave 2a. Verwachting is daarom dat deze, na eventuele eerdere hulpvragen, beter gemaakt zal worden. Opgave 3b is een samenraapsel van opgaves 2c en 2d. Ik verwacht daarom dat deze opgave goed gemaakt zal worden.

Bij opgave 4 wordt op meerdere manieren een beroep gedaan op de grafische representatie van laag 3. Verwachting is dat, na het maken de eerdere opgaves van dit werkblad, inzicht hierin is toegenomen en dat deze opgave goed gemaakt zal worden.

Onderbouwing fase 5 HLT (globaal):

In fase 5 staat het reeds in sectie II beschreven onderwijsleergesprek centraal. Naast dit onderwijsleergesprek wordt aandacht besteed aan de inbedding van de manier waarop de afgeleide bij natuurkunde aan bod komt in de meer algemene beschrijving bij wiskunde.

Tijdens het onderwijsleergesprek wordt gebruikgemaakt van *peer teaching/feedback* en *interactive engagement*. "... de kern is steeds dat tijdens het leerproces begrip van individuele studenten frequent wordt gecontroleerd door *concept checks* en dat deze checks vaak leiden tot productieve discussies van studenten onderling en van docent en studenten (*interactive engagement*)" (Ed van den Berg, in Kortland et al., 2019, p. 139).

Onderbouwing fase 5 HLT (specifiek):

Bij de verschillen tussen de behandeling van de afgeleide bij wiskunde en natuurkunde baseer ik me op Doorman en Eijkelhof (2017), die een aantal verschillen beschrijven bij het maken van grafieken, verschillen in notatie en taalgebruik en verschillen in werkwijze. Mijn verwachtingen over hoe de leerlingen de vragen op de slides beantwoorden zijn gebaseerd op de eigen ervaringen van de leerlingen bij het vak natuurkunde en de terugblik op de overgangen tussen de verschillende lagen uit fase 3 en 4.

Onderbouwing fase 6 HLT (globaal):

De globale verwachting van fase 6 is gebaseerd op de verwachting dat het in sectie II gespecificeerde geïntegreerde differentiaalrekening-kinematica onderwijs effectief is en de veelvoorkomende problemen met de afgeleide daadwerkelijk afnemen na de 3-lessen-op-een-rij. In hoeverre er sprake is van *weinig inzicht in achterliggende*

concepten is een probleem dat met alle onderdelen van de eindmeting getoetst wordt. De *overgang van lokaal naar globaal* wordt met name getoetst in opdracht 2 en *toepassen en transfer* wederom in alle onderdelen van de eindmeting.

Onderbouwing fase 6 HLT (specifiek):

Opdracht 1 is mijn eigen bedenkfel, geïnspireerd op het practicum met de bewegingssensor. De specifieke verwachtingen bij onderdelen 1a en 1b komen voort uit de globale verwachtingen. De leerlingen hebben niet expliciet kennis gemaakt met de connectie van de tweede afgeleide met de versnelling, dus ik ben wat sceptischer met mijn verwachtingen voor onderdeel 1c. Opdracht 2 komt uit het onderzoek van Roorda, Vos en Goedhart (2007, in Drijvers et al., 2018, p. 116). De specifieke verwachtingen bij opdracht 2 komen deels voort uit de globale verwachtingen. Mijn verwachtingen met betrekking tot het onnauwkeurig afgelezen tijdstip en de daaruit eventueel voortkomende slordige uitwerking van de raaklijnmethode zijn het gevolg van het niet hebben geoefend van de leerlingen met een niet direct op de grafiek af te lezen tijdstip, dat beter analytisch bepaald kan worden. Ook is er in de 3-lesse-op-een-rij geen specifieke aandacht besteed aan een beroep doen op de numerieke representatie van laag 3, wat de laatste specifieke verwachting verklaart.

V: Evaluatiemethode

In deze sectie komen achtereenvolgens de deelnemers aan het onderzoek, de dataverzamelingsprocedure en de manier waarop de data geanalyseerd worden aan bod.

Deelnemers:

De deelnemers aan dit onderzoek zijn ikzelf en drie focusleerlingen uit klas 4 vwo wiskunde B. Kijkend naar de onderzoeksvraag, het doel en de omvang van de 3-lesse-op-een-rij en de klas, is het in detail analyseren van gemaakt werk van alle leerlingen moeilijk haalbaar. Er is daarom gefocust op drie leerlingen die de hele klas zo goed mogelijk representeren wanneer gekeken wordt naar wiskundig begrip. De focusleerlingen A, B, en C zijn voornamelijk geselecteerd op basis van hun uitwerkingen voor CP 1 (de eerste summatieve toets van schooljaar 2020-2021). Leerling A is een leerling die een laag cijfer heeft behaald voor CP 1 en weinig inzicht in achterliggende concepten lijkt te hebben. Leerling B heeft gemiddeld gepresteerd en toont af en toe inzicht in achterliggende concepten. Tot slot is leerling C een leerling die een hoog cijfer heeft behaald op CP 1 en goed begrip van achterliggende concepten laat zien. Ik neem deze drie focusleerlingen daarom als representatief voor de hele klas, ook wanneer wordt gekeken naar de veelvoorkomende problemen met de afgeleide.

Dataverzamelingsprocedure:

De middelen die ingezet zijn voor het verzamelen van data zijn de verschillende uitwerkingen van de startmeting, eindmeting en werkbladen van de drie focusleerlingen en interviews met de drie focusleerlingen.

Uitwerkbijlages:

De uitwerkingen van de startmeting, eindmeting en (overige) werkbladen van focusleerlingen A, B en C bevinden zich respectievelijk in bijlages XIV, XV en XVI.

Interviews:

Na de 3-lesse-op-een-rij vonden interviews met focusleerlingen A, B en C plaats. Notities hiervan bevinden zich achteraan in respectievelijk bijlage XIV, XV en XVI. Tijdens deze interviews vroeg ik de focusleerlingen bij de verschillende onderdelen van de werkbladen wat ze gedaan hebben en waarom. Hierbij focuste ik, omwille van de tijd, met name op de startmeting en eindmeting. Op deze manier stimuleerde ik ze hardop na te denken over hun oorspronkelijke uitwerkingen en kreeg ik meer inzicht in hun denkprocessen. Op basis van hun antwoorden stelde ik specifiekere vragen

om zo meer inzicht te krijgen in de veelvoorkomende problemen met de afgeleide: *weinig inzicht in achterliggende concepten, de overgang van lokaal naar globaal en toepassen en transfer*. De interviews hadden dus een verdiepende functie ten opzichte van de uitwerkbijlages. Kijkend naar de onderzoeksvraag en het doel van de 3-lesse-op-een-rij, i.e. meer inzicht krijgen in de veelvoorkomende problemen met de afgeleide, lijken schriftelijke uitwerkingen alleen inderdaad niet voldoende gedetailleerde informatie te kunnen bieden en geven verdiepende interviews waarschijnlijk nuttige aanvullende informatie. De focus op slechts drie leerlingen uit de 4 vwo wiskunde B klas maakt dit ook haalbaar.

Analyse:

De data worden geanalyseerd aan de hand van tabel 1. De verkregen data worden geanalyseerd door het actuele leertraject (ALT) van de drie focusleerlingen per fase te vergelijken met het hypothetische leertraject (HLT) (kolom 1, 2 en 3). Hierbij wordt het ALT net zoals het HLT opgesplitst in twee componenten (kolom 4 en 5), waardoor het ALT zowel op basis van de leerdoelen (globaal) als op basis van de gemaakte opdrachten of verrichtte handelingen (specifiek) per fase met het HLT wordt vergeleken. Vervolgens worden het HLT en ALT (beide componenten van het HLT en ALT in acht genomen) met elkaar vergeleken per fase en per focusleerling (deductief, kolom 6) en wordt de match tussen HLT en ALT negatief (-), neutraal (0) of positief (+) beoordeeld, voorzien van een toelichting. Tot slot worden opvallende bevindingen genoteerd per fase en per focusleerling (inductief, kolom 7).

Hypothetische leertraject (HLT)			Actuele leertraject (ALT)		Deductief	Inductief
Fase	Verwachtingen (globaal)	Verwachtingen (specifiek)	Uitkomst (globaal)	Uitkomst (specifiek)	Vergelijk van HLT en ALT (-,0,+)	Opvallende bevindingen
1	Zoals in HLT	Zoals in HLT	<i>Leerling A: Leerling B: Leerling C:</i>	<i>Leerling A: Leerling B: Leerling C:</i>	<i>Leerling A: Leerling B: Leerling C:</i>	<i>Leerling A: Leerling B: Leerling C:</i>
2	Zoals in HLT	Zoals in HLT	<i>Leerling A: Leerling B: Leerling C:</i>	<i>Leerling A: Leerling B: Leerling C:</i>	<i>Leerling A: Leerling B: Leerling C:</i>	<i>Leerling A: Leerling B: Leerling C:</i>
3	Zoals in HLT	Zoals in HLT	<i>Leerling A: Leerling B: Leerling C:</i>	<i>Leerling A: Leerling B: Leerling C:</i>	<i>Leerling A: Leerling B: Leerling C:</i>	<i>Leerling A: Leerling B: Leerling C:</i>
4	Zoals in HLT	Zoals in HLT	<i>Leerling A: Leerling B: Leerling C:</i>	<i>Leerling A: Leerling B: Leerling C:</i>	<i>Leerling A: Leerling B: Leerling C:</i>	<i>Leerling A: Leerling B: Leerling C:</i>
5	Zoals in HLT	Zoals in HLT	<i>Leerling A: Leerling B: Leerling C:</i>	<i>Leerling A: Leerling B: Leerling C:</i>	<i>Leerling A: Leerling B: Leerling C:</i>	<i>Leerling A: Leerling B: Leerling C:</i>
6	Zoals in HLT	Zoals in HLT	<i>Leerling A: Leerling B: Leerling C:</i>	<i>Leerling A: Leerling B: Leerling C:</i>	<i>Leerling A: Leerling B: Leerling C:</i>	<i>Leerling A: Leerling B: Leerling C:</i>

Tabel 1: analyse van de data

VI: Resultaten, conclusies en discussie

In deze sectie komen achtereenvolgens de resultaten van het onderzoek, de daar uit volgende conclusies inclusief de beantwoording van de onderzoeksvraag, en een kritische discussie over de waarde van het beschreven geïntegreerd differentiaalrekening-kinematica onderwijs in de vorm van 3-lessen-op-een-rij en de bijbehorende materialen aan de orde.

Resultaten:

Een snapshot van de verzamelde data (i.e. de resultaten) bevindt zich in tabel 2. In dit snapshot wordt ingezoomd op een vergelijking van de globale verwachtingen uit het HLT en de globale uitkomsten van het ALT in fase 1 en fase 6. Een volledig overzicht van alle resultaten, geanalyseerd aan de hand van tabel 1, kan worden gevonden in bijlage XVII.

Hypothetische leertraject (HLT)		Actuele leertraject (ALT)	Deductief	Inductief
Fase	Verwachtingen (globaal)	Uitkomst (globaal)	Vergelijk van HLT en ALT (-,0,+)	Opvallende bevindingen
1	Ik verwacht dat de leerlingen aanlopen tegen de beschreven problemen en misvattingen die zich voordoen bij het leren van het concept afgeleide, zoals beschreven in sectie II en daarnaast gedeeltelijk blijken uit het vooronderzoek beschreven in sectie I.	<p><i>Leerling A:</i> Laat een wisselend beeld zien met betrekking tot <i>inzicht in achterliggende concepten</i>, toont geen inzicht in <i>de overgang van lokaal naar globaal</i> en toont geen inzicht in <i>toepassen en transfer</i>.</p> <p><i>Leerling B:</i> Laat een matig beeld zien met betrekking tot <i>inzicht in achterliggende concepten</i>, toont geen inzicht in <i>de overgang van lokaal naar globaal</i> en toont wisselend inzicht in <i>toepassen en transfer</i>.</p> <p><i>Leerling C:</i> Laat een wisselend beeld zien met betrekking tot <i>inzicht in achterliggende concepten</i>, toont redelijk inzicht in <i>de overgang van lokaal naar globaal</i> en toont redelijk inzicht in <i>toepassen en transfer</i>.</p>	<p><i>Leerling A: +</i> Loopt inderdaad tegen veel van de veelvoorkomende problemen aan, maar toont meer <i>inzicht in achterliggende concepten</i> dan het HLT voorschrijft.</p> <p><i>Leerling B: +</i> Loopt inderdaad tegen veel van de veelvoorkomende problemen aan, maar toont iets meer inzicht in <i>toepassen en transfer</i> dan het HLT voorschrijft.</p> <p><i>Leerling C: 0</i> Toont met name meer inzicht in <i>de overgang van lokaal naar globaal</i> en <i>toepassen en transfer</i> dan het HLT voorschrijft.</p>	<p><i>Leerling A:</i> Vooral het getoonde inzicht bij 2b is opvallend, ook in verhouding tot leerling B en leerling C.</p> <p><i>Leerling B:</i> Laat bij opdracht 2 blijken dat ze juist beter gedijt bij het toepassen van de afgeleide in een context (input interview).</p> <p><i>Leerling C:</i> Valt met name op door het slordig geformuleerde, maar in zekere zin correcte antwoord bij 2d, dat de <i>overgang van lokaal naar globaal</i> toetst.</p>

6	Ik verwacht dat de beschreven problemen en misvattingen die zich voordoen bij het leren van het concept afgeleide, zoals beschreven in sectie II en daarnaast gedeeltelijk blijken uit het vooronderzoek beschreven in sectie I, minder optreden bij de leerlingen bij het maken van de eindmeting dan bij de beginmeting.	<p><i>Leerling A:</i> Toont enigszins <i>inzicht in achterliggende concepten</i>, toont weinig inzicht in <i>de overgang van lokaal naar globaal</i> en toont enigszins inzicht in <i>toepassen en transfer</i>.</p> <p><i>Leerling B:</i> Toont enigszins <i>inzicht in achterliggende concepten</i>, toont weinig inzicht in <i>de overgang van lokaal naar globaal</i> en toont wisselend inzicht in <i>toepassen en transfer</i>.</p> <p><i>Leerling C:</i> Toont een goed <i>inzicht in achterliggende concepten</i>, toont goed inzicht in <i>de overgang van lokaal naar globaal</i> en toont goed inzicht in <i>toepassen en transfer</i>.</p>	<p><i>Leerling A: 0</i> Vergelijkend met de uitkomst (globaal) van fase 1 is het inzicht in <i>toepassen en transfer</i> iets toegenomen.</p> <p><i>Leerling B: 0</i> Vergelijkend met de uitkomst (globaal) van fase 1 is het <i>inzicht in achterliggende concepten</i> iets toegenomen.</p> <p><i>Leerling C: +</i> Vergelijkend met de uitkomst (globaal) van fase 1 is het inzicht met betrekking tot alle drie de veelvoorkomende problemen wat toegenomen.</p>	<p><i>Leerling A:</i> Geeft aan de opgaves op de eindmeting heel anders te vinden, omdat ze meetkundiger van aard zijn dan in het boek (input interview).</p> <p><i>Leerling B:</i> Loopt, tegen de verwachtingen in, in verhouding tot leerling A tegen meer veelvoorkomende problemen met de afgeleide aan en laat gedurende de 3-lesse-op-een-rij ook wat minder ontwikkeling zien.</p> <p><i>Leerling C:</i> Geeft aan dat hij al voor de 3-lesse-op-een-rij veel zaken die gerelateerd zijn aan de veelvoorkomende problemen en verschillen en overeenkomsten tussen de afgeleide bij wiskunde en natuurkunde als wist, terwijl hij opvallend genoeg toch van de drie focusleerlingen het meest ontwikkeling laat zien gedurende de 3-lesse-op-een-rij.</p>
---	--	--	---	--

Tabel 2: snapshot van de resultaten

Conclusies:

Bovengenoemd resultatenoverzicht leidt tot een aantal conclusies. Op basis van deze conclusies wordt de onderzoeksvraag beantwoord. Vervolgens wordt geëvalueerd op de (leer)doelen van de 3-lessen-op-een-rij.

Conclusies:

Tabel 2 en het overzicht in bijlage XVII leiden tot de volgende conclusies:

1. Het veelvoorkomende probleem *'weinig inzicht in achterliggende concepten'* vermindert bij focusleerlingen B en C (fase 6, kolom *'deductief'* voor beide focusleerlingen). Het veelvoorkomende probleem *'de overgang van lokaal naar globaal'* vermindert bij focusleerlingen B en C (fase 4, kolom *'deductief'* voor focusleerling B; fase 4 en 6, kolom *'deductief'* voor focusleerling C). Het veelvoorkomende probleem *'toepassen en transfer'* vermindert bij focusleerlingen A en C (fase 5 en 6, kolom *'deductief'* voor beide focusleerlingen). Omdat twee van de drie focusleerlingen een meerderheid van de klas representeren, kan worden geconcludeerd dat alle veelvoorkomende problemen (een beetje) verminderen na de 3-lessen-op-een-rij.
2. Kijkend naar de aspecten voor een cognitief schema van de afgeleide, blijkt met name uit fase 4 dat *verschillende representaties en lagen binnen een representatie* bijdragen aan beter begrip van de afgeleide. In het werkblad horend bij fase 4 worden deze aspecten namelijk veelvuldig toegepast en voldoen focusleerlingen B en C ook aan de verwachtingen van het HLT (kolom *'deductief'*). Dat *toepassingen en contexten* bijdragen aan een beter begrip van de afgeleide blijkt uit alle fases van de 3-lessen-op-een-rij, omdat uit de hiervoor genoemde conclusie volgt dat de veelvoorkomende problemen inderdaad verminderen na deze 3-lessen-op-een-rij, waarin in elke les en fase van de les steeds toepassingen (en met name natuurkundige) contexten worden ingezet. Daarnaast geeft focusleerling A expliciet uit zichzelf aan beter te gedijen bij het kunnen gebruiken van de afgeleide in contexten (input interview, fase 1, kolom *'inductief'*).
3. Omdat focusleerling C het meeste ontwikkeling laat zien op het gebied van de veelvoorkomende problemen gedurende de 3-lessen-op-een-rij kan dit een indicatie zijn dat relatief sterke leerlingen ook meer baat hebben bij deze serie van 3-lessen-op-rij in geïntegreerd differentiaalrekening-kinematica onderwijs.
4. Kijkend naar de deductieve conclusies van fase 2 en 3 (kolom *'deductief'*) blijven de gewenste effecten van het practicum en werkblad *'gemiddelde snelheid onder de loep'* gedeeltelijk uit. In fase 2 ziet alleen focusleerling A duidelijk een verband tussen haar metingen en gemiddeld gelopen snelheid, focusleerling B slechts gedeeltelijk. In fase 3 ziet alleen focusleerling B duidelijk een verband tussen de gemiddeld gelopen snelheid en het differentiequotiënt, focusleerling A slechts gedeeltelijk. Bij fase 4 en 5 wordt wel het beoogde effect behaald met hetgeen getoetst wordt (kolom *'deductief'*), aangezien twee van de drie focusleerlingen + scores.

5. Het feit dat fase 5 het beoogde effect behaald en conclusie 1 zijn een indicatie dat het expliciet maken van verschillen en overeenkomsten in het behandelen van de afgeleide bij wiskunde en natuurkunde zinvol bijdraagt aan begrip van de afgeleide bij leerlingen.
6. (Een deel van) de leerlingen ervaart het materiaal aangeboden tijdens de 3-lesse-op-een-rij als significant verschillend ten opzichte van het materiaal dat normaliter tijdens de les aangereikt wordt aan de hand van Getal en Ruimte (fase 6, kolom 'inductief', focusleerling A).

Beantwoording onderzoeksvraag:

Het antwoord op de onderzoeksvraag is dat de veelvoorkomende problemen die de (focus)leerlingen hebben bij het leren van de afgeleide (een beetje) verminderen gedurende een reeks van 3-lesse-op-een-rij waarin zij geïntegreerd differentiaalrekening-kinematica onderwijs aangeboden hebben gekregen.

Evaluatie (leer)doelen van de 3-lesse-op-een-rij:

Het leerdoel dat betrekking heeft op de inhoud van les 1 (L) is nauwelijks of slechts gedeeltelijk behaald, zoals blijkt uit conclusie 4.

De leerdoelen die betrekking hebben op in de inhoud van les 2 (L) zijn gedeeltelijk behaald, zoals blijkt uit conclusie 4, aangezien les 2 fases 3 en 4 omvat. In de les heb ik geconstateerd dat de leerlingen met het werkblad horend bij fase 4 actief en gemotiveerd aan de slag waren, terwijl deze motivatie bij het werkblad van fase 3 bij focusleerling C wat minder aanwezig leek (fase 3, kolom 'inductief').

De leerdoelen die betrekking hebben op de inhoud van les 3 (L) zijn gedeeltelijk behaald, zoals blijkt uit conclusie 4. Echter kon niet goed worden beoordeeld in hoeverre situaties in de natuurkunde waarbij de afgeleide een rol speelt worden gezien als bijzondere gevallen van de algemene beschrijvingen bij wiskunde, omdat hierover geen vraag is opgenomen in de presentatie (fase 5, kolom 'inductief').

Antwoorden op de (leer)doelen met betrekking tot de onderzoeksvraag (OV) volgen voor les 1 uit bijlage XVII (fase 1, kolom 'deductief') en conclusie 4. Voor les 2 volgt het uit bijlage XVII (fase 3 en 4, kolom 'deductief') en voor les 3 volgen ze uit bijlage XVII (fase 6, kolom 'deductief') en conclusie 5.

Discussie:

In de discussie wordt achtereenvolgens ingegaan op de rol van grafieken en de gehanteerde dataverzamelingsprocedure/methode. Tot slot worden enkele suggesties gedaan voor verbetering van het ontwerp voor een aantal van de fases van de 3-lessen-op-een-rij.

De rol van grafieken:

In dit onderzoek is veel aandacht besteed aan uit de literatuur bekende problemen die leerlingen ervaren met de afgeleide, zoals bijvoorbeeld beschreven in Drijvers (2018). Misconcepties over grafieken die in veel gevallen ten grondslag liggen aan problemen met de afgeleide, in ieder geval wanneer we kijken naar de grafische representatie, krijgen minder expliciet de aandacht. Een goed begrip van grafieken vormt echter het fundament van wetenschappelijk begrip in het algemeen en wiskundig en natuurkundig begrip in het bijzonder, volgens Beichner (1994). "The ability to comfortably work with graphs is a basic skill of the scientist" (p. 750). Omdat grafieken efficiënte datapakketjes zijn, worden ze door natuurkunde docenten als een vanzelfsprekende taal gehanteerd. Leerlingen beschikken echter lang niet altijd over ditzelfde vocabulaire.

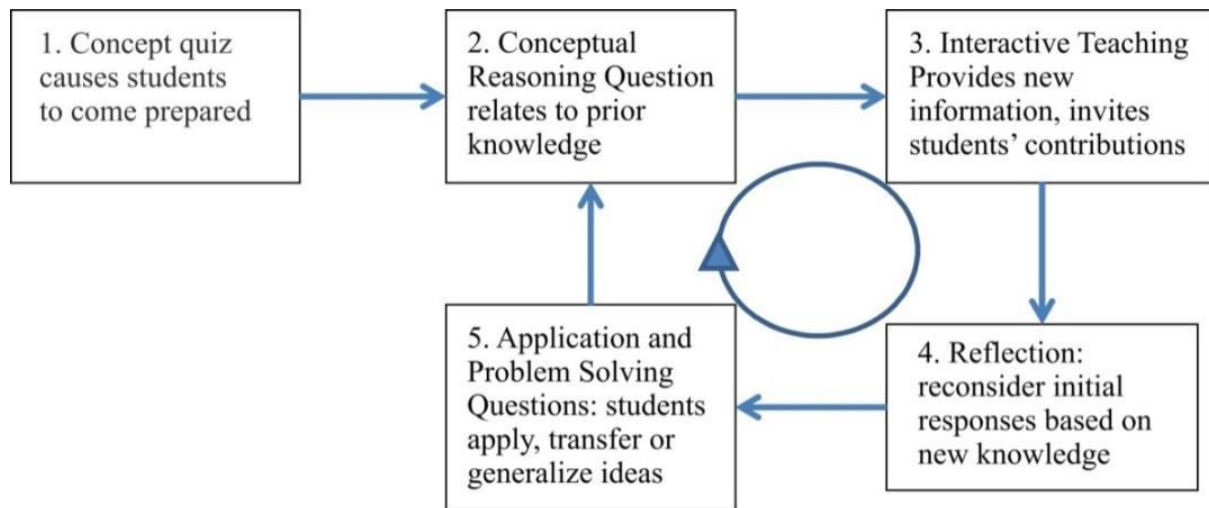
Een aantal moeilijkheden met kinematica grafieken waar leerlingen tegen aanlopen zijn (Beichner, 1994):

- Graph as Picture Errors: de grafiek wordt gezien als een foto van de situatie. Het is geen abstracte mathematische representatie, maar een concrete duplicatie van de beweging.
- Slope/Height Confusion: leerlingen lezen vaak waardes af van de verticale as en kennen deze direct toe aan de helling.
- Variable Confusion: leerlingen maken geen onderscheid tussen afstand, snelheid en versnelling.
- Nonorigin Slope Errors: leerlingen vinden met succes de helling van lijnen die door de oorsprong gaan. Ze hebben echter moeite met het bepalen van de helling van een lijn (of raaklijn) die niet door de oorsprong gaat.

Wanneer in opgaves die onderdeel uitmaken van geïntegreerd differentiaalrekening-kinematica onderwijs (nog) explicieter aandacht wordt besteed aan de rol van grafieken en de bijbehorende misconcepties bewust worden opgezocht leidt dit wellicht tot meer vermindering van veelvoorkomende problemen met de afgeleide. Er kan bijvoorbeeld worden overwogen de wiskundige aard van grafieken vanaf de grond op te bouwen aan de hand van Boohan (2016).

Een manier om de rol van de grafieken beter in te zetten in de practicum les wordt beschreven in Antwi et al. (2018). Hier wordt een vergelijkbaar practicum met bewegingssensor ingebed in 'interactive engagement teaching', dat bestaat uit een cyclus van activiteiten die het aanleren van kinematica grafieken tot doel heeft: een concept quiz, conceptuele redeneervragen, interactief lesgeven, reflectie, toepassing en vragen waar probleemoplossend vermogen centraal staat. Deze cyclus en het

doel van de activiteiten wordt ook weergegeven in figuur 2. Het practicum met bewegingssensor wordt hier ingezet als activiteit 3.



Figuur 2: interactive engagement teaching cyclus

Een wetenschappelijke verantwoorde concept quiz die als activiteit 1 kan worden ingezet is de zogenaamde TUG-K (Test of Understanding Graphs in Kinematics), die wordt omschreven in Beichner (1994) en in datzelfde artikel in de bijlage (gedeeltelijk) is toegevoegd.

Daarnaast doen Antwi et al. goede suggesties voor een uitgebreidere en meer gestructureerde variant van het practicum met bewegingssensor, waarbij leerlingen door gebruik van bewegingssensoren en 'Coach 6' inzicht krijgen in verplaatsing-tijd diagrammen, snelheid-tijd diagrammen en versnelling-tijd diagrammen horend bij verschillende van hun eigen bewegingen: stilstaan; met constante snelheid in een specifieke richting; weglopen en terugkomen met constante snelheid; weglopen en terugkomen met verschillende snelheid; weglopen, stilstaan en terugkomen en het nalopen van een aantal reeds geplote x,t en v,t -diagrammen. Uit hun onderzoek komt naar voren dat leerlingen een beter begrip hebben van kinematica grafieken na onder andere het uitvoeren van deze versie van het practicum met bewegingssensoren.

De dataverzamelingsprocedure/methode:

Kijkend naar het resultatenoverzicht (bijlage XVII) kun je je afvragen in hoeverre de drie gekozen focusleerlingen a posteriori representatief zijn voor de klas. Zo maakt focusleerling A het werkblad in fase 2 beter dan focusleerlingen B en C (fase 2, kolom 'deductief'). In fase 3 maken focusleerlingen A en B het werkblad beter dan focusleerling C (fase 3, kolom 'deductief'). In fase 5 maakt focusleerling A de peerfeedback vragen beter dan focusleerling B (fase 5, kolom 'deductief'). Overall, ook kijkend naar de eindmeting, loopt focusleerling B meer tegen de veelvoorkomende problemen met de afgeleide aan dan focusleerling A (fase 6, kolom 'inductief'). Dit roept de vraag op of het selecteren van de focusleerlingen op basis van hun uitwerkingen van CP1, zoals beschreven in sectie V, een goede

selectieprocedure was. Het onderwerp van CP1 was namelijk niet de afgeleide. Een mogelijk beter alternatief zou zijn geweest pas na de startmeting te bepalen wie representatieve focusleerlingen zijn voor de klas, wanneer wordt gekeken naar conceptueel begrip van de afgeleide. Op deze manier krijg je wel direct een eerste indruk van begrip van de afgeleide bij de leerlingen. Ook kan nog worden gekeken naar eindcijfers van voorgaande schooljaren. Tot slot kunnen de focusleerlingen ook worden geselecteerd op basis van leerstrategie en/of aanpak. Bovengenoemde suggesties werden naar voren gebracht in de discussie volgend op de presentatie van dit ontwerponderzoek.

Ook volgt uit het resultatenoverzicht dat in fases 3 en 4 focusleerling B heeft samengewerkt met een (cijfermatig) sterke leerling (input interview, fase 3 en 4, kolom `inductief`), wat een verklaring zou kunnen zijn voor de (zeer) goede uitwerkingen van focusleerling B bij deze werkbladen. Het is daarom de vraag of in een onderzoeksmethode waar voor 3 focusleerlingen wordt gekozen het verstandig is leerlingen te vaak in groepsverband aan materiaal te laten werken waarmee de onderzoeksvraag beoordeeld moet worden. Het uitgewerkte materiaal kan hierdoor namelijk een vertekend beeld geven, omdat hiermee voor sommige fases eigenlijk nog maar 2 focusleerlingen de klas beogen te representeren.

In fases 2 en 3 blijkt uit het resultatenoverzicht dat focusleerling C mogelijk slecht heeft gepresteerd op de werkbladen als gevolg van weinig motivatie. Zo waren bij het practicum in fase 2 de metingen verloren geraakt en was in fase 3 niet duidelijk waarom het werkblad zinvol is (input interview, fase 3, kolom `inductief`). Leerlingen zouden mogelijk gemotiveerder aan het werk gaan bij fases 2 en 3 als het doel van het practicum en/of werkblad duidelijk naar voren zou komen tijdens de 3-lesse-op-een-rij. Bij het practicum wordt het doel wel op het werkblad omschreven, maar ook mondeling zou het daarnaast explicieter benadrukt mogen worden. Daarnaast is een klassikale demonstratie van het practicum alvorens de leerlingen zelf aan de slag te laten gaan hier mogelijk een winstpunt. Ook kwamen de leerlingen les 1 in tijdsnood, waardoor zij bijvoorbeeld (ten onrechte) van mening waren dat zonder (vierde) meting enkele opgaven op het werkblad niet te beantwoorden waren (fase 2, kolom `inductief`). Het inplannen van een volledige les voor het practicum had daarom het onderzoek ten goede kunnen komen. Bij fase 3 is het doel van het werkblad wel genoemd als onderdeel van het lesdoel van les 2, maar zou het ook nog expliciet bovenaan op het werkblad zelf genoemd kunnen worden.

Verdere suggesties ter verbetering van het ontwerp:

In fase 4 van het HLT geef ik bij de verwachtingen op vraagniveau (kolom `verwachtingen (specifiek)`) aan dat leerlingen de grafische representatie als de lastigste zullen ervaren, omdat daar in de reguliere lessen relatief weinig mee geoefend is. Dit blijkt niet geheel terecht, zoals bijvoorbeeld blijkt uit de opmerkingen van focusleerling A (input interview; kolom `inductief`). Een mogelijke verklaring is de behandeling van de afgeleide bij kinematica in de natuurkunde lessen die de leerlingen parallel volgen, waar juist de grafische representatie relatief veel aandacht

krijgt. Dit benadrukt de toegevoegde waarde van een zoveel mogelijk afgestemd wiskunde en natuurkunde curriculum.

In fase 5 laat ik het in de Powerpoint presentatie na een peerfeedback vraag te stellen over de laatste slide, terwijl deze informatie bevat die onderdeel uitmaakt van het doel van fase 5 (kolom 'inductief'). Om deze fase beter te kunnen evalueren is het daarom van belang hier een peerfeedbackvraag toe te voegen. Ook zou in fase 5 het onderwijsleergesprek nog effectiever ingezet kunnen worden, door meer interactie te creëren na (een iets kleinere hoeveelheid) vragen. Bijvoorbeeld door leerlingen na het individueel indienen van antwoorden in gesprek te laten gaan in duo's over de door hun gegeven antwoorden en waarom ze dit dachten. Deze suggesties werden gedaan na afname van les 3 door mijn vakdidacticus en stagebegeleider.

Bij de eindmeting in fase 6 zou kunnen worden overwogen bij opdracht 2 te vragen naar de snelheid van de kogel na bijvoorbeeld 0,2 seconden. Op deze manier wordt vermeden dat leerlingen in de war raken door een raaklijn aan het einde van een grafiek, zoals bijvoorbeeld geldt voor focusleerling C (kolom uitkomst (specifiek)). Dit is een veelvoorkomende misconceptie bij leerlingen (input vakdidacticus en stagebegeleider), maar niet één die getoetst hoeft te worden in deze 3-lesse-op-een-rij. Deze misconceptie kan mogelijk worden gezien als een Graph as Picture Error, zoals eerder genoemd in deze discussie. De leerling ziet de grafiek namelijk als een foto van de situatie, waarbij de grafiek evenals de raaklijn op houdt te bestaan, nadat deze de horizontale as heeft bereikt.

Samengevat, waren met name fases 4 en 5 van de 3-lesse-op-een-rij waardevol in relatie tot het vakdidactisch kader/ de theorie, zoals beschreven in sectie II. In fase 4 wordt namelijk op effectieve wijze bijgedragen aan een cognitief schema voor de afgeleide (conclusie 2) en zijn mijn eigen bijdragen op het werkblad (naast de bijdragen uit Kindt (1997)) effectief in het toetsen van de overgang van lokaal naar globaal, één van de veelvoorkomende problemen bij het begrijpen van de afgeleide (conclusie 4). In fase 5 blijkt het onderwijsleergesprek, zoals reeds beschreven in sectie II, effectief (conclusie 5), alhoewel hier nog ruimte is voor verbetering door meer interactie te creëren.

VII: Visie

In deze sectie beschrijf ik mijn visie op de rol als vakdidactisch ontwerper en onderzoeker.

Dit schooljaar wil ik nog bij de behandeling van hoofdstuk 11 over integraalrekening in klas 5 vwo wiskunde B (Dijkhuis, 2014) een aantal integreeropgaves ontwerpen die ik in een kinematica context plaats. Bij datzelfde hoofdstuk in diezelfde klas lijkt het me ook interessant een onderwijsleergesprek voor te bereiden en af te nemen over de verschillen in de behandeling van oppervlaktes bij natuurkunde en wiskunde. Daarnaast wil ik in gesprek gaan met de secties wiskunde en natuurkunde om de onderlinge communicatie te verbeteren en de PTA's beter af te stemmen op elkaar.

Voor schooljaar 2021-2022 ambieer ik naast werkzaamheden als docent wiskunde en docent natuurkunde een Postdoc-VO, waarmee ik hoop bij te dragen aan een betere afstemming van de onderwijscurricula van wiskunde en natuurkunde (op het Goois lyceum). Een potentieel onderwerp kan zijn geïntegreerd integraalrekening – kinematica onderwijs, waarbij ik de kinematica in kan zetten als context om begrip van integreren te verbeteren bij leerlingen. Ook geïntegreerd integraalrekening – energie onderwijs is een interessante optie. Zo geeft Ton van der Valk aan: “Waar het begrip ‘kracht’ in de natuurkunde verbonden is met ‘oorzaak’ – met causaliteit, met veranderingsprocessen, en in wiskundig opzicht met differentiëren – is het energiebegrip verbonden met het ‘vermogen om te...’ (potentie), met finaliteit, met een toestand, en in wiskundig opzicht met integreren” (geciteerd in: Kortland et al., 2019, p. 178). Tot slot ook nog een interessante optie is het opzetten van probleemstellend onderwijs voor de integratie van differentiaal- en/of integraalrekening en kinematica. Zo geeft Doorman (2000) aan dat om bij het oorspronkelijke Profi-project de vragen beter te richten probleemstellend onderwijs bij zou kunnen dragen.

Op de langere termijn zou ik bij willen dragen aan een betere afstemming van natuurkunde- en wiskunde onderwijs door een bijzonder programma te initiëren dat wiskunde en natuurkunde integreert of mogelijk zelfs een curriculum voor een nieuw vak te schrijven waarin de integratie van wiskunde en andere natuurwetenschappen centraal staat.

VIII: Reflectie op het leerproces

In deze sectie reflecteer ik op de uitvoering van dit ontwerponderzoek en mijn eigen leerproces.

Wat me het meest sterk is bijgebleven na het uitvoeren van dit ontwerponderzoek is dat de practicum les niet geheel soepel verliep en op meerdere punten voor verbetering vatbaar was. In de discussie werd al genoemd dat ik op formeel niveau meer tijd voor het practicum had in kunnen plannen, het lesdoel explicieter mondeling had kunnen benadrukken (naast de schriftelijke vermelding op het werkblad), en de uitvoering van het practicum door de leerlingen vooraf had kunnen laten gaan door een demonstratie. Ook is besproken welke internationale literatuur ik had in kunnen zetten om tot een mogelijk doeltreffender werkblad te komen. Op informeel niveau was het te druk in de klas tijdens de uitvoering, waren leerlingen op momenten weinig serieus met de opdracht bezig en kwamen vrijwel alle groepjes in tijdsnood. Ook van mijn stagebegeleider heb ik als feedback ontvangen dat een ontwikkelpunt nog is om praktische en beeldende voorbeelden te ontwerpen en demonstraties voor de leerlingen uit te voeren. Ik denk dat de beste manier om hiermee aan de slag te gaan is vaker practica en demonstraties uit te voeren. Dit uiteraard steeds goed voorbereid en waar mogelijk onderbouwd vanuit de literatuur. Ook lijkt het me nuttig bij collega's met meer ervaring met practica en demonstraties af en toe mee te kijken in de les.

Van mijn vakdidacticus en stagebegeleider kreeg ik als voornaamste feedbackpunt op het onderwijsleergesprek als onderdeel van les 3 dat meer interactie gecreëerd kan worden tussen de leerlingen onderling na het stellen van de vragen (via PearDeck). Dit kan bijvoorbeeld bereikt worden door leerlingen na het individueel indienen van antwoorden in gesprek te laten gaan in duo's over de door hun gegeven antwoorden en waarom ze dit dachten. Een manier om daarnaast mezelf beter te bekwamen in onderwijsleergesprekken is zo nu en dan meekijken met collega's, me meer te bekwamen in scaffolding, en de leerlingen met duidelijk geformuleerde opdrachten aan de slag te laten gaan, waarbij het doel, de tijdsduur en verantwoordelijkheid voor het eindresultaat steeds duidelijk zijn. Deze punten kwamen ook naar voren als feedback van mijn stagebegeleider op een aantal door hem bezochte lessen.

Algemeen kreeg ik als feedback op mijn lessen, waar de 3-lesse-op-een-rij onderdeel van uit maken, dat ik nog veel focus heb op de vak inhoud en nog wat minder op de verschillen tussen de individuele leerlingen. Het is met oog op dit ontwikkelpunt interessant aan de slag te gaan met ontwerpen die meer differentiëren naar niveau en leerstrategie van individuele leerlingen.

Concluderend hebben juist ook de zaken die niet goed verliepen tijdens de 3-lesse-op-een-rij op een positieve manier bijgedragen aan professioneel docentschap, aangezien ze me aan het denken hebben gezet en bewegen tot het neerzetten van betere prestaties op deze gebieden in de toekomst.

Tijdens mijn presentatie van dit ontwerponderzoek (zie ook bijlage XVIII) heb ik als discussiepunt aangegeven hoe je de focusleerlingen een zo goed mogelijke representatie van de klas kunt laten zijn. Als feedback hierop kreeg ik mee dat ik de focusleerlingen zou kunnen selecteren op basis van behaalde cijfers voor het vorige schooljaar, op basis van leerstrategie en door de leerlingen te selecteren nadat de startmeting door iedereen is afgenomen en beoordeeld. Dit is mogelijk weer nuttig voor een volgend ontwerponderzoek, dat er zeker gaat komen!

Met veel ambitie en enthousiasme heb ik dit ontwerponderzoek uitgevoerd en het verslag geschreven. Ik wil Ad Mooldijk bedanken voor zijn bezielde begeleiding tijdens het proces. Zoals ook naar voren komt in mijn visie ben ik als bevoegd docent natuurkunde van plan voort te bouwen op dit onderzoek, waaraan ook hij heeft bijgedragen.

IX: Literatuurlijst

- Antwi, V., Savelsbergh, E., & Eijkelhof H. (2018). *Understanding kinematics graphs using MBL tools, simulations and graph samples in an interactive engagement context in a Ghanaian university*. Journal of Physics: Conference Series, 1076.
- Beichner, R. J. (1994). *Testing student interpretation of kinematics graphs*. American Journal of Physics 62, 750.
- Boohan, R. (2016). *The Language of Mathematics in Science. A guide for Teachers of 11-16 Science. 4. Drawing charts and graphs*. Hatfield: Association for Science Education. (pp. 35-41)
- Dijkhuis, J.H. et al. (2014). *Getal en Ruimte. Vwo B deel 1*. Groningen: Noordhoff Uitgevers.
- Doorman, L.M. (2000). *Integratie van kinematica en differentiaalrekening*. Nieuwe Wiskrant 20-1
- Doorman, L.M. & Eijkelhof, H.M.C. (2017). *Grafieken en samenhang tussen de bètavakken*. Euclides, 92 (4), (pp.37-39).
- Drijvers, P., van Streun, A., & Zwaneveld, B. (Red.) (2018). *Handboek wiskundedidactiek. 4. Afgeleide*. Amsterdam: Epsilon Uitgaven. (pp.109-138)
- Duijzer, A.C.G., Van den Heuvel-Panhuizen, M., Veldhuis, M. & Doorman, L.M. (20-01-2017). *Greep op grafieken*. In Marc Van Zanten (Eds.), *Rekenen-wiskunde in de 21e eeuw – Ideeën en achtergronden voor primair onderwijs - Jubileumbundel ter gelegenheid van het 35-jarig bestaan van Panama* (pp. 53-58). Panama - NVORWO - Universiteit Utrecht - SLO.
- Ebbens, S., & Ettekoven, K. (2015). *Effectief leren* (4^e druk). Houten: Noordhoff Uitgevers.
- Geerts, W., & Kralingen, R. (2016). *Handboek voor Leraren* (2e druk). Bussum: Uitgeverij Coutinho.
- Kindt, M. (1997). *Som & verschil, afstand en snelheid*. Utrecht: Freudenthal Instituut.
- Kortland, K., Mooldijk, A., & Poorthuis, H. (red.) (2019). *Handboek natuurkundedidactiek*. Amsterdam: Epsilon Uitgaven.
- Slo. (juni 2019). *Wiskunde B vwo. Syllabus centraal examen 2021*. Geraadpleegd op 20 januari 2021, van https://www.examenblad.nl/examenstof/syllabus-2021-wiskunde-b-vwo/2021/f=/wiskunde_B_2_versie%20_vwo_2021_2.pdf
- Slo 2. (juni 2019). *Natuurkunde vwo. Syllabus centraal examen 2021*. Geraadpleegd op 20 januari 2021, van https://www.examenblad.nl/examenstof/syllabus-2021-natuurkunde-vwo/2021/f=/natuurkunde_3_versie_vwo_2021_av.pdf

Lesplanformulier les 1

Datum: 23-10-20		Klas: 4vwisb	Les 1: Meet indirect je eigen afgeleide	Hfdstk: 2: de afgeleide functie	
<p>Beginsituatie leerlingen: De leerlingen hebben kennis van de afgeleide functie, zoals uitgewerkt in de methode Getal en Ruimte vwo B deel 1. Deze kennis blijkt uit vooronderzoek echter vooral te bestaan uit het kunnen berekenen van de afgeleide met voorgeschreven rekenregels. Conceptueel inzicht in wat de afgeleide precies betekent is beperkt.</p>			<p>Benodigde materialen:</p> <ul style="list-style-type: none"> - 5 bewegingssensoren - het programma 'Vernier: graphical analysis' - 19x werkblad 'Practicum: meet indirect je eigen afgeleide' - 19x formatieve startmeting: de afgeleide - 19x uitwerkbijlage formatieve startmeting: de afgeleide 		
<p>(Eventuele doelen van docent)</p> <ul style="list-style-type: none"> - Toetsing wat de aanwezige startkennis is bij leerlingen over de afgeleide en hoe gesignaleerde problemen zich verhouden tot de problemen die worden aangestipt in de literatuur (OV). - Toetsing in hoeverre het practicum uitgevoerd in deze vorm een hoog leerrendement bewerkstelligt (OV). 			<p>Leerdoelen voor leerlingen in deze les: Aan het einde van deze les hebben leerlingen inzicht in de vertaalslag van hun eigen bewegingen naar een s-t-diagram en kunnen aan de hand van deze s-t-diagrammen conclusies trekken met betrekking tot gemiddelde snelheid en snelheid op één moment (L).</p>		
Tijd	Lesfase	Activiteit Docent	Activiteit Leerling	Evaluatie van leeropbrengst	
14:20-14:25	Binnenkomst + introductie	<ul style="list-style-type: none"> - Spoorboekje doornemen en leerdoel van de les presenteren - Instructie op de formatieve startmeting: de afgeleide 	<ul style="list-style-type: none"> - Tas van tafel - Structuur les en doel verwerken (<i>heldere structuur in de opbouw van de leerstof</i>) - Verdelen over de klas 	<ul style="list-style-type: none"> - Checken op begrip door rondlopen en schriftelijke evaluatie achteraf (<i>zichtbaarheid van leren</i>) 	
14:25-14:40	Werken aan formatieve startmeting: de afgeleide	<ul style="list-style-type: none"> - Utdelen formatieve startmeting: de afgeleide 	<ul style="list-style-type: none"> - Individueel werken aan de formatieve startmeting 		
14:40-14:45	Instructie op practicum	<ul style="list-style-type: none"> - Uitleggen wat het doel is van het practicum en uit welke stappen het bestaat (<i>heldere structuur in opbouw van de leerstof</i>) 	<ul style="list-style-type: none"> - Verwerken informatie 		

14:45-15:05	Uitvoeren practicum (<i>betekenis geven aan de leerstof</i>)	<ul style="list-style-type: none"> - De verschillende fases (fase I: uitvoering en fase II: vragen) van het practicum managen 	<ul style="list-style-type: none"> - In heterogene groepjes van 3 a 4 werken aan het practicum aan de hand van het werkblad 	<ul style="list-style-type: none"> - Checken op begrip door rondlopen en vragen stellen (<i>zichtbaarheid van leren</i>)
15:05-15:10	Evaluatie op lesdoel	<ul style="list-style-type: none"> - Leerlingen uit groepjes kiezen om de relatie tussen s-t-diagram en de afgeleide uit te leggen 	<ul style="list-style-type: none"> - Ingaan op antwoorden leerlingen en doorvragen in interactie met de rest van de klas 	<ul style="list-style-type: none"> - Gekozen leerlingen toelichtingen laten geven op hun antwoorden (toetsing leerdoel op basis van <i>individuele aanspreekbaarheid</i>)

Lesplanformulier les 2

Datum: 29-10-20	Klas: 4vwisb	Les 2: gemiddelde snelheid -> snelheid op één moment -> de afgeleide	Hfdstk: 2: de afgeleide functie	
<p>Beginsituatie leerlingen: De leerlingen hebben beginnende kennis van de relatie tussen s-t diagrammen, gemiddelde snelheid en snelheid op specifieke tijdstippen als gevolg van de s-t-diagrammen die uit hun eigen bewegingen voortkwamen in les 1.</p>		<p>Benodigde materialen:</p> <ul style="list-style-type: none"> - 19x werkblad: gemiddelde snelheid onder de loep - 19x werkblad gemiddelde snelheid -> snelheid op één moment -> de afgeleide 		
<p>(Eventuele doelen van docent)</p> <ul style="list-style-type: none"> - Toetsing in hoeverre de uitgedeelde werkbladen het beoogde doel bereiken (OV) - Toetsing in hoeverre de set opgaves leerlingen activeert en motiveert om aan het werk te gaan (L) 		<p>Leerdoelen voor leerlingen in deze les: Aan het einde van de les kunnen leerlingen uitleggen waarom een gemiddelde verandering met het differentiequotient berekend wordt en kunnen ze omschrijven wat er meetkundig en symbolisch gebeurd bij de overgang: gemiddelde snelheid -> snelheid op één moment -> afgeleide (L)</p>		
Tijd	Lesfase	Activiteit Docent	Activiteit Leerling	Evaluatie van leeropbrengst
14:20-14:25	Binnenkomst + introductie	<ul style="list-style-type: none"> - Spoorboekje doornemen en leerdoel van de les presenteren - Instructie op de activiteit waarmee de voorkennis wordt uitgediept 	<ul style="list-style-type: none"> - Tas van tafel - Structuur les en doel verwerken (<i>heldere structuur in de opbouw van de leerstof</i>) 	
14:25-14:35	Voorkennis uitdiepen	<ul style="list-style-type: none"> - Uitdelen werkblad: gemiddelde snelheid onder de loep 	<ul style="list-style-type: none"> - In duo's werken aan werkblad: gemiddelde snelheid onder de loep - Indien klaar: aan de slag met andere werkblad (<i>het juiste niveau van de leerstof</i>) 	<ul style="list-style-type: none"> - Checken op begrip/motivatie door rondlopen en vragen stellen (<i>zichtbaarheid van leren</i>)
14:35-14:40	Instructie op vervolgopdracht	<ul style="list-style-type: none"> - Korte samenvatting van de verschillende lagen die bij de afgeleide komen kijken en instructie op vervolg 	<ul style="list-style-type: none"> - Informatie verwerken en achteraf vragen stellen 	

14:40-15:05	Werken aan werkblad gemiddelde snelheid -> snelheid op één moment -> afgeleide	- Uitdelen werkblad: gemiddelde snelheid -> snelheid op één moment -> afgeleide	- In duo's werken aan het werkblad: gemiddelde snelheid -> snelheid op één moment -> afgeleide	- Checken op begrip/motivatie door rondlopen en vragen stellen (<i>zichtbaarheid van leren</i>)
15:05-15:10	Evaluatie op lesdoel	- Leerlingen twee afsluitende vragen voorleggen die over het lesdoel gaan (in de vorm van onderwijsleer gesprek)	- Ingaan op vragen en volgvragen in interactie met de rest van de klas	- Gekozen leerlingen toelichtingen laten geven op hun antwoorden (toetsing leerdoel op basis van <i>individuele aanspreekbaarheid</i>)

Lesplanformulier les 3

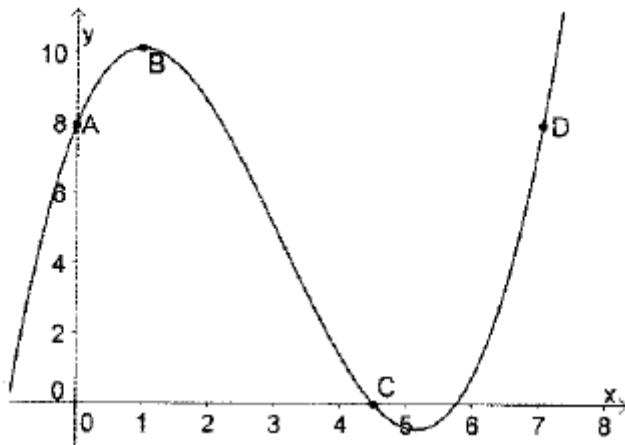
Datum: 30-10-20	Klas: 4vwisb	Les 3: de afgeleide bij wiskunde en natuurkunde	Hfdstk: 2: de afgeleide functie	
<p>Beginsituatie leerlingen: De leerlingen hebben (verbeterd) inzicht in de overgang gemiddelde snelheid -> snelheid op één tijdstip -> afgeleide</p>		<p>Benodigde materialen:</p> <ul style="list-style-type: none"> - 19x formatieve eindmeting: de afgeleide - 19x uitwerkbijlage formatieve eindmeting: de afgeleide 		
<p>(Eventuele doelen van docent)</p> <ul style="list-style-type: none"> - Toetsing in hoeverre de formatieve eindmeting verbetering laat zien in het conceptueel begrip van de afgeleide bij leerlingen ten opzichte van de formatieve beginmeting (OV). - Toetsing in hoeverre het expliciet maken van verschillen en overeenkomsten in het behandelen van de afgeleide bij wiskunde en natuurkunde bijdraagt aan verbeterd conceptueel begrip van de afgeleide bij leerlingen (OV). - Toetsing in hoeverre peerfeedback leerlingen activeert en motiveert om deel te nemen aan het leerproces (L) 		<p>Leerdoelen voor leerlingen in deze les: Aan het einde van de les kunnen leerlingen overeenkomsten en verschillen beschrijven tussen de manier waarop bij wiskunde en natuurkunde de afgeleide wordt behandeld en kunnen zij aangeven hoe verschillende natuurkundige toepassingen van de afgeleide in feite bijzondere gevallen zijn van de meer algemene benadering van de afgeleide bij wiskunde (L).</p>		
Tijd	Lesfase	Activiteit Docent	Activiteit Leerling	Evaluatie van leeropbrengst
14:20-14:35	Binnenkomst + activeren voorkennis	<ul style="list-style-type: none"> - Spoorboekje doornemen en leerdoel van de les presenteren - Voorkennis activeren doormiddel van peerfeedback 	<ul style="list-style-type: none"> - Tas van tafel - Structuur les en doel verwerken (<i>heldere structuur in de opbouw van de leerstof</i>) - Vragen beantwoord en die in de presentatie gesteld worden 	<ul style="list-style-type: none"> - Aan de hand van peerfeedback (<i>zichtbaarheid van leren</i>)
14:35-14:50	Onderwijsleer gesprek aan de hand van diverse opdrachten	<ul style="list-style-type: none"> - Managen onderwijsleer gesprek en instructie op diverse opdrachten 	<ul style="list-style-type: none"> - Instructie verwerken en opdrachten maken die langs komen 	<ul style="list-style-type: none"> - Aan de hand van peerfeedback (<i>zichtbaarheid van leren</i>)
14:50-15:10	Werken aan formatieve eindmeting: de afgeleide	<ul style="list-style-type: none"> - Uitdelen formatieve eindmeting: de afgeleide 	<ul style="list-style-type: none"> - Individueel werken aan de formatieve eindmeting 	<ul style="list-style-type: none"> - Checken op begrip door rondlopen en schriftelijke evaluatie achteraf (<i>zichtbaarheid van leren</i>)

Formatieve startmeting: de afgeleide

Opdracht 1: laat je niet afleiden

Zie figuur 1 en beantwoord de volgende vragen:

- a) Leg zo precies mogelijk uit wat de betekenis is van $\frac{dy}{dx} = -2$.
- b) Bereken de gemiddelde verandering (i) van A naar B, (ii) van B naar C en (iii) van A naar D.



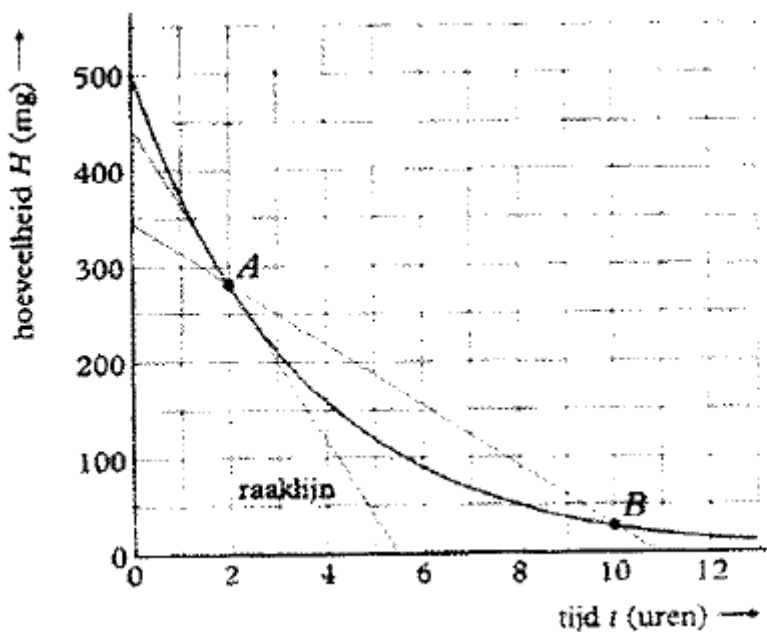
Figuur 1

Opdracht 2: paracetamol in tijden van corona

Finimal-tabletten bevatten per tablet 500 mg paracetamol.

Paracetamol is een snelwerkende pijnstillers, maar wordt ook weer snel afgevoerd. In de grafiek en tabel hieronder in figuur 2 is dat te zien.

- Bereken hoeveel paracetamol er gemiddeld per uur wordt afgevoerd in de periode van 2 uur tot 10 uur na het innemen van een tablet.
- Wat heeft dit gemiddelde te maken met de lijn AB?
- Geef een schatting van het hellingsgetal van de raaklijn in punt A. Wat is de betekenis van dit hellingsgetal?
- Stel dat je de hellingsgetallen van de raaklijnen in alle punten van de grafiek uit zou zetten tegen de tijd. Op deze manier ontstaat dus een nieuwe grafiek. Wat zou deze grafiek beschrijven?



t	H
1	375
2	281
3	211
4	158
5	119
6	89
7	67
8	50
9	38
10	28

Figuur 2

Opdracht 1: laat je niet afleiden

a)

b)

(i):

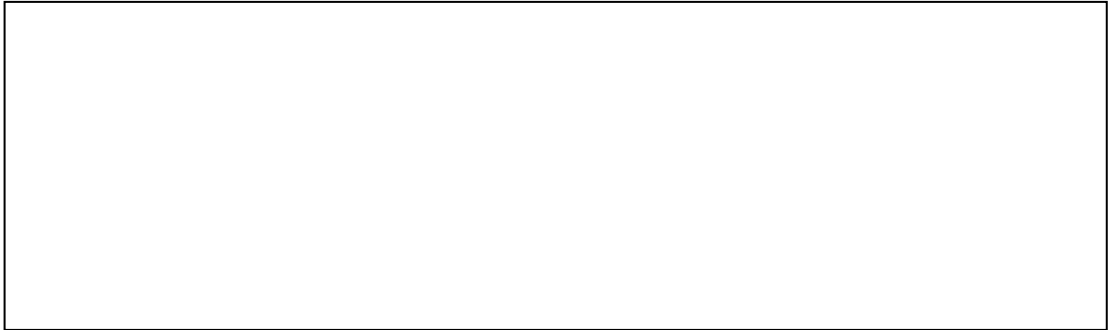
(ii):

(iii):

Opdracht 2: paracetamol in tijden van corona

a)

b)



c)

Schatting van het hellingsgetal:

Betekenis:



d)



Practicum - Meet je eigen afgeleide

Werk samen met drie of vier personen.

Namen:

Persoon 1: Persoon 2: Persoon 3: Persoon 4:
--

In dit practicum ga je je eigen beweging registreren. Aan de hand van het gevonden s-t diagram ga je berekeningen doen en nadenken over de samenhang met de afgeleide. Ook ga je verklaren hoe de snelheid van je eigen beweging invloed heeft op het s-t diagram.

Benodigheden:

- 1 bewegingssensor (met eventueel verlengstuk)
- De applicatie 'graphical analysis' op je chromebook

Rolverdeling:

- Persoon 1: pakt de bewegingssensor en sluit de bewegingssensor op de correct manier aan op het chromebook.
 - Persoon 2: download en installeert 'graphical analysis', bedient 'graphical analysis' en stelt de juiste instellingen in.
 - Persoon 3: gaat met verschillende snelheden naar en van de bewegingssensor aflopen.
 - (Persoon 4: helpt en ondersteunt)
 - De hele groep denkt vervolgens na over de verschillende vragen en levert een eigen versie in op classroom.
-

Opdrachten

Voer de volgende handelingen uit:

- Persoon 1 haalt de bewegingssensor. Ondertussen download en installeert persoon 2 'graphical analysis' op zijn chromebook. Daarna sluit persoon 1 de bewegingssensor op de juiste manier aan.
- Wanneer 'graphical analysis' geopend is, doet persoon 2 het volgende:
 - Kies 'sensor data collectie'
 - Klik op de knop linksonder en voer in: stop data collectie na 20s.
 - Klik vervolgens op de grafiek knop daarboven. En kies onderin 'grafiek opties aanpassen'. Stel de verticale as in op tot 5m.
 - Laat persoon 3 zijn positie innemen. Op dat moment drukt persoon 2 op nulmeting, zodat deze beginafstand als nul wordt ingesteld. Tot slot drukt persoon bovenin op de grote 'collection' knop. De meting start.
- Persoon 3 gaat vervolgens bewegen ten opzichte van de sensor. Zo ontstaat een s-t-diagram op het scherm. Daarnaast is ook een tabel te zien van de geregistreerde gegevens. Voer op deze manier 3 metingen uit, waarbij persoon 3 steeds met verschillende snelheden ten opzichte van de bewegingssensor naar voren en naar achteren loopt. Sla je metingen op.

Beantwoord nu de volgende vragen:

- A. Bereken de gemiddelde snelheid van je eerste beweging over de eerste 5 seconden.

- B. Bereken de gemiddelde snelheid van je eerste beweging over de volledige 20 seconden van de meting. Ben je de laatste 15 seconden van je meting gemiddeld sneller of langzamer gaan lopen? Heb je ook op elk tijdstip gedurende de laatste 15 seconden sneller of langzamer gelopen? Kun je dit verklaren?

- C. Verklaar de vorm van het s-t-diagram dat je er bij de eerste meting uit kreeg.



- D. Vergelijk de vorm van het s-t diagram van de tweede meting met die van de eerste meting. Gedurende welke tijdsintervallen heb je bij de tweede meting sneller gelopen dan bij de eerste meting. Gedurende welke tijdsintervallen langzamer? Hoe zie je dit terug in de vorm van de grafiek? Vergelijk op dezelfde manier de eerste en derde meting.



- E. Probeer nu met een vierde meting een grafiek te creëren die meer pieken bevat gedurende de 20 seconden dan de grafieken van metingen 1 tot en met 3.



- F. Je ziet in de tabel dat 'graphical analysis' ook een kolom met snelheden aanmaakt. Licht toe hoe deze snelheden door jezelf nagerekend kunnen worden. Voer één zo'n berekening uit en controleer hem met de bijbehorende waarde uit de tabel.

Werkblad: gemiddelde snelheid onder de loep

We weten allemaal hoe we het gemiddelde van de getallen 7, 8 en 9 moeten bepalen. We tellen de drie getallen bij elkaar op en delen door het aantal getallen, in dit geval drie.

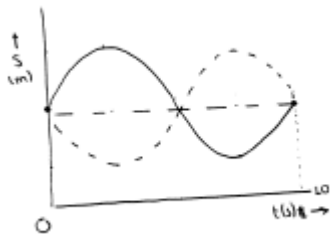
$$\text{Dus gemiddelde} = \frac{7+8+9}{3} = 8.$$

Je kunt ook het gemiddelde bepalen van oneindig veel getallen. De gemiddelde snelheid over een tijdsinterval bepalen is zo'n gemiddelde van oneindig veel getallen.

a) Licht dit toe.

Maar hoe gaat dat dan? Want je kunt toch niet delen door oneindig? Gelukkig is er een manier om dit probleem te omzeilen. Die gaan we nu behandelen.

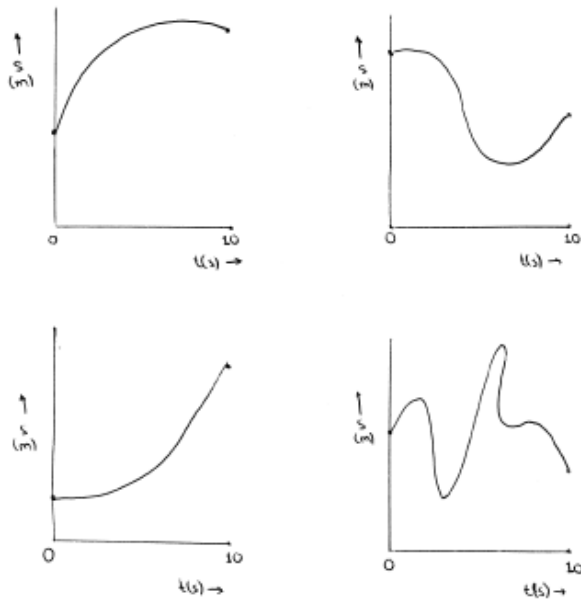
In de schets in figuur 1 zie je een meting (die 10s duurt) van de afstand van een leerling tot een bewegingssensor als functie van de tijd (doorlopende lijn). De gemiddelde snelheid van deze leerling gedurende de 10s van de meting is hetzelfde als de gemiddelde snelheid over 10s van leerlingen die volgens de gestippelde lijnen zouden hebben bewogen (zie figuur 1).



Figuur 1

b) Licht dit toe zonder gebruik te maken van het differentiequotient.

- c) In onderstaande schetsen zijn steeds de afstand van leerlingen tot een bewegingssensor als functie van de tijd weergegeven gedurende een meting van 10s. Teken steeds met stippellijnen twee alternatieve bewegingen van leerlingen die dezelfde gemiddelde snelheid opleveren over de 10s dat de meting duurt. Hierbij zijn begin- en eindpositie steeds hetzelfde.



Waarschijnlijk ben je tot de conclusie gekomen dat de gemiddelde snelheid over de 10 seconden van de meting alleen maar afhangt van de beginpositie en eindpositie. Elke grafiek tussen deze twee punten levert dezelfde gemiddelde snelheid van de leerling op! Hier kunnen we handig gebruik van maken, aangezien één grafiek tussen welke twee punten ook altijd wordt gegeven door een rechte lijn.

Voor een beweging waarvan de grafiek een rechte lijn is, is de gemiddelde snelheid over een interval gelijk aan de snelheid op ieder willekeurig tijdstip in dat interval.

- d) Licht dit toe. Hoe berekenen we in dit geval de snelheid?

Maar dat betekent dus dat we nu weten dat de gemiddelde snelheid van alle bewegingen met t-s-grafieken met dezelfde begin- en eindpunten op dezelfde manier berekend wordt! Namelijk door de richtingscoëfficiënt van de rechte lijn tussen deze twee punten te berekenen (ook wel het differentiequotient genoemd). Het uitrekenen van een gemiddelde van oneindig veel getallen blijkt gelukkig dus niet nodig te zijn.

LES 29-10

Jeroen Maes

INHOUD

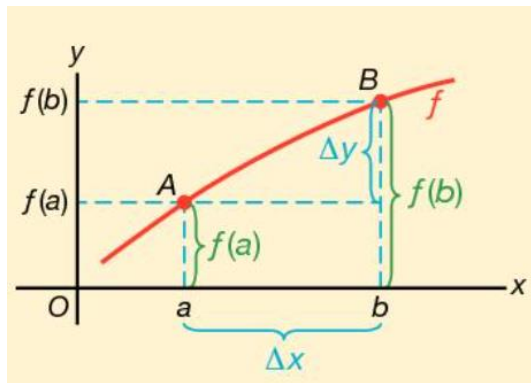
- Lesdoel en terugblik op de vorige les: gemiddelde snelheid onder de loep (10 min)
- Instructie (5 min)
- Werken aan opgaven (25 min)
- Evaluatie op lesdoel (5 min)

LESDOEL

Aan het einde van de les kun je uitleggen dat een gemiddelde verandering met het differentiequotient berekend wordt en kun je omschrijven wat er meetkundig en symbolisch gebeurd bij de overgang:

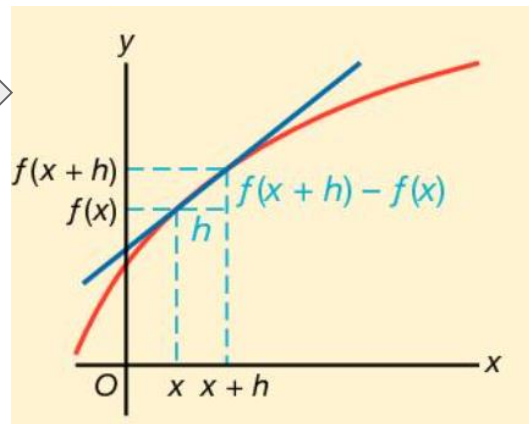
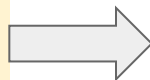
gemiddelde snelheid \rightarrow snelheid op één moment \rightarrow afgeleide

INSTRUCTIE



=

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

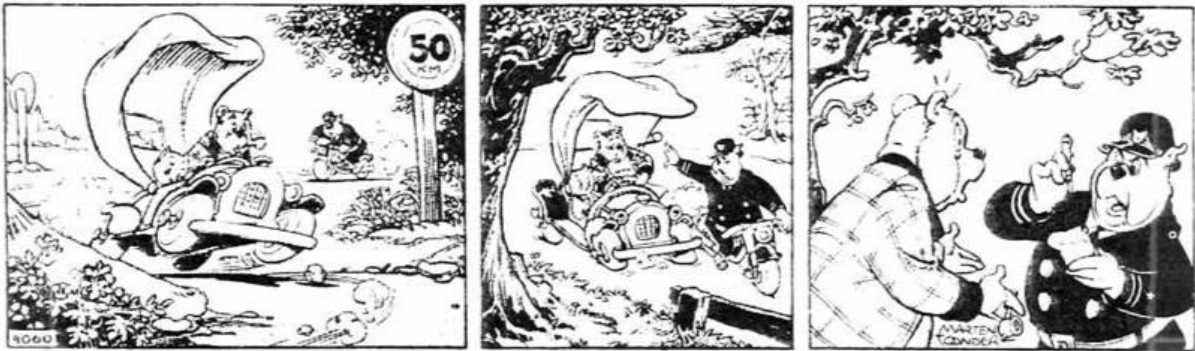
EVALUATIE OP LESDOEL

- 1) Waarom wordt de gemiddelde verandering op een interval bepaald door het differentiequotient? Gebruik in je uitleg de metingen van de bewegingen van leerlingen ten opzichte van een bewegingssensor.
- 2) Beschrijf meetkundig de overgang: gemiddelde snelheid \rightarrow snelheid op één moment \rightarrow afgeleide.

Werkblad: gemiddelde snelheid -> snelheid op één moment -> de afgeleide

Opgave 1: heer in het verkeer

Heer Bommel was danig uit zijn humeur. Het verkeer in Rommeldam had hem veel oponthoud bezorgd en toen hij zich buiten de bebouwde kom waande, trapte hij het gaspedaal geheel in, zodat de Oude Schicht gierend over de weg vloog. Helaas ontging het hem dat hij zich op een weg bevond waar snelheidsbeperking geboden was en dat wreekte zich. Want daar naderde de commissaris van politie reeds op een brullende motor en stak een hand op.



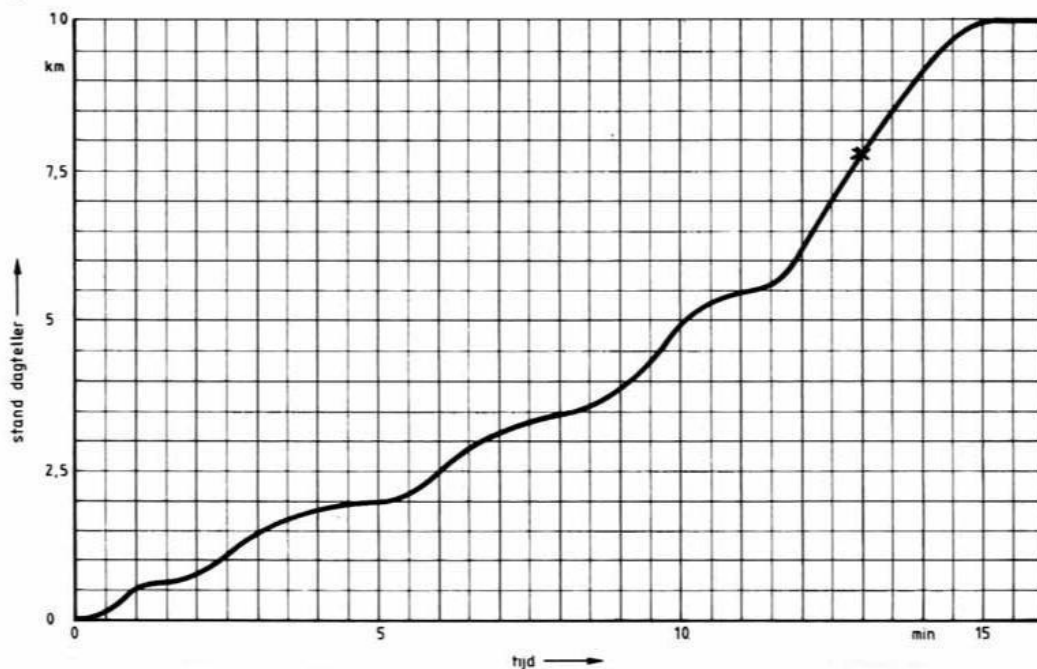
‘Hebt u zo’n haast, huh?’ vroeg Bulle Bas, een notitieboekje trekkend.

‘Hebt u de borden niet gezien? Kunt u niet lezen?’

‘Maar ik reed niet te snel!’, riep heer Bommel op piepende toon. ‘In het afgelopen kwartier heb ik slechts 10 km gereden, dat is dus 40 km per uur’.

Inderdaad wees de dagteller van de Oude Schicht 10 km aan.

Maar meer informatie over Bommel’s autoritje geeft onderstaande grafiek.



a) Bedenk een mogelijk antwoord van Bulle Bas.

b) Stel je voor dat Bommel gelijk zou hebben. Hoe zou de grafiek er dan hebben uitgezien?

In de gemeente Rommeldam zijn de boetes bij overtreding van de snelheidswet bepaald niet mals.

Gemeente Rommeldam

Politieverordening.

De boetes die opgelegd dienen te worden bij overtreding van Artikel 243 uit het Wegenverkeersreglement zijn:

- bij een overschrijding van de toegestane snelheid met ten hoogste 10 km/uur bedraagt de boete 25 florijnen;
- bij een overschrijding van meer dan 10 km/uur maar ten hoogste 20 km/uur bedraagt de boete 50 florijnen;
- bij een overschrijding van meer dan 20 km/uur maar ten hoogste 30 km/uur bedraagt de boete 100 florijnen.

Bij elke volgende 10 km/uur boven de toegestane maximum snelheid, dient men de boete opnieuw te verdubbelen.

De burgemeester van Rommeldam

Bekijk de grafiek van Bommel's autoritje. Het aangekruiste punt geeft het moment (en de plaats) aan waar Bommel's overtreding werd geconstateerd.

c) Hoeveel boete moest Bommel betalen?

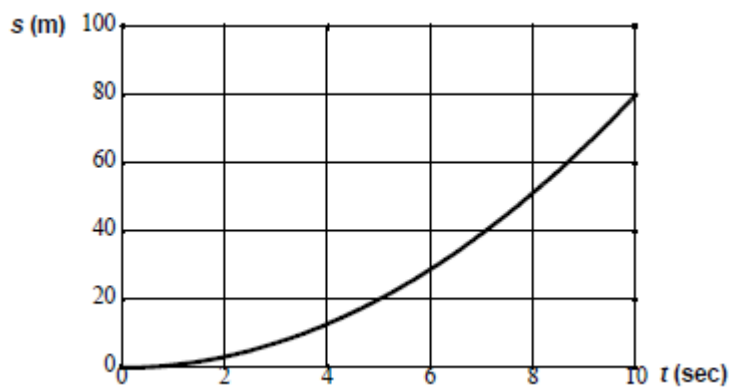
Opgave 2: ruimtevaarder

Op de maan val je zachter dan op de aarde, zoals Charles Duke (op de foto bij maanauto) aan de lijve ondervond in 1972. De valweg naar de maan is net als op aarde, evenredig met het kwadraat van de valtijd, maar de evenredigheidsconstante is aanmerkelijk kleiner.

De valtijd, valweg-functie beantwoord op de maan ongeveer aan de formule:

$$s(t) = 0,8t^2$$

Hieronder zie je een grafiek van die functie op het interval $[0,10]$.



Een ruimtevaarder laat van 80 m hoogte een maansteen vallen. Volgens de formule heeft die 10 seconden nodig om neer te ploffen. De *gemiddelde snelheid* gedurende de gehele val is dus 8 m/sec.

- a) Hoe groot is de gemiddelde snelheid gedurende de eerste 5 seconden? En gedurende de volgende 5 seconden?

- b) De eerste uitkomst van vraag a) is een stuk lager dan de tweede. Hoe kun je dat zien in de figuur?

- c) Laat met behulp van differentiëren zien dat de valsnelheid op de maan beantwoordt aan de formule:

$$v(t) = 1,6t.$$

Teken vervolgens de grafiek van $v(t)$.

- d) Voor $t=5$ levert dat op: 8 m/sec. Kun je dat ook zien in de t-s-grafiek? Zo ja, waaraan?

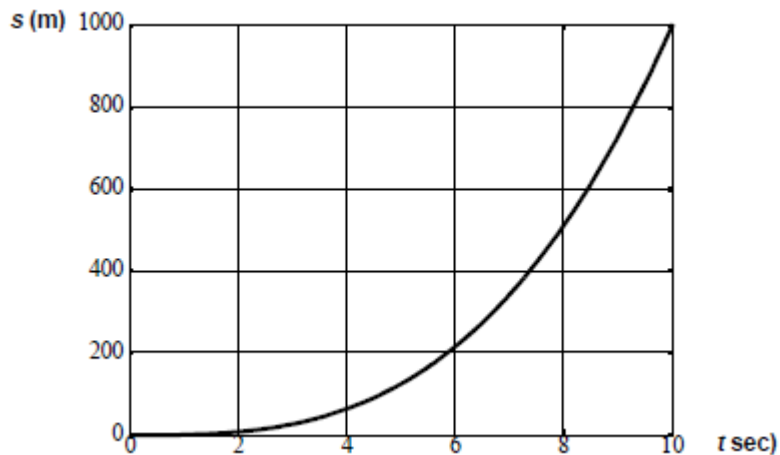
Opgave 3: supersonisch snelle beweging

Veronderstel dat een beweging voldoet aan de formule:

$$s(t) = t^3$$

waarbij t de tijd in seconden is en s de afstand in m.

Dat wordt al gauw supersonisch snel. Na bijvoorbeeld 10 seconden is al 1 km afgelegd. Hieronder zie je de t,s -grafiek op het venster $[0,10]$ bij $[0,1000]$.

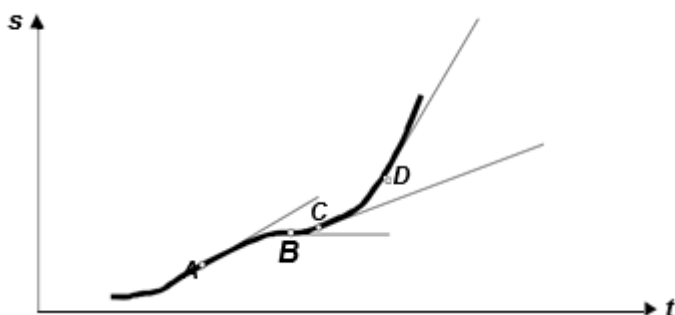


a) Hoe groot is de *gemiddelde* snelheid op het tijdsinterval $[4,5]$? En op $[5,6]$?

b) Bedenk tenminste twee manieren om de snelheid op *het moment* $t=5$ te bepalen en werk ze uit.

Opgave 4: tijd-afstand-grafiek

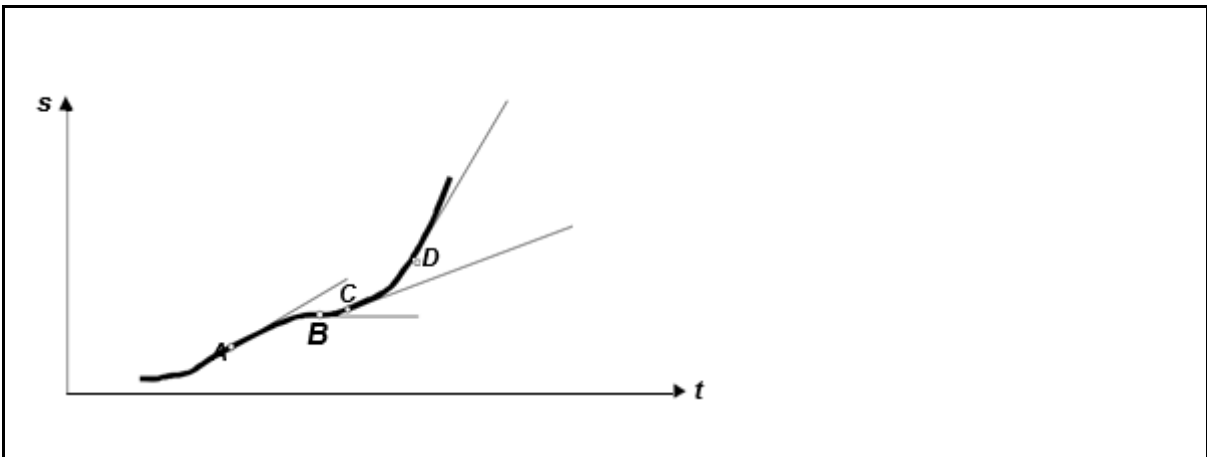
In de tijd-afstand-grafiek hieronder is op vier tijdstippen (corresponderend met de punten A, B, C en D) de raaklijn getekend; dat wil dus zeggen de lijn die aangeeft, hoe de grafiek zich zou voortzetten als vanaf dat moment de snelheid niet meer zou veranderen.



a) Wat betekent het voor de beweging dat de raaklijn in B horizontaal is?

b) Je kunt uit de grafiek aflezen dat na het tijdstip dat correspondeert met het punt D, de snelheid nog groter wordt. Verklaar dit.

c) Stel je voor dat de snelheid na dat tijdstip onmiddellijk zou gaan afnemen. Hoe moet de grafiek rechts van het punt D veranderen?



LES 30-10: DE AFGELEIDE BIJ WISKUNDE EN NATUURKUNDE

Jeroen Maes

INHOUD

- Lesdoel en terugblik op de vorige les (10 min)
- Instructie met opdrachten (15 min)
- Formatieve eindevaluatie (20 min)

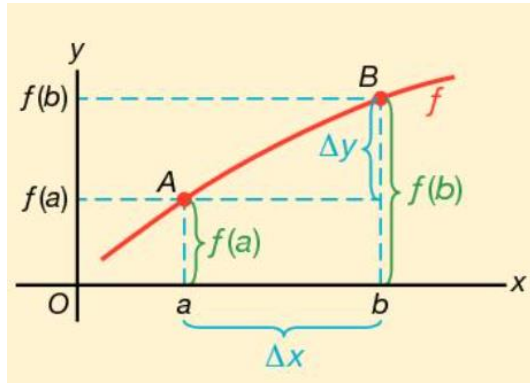
LESDOEL

Aan het einde van de les kun je:

- overeenkomsten en verschillen benoemen tussen de manier waarop de afgeleide bij wiskunde en bij natuurkunde wordt behandeld en,
- kun je uitleggen dat de situaties bij natuurkunde waarbij de afgeleide een rol speelt bijzondere gevallen zijn van de algemene beschrijvingen bij wiskunde.

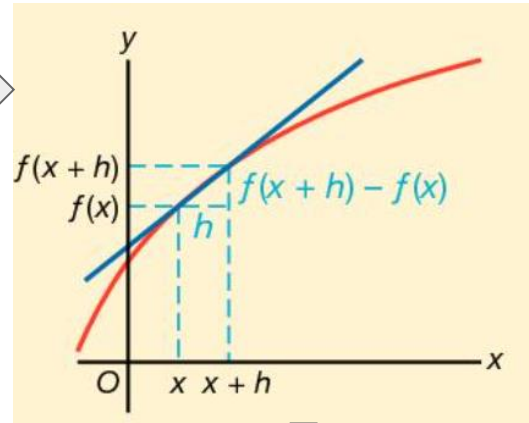
VOORKENNIS
OPFRISSEN

TERUGBLIK OP DE VORIGE LES



=

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

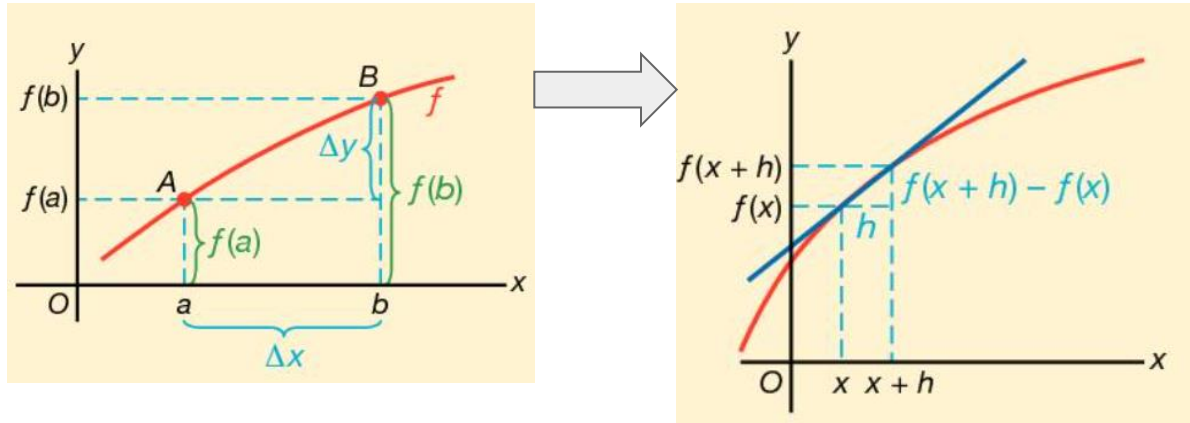


$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

TERUGBLIK OP DE VORIGE LES

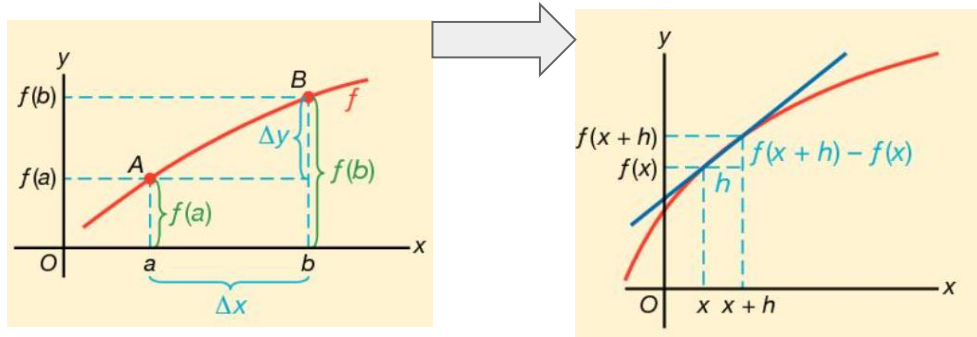


Beschrijf wat er bij bovenstaande overgang grafisch wordt gedaan.



Students, write your response!

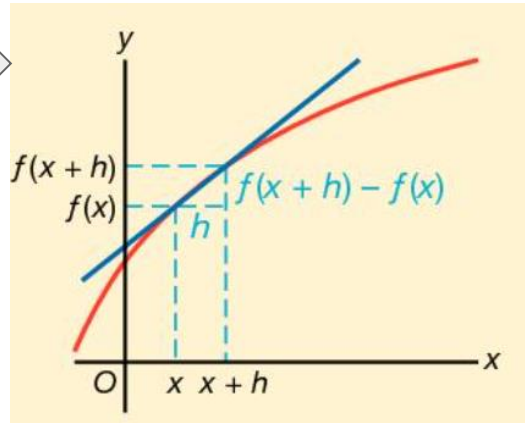
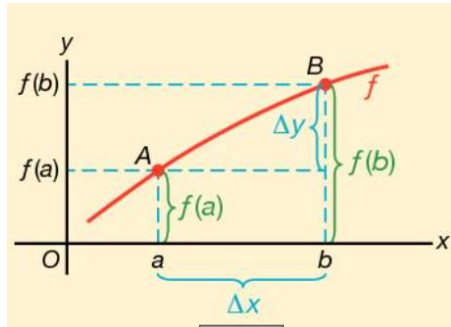
TERUGBLIK OP DE VORIGE LES



Beschrijf wat er bij bovenstaande overgang grafisch wordt gedaan:

- 1) Het interval op de x-as wordt zeer klein gemaakt. De waarde h gaat zo dicht bij nul zitten als je maar kunt bedenken, maar is geen nul.
- 2) De rechte lijn door de punten A en B links gaat over in een raaklijn door één punt.

TERUGBLIK OP DE VORIGE LES



$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

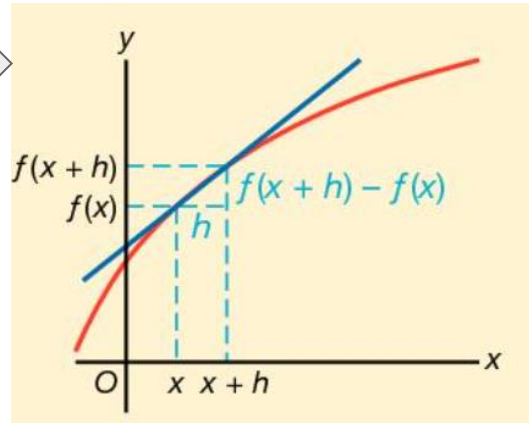
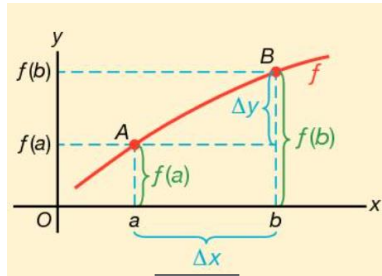
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Aan welke natuurkundige grootheid (grootheden) doen de linker
figuur en formule je denken? En de rechterfiguur?

Students, write your response!



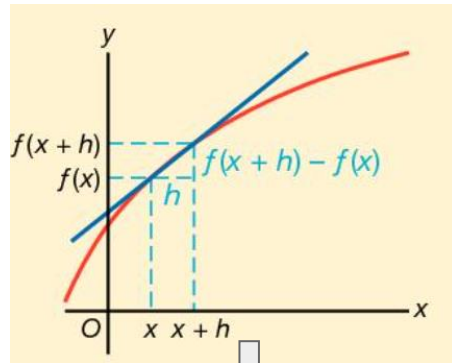
TERUGBLIK OP DE VORIGE LES



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Aan welke natuurkundige grootte (grootheden) doen de linker figuur en formule je denken? En de rechterfiguur? **linkerfiguur en formule: gemiddelde snelheid/versnelling; rechterfiguur: snelheid/versnelling op één tijdstip.**

TERUGBLIK OP DE VORIGE LES



=

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

↓

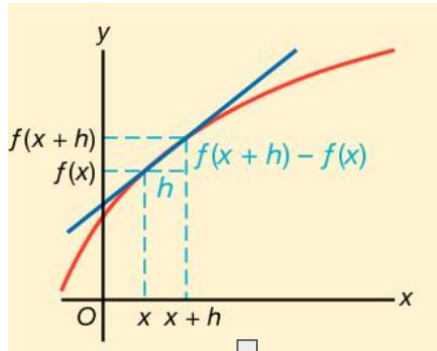
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Beschrijf wat er bij bovenstaande overgang gebeurt. Hoe heet de grafiek die de afgeleide functie hoort?



Students, write your response!

TERUGBLIK OP DE VORIGE LES



=

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Beschrijf wat er bij bovenstaande overgang gebeurt. Hoe heet de grafiek die bij de afgeleide functie hoort? In de bovenste figuur en formule wordt de helling van de raaklijn voor één enkele x bepaald (lokaal), terwijl bij de onderste formule de helling van de raaklijn voor iedere x wordt bepaald (globaal). De hellinggrafiek hoort bij de afgeleide functie.

DE AFGELEIDE BIJ
WISKUNDE EN
NATUURKUNDE

DE AFGELEIDE BIJ WISKUNDE EN NATUURKUNDE

Overeenkomsten:

Noem tenminste twee overeenkomsten tussen de manier waarop de afgeleide bij de vakken wiskunde en natuurkunde wordt gebruikt.



Students, write your response!

DE AFGELEIDE BIJ WISKUNDE EN NATUURKUNDE

Overeenkomsten:

Noem tenminste twee overeenkomsten tussen de manier waarop de afgeleide bij de vakken wiskunde en natuurkunde wordt gebruikt.

Voorbeelden:

- 1) Bij beide vakken wordt de raaklijnmethode gebruikt om hellingen te bepalen.
- 2) Bij beide vakken bereken je met de afgeleide een verandering (toename/afname) op één moment.
- 3) ...

DE AFGELEIDE BIJ WISKUNDE EN NATUURKUNDE

Verschillen:

- verschillen bij het maken van grafieken
- verschillen in notatie en taalgebruik
- verschillen in werkwijze

DE AFGELEIDE BIJ WISKUNDE EN NATUURKUNDE

Verschillen bij het maken van grafieken:

1. Bij natuurkunde worden eenheden bij de assen genoteerd, bij natuurkunde niet.
2. Bedenk zelf een tweede verschil bij het gebruik van grafieken.



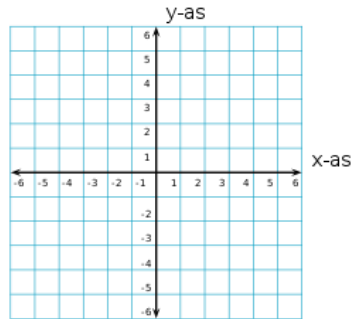
Students, write your response!

DE AFGELEIDE BIJ WISKUNDE EN NATUURKUNDE

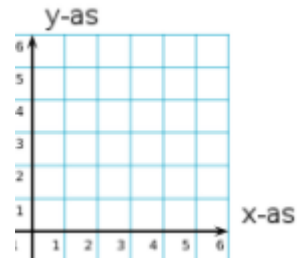
Verschillen bij het maken van grafieken:

1. Bij natuurkunde worden eenheden bij de assen gebruikt, bij natuurkunde niet.
2. Bedenk zelf een tweede verschil bij het gebruik van grafieken.

Voorbeeld: wiskunde =



natuurkunde =



DE AFGELEIDE BIJ WISKUNDE EN NATUURKUNDE

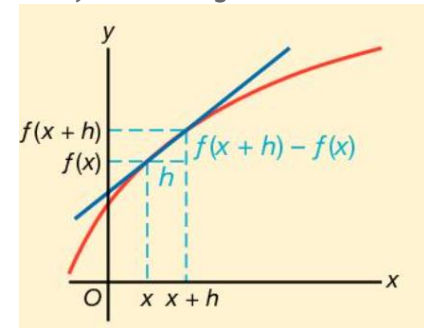
Verschillen in notatie en taalgebruik:

1. Natuurkunde: eenparig = Wiskunde: constant
2. Natuurkunde: x-t-diagram = Wiskunde: t-x-grafiek
3.

DE AFGELEIDE BIJ WISKUNDE EN NATUURKUNDE

Verschillen in werkwijze:

1. Wiskunde: x kiezen, vervolgens $x + h$ heel dichtbij kiezen, de lijn tussen $f(x)$ en $f(x+h)$ visualiseren, de functiewaardes $f(x)$ en $f(x+h)$ bepalen, het differentiequotient berekenen en de limiet nemen voor $h \rightarrow 0$. **Of: de afgeleide berekenen met rekenregels en een x -waarde invullen in de afgeleide.**
2. Omschrijf de werkwijze, zoals je die kent van natuurkunde, om bijvoorbeeld de snelheid op één tijdstip te bepalen.

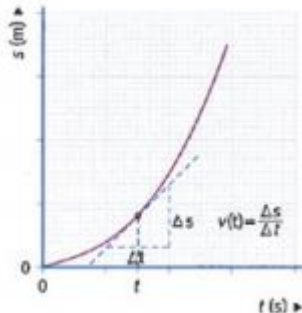


Students, write your response!

DE AFGELEIDE BIJ WISKUNDE EN NATUURKUNDE

Verschillen in werkwijze:

1. Wiskunde: x kiezen, vervolgens $x + h$ heel dichtbij kiezen, de lijn tussen $f(x)$ en $f(x+h)$ visualiseren, de functiewaardes $f(x)$ en $f(x+h)$ bepalen, het differentiequotient berekenen en de limiet nemen voor $h \rightarrow 0$. **Of: de afgeleide berekenen met rekenregels en een x -waarde invullen in de afgeleide.**
2. Omschrijf de werkwijze, zoals je die kent van natuurkunde om bijvoorbeeld de snelheid op één tijdstip te bepalen.



Raaklijn schetsen en op willekeurige plek Δs en Δt bepalen
en door elkaar delen.

DE AFGELEIDE BIJ WISKUNDE EN NATUURKUNDE

Afgeleide natuurkunde:

- gem. snelheid = $\Delta s / \Delta t$,
gem. versnelling = $\Delta v / \Delta t$
- s-t-diagram \rightarrow v-t-diagram \rightarrow a-t-diagram
- $s = 0.5at^2 \rightarrow v = at$

Afgeleide wiskunde:

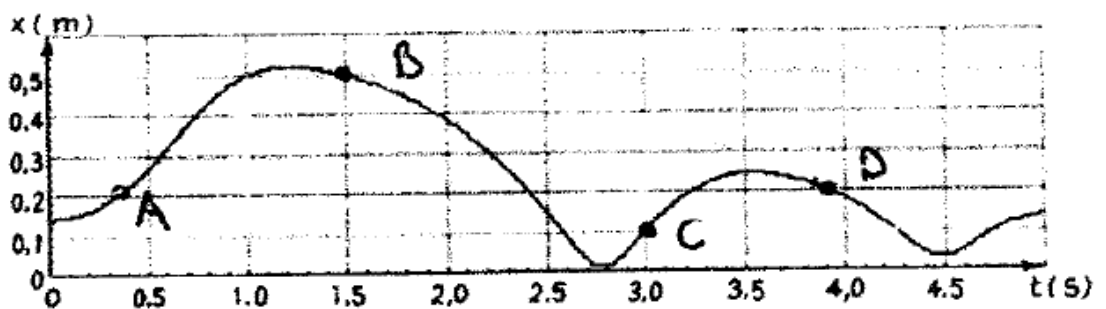
- gem. verandering = $\Delta y / \Delta x$
- grafiek \rightarrow hellinggrafiek
- functie \rightarrow afgeleide functie

Formatieve eindmeting: de afgeleide

Opdracht 1: beweging van een leerling ten opzichte van een bewegingssensor

In figuur 1 is de afstand van een leerling tot een bewegingssensor weergegeven als functie van de tijd. Beantwoord de volgende vragen:

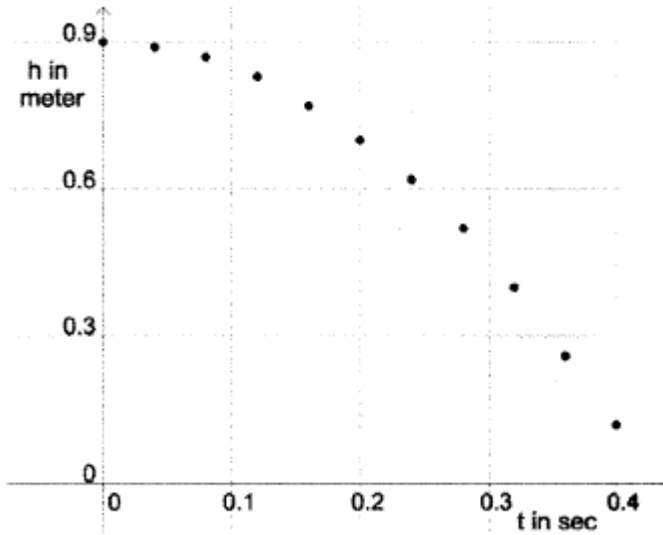
- Leg uit wat het in deze situatie betekent dat de afgeleide na 3,5 seconden gelijk is aan 0.
- Bereken de gemiddelde snelheid in m/s (i) van A naar B, (ii) van B naar C en (iii) van A naar D.
- Je kunt na 3,5 seconden ook bepalen wat de afgeleide van de afgeleide is (de tweede afgeleide). Welke fysische grootheid bereken je dan?



Figuur 1

Opdracht 2: vallende kogel

Voor een vallende kogel is om de 0,04 seconden de hoogte gemeten. De formule voor de hoogte is gegeven door $h(t) = 0,9 - 4,9t^2$. De metingen voor de hoogte zijn daarnaast weergegeven in de grafiek van figuur 2. Er zijn tenminste drie manieren om te berekenen met welke snelheid de kogel op de grond valt. Geef zelf twee verschillende berekeningen voor de snelheid waarmee de kogel op de grond valt.



Figuur 2

Uitwerkbijlage formatieve eindmeting: de afgeleide

Naam:

Opdracht 1: beweging van een leerling ten opzichte van een bewegingssensor

a)

b)

(i):

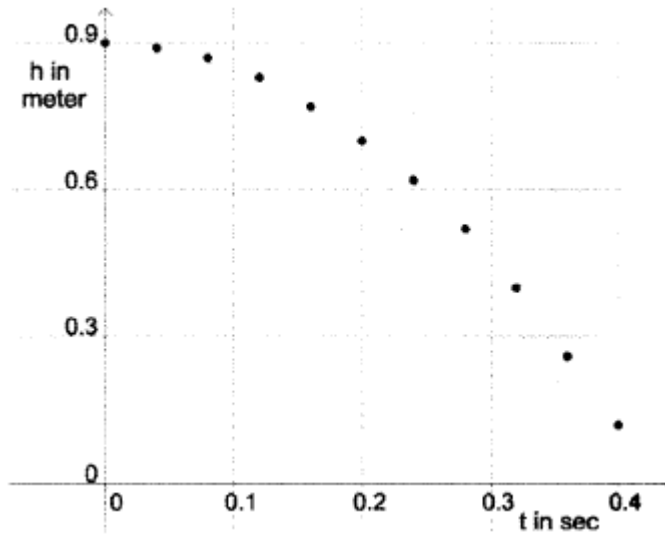
(ii):

(iii):

c)

Opdracht 2: vallende kogel

Manier 1:



Manier 2:

Hypothetisch leertraject (HLT)

Verwachting op basis van het leerdoel (globaal)	Verwachtingen over te maken opdrachten/ te verrichten handelingen (specifiek)
<i>Fase 1: startmeting (zie ook bijlage IV en V)</i>	
<p>Ik verwacht dat de leerlingen aanlopen tegen de beschreven problemen en misvattingen die zich voordoen bij het leren van het concept afgeleide, zoals beschreven in sectie II en daarnaast gedeeltelijk blijken uit het vooronderzoek beschreven in sectie I.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Veel leerlingen zullen bij opdracht 1a geen zinvolle betekenis kunnen geven aan de gegeven differentiaalquotiënt. Bij onderdeel 1b zullen veel leerlingen (i) goed maken, onderdeel (ii) zal minder goed gaan, waarbij veel leerlingen het minteken vergeten of de x-coördinaat van C voor Δx gebruiken, en onderdeel (iii) zal nog minder goede antwoorden opleveren. • In opdracht 2 zullen veel leerlingen bij onderdeel a een differentiequotiënt berekenen, maar bij onderdeel b vaak niet zien wat de samenhang is met de lijn AB. Bij onderdeel c zullen de leerlingen in veel gevallen wel het hellingsgetal kunnen schatten, maar niet duidelijk de betekenis uit kunnen leggen. Bij onderdeel d komen weinig leerlingen tot een goed antwoord.
<i>Fase 2: practicum (zie ook bijlage VI)</i>	
<p>Ik verwacht dat de leerlingen na het maken van de vragen op het werkblad een verband gaan zien tussen het uit de metingen voortkomende s-t diagram en de gemiddeld gelopen snelheid. Een aantal zal ook het verband gaan zien tussen de gelopen snelheden op één moment en de afgeleide.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Bij vragen A en B zullen de leerlingen prima in staat zijn de gemiddelde snelheid te berekenen over een gegeven tijdsinterval. • Het verklaren van het verschil tussen gemiddelde snelheid en snelheid op een tijdstip bij vraag B zal door de leerlingen in veel gevallen correct gedaan worden, maar de uitleg zal oppervlakkig

	<p>zijn.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Bij vraag C zal in de verklaring de rol van de gelopen snelheid worden benoemd. • Bij vraag D zien de meeste leerlingen het verband tussen gelopen snelheid en vorm van de grafiek goed in. • Bij vraag E zal een kleiner gedeelte van de leerlingen dan bij D in staat zijn om, andersom, vanuit inzicht in eigen bewegingen tot een gevraagde grafiek te komen. • Bij onderdeel F zal een aantal leerlingen op het idee komen dat met de raaklijnmethode de kolom met snelheden kan worden gereproduceerd.
--	--

Fase 3: gemiddelde snelheid (zie ook bijlage VII)

<p>Ik verwacht dat leerlingen na het maken van de vragen op het werkblad meer inzicht hebben in de betekenis van het differentiequotiënt en relatie met gemiddelde verandering.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Veel leerlingen zullen inzien dat een interval oneindig veel getallen bevat, maar zullen vergeten te vermelden dat er dus ook oneindig veel waarden in het bereik mee corresponderen bij onderdeel a. • Bij onderdeel b zullen veel leerlingen inzien dat bij alle drie de grafieken de afgelegde weg in 10s hetzelfde is, dus ook de gemiddelde snelheid. • Bij onderdeel c zullen veel leerlingen correcte alternatieve bewegingen intekenen, maar zullen in veel gevallen paden nabootsen zoals in onderdeel b. • Bij onderdeel d zullen veel leerlingen tot een correct antwoord komen.
---	--

Fase 4: van lokaal naar globaal en andersom (zie ook bijlage VIII en IX)

<p>Ik verwacht dat de leerlingen na de uitleg en het maken van de vragen op het werkblad beter begrip hebben van</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Bij opgave 1 zullen leerlingen in veel gevallen inzien dat bij onderdeel b de grafiek een
--	---

de overgangen van globaal naar lokaal (gemiddelde snelheid -> snelheid op één moment) en van lokaal naar globaal (snelheid op één moment -> de afgeleide) die bij de introductie van de afgeleide een rol spelen.

rechte lijn is, maar bij onderdeel c met de raaklijnmethode meer hulp van de docent nodig hebben.

- Bij opgave 2 zullen de leerlingen bij onderdeel a het gemiddelde met formules in veel gevallen goed berekenen, maar bij onderdeel b de grafische interpretatie lastiger vinden. Bij onderdeel c zal het differentiëren veelal goed gaan, maar de grafische interpretatie bij onderdeel d meer hulpvragen opleveren.
- Bij opgave 3 zullen de leerlingen met onderdeel a nauwelijks problemen ervaren en bij onderdeel b in veel gevallen zowel de raaklijnmethode als de afgeleide in formulevorm toepassen!
- Bij opgave 4 zullen de leerlingen de grafische weergave goed kunnen interpreteren: de horizontale raaklijn bij a en de manier waarop de grafiek verandert bij veranderde snelheid bij b en c.

Fase 5: vergelijken van de afgeleide bij wiskunde en natuurkunde (zie ook bijlage X)

Ik verwacht dat de leerlingen na het maken van de peerfeedback vragen onder de sectie 'de afgeleide bij wiskunde en natuurkunde' als onderdeel van de presentatie in bijlage X een beter inzicht hebben in de verschillen en overeenkomsten tussen de afgeleide bij wiskunde en natuurkunde en situaties in de natuurkunde waarbij de afgeleide een rol speelt zien als bijzondere gevallen van de algemene beschrijvingen bij wiskunde.

- Bij de vraag op slide 13 verwacht ik dat de leerlingen tenminste één overeenkomst kunnen noemen op basis van hun eigen ervaring.
- Bij de vraag op slide 16 verwacht ik dat de leerlingen een tweede verschil kunnen noemen.
- Bij de vraag op slide 19 verwacht dat ik de leerlingen de raaklijnmethode in eigen woorden beschrijven en iets zeggen over de differentiequotiënt.

Fase 6: eindmeting (zie ook bijlage XI en XII)

Ik verwacht dat de beschreven problemen en misvattingen die zich voordoen bij het leren van het concept afgeleide, zoals beschreven in sectie II en daarnaast gedeeltelijk blijken uit het vooronderzoek beschreven in sectie I, minder optreden bij de leerlingen bij het maken van de eindmeting.

- In opdracht 1 zullen veel leerlingen bij onderdeel a een correcte betekenis toekennen aan een afgeleide die gelijk is aan nul, bij onderdeel b zullen (ii) en (iii) meer correcte antwoorden opleveren dan bij onderdeel 1b van de startmeting en onderdeel c zal tot weinig correcte antwoorden leiden.
- In opdracht 2 zullen veel leerlingen de raaklijnmethode (slordig) uitwerken als eerste berekening en op het idee komen dat het berekenen van de afgeleide hier van pas kan komen bij de tweede berekening. Ze zullen echter de afgeleide vervolgens evalueren op een onnauwkeurig afgelezen tijdstip. Er zullen nauwelijks leerlingen als derde berekeningsmethode op het idee komen dat ook de gemiddelde snelheid bepaald kan worden op een zeer klein interval rond het moment dat de kogel de grond treft.

~~Uitwerkingen opgave 1~~
focus 1n A

Uitwerkbijlage formatieve startmeting: de afgeleide

Opdracht 1: laat je niet afleiden

→ a)

zo bereken je het gem. van een grafiek.

b)

(i): ~~$\frac{8}{1}$~~ $\frac{2}{1} = 2$

→ (ii): ~~$\frac{8}{1}$~~ $\frac{10}{3,5} = 2,86$

(iii): $\frac{8}{8} = 0$

Opdracht 2: paracetamol in tijden van corona

a)

$$\begin{array}{l} A(2) = 281 \\ t(10) = 28 \end{array} \quad \begin{array}{l} 281 - 28 = 253 \\ 10 - 2 = 8 \end{array} \quad \frac{253}{8} = 31,63$$

b)

Dat is de hulplijn om het gem. van A en B te berekenen.

↑
werkblad

c)

Schatting van het hellingsgetal:

$$t(0) \approx 4 \text{ of } 40$$

$$t \approx 5.4$$

$$\frac{440}{5.4} = 81.48$$

←

Betekenis: wat de helling is en wordt aangegeven met een hellingsgetal.

d)

→

gem. van alle welke lijn is ??

Practicum - Meet je eigen afgeleide

Werk samen met drie of vier personen.

Namen:

Persoon 1: Anna Wesselsz Persoon 2: Lilia Nieuwenkamp Persoon 3: Jivani Jesuthas Persoon 4: no

In dit practicum ga je je eigen beweging registreren. Aan de hand van het gevonden s-t diagram ga je berekeningen doen en nadenken over de samenhang met de afgeleide. Ook ga je verklaren hoe de snelheid van je eigen beweging invloed heeft op het s-t diagram.

Benodigheden:

- 1 bewegingssensor (met eventueel verlengstuk)
- De applicatie 'graphical analysis' op je chromebook

Rolverdeling:

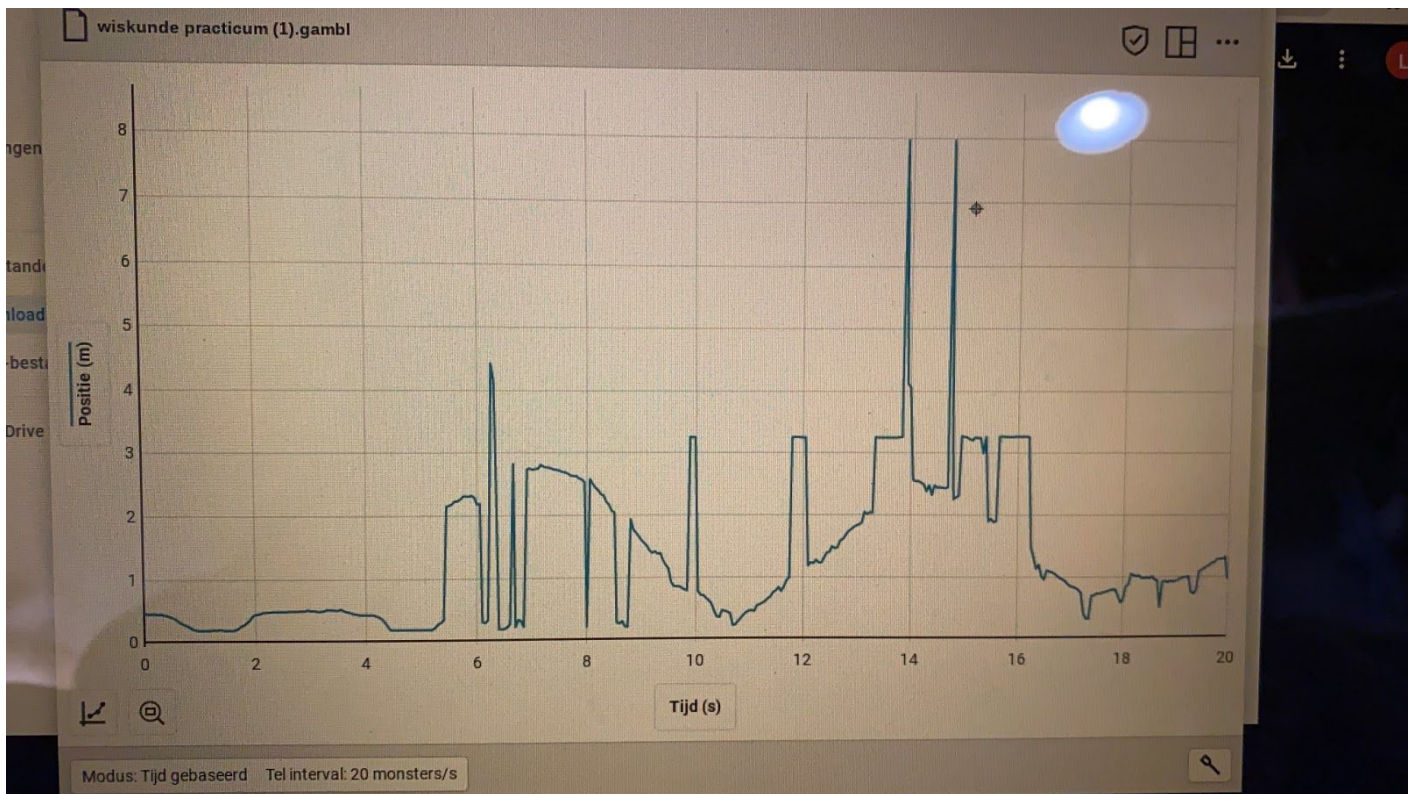
- Persoon 1: pakt de bewegingssensor en sluit de bewegingssensor op de correct manier aan op het chromebook.
 - Persoon 2: download en installeert 'graphical analysis', bedient 'graphical analysis' en stelt de juiste instellingen in.
 - Persoon 3: gaat met verschillende snelheden naar en van de bewegingssensor aflopen.
 - (Persoon 4: helpt en ondersteunt)
 - De hele groep denkt vervolgens na over de verschillende vragen en levert een eigen versie in op classroom.
-

Opdrachten

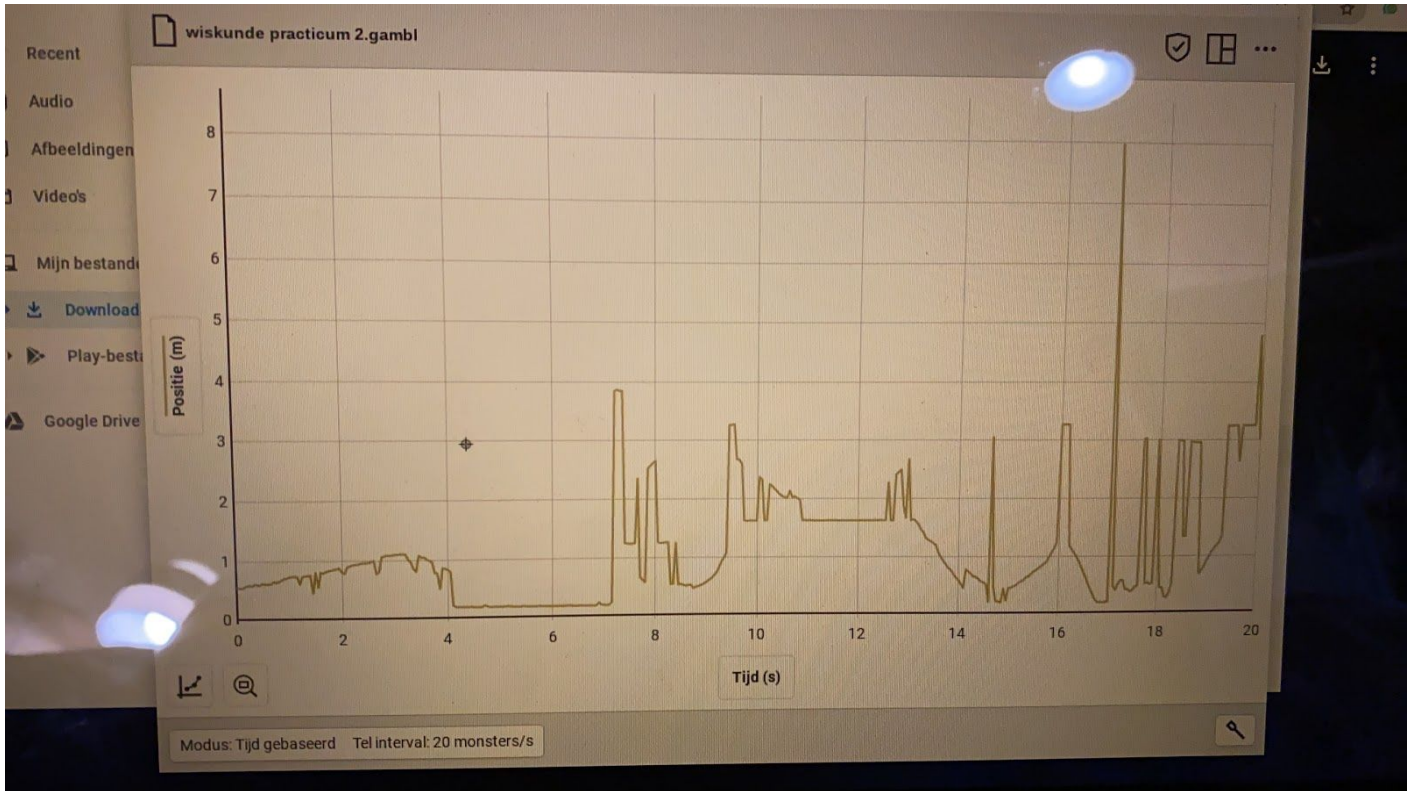
Voer de volgende handelingen uit:

- Persoon 1 haalt de bewegingssensor. Ondertussen download en installeert persoon 2 'graphical analysis' op zijn chromebook. Daarna sluit persoon 1 de bewegingssensor op de juiste manier aan.
- Wanneer 'graphical analysis' geopend is, doet persoon 2 het volgende:
 - Kies 'sensor data collectie'
 - Klik op de knop linksonder en voer in: stop data collectie na 20s.
 - Klik vervolgens op de grafiek knop daarboven. En kies onderin 'grafiek opties aanpassen'. Stel de verticale as in op tot 5m.
 - Laat persoon 3 zijn positie innemen. Op dat moment drukt persoon 2 op nulmeting, zodat deze beginafstand als nul wordt ingesteld. Tot slot drukt persoon bovenin op de grote 'collection' knop. De meting start.
- Persoon 3 gaat vervolgens bewegen ten opzichte van de sensor. Zo ontstaat een s-t-diagram op het scherm. Daarnaast is ook een tabel te zien van de geregistreeerde gegevens. Voer op deze manier 3 metingen uit, waarbij persoon 3 steeds met verschillende snelheden ten opzichte van de bewegingssensor naar voren en naar achteren loopt. Sla je metingen op.

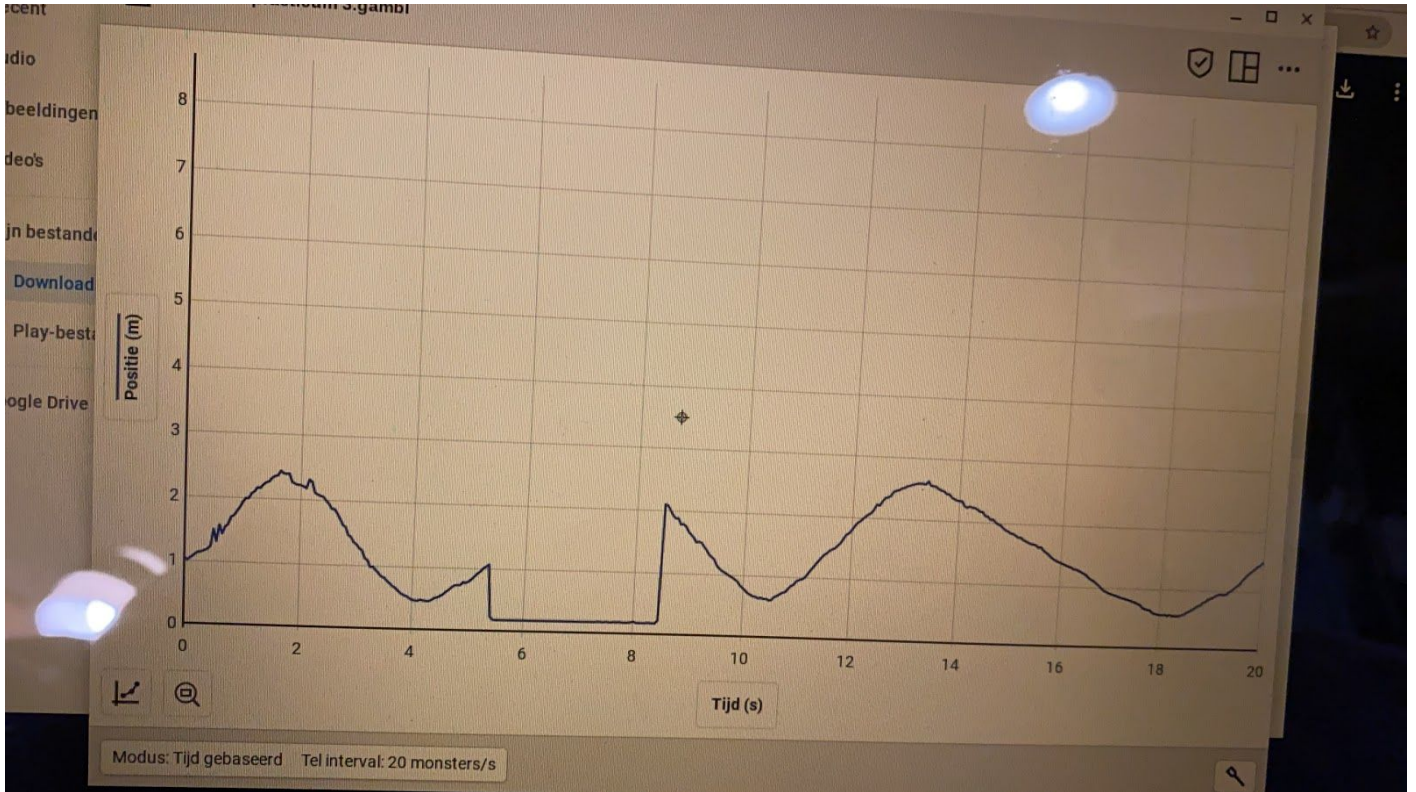
grafiek 1



grafiek 2




grafiek 3



Beantwoord nu de volgende vragen:

- A. Bereken de gemiddelde snelheid van je eerste beweging over de eerste 5 seconden.

$$\begin{array}{l} [0,5] \\ \Delta s \quad 0,2-0 \quad 0,2 \\ \hline \Delta t \quad 5-0 \quad 5 \end{array} = \frac{0,2}{5} = 0,04 \text{ m per seconde}$$

-  B. Bereken de gemiddelde snelheid van je eerste beweging over de volledige 20 seconden van de meting. Ben je de laatste 15 seconden van je meting gemiddeld sneller of langzamer gaan lopen? Heb je ook op elk tijdstip gedurende de laatste 15 seconden sneller of langzamer gelopen? Kun je dit verklaren?

$$\begin{array}{l} 0,20] \\ \Delta s \quad 1,0-0 \quad 1,0 \\ \hline \Delta t \quad 20-0 \quad 20 \end{array} = \frac{1,0}{20} = 0,050 \text{ m per seconde}$$


$$\begin{array}{l} [5,20] \\ \Delta s \quad 1,0-0,2 \quad 0,8 \\ \hline \Delta t \quad 20-5 \quad 15 \end{array} = \frac{0,8}{15} = 0,053 \text{ m per seconde}$$

Ik heb gemiddeld sneller gelopen de laatste 15 sec.

Ik ben niet op elk tijdstip gedurende de laatste 15 seconden sneller of langzamer wezen lopen, omdat er tijdstippen waren waar ik snel liep of langzaam. Op de grafiek is duidelijk zichtbaar dat ik op bepaalde tijdstippen sneller van de bewegingssensor liep of juist langzamer. Daarnaast is het gemiddelde snelheid niet op 1 tijdstip maar over een interval, dus betekent dat ook dat ik niet perse op elke tijdstip sneller heb gelopen. Ik kan ook sneller of langzamer hebben gelopen tussen dat interval.

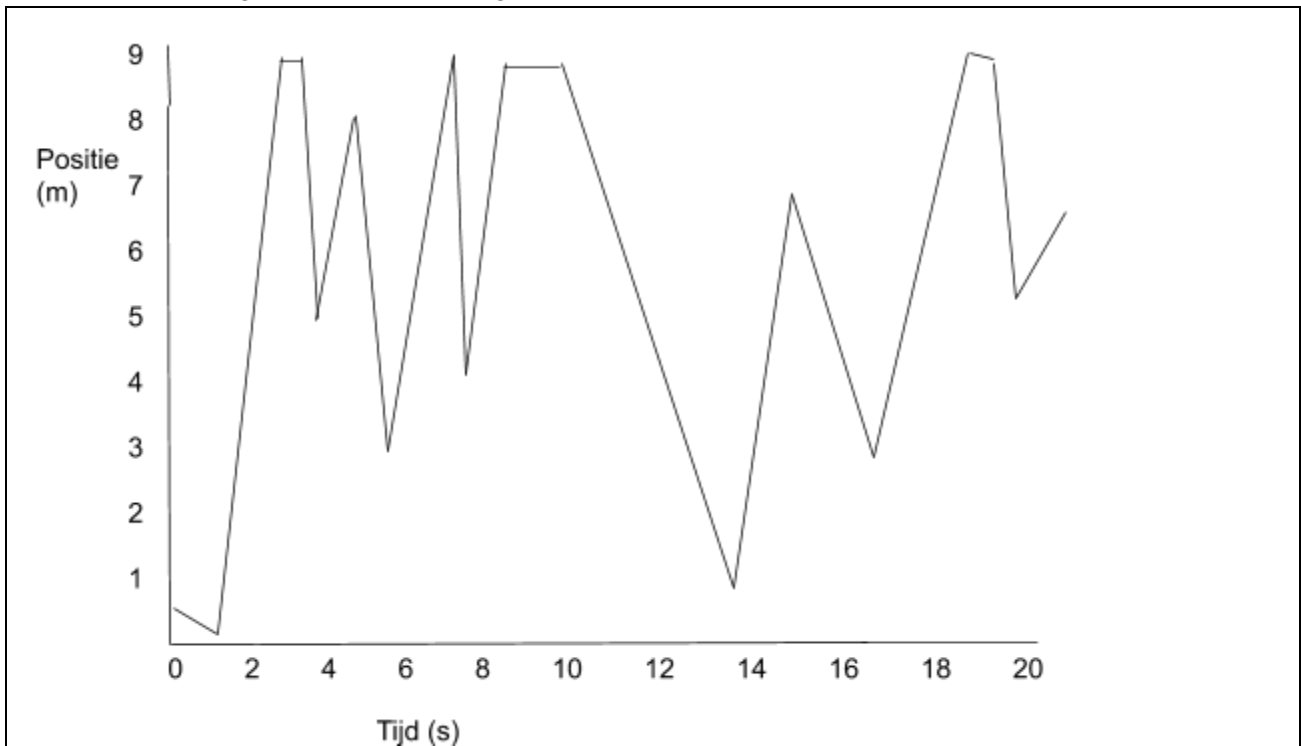
-  C. Verklaar de vorm van het s-t-diagram dat je er bij de eerste meting uit kreeg.

Als ik sneller loop gaat de grafiek steil omhoog en als ik verder afstand van de bewegingssensor gaat de lijn ook hoger omhoog. Op tijdstip 3,9 ging ik blijkbaar snel, dus gaat de lijn daar ook steil omhoog (want ik liep sneller verder van de bewegingssensor af), hetzelfde geldt voor tijdstip 14,4. Als ik langzamer dichtbij de bewegingssensor liep, gaat de grafiek langzaam omlaag.

-  D. Vergelijk de vorm van het s-t diagram van de tweede meting met die van de eerste meting. Gedurende welke tijdsintervallen heb je bij de tweede meting sneller gelopen dan bij de eerste meting. Gedurende welke tijdsintervallen langzamer? Hoe zie je dit terug in de vorm van de grafiek? Vergelijk op dezelfde manier de eerste en derde meting.

bij grafiek 1 zie je dat er aan het einde langzaam wordt bewogen. En in grafiek 2 zitten de lijnen dicht bij elkaar en zijn de dalingen veel stijler. Gedurende 4 tot 7 gaat grafiek 2 langzamer. Zin grafiek 3 zijn het allemaal langzame bewegingen die ook die ver van elkaar plaatsvinden.

- E. Probeer nu met een vierde meting een grafiek te creëren die meer pieken bevat gedurende de 20 seconden dan de grafieken van metingen 1 tot en met 3.



Ik heb zelf geprobeerd om een grafiek te maken, niet erg realistisch, omdat er meer 'kronkelende' lijnen moeten komen, maar die kon ik helaas niet maken.

Je ziet hier dat ik snel, maar constant (want de lijn is recht) verder weg van de bewegingssensor ga op het gedeelte van 1 sec tot 2,3 sec. Dit gebeurt hier meer en er zijn veel constante lijnen, omdat ze recht zijn.



F. Je ziet in de tabel dat 'graphical analysis' ook een kolom met snelheden aanmaakt. Licht toe hoe deze snelheden door jezelf nagerekend kunnen worden. Voer één zo'n berekening uit en controleer hem met de bijbehorende waarde uit de tabel.

Werkblad: gemiddelde snelheid onder de loep

We weten allemaal hoe we het gemiddelde van de getallen 7, 8 en 9 moeten bepalen. We tellen de drie getallen bij elkaar op en delen door het aantal getallen, in dit geval drie.

$$\text{Dus gemiddelde} = \frac{7+8+9}{3} = 8.$$

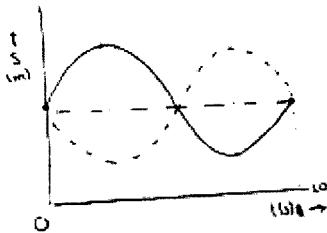
Je kunt ook het gemiddelde bepalen van oneindig veel getallen. De gemiddelde snelheid over een tijdsinterval bepalen is zo'n gemiddelde van oneindig veel getallen.

a) Licht dit toe.

$\frac{dy}{dx}$ is wanneer je gem. van oneindig veel getallen moet berekenen. Dus een grafiek bijvoorbeeld.

Maar hoe gaat dat dan? Want je kunt toch niet delen door oneindig? Gelukkig is er een manier om dit probleem te omzeilen. Die gaan we nu behandelen.

In de schets in figuur 1 zie je een meting (die 10s duurt) van de afstand van een leerling tot een bewegingssensor als functie van de tijd (doorlopende lijn). De gemiddelde snelheid van deze leerling gedurende de 10s van de meting is hetzelfde als de gemiddelde snelheid over 10s van leerlingen die volgens de gestippelde lijnen zouden hebben bewogen (zie figuur 1).

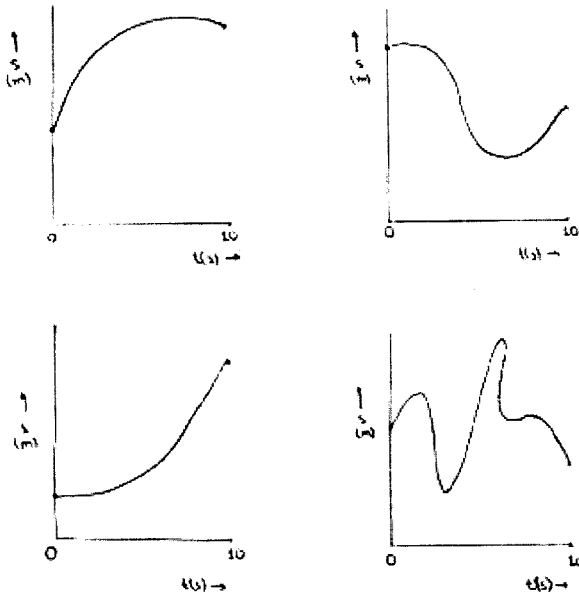


Figuur 1

b) Licht dit toe zonder gebruik te maken van het differentiequotient.

het is symmetrisch waardoor gem. hetzelfde is.

- c) In onderstaande schetsen zijn steeds de afstand van leerlingen tot een bewegingssensor als functie van de tijd weergegeven gedurende een meting van 10s. Teken steeds met stippelijnen twee alternatieve bewegingen van leerlingen die dezelfde gemiddelde snelheid opleveren over de 10s dat de meting duurt. Hierbij zijn begin- en eindpositie steeds hetzelfde.



Waarschijnlijk ben je tot de conclusie gekomen dat de gemiddelde snelheid over de 10 seconden van de meting alleen maar afhangt van de beginpositie en eindpositie. Elke grafiek tussen deze twee punten levert dezelfde gemiddelde snelheid van de leerling op! Hier kunnen we handig gebruik van maken, aangezien één grafiek tussen welke twee punten ook altijd wordt gegeven door een rechte lijn.

Voor een beweging waarvan de grafiek een rechte lijn is, is de gemiddelde snelheid over een interval gelijk aan de snelheid op ieder willekeurig tijdstip in dat interval.

- d) Licht dit toe. Hoe berekenen we in dit geval de snelheid?

door $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ te gebruiken.

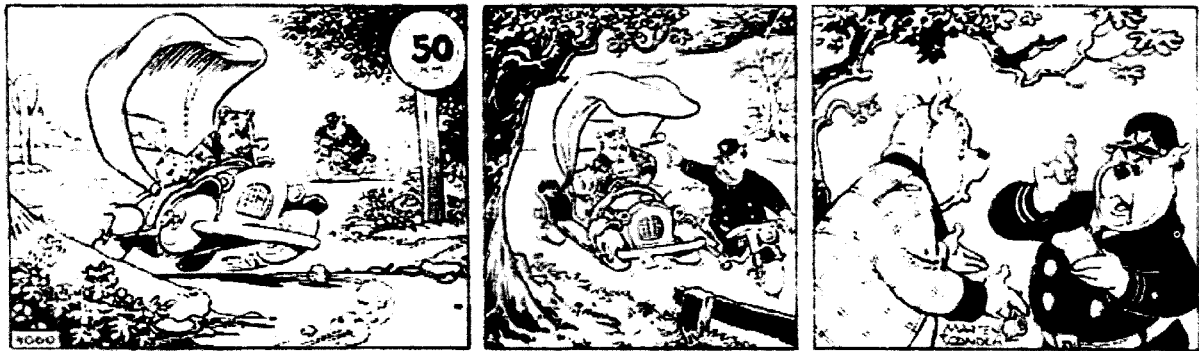
Maar dat betekent dus dat we nu weten dat de gemiddelde snelheid van alle bewegingen met t-s-grafieken met dezelfde begin- en eindpunten op dezelfde manier berekend wordt! Namelijk door de richtingscoëfficiënt van de rechte lijn tussen deze twee punten te berekenen (ook wel het differentiequotient genoemd). Het uitrekenen van een gemiddelde van oneindig veel getallen blijkt gelukkig dus niet nodig te zijn.

~~Werkblad: gemiddelde snelheid~~
Focus 11n A

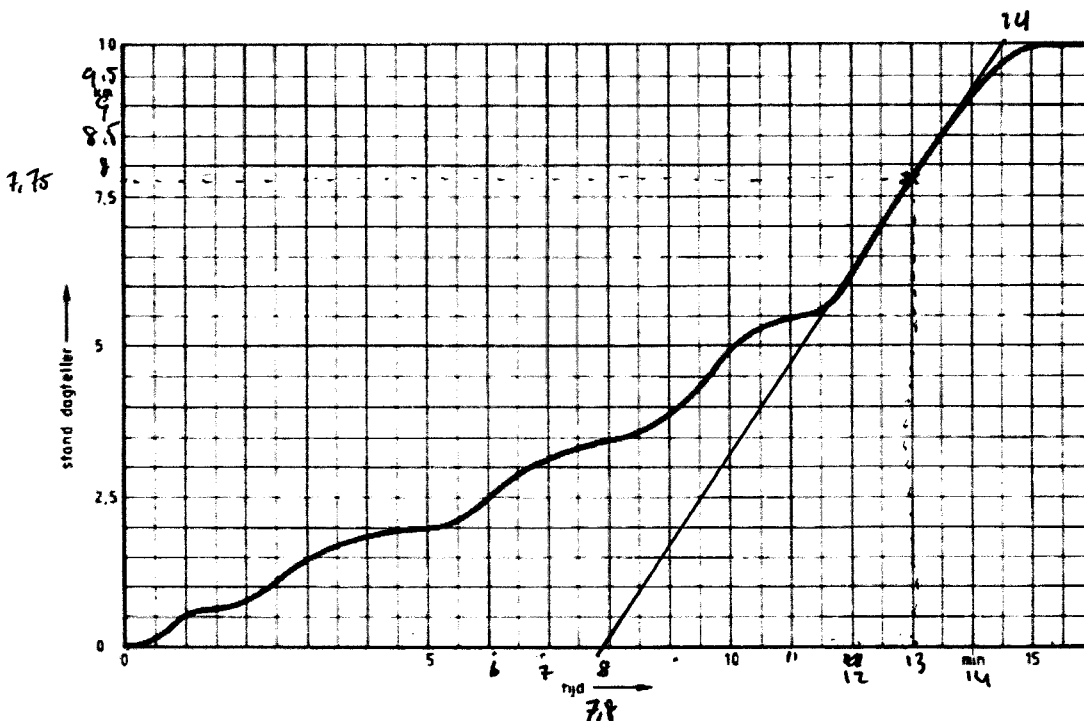
Werkblad: gemiddelde snelheid -> snelheid op één moment -> de afgeleide

Opgave 1: heer in het verkeer

Heer Bommel was danig uit zijn humeur. Het verkeer in Rommeldam had hem veel oponthoud bezorgd en toen hij zich buiten de bebouwde kom waande, trapte hij het gaspedaal geheel in, zodat de Oude Schicht gierend over de weg vloog. Helaas ontging het hem dat hij zich op een weg bevond waar snelheidsbeperking geboden was en dat wreekte zich. Want daar naderde de commissaris van politie reeds op een brullende motor en stak een hand op.



'Hebt u zo'n haast, huh?' vroeg Bulle Bas, een notitieboekje trekkend.
'Hebt u de borden niet gezien? Kunt u niet lezen?'
'Maar ik reed niet te snel!', riep heer Bommel op piepende toon. 'In het afgelopen kwartier heb ik slechts 10 km gereden, dat is dus 40 km per uur'.
Inderdaad wees de dagteller van de Oude Schicht 10 km aan.
Maar meer informatie over Bommel's autoritje geeft onderstaande grafiek.



a) Bedenk een mogelijk antwoord van Bulle Bas.

Bommel heeft alleen de snelheid op een punt berekend

b) Stel je voor dat Bommel gelijk zou hebben. Hoe zou de grafiek er dan hebben uitgezien?

~~veel stijger~~

In de gemeente Rommeldam zijn de boetes bij overtreding van de snelheidswet bepaald niet mals.

Gemeente Rommeldam

Politieverordening.

De boetes die opgelegd dienen te worden bij overtreding van Artikel 243 uit het Wegverkeersreglement zijn:

- bij een overschrijding van de toegestane snelheid met ten hoogste 10 km/uur bedraagt de boete 25 florijnen;
- bij een overschrijding van meer dan 10 km/uur maar ten hoogste 20 km/uur bedraagt de boete 50 florijnen;
- bij een overschrijding van meer dan 20 km/uur maar ten hoogste 30 km/uur bedraagt de boete 100 florijnen.

Bij elke volgende 10 km/uur boven de toegestane maximum snelheid, dient men de boete opnieuw te verdubbelen.

De burgemeester van Rommeldam

Bekijk de grafiek van Bommel's autoritje. Het aangekruiste punt geeft het moment (en de plaats) aan waar Bommel's overtreding werd geconstateerd.

c) Hoeveel boete moest Bommel betalen?

$$\frac{14}{7.8} = 1.79$$

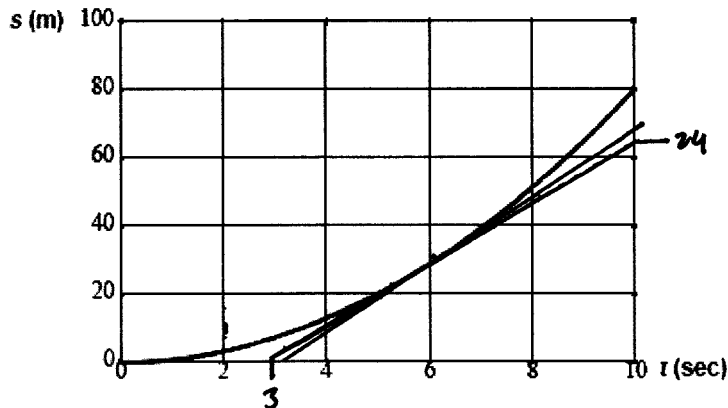
Opgave 2: ruimtevaarder

Op de maan val je zachter dan op de aarde, zoals Charles Duke (op de foto bij maanauto) aan de lijve ondervond in 1972. De valweg naar de maan is net als op aarde, evenredig met het kwadraat van de valtijd, maar de evenredigheidsconstante is aanmerkelijk kleiner.

De valtijd, valweg-functie beantwoord op de maan ongeveer aan de formule:

$$s(t) = 0,8t^2$$

Hieronder zie je een grafiek van die functie op het interval $[0,10]$.



Een ruimtevaarder laat van 80 m hoogte een maansteen vallen. Volgens de formule heeft die 10 seconden nodig om neer te ploffen. De *gemiddelde snelheid* gedurende de gehele val is dus 8 m/sec.

- a) Hoe groot is de gemiddelde snelheid gedurende de eerste 5 seconden? En gedurende de volgende 5 seconden?

$$\frac{20}{5} = 4 \text{ m/sec}$$

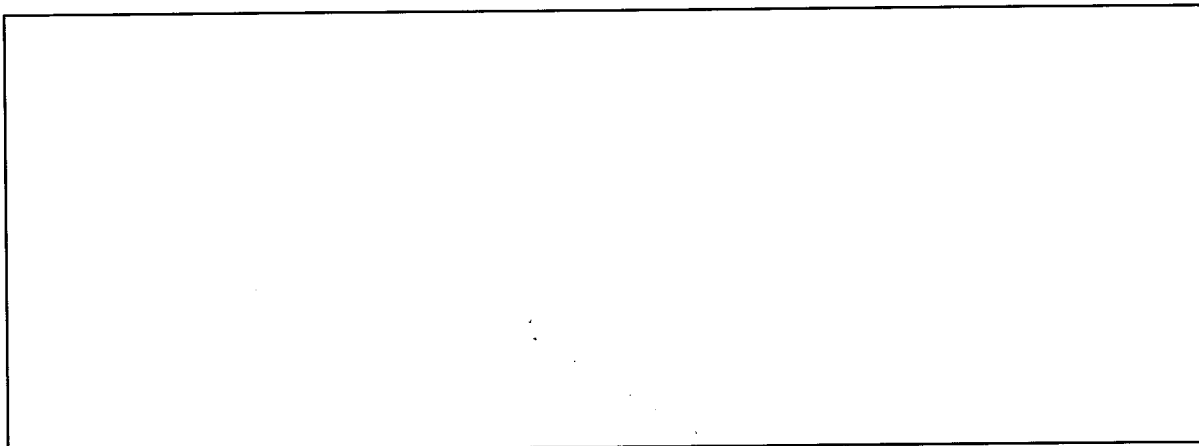
- b) De eerste uitkomst van vraag a) is een stuk lager dan de tweede. Hoe kun je dat zien in de figuur?

Je ziet dat de grafiek daan och een stuk hoger is.

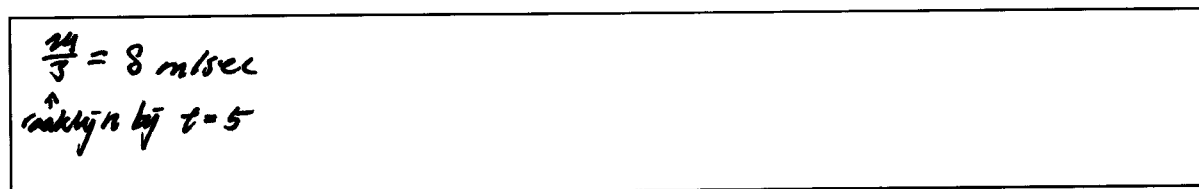
- c) Laat met behulp van differentiëren zien dat de valsnelheid op de maan beantwoordt aan de formule:

$$v(t) = 1,6t.$$

Teken vervolgens de grafiek van $v(t)$.



- d) Voor $t=5$ levert dat op: 8 m/sec. Kun je dat ook zien in de t-s-grafiek? Zo ja, waaraan?



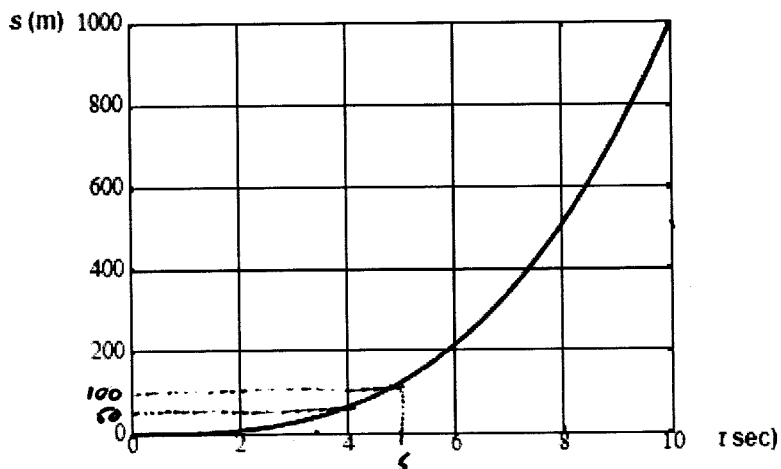
Opgave 3: supersonisch snelle beweging

Veronderstel dat een beweging voldoet aan de formule:

$$s(t) = t^3$$

waarbij t de tijd in seconden is en s de afstand in m.

Dat wordt al gauw supersonisch snel. Na bijvoorbeeld 10 seconden is al 1 km afgelegd. Hieronder zie je de t,s -grafiek op het venster $[0,10]$ bij $[0,1000]$.



a) Hoe groot is de *gemiddelde* snelheid op het tijdsinterval [4,5]? En op [5,6]?

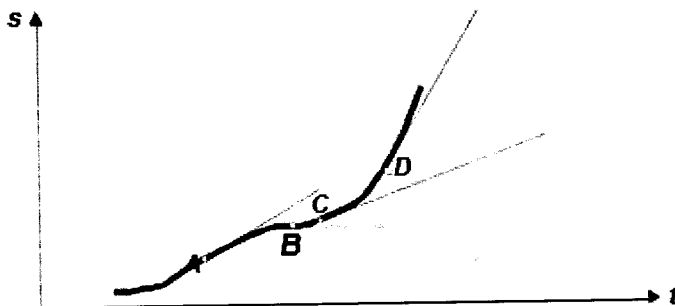
$$\frac{5-4}{100-50} = \frac{1}{50} =$$
$$\frac{100-50}{5-4} = \frac{50}{1} = 50 \text{ m/s} \quad \frac{200-100}{6-5} = \frac{100}{1} = 100 \text{ m/s}$$

b) Bedenk tenminste twee manieren om de snelheid op *het moment* $t=5$ te bepalen en werk ze uit.

⇒ Door of gewoon af te lezen of een raaklijn te maken.
Bij onduidelijke komma getallen of hele groter getallen is de tweede manier het meer betrouwbaar.

Opgave 4: tijd-afstand-grafiek

In de tijd-afstand-grafiek hieronder is op vier tijdstippen (corresponderend met de punten A, B, C en D) de raaklijn getekend; dat wil dus zeggen de lijn die aangeeft, hoe de grafiek zich zou voortzetten als vanaf dat moment de snelheid niet meer zou veranderen.



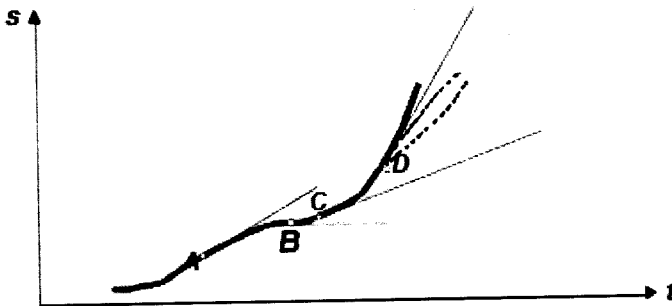
a) Wat betekent het voor de beweging dat de raaklijn in B horizontaal is?

Dat de beweging constant is en er dus geen versnelling is.

b) Je kunt uit de grafiek aflezen dat na het tijdstip dat correspondeert met het punt D, de snelheid nog groter wordt. Verklaar dit.

Je weet dat na punt D de lijn nog meer omhoog gaat en niet de raaklijn volgt dus de snelheid versnelt nog.

c) Stel je voor dat de snelheid na dat tijdstip onmiddellijk zou gaan afnemen. Hoe moet de grafiek rechts van het punt D veranderen?



De lijn na D zou onder de raaklijn moeten komen.

snelheid en afstand

Claire E...

als je de gemiddelde snelheid moet berekenen als je de snelheid op een bepaald punt moet berekenen

Pepijn v...

Het is de formule van de raaklijnen van elk punt,

Noor O...

1. Je berekend de snelheid op een punt.
2. je kan versnelling berekenen

Jasper ...

1 er wordt bij beide vakken gerekend met de afgeleide als het gaat om een verandering.
2

Tygo S...

Gemiddelde snelheid

Tim van...

1. Er wordt een raaklijn getekend
2. Bij de afgeleide wordt er iets op één tijdstip berekent.

Jivani J...

als je een v-t diagram hebt je kan de snelheid op 1 punt berekenen en de versnelling als je een v-t diagram hebt

Rigil Nj...

Er word beide gekeken naar een gemiddelde snelheid/versnelling in een punt
En hier kan/word dan weer een nieuwe functie van gemaakt, de afgeleiden

Myra Br...

er wordt een raaklijn getekend een tijdstip :)

Lilia Nie...

bij de raaklijn en iets op 1 tijdstip

Tristan ...

snelheid op 1 punt, gemiddelde snelheid.

Luc Ra...

?

Mees B...

versnelling omzetten

Jason Z...

f(x) t(x) grafiek

Jesper ...

raaklijn tekenen en daar de richtingscoëfficiënt

Maas D...

Teken de raaklijn. Het punt waar die het begin en einde op de grafiek snijdt, deed je de delta x gedeeld door delta

Jivani J...

raaklijn tekenen en dan delta s : delta t van 2 punten op de raaklijn

Noor O...

GGGGG.

Tristan ...

raaklijn tekenen en dan delta y : delta x van 2 punten op raaklijn

Claire E...

Teken zelf een raaklijn. Lees de twee uiterste punten af. Reken (verschil Y gedeeld door verschil X)

Jasper ...

een lijn teken waarmee je de lijn raakt. en daar de richting coëfficiënt van bepalen.

Tjalle M...

door een raaklijn te tekenen en dan $\text{deltaY} \div \text{deltaX}$ te gebruiken om de richtingscoëfficiënt te weten te komen

Rigil Nj...

raaklijn tekenen en daar dan de richtingscoëfficiënt berekenen door middel van delta y/delta x

Pepijn v...

Het tekenen van een raaklijn. Daarna aflezen wat de snelheid is.

Luc Ra...

raaklijn tekenen dan de richtingscoëfficiënt bepalen door delta Y/delta X

Tim van...

$a = \text{delta Y} / \text{delta X}$
raaklijn maken

Tygo S...

raaklijn tekenen en delta x delen door delta y

Jason Z...

begin punt en eind punt. y delen door x

Lilia Nie...

Eerst teken je een raaklijn en dan doe je dy:dx

Myra Br...

Uitwerkbijlage formatieve eindmeting: de afgeleide

Naam: ~~xxxxxxxxxxxx~~

Opdracht 1: beweging van een leerling ten opzichte van een bewegingssensor

a)

→ Op elk eydstip na 3,5 seconde is de afgeleide 0.

b)

(i): $\frac{0,5 - 0,2}{1,5 - 0,4} = 0,3$ $\frac{0,3}{1,1} = 0,27$

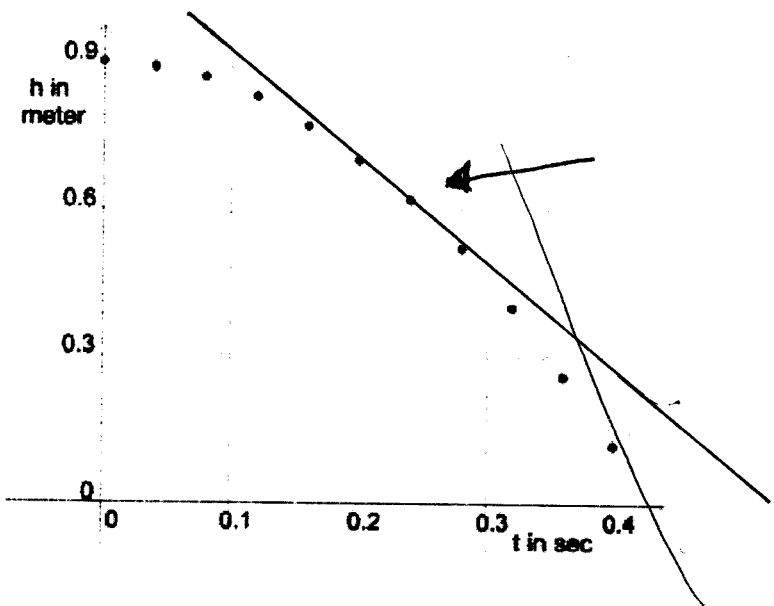
→ (ii): $\frac{0,5 - 0,1}{3,0 - 1,5} = 0,27$

(iii): ~~van~~ $\frac{0}{3,9 - 0,4} = 0$ \int

c)

Opdracht 2: vallende kogel

Manier 1:



→ Manier 2: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

afpraak ~~Waar~~. focus in A

1a) de afgeleide na dat punt 0

na 3,5 s is nadat 3,5 s voorbij is

↳ raaktlijn op t punt

Wat zegt dat over persoon?

↳ met snelheid.

b) van A naar D

antwoord logisch

niet hoger/lager

dan eindpunt, dus

niet hoger/lager

zelfde hor.

raaktlijn

Wb opgave: m/s niet snelheid

↳ formule gebruiken voor

h afgeleide niet.

↳ rekenregels

toepassen.

2) waarom raaktlijn

snelheid = raaktlijn

benoemt met h de

raaktlijn

↳

dus - bij (ii)

wat
is afgeleide . formule voor meerdere
raaklijnen.
x en y afhankelijk
ong. hetzelfde

Connectie meetkunde en \mathbb{R}^n normaal
veel anders

~~Corona~~ focus 11 B

Uitwerkbijlage formatieve startmeting: de afgeleide

Opdracht 1: laat je niet afleiden

a)

?
notatie?

b)

(i): ~~classica~~ A (0,8) B (1,10)
(ii): ~~classica~~ B (1,10) C (4,5;0)
(iii): Waarom hier niet ?

Opdracht 2: paracetamol in tijden van corona

a)

$2-10 \Rightarrow 10-2=8 \text{ uur}$
 $281-28 \Rightarrow 281-28=253 \text{ gr}$
 $\frac{253}{8} = 31,625$

Maar hier wel?

b)

Dat is de daling van de grafiek
per uur
Nogmaals.

c)

Schatting van het hellingsgetal:

31,625

Het staat gelijk aan de daling
van lijn AB ~~AB~~

Betekenis:

de daling van de raaklijn
↳ en dit is hier

d)

?



A. Bereken de gemiddelde snelheid van je eerste beweging over de eerste 5 seconden.

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \text{ geeft } \frac{1,3+ 1,2 + 1,3 + 1,4}{5-0} = \frac{5,2}{5} = 1,04 \text{ m/s}$$

(want de afgelegde afstand gaat op en neer dus hebben we alle verschillen opgeteld)

B. Bereken de gemiddelde snelheid van je eerste beweging over de volledige 20 seconden van de meting. Ben je de laatste 15 seconden van je meting gemiddeld sneller of langzamer gaan lopen? Heb je ook op elk tijdstip gedurende de laatste 15 seconden sneller of langzamer gelopen? Kun je dit verklaren?

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \text{ geeft } \frac{1,3+ 1,2 + 1,3 + 1,4 + \text{etc.}}{20-0} = \frac{20,3}{20} = 1,015 \text{ m/s}$$

(want de afgelegde afstand gaat op en neer dus hebben we alle verschillen opgeteld)

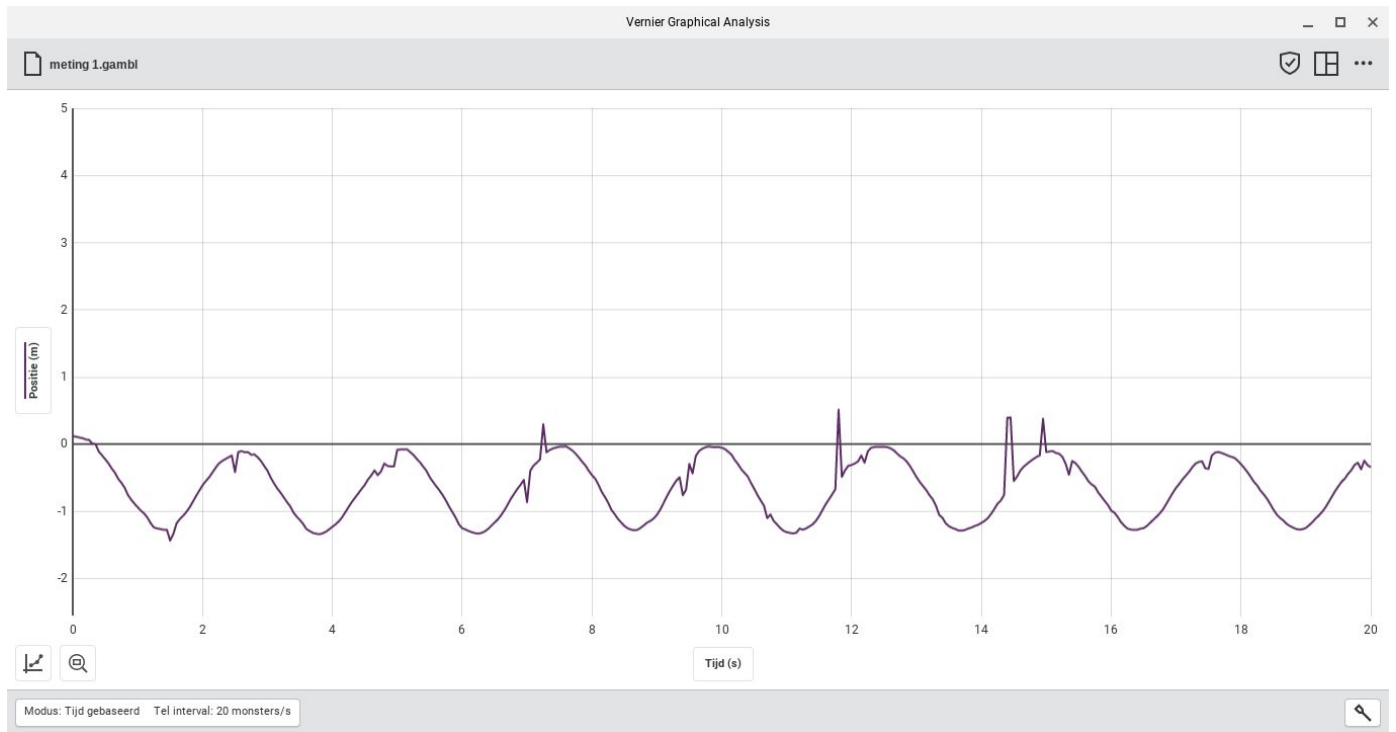
- Ja, je bent langzamer gaan lopen, want de gemiddelde snelheid is lager.
- Dat hoeft niet per se, het kan ook zo zijn dat de eerste 10 seconden constant liep en daarna een heel stuk langzamer
- Je zou bijv. op elk moment van die 15 seconden per punt gaan berekenen wat de snelheid daar was en dat dan vergelijken met de 5 seconden ervoor.

C. Verklaar de vorm van het s-t-diagram dat je er bij de eerste meting uit kreeg.

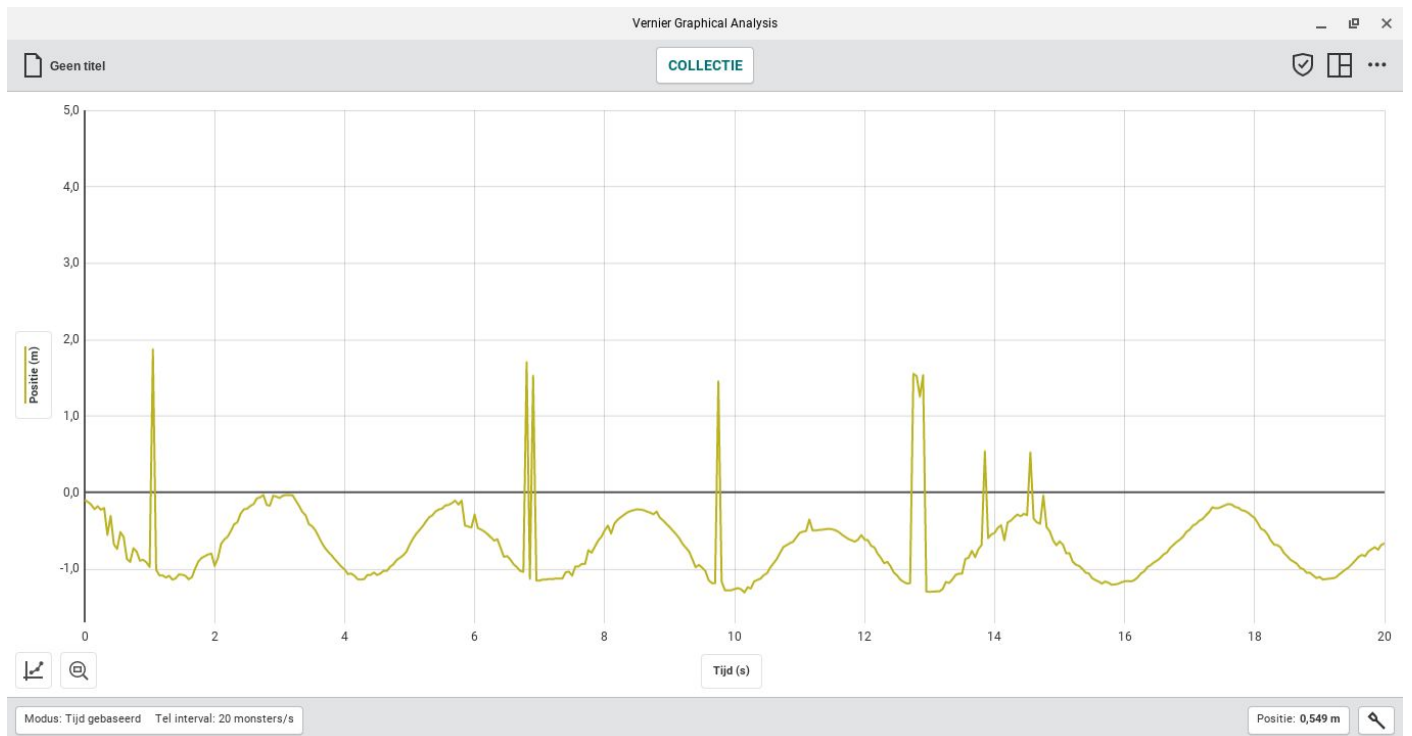
De meting hebben we gemaakt toen iemand heen en weer liep, dus vooruit en achteruit. Als uitslag heb je als je vooruit gaat een daling en als je achteruit loopt een stijging. De afstand wordt kleiner als je naar het meet dingetje toe loopt, dus wordt de afstand negatief als je bij nul begonnen bent. De afstand wordt groter als je van het meet dingetje af loopt, dus wordt de afstand positief als je bij nul begonnen bent. Je herhaalt het de hele tijd dus krijg je een golvende grafiek.

D. Vergelijk de vorm van het s-t diagram van de tweede meting met die van de eerste meting. Gedurende welke tijdsintervallen heb je bij de tweede meting sneller gelopen dan bij de eerste meting. Gedurende welke tijdsintervallen langzamer? Hoe zie je dit terug in de vorm van de grafiek? Vergelijk op dezelfde manier de eerste en derde meting.

Tussen tijdsinterval 10 tot 12 is er aanzienlijk langzamer gelopen bij de tweede beweging. Dit zie omdat de top van de grafiek daar lager licht en uitgerekte is.



Beweging 1



Beweging 2

Wij hadden geen derde beweging opgeslagen want we probeerde het opnieuw omdat er teveel pieken in zitten alleen toen was de les voorbij.

Werkblad: gemiddelde snelheid onder de loep

We weten allemaal hoe we het gemiddelde van de getallen 7, 8 en 9 moeten bepalen. We tellen de drie getallen bij elkaar op en delen door het aantal getallen, in dit geval drie.

Dus $gemiddelde = \frac{7+8+9}{3} = 8$.

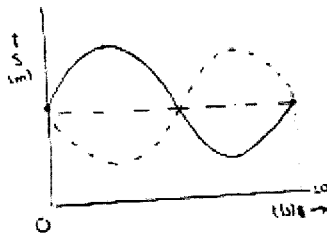
Je kunt ook het gemiddelde bepalen van oneindig veel getallen. De gemiddelde snelheid over een tijdsinterval bepalen is zo'n gemiddelde van oneindig veel getallen.

a) Licht dit toe.

er zijn oneindig veel x -waarden ^(tijd is oneindig) waarvoor er oneindig veel y -waarden zijn

Maar hoe gaat dat dan? Want je kunt toch niet delen door oneindig? Gelukkig is er een manier om dit probleem te omzeilen. Die gaan we nu behandelen.

In de schets in figuur 1 zie je een meting (die 10s duurt) van de afstand van een leerling tot een bewegingssensor als functie van de tijd (doorlopende lijn). De gemiddelde snelheid van deze leerling gedurende de 10s van de meting is hetzelfde als de gemiddelde snelheid over 10s van leerlingen die volgens de gestippelde lijnen zouden hebben bewogen (zie figuur 1).

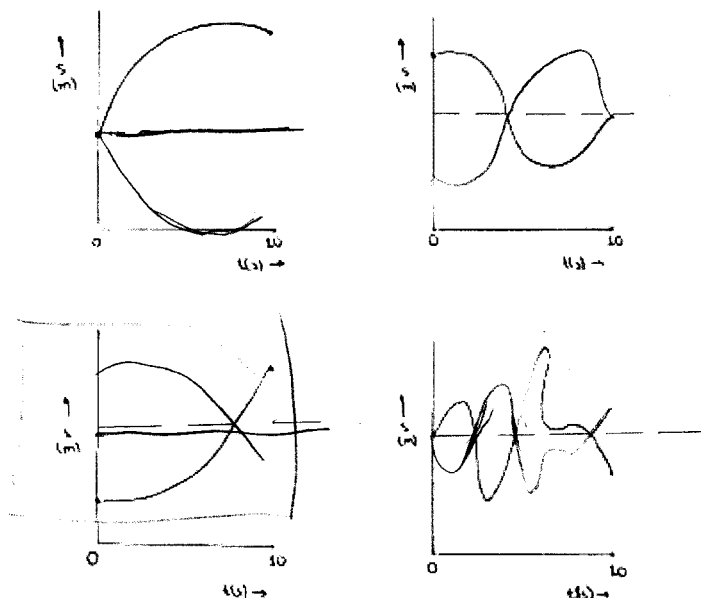


Figuur 1

b) Licht dit toe zonder gebruik te maken van het differentiequotient.

In tien seconden hebben de leerlingen de zelfde afstand afgelegd.

- c) In onderstaande schetsen zijn steeds de afstand van leerlingen tot een bewegingssensor als functie van de tijd weergegeven gedurende een meting van 10s. Teken steeds met stippellijnen twee alternatieve bewegingen van leerlingen die dezelfde gemiddelde snelheid opleveren over de 10s dat de meting duurt. Hierbij zijn begin- en eindpositie steeds hetzelfde.



Waarschijnlijk ben je tot de conclusie gekomen dat de gemiddelde snelheid over de 10 seconden van de meting alleen maar afhangt van de beginpositie en eindpositie. Elke grafiek tussen deze twee punten levert dezelfde gemiddelde snelheid van de leerling op! Hier kunnen we handig gebruik van maken, aangezien één grafiek tussen welke twee punten ook altijd wordt gegeven door een rechte lijn.

Voor een beweging waarvan de grafiek een rechte lijn is, is de gemiddelde snelheid over een interval gelijk aan de snelheid op ieder willekeurig tijdstip in dat interval.

- d) Licht dit toe. Hoe berekenen we in dit geval de snelheid?

Je kan $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ gebruiken, die rechte lijn heeft namelijk dezelfde helling dus dezelfde v en dus dezelfde gemiddelde snelheid

Maar dat betekent dus dat we nu weten dat de gemiddelde snelheid van alle bewegingen met t-s-grafieken met dezelfde begin- en eindpunten op dezelfde manier berekend wordt! Namelijk door de richtingscoëfficiënt van de rechte lijn tussen deze twee punten te berekenen (ook wel het differentiequotient genoemd). Het uitrekenen van een gemiddelde van oneindig veel getallen blijkt gelukkig dus niet nodig te zijn.

Caroline focus 11 B

Werkblad: gemiddelde snelheid -> snelheid op één moment -> de afgeleide

Opgave 1: heer in het verkeer

Heer Bommel was danig uit zijn humeur. Het verkeer in Rommeldam had hem veel oponthoud bezorgd en toen hij zich buiten de bebouwde kom waande, trapte hij het gaspedaal geheel in, zodat de Oude Schicht gierend over de weg vloog. Helaas ontging het hem dat hij zich op een weg bevond waar snelheidsbeperking geboden was en dat wreekte zich. Want daar naderde de commissaris van politie reeds op een brullende motor en stak een hand op.



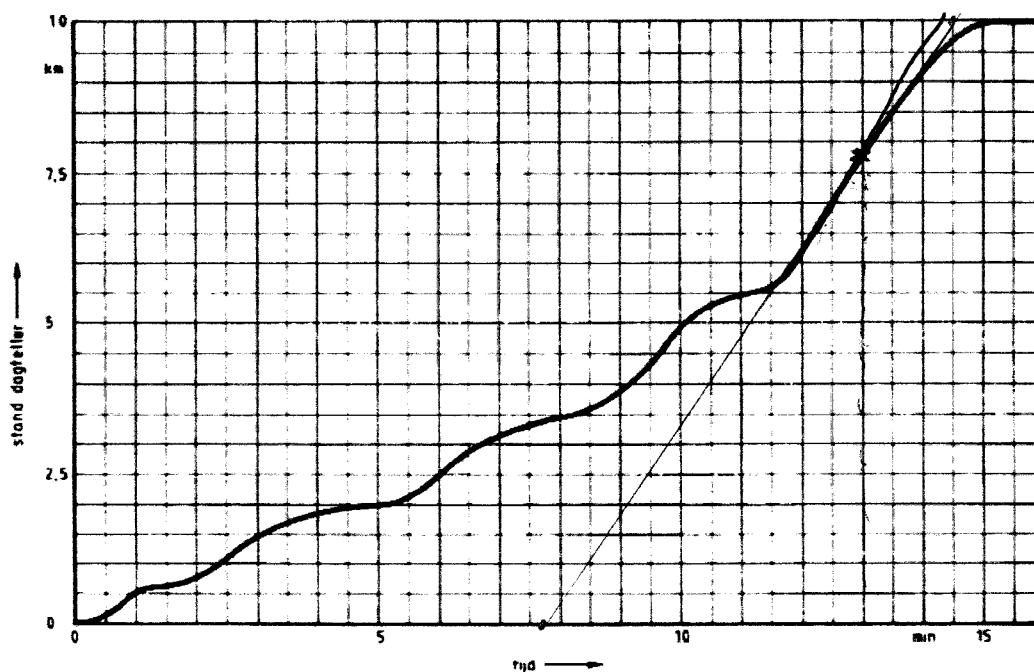
'Hebt u zo'n haast, huh?' vroeg Bulle Bas, een notitieboekje trekkend.

'Hebt u de borden niet gezien? Kunt u niet lezen?'

'Maar ik reed niet te snel!', riep heer Bommel op piepende toon. 'In het afgelopen kwartier heb ik slechts 10 km gereden, dat is dus 40 km per uur'.

Inderdaad wees de dagteller van de Oude Schicht 10 km aan.

Maar meer informatie over Bommel's autoritje geeft onderstaande grafiek.



a) Bedenk een mogelijk antwoord van Bulle Bas.

Ja, gemiddeld wel. maar op het moment reed u veel te hard

b) Stel je voor dat Bommel gelijk zou hebben. Hoe zou de grafiek er dan hebben uitgezien?

het zou een constante lijn zijn.

In de gemeente Rommeldam zijn de boetes bij overtreding van de snelheidswet bepaald niet mals.

Gemeente Rommeldam

Politieverordening.

De boetes die opgelegd dienen te worden bij overtreding van Artikel 243 uit het Wegverkeersreglement zijn:

- bij een overschrijding van de toegestane snelheid met ten hoogste 10 km/uur bedraagt de boete 25 florijnen;
- bij een overschrijding van meer dan 10 km/uur maar ten hoogste 20 km/uur bedraagt de boete 50 florijnen;
- bij een overschrijding van meer dan 20 km/uur maar ten hoogste 30 km/uur bedraagt de boete 100 florijnen.

Bij elke volgende 10 km/uur boven de toegestane maximum snelheid, dient men de boete opnieuw te verdubbelen.

De burgemeester van Rommeldam

Bekijk de grafiek van Bommel's autoritje. Het aangekruiste punt geeft het moment (en de plaats) aan waar Bommel's overtreding werd geconstateerd.

c) Hoeveel boete moest Bommel betalen?

~~49~~ $\frac{49}{4x} = \frac{10}{7,55} = 1,3245\dots$

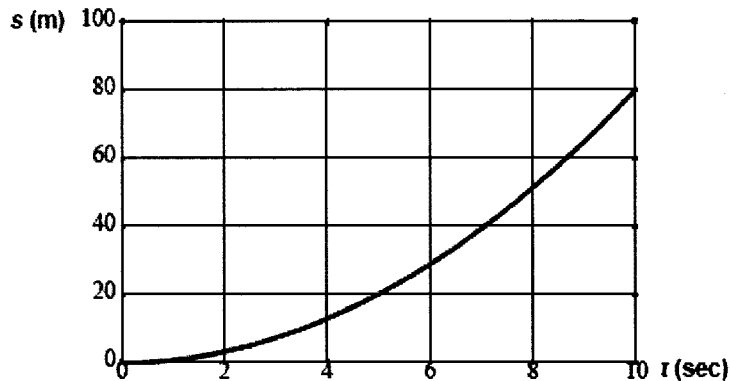
Opgave 2: ruimtevaarder

Op de maan val je zachter dan op de aarde, zoals Charles Duke (op de foto bij maanauto) aan de lijve ondervond in 1972. De valweg naar de maan is net als op aarde, evenredig met het kwadraat van de valtijd, maar de evenredigheidsconstante is aanmerkelijk kleiner.

De valtijd, valweg-functie beantwoord op de maan ongeveer aan de formule:

$$s(t) = 0,8t^2$$

Hieronder zie je een grafiek van die functie op het interval $[0,10]$.



Een ruimtevaarder laat van 80 m hoogte een maansteen vallen. Volgens de formule heeft die 10 seconden nodig om neer te ploffen. De *gemiddelde snelheid* gedurende de gehele val is dus 8 m/sec.

- a) Hoe groot is de gemiddelde snelheid gedurende de eerste 5 seconden? En gedurende de volgende 5 seconden?

4 m/s namelijk $\frac{20}{5}$ bij eerste 5 sec
12 m/s namelijk $\frac{60}{5}$ bij laatste ~~5~~ 5 sec

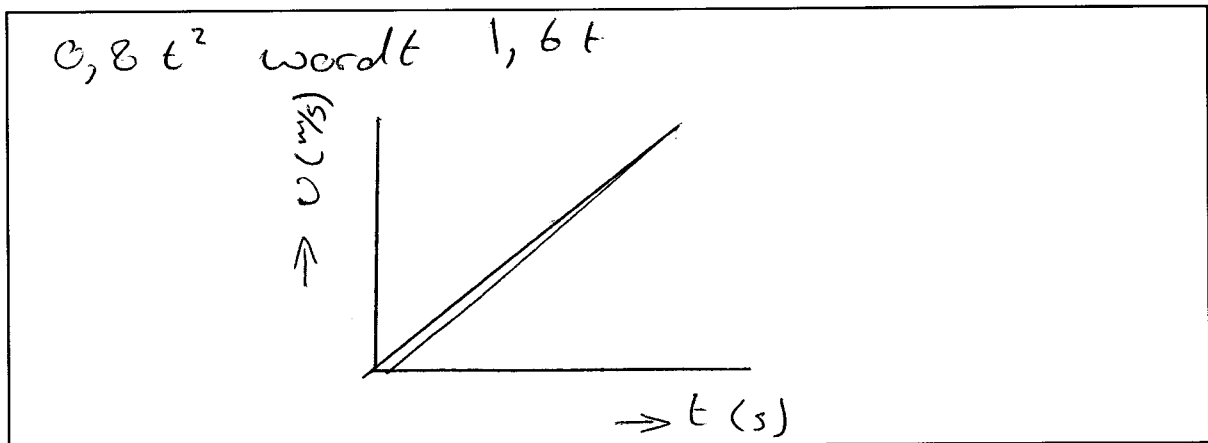
- b) De eerste uitkomst van vraag a) is een stuk lager dan de tweede. Hoe kun je dat zien in de figuur?

de grafiek is veel horizontaler

- c) Laat met behulp van differentiëren zien dat de valsnelheid op de maan beantwoordt aan de formule:

$$v(t) = 1,6t.$$

Teken vervolgens de grafiek van $v(t)$.



- d) Voor $t=5$ levert dat op: 8 m/sec. Kun je dat ook zien in de t-s-grafiek? Zo ja, waaraan?

Ja ze zou een raaklijn kunnen tekenen bij $t=5$

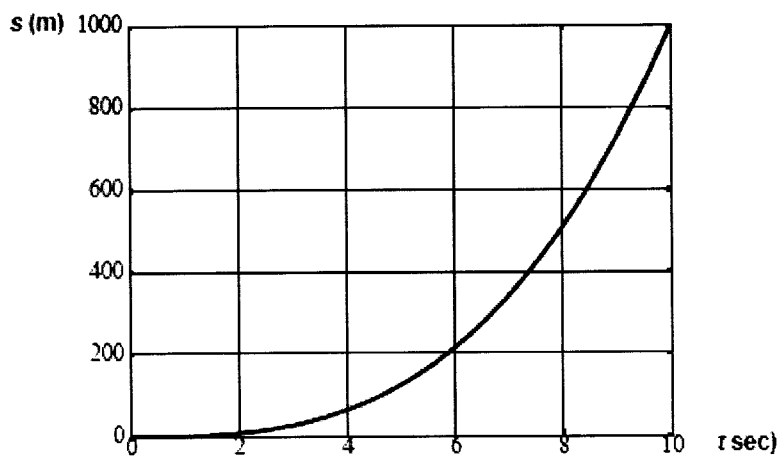
Opgave 3: supersonisch snelle beweging

Veronderstel dat een beweging voldoet aan de formule:

$$s(t) = t^3$$

waarbij t de tijd in seconden is en s de afstand in m.

Dat wordt al gauw supersonisch snel. Na bijvoorbeeld 10 seconden is al 1 km afgelegd. Hieronder zie je de t,s -grafiek op het venster $[0,10]$ bij $[0,1000]$.



a) Hoe groot is de *gemiddelde* snelheid op het tijdsinterval [4,5]? En op [5,6]?

$t=4 \quad s=4^3=64$ $t=5 \quad s=5^3=125$ $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{125-64}{5-4} = \frac{61}{1} = 61 \text{ m/s}$	$t=5 \rightarrow 125$ $t=6 \rightarrow s=6^3=216$ $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{216-125}{6-5} = \frac{91}{1} = 91 \text{ m/s}$
---	---

b) Bedenk tenminste twee manieren om de snelheid op *het moment* $t=5$ te bepalen en werk ze uit.

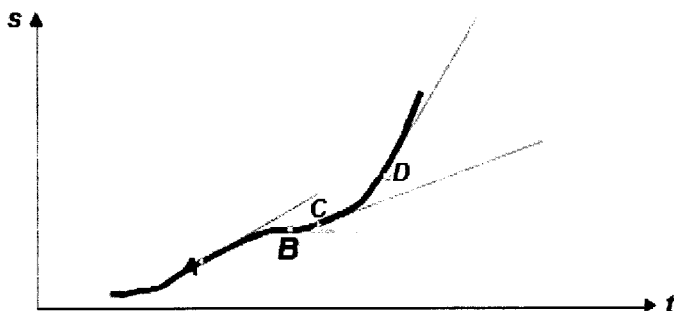
raaklijn tekenen

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{500-200}{10-6} = \frac{300}{4} = 75 \text{ m/s bij } t=5$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{rekenregels!}$$

Opgave 4: tijd-afstand-grafiek

In de tijd-afstand-grafiek hieronder is op vier tijdstippen (corresponderend met de punten A, B, C en D) de raaklijn getekend; dat wil dus zeggen de lijn die aangeeft, hoe de grafiek zich zou voortzetten als vanaf dat moment de snelheid niet meer zou veranderen.



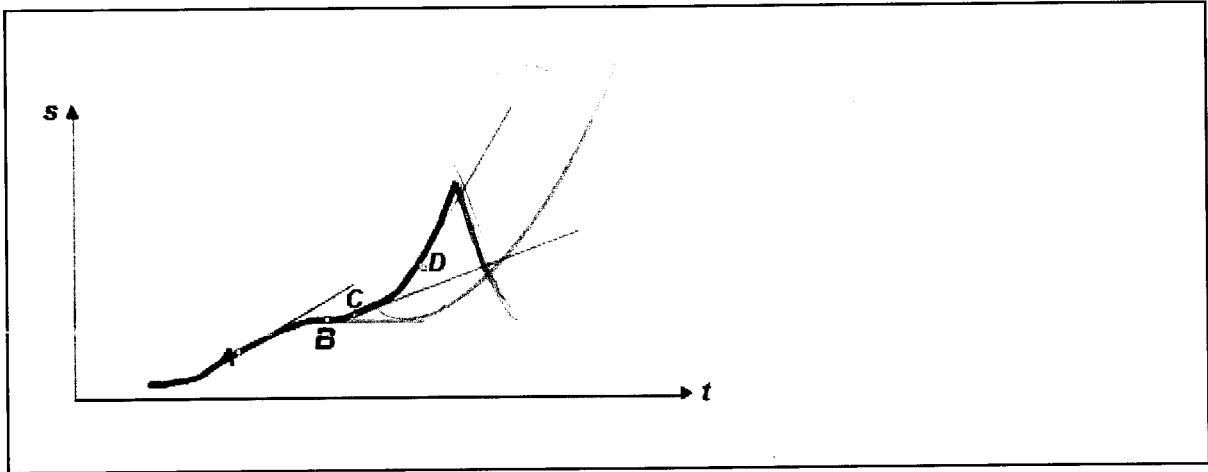
a) Wat betekent het voor de beweging dat de raaklijn in B horizontaal is?

dat de snelheid constant is

b) Je kunt uit de grafiek aflezen dat na het tijdstip dat correspondeert met het punt D, de snelheid nog groter wordt. Verklaar dit.

de grafiek wordt nog steiler, dus de snelheid wordt nog groter

c) Stel je voor dat de snelheid na dat tijdstip onmiddellijk zou gaan afnemen. Hoe moet de grafiek rechts van het punt D veranderen?



Claire:
3/2d
ma 15:10

Noor:

233 do 12-11
09:55u.

snelheid en afstand

Claire E...

als je de gemiddelde snelheid moet berekenen als je de snelheid op een bepaald punt moet berekenen

Pepijn v...

Het is de formule van de raaklijnen van elk punt,

Noor O...

1. Je berekend de snelheid op een punt.
2. je kan versnelling berekenen

Jasper ...

1 er wordt bij beide vakken gerekend met de afgeleide als het gaat om een verandering.
2

Tygo S...

Gemiddelde snelheid

Tim van...

1. Er wordt een raaklijn getekend
2. Bij de afgeleide wordt er iets op één tijdstip berekent.

Jivani J...

als je een v-t diagram hebt je kan de snelheid op 1 punt berekenen en de versnelling als je een v-t diagram hebt

Rigil Nj...

Er word beide gekeken naar een gemiddelde snelheid/versnelling in een punt
En hier kan/word dan weer een nieuwe functie van gemaakt, de afgeleiden

Myra Br...

er wordt een raaklijn getekend een tijdstip :)

Lilia Nie...

bij de raaklijn en iets op 1 tijdstip

Tristan ...

snelheid op 1 punt, gemiddelde snelheid.

Luc Ra...

?

Mees B...

versnelling omzetten

Jason Z...

f(x) t(x) grafiek

Jesper ...

raaklijn tekenen en daar de richtingscoëfficiënt

Maas D...

Teken de raaklijn. Het punt waar die het begin en einde op de grafiek snijdt, deed je de delta x gedeeld door delta

Jivani J...

raaklijn tekenen en dan delta s : delta t van 2 punten op de raaklijn

Noor O...

GGGGG.

Tristan ...

raaklijn tekenen en dan delta y : delta x van 2 punten op raaklijn

Claire E...

Teken zelf een raaklijn. Lees de twee uiterste punten af. Reken (verschil Y gedeeld door verschil X)

Jasper ...

een lijn teken waarmee je de lijn raakt. en daar de richting coëfficiënt van bepalen.

Tjalle M...

door een raaklijn te tekenen en dan $\Delta Y \div \Delta X$ te gebruiken om de richtingscoëfficiënt te weten te komen

Rigil Nj...

raaklijn tekenen en daar dan de richtingscoëfficiënt berekenen door middel van delta y/delta x

Pepijn v...

Het tekenen van een raaklijn. Daarna aflezen wat de snelheid is.

Luc Ra...

raaklijn tekenen dan de richtingscoëfficiënt bepalen door delta Y/delta X

Tim van...

$a = \Delta Y / \Delta X$
raaklijn maken

Tygo S...

raaklijn tekenen en delta x delen door delta y

Jason Z...

begin punt en eind punt. y delen door x

Lilia Nie...

Eerst teken je een raaklijn en dan doe je dy:dx

Myra Br...

Uitwerkbijlage formatieve eindmeting: de afgeleide

Naam: ~~Andreas~~

Opdracht 1: beweging van een leerling ten opzichte van een bewegingssensor

a)

Dan staat hij stil want wordt niet negatief of positief hij verplaatst geen meter.

b)

(i):	$\frac{0,3}{1,5} = 0,2$	$v_{gem} =$
(ii):	$\frac{0,4}{1,5} = 0,27$	$v_{gem} =$
(iii):	$\frac{0,2}{4,0} = 0,05$	$v_{gem} =$

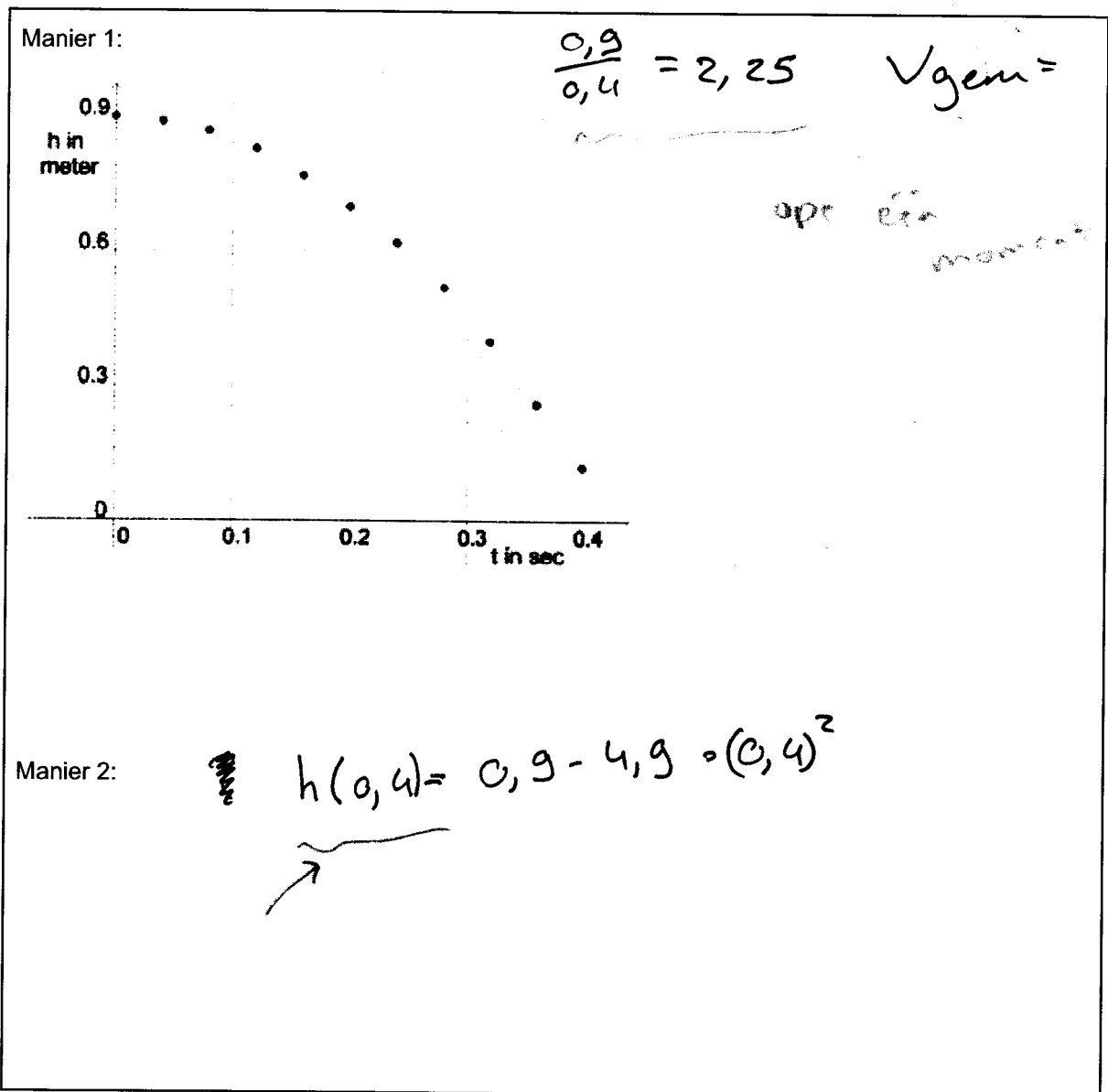
? \rightarrow uitlog

c)

meter en seconden

versnelling

Opdracht 2: vallende kogel



1a. iets met y-as en x-as

lege link met breuk / diff. quot.

$$\hookrightarrow f'(x) = -1 \Rightarrow \text{afgeleide } -1.$$

b. notatie \rightsquigarrow context kan verhaal

\hookrightarrow geen betekenis

\rightarrow bij eindtoets
invalle

\hookrightarrow werkblad helpt

AB gem. van daling

raaklijn = snelheid op bepaald
moment

$$y = x^2 + x$$

2 eind : een snelheid ber 1

in de war met natuurkunde
 \hookrightarrow gem. snelheid

2. afgeleide $h(t)$

\hookrightarrow dus lim. definitie
rekenregels niet bedacht

• toegevoegde waarde practicum

\hookrightarrow kunt afgeleide
berekenen

Wat is de afgeleide? je leid hem af van

de grafiek

\rightsquigarrow denkt in formule
afgeleide en raaklijn
lijnen op elkaar.

~~grooten~~ focus 11 C

Uitwerkbijlage formatieve startmeting: de afgeleide

Opdracht 1: laat je niet afleiden

a)

Dit is het RC of $x = -2$

b)

$$\begin{aligned} \text{(i): } & \frac{10 - 8}{1 - 0} = \frac{2}{1} = 2 \\ \text{(ii): } & \frac{0,5 - 10}{4,5 - 1} = \frac{-9,5}{3,5} \approx -2,71 \\ \text{(iii): } & \frac{8 - 0}{7 - 4,5} = \frac{8}{2,5} = 3,2 \end{aligned}$$

Opdracht 2: paracetamol in tijden van corona

a)

$$\begin{aligned} t = 2 & \rightarrow 287 \text{ mg} \\ t = 70 & \rightarrow 28 \text{ mg} \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} & \Rightarrow \frac{287 - 28}{2 - 70} = \frac{259}{-68} = -3,81 \end{aligned}$$

b)

→ Lijn AB is als de hoeveelheid paracetamol \uparrow
met een constante snelheid afneemt

c)

→ Schatting van het hellingsgetal:
- 40 nam berekenen door \ominus
de lijn is onderen in een hoek van 40°

Betekenis:
hoe ~~steil~~ steil de helling is, ook wel de RC

d)

→ Hoeveel paracetamol er per keer afgaat.

Practicum - Meet je eigen afgeleide

Werk samen met drie of vier personen.

Namen:

Persoon 1: Persoon 2: Persoon 3: Persoon 4:
--

In dit practicum ga je je eigen beweging registreren. Aan de hand van het gevonden s-t diagram ga je berekeningen doen en nadenken over de samenhang met de afgeleide. Ook ga je verklaren hoe de snelheid van je eigen beweging invloed heeft op het s-t diagram.

Benodigheden:

- 1 bewegingssensor (met eventueel verlengstuk)
- De applicatie 'graphical analysis' op je chromebook

Rolverdeling:

- Persoon 1: pakt de bewegingssensor en sluit de bewegingssensor op de correct manier aan op het chromebook.
 - Persoon 2: download en installeert 'graphical analysis', bedient 'graphical analysis' en stelt de juiste instellingen in.
 - Persoon 3: gaat met verschillende snelheden naar en van de bewegingssensor aflopen.
 - (Persoon 4: helpt en ondersteunt)
 - De hele groep denkt vervolgens na over de verschillende vragen en levert een eigen versie in op classroom.
-

Opdrachten

Voer de volgende handelingen uit:

- Persoon 1 haalt de bewegingssensor. Ondertussen download en installeert persoon 2 'graphical analysis' op zijn chromebook. Daarna sluit persoon 1 de bewegingssensor op de juiste manier aan.
- Wanneer 'graphical analysis' geopend is, doet persoon 2 het volgende:
 - Kies 'sensor data collectie'
 - Klik op de knop linksonder en voer in: stop data collectie na 20s.
 - Klik vervolgens op de grafiek knop daarboven. En kies onderin 'grafiek opties aanpassen'. Stel de verticale as in op tot 5m.
 - Laat persoon 3 zijn positie innemen. Op dat moment drukt persoon 2 op nulmeting, zodat deze beginafstand als nul wordt ingesteld. Tot slot drukt persoon bovenin op de grote 'collection' knop. De meting start.
- Persoon 3 gaat vervolgens bewegen ten opzichte van de sensor. Zo ontstaat een s-t-diagram op het scherm. Daarnaast is ook een tabel te zien van de geregistreerde gegevens. Voer op deze manier 3 metingen uit, waarbij persoon 3 steeds met verschillende snelheden ten opzichte van de bewegingssensor naar voren en naar achteren loopt. Sla je metingen op.

Beantwoord nu de volgende vragen:

- A. Bereken de gemiddelde snelheid van je eerste beweging over de eerste 5 seconden.

0,5 m/s

- B. Bereken de gemiddelde snelheid van je eerste beweging over de volledige 20 seconden van de meting. Ben je de laatste 15 seconden van je meting gemiddeld sneller of langzamer gaan lopen? Heb je ook op elk tijdstip gedurende de laatste 15 seconden sneller of langzamer gelopen? Kun je dit verklaren?

0,5 m/s,
Laatste 15 seconden sneller gaan lopen
Nee, niet op elk tijdstip soms stond persoon 3 stil



C. Verklaar de vorm van het s-t-diagram dat je er bij de eerste meting uit kreeg.



Hij gaat heen en weer dus persoon 3 loopt steeds sneller en dan weer langzamer en dat herhaalt zich

D. Vergelijk de vorm van het s-t diagram van de tweede meting met die van de eerste meting. Gedurende welke tijdsintervallen heb je bij de tweede meting sneller gelopen dan bij de eerste meting. Gedurende welke tijdsintervallen langzamer? Hoe zie je dit terug in de vorm van de grafiek? Vergelijk op dezelfde manier de eerste en derde meting.



[3,6] ging hij sneller in de tweede meting, dat kun je gewoon aflezen. De grafiek heeft een hogere top.

Op punt 2 ging hij langzamer dan in de eerste meting

De rest gaat hij redelijk gelijk

E. Probeer nu met een vierde meting een grafiek te creëren die meer pieken bevat gedurende de 20 seconden dan de grafieken van metingen 1 tot en met 3.



Vierde meting hebben we niet

F. Je ziet in de tabel dat 'graphical analysis' ook een kolom met snelheden aanmaakt. Licht toe hoe deze snelheden door jezelf nagerekend kunnen worden. Voer één zo'n berekening uit en controleer hem met de bijbehorende waarde uit de tabel.



dy/dx op je GR maar dan moet je de formule van de grafiek weten en ik weet niet of ik die kan zien en waar



~~Werkblad: gemiddelde snelheid~~ focus 1h C

Werkblad: gemiddelde snelheid onder de loep

We weten allemaal hoe we het gemiddelde van de getallen 7, 8 en 9 moeten bepalen. We tellen de drie getallen bij elkaar op en delen door het aantal getallen, in dit geval drie.

$$\text{Dus gemiddelde} = \frac{7+8+9}{3} = 8.$$

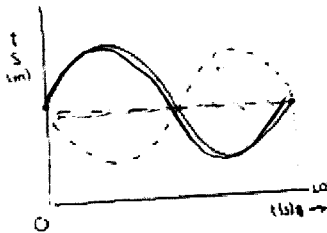
Je kunt ook het gemiddelde bepalen van oneindig veel getallen. De gemiddelde snelheid over een tijdsinterval bepalen is zo'n gemiddelde van oneindig veel getallen.

a) Licht dit toe.

oneindig groot interval

Maar hoe gaat dat dan? Want je kunt toch niet delen door oneindig? Gelukkig is er een manier om dit probleem te omzeilen. Die gaan we nu behandelen.

In de schets in figuur 1 zie je een meting (die 10s duurt) van de afstand van een leerling tot een bewegingssensor als functie van de tijd (doorlopende lijn). De gemiddelde snelheid van deze leerling gedurende de 10s van de meting is hetzelfde als de gemiddelde snelheid over 10s van leerlingen die volgens de gestippelde lijnen zouden hebben bewogen (zie figuur 1).

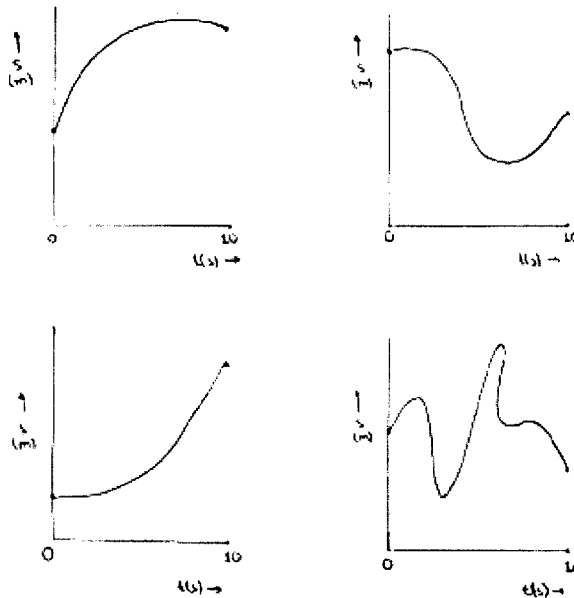


Figuur 1

b) Licht dit toe zonder gebruik te maken van het differentiequotient.

?

- c) In onderstaande schetsen zijn steeds de afstand van leerlingen tot een bewegingssensor als functie van de tijd weergegeven gedurende een meting van 10s. Teken steeds met stippellijnen twee alternatieve bewegingen van leerlingen die dezelfde gemiddelde snelheid opleveren over de 10s dat de meting duurt. Hierbij zijn begin- en eindpositie steeds hetzelfde.



Waarschijnlijk ben je tot de conclusie gekomen dat de gemiddelde snelheid over de 10 seconden van de meting alleen maar afhangt van de beginpositie en eindpositie. Elke grafiek tussen deze twee punten levert dezelfde gemiddelde snelheid van de leerling op! Hier kunnen we handig gebruik van maken, aangezien één grafiek tussen welke twee punten ook altijd wordt gegeven door een rechte lijn.

Voor een beweging waarvan de grafiek een rechte lijn is, is de gemiddelde snelheid over een interval gelijk aan de snelheid op ieder willekeurig tijdstip in dat interval.

- d) Licht dit toe. Hoe berekenen we in dit geval de snelheid?

?

Maar dat betekent dus dat we nu weten dat de gemiddelde snelheid van alle bewegingen met t-s-grafieken met dezelfde begin- en eindpunten op dezelfde manier berekend wordt! Namelijk door de richtingscoëfficiënt van de rechte lijn tussen deze twee punten te berekenen (ook wel het differentiequotient genoemd). Het uitrekenen van een gemiddelde van oneindig veel getallen blijkt gelukkig dus niet nodig te zijn.

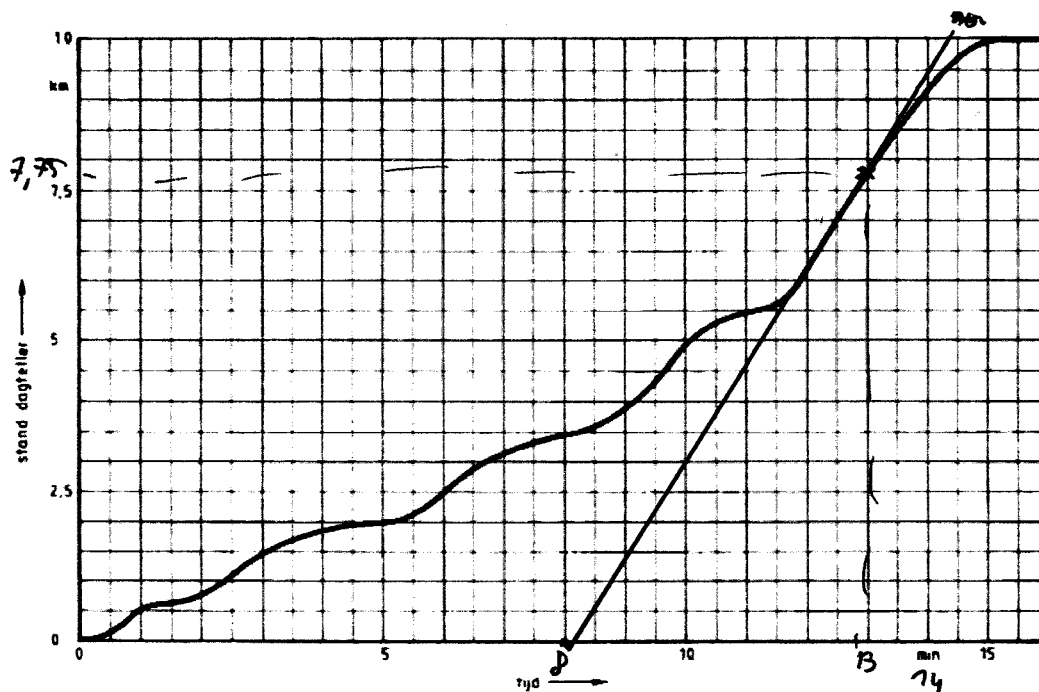
Werkblad: gemiddelde snelheid -> snelheid op één moment -> de afgeleide

Opgave 1: heer in het verkeer

Heer Bommel was danig uit zijn humeur. Het verkeer in Rommeldam had hem veel oponthoud bezorgd en toen hij zich buiten de bebouwde kom waande, trapte hij het gaspedaal geheel in, zodat de Oude Schicht gierend over de weg vloog. Helaas ontging het hem dat hij zich op een weg bevond waar snelheidsbeperking geboden was en dat wreekte zich. Want daar naderde de commissaris van politie reeds op een brullende motor en stak een hand op.



‘Hebt u zo’n haast, huh?’ vroeg Bulle Bas, een notitieboekje trekkend.
‘Hebt u de borden niet gezien? Kunt u niet lezen?’
‘Maar ik reed niet te snel!’, riep heer Bommel op piepende toon. ‘In het afgelopen kwartier heb ik slechts 10 km gereden, dat is dus 40 km per uur’.
Inderdaad wees de dagteller van de Oude Schicht 10 km aan.
Maar meer informatie over Bommel’s autorijtje geeft onderstaande grafiek.



a) Bedenk een mogelijk antwoord van Bulle Bas.

a) Reed niet constant dezelfde snelheid menkeertje

b) Stel je voor dat Bommel gelijk zou hebben. Hoe zou de grafiek er dan hebben uitgezien?

een rechte lijn

In de gemeente Rommeldam zijn de boetes bij overtreding van de snelheidswet bepaald niet mals.

Gemeente Rommeldam

Politieverordening.

De boetes die opgelegd dienen te worden bij overtreding van Artikel 243 uit het Wegverkeersreglement zijn:

- bij een overschrijding van de toegestane snelheid met ten hoogste 10 km/uur bedraagt de boete 25 florijnen;
- bij een overschrijding van meer dan 10 km/uur maar ten hoogste 20 km/uur bedraagt de boete 50 florijnen;
- bij een overschrijding van meer dan 20 km/uur maar ten hoogste 30 km/uur bedraagt de boete 100 florijnen.

Bij elke volgende 10 km/uur boven de toegestane maximum snelheid, dient men de boete opnieuw te verdubbelen.

De burgemeester van Rommeldam

Bekijk de grafiek van Bommel's autoritje. Het aangekruiste punt geeft het moment (en de plaats) aan waar Bommel's overtreding werd geconstateerd.

c) Hoeveel boete moest Bommel betalen?

100 km/uur

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{70}{(74/60) - (8 \div 60)}$$

= 100 km/h

800 florijnen

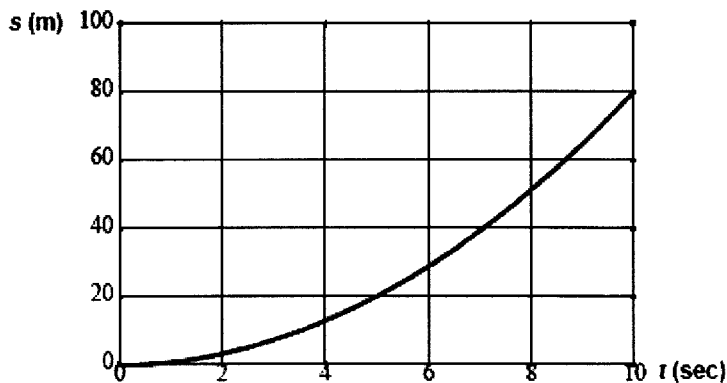
Opgave 2: ruimtevaarder

Op de maan val je zachter dan op de aarde, zoals Charles Duke (op de foto bij maanauto) aan de lijve ondervond in 1972. De valweg naar de maan is net als op aarde, evenredig met het kwadraat van de valtijd, maar de evenredigheidsconstante is aanmerkelijk kleiner.

De valtijd, valweg-functie beantwoord op de maan ongeveer aan de formule:

$$s(t) = 0,8t^2$$

Hieronder zie je een grafiek van die functie op het interval $[0,10]$.



Een ruimtevaarder laat van 80 m hoogte een maansteen vallen. Volgens de formule heeft die 10 seconden nodig om neer te ploffen. De *gemiddelde snelheid* gedurende de gehele val is dus 8 m/sec.

- a) Hoe groot is de gemiddelde snelheid gedurende de eerste 5 seconden? En gedurende de volgende 5 seconden?

$$\frac{20}{5} = 4 \text{ m/s}$$

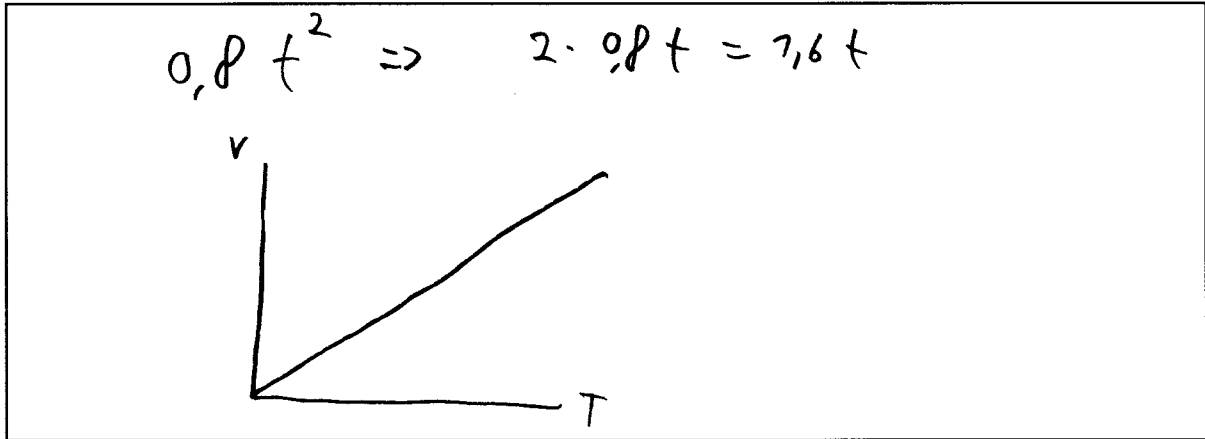
- b) De eerste uitkomst van vraag a) is een stuk lager dan de tweede. Hoe kun je dat zien in de figuur?

de grafiek is dan minder steil

- c) Laat met behulp van differentiëren zien dat de valsnelheid op de maan beantwoordt aan de formule:

$$v(t) = 1,6t.$$

Teken vervolgens de grafiek van $v(t)$.



- d) Voor $t=5$ levert dat op: 8 m/sec. Kun je dat ook zien in de t-s-grafiek? Zo ja, waaraan?

ja, door een raaklijn te tekenen

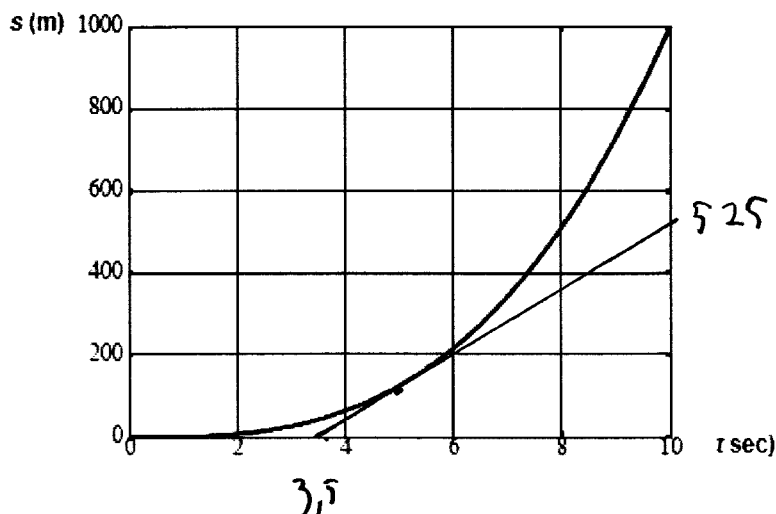
Opgave 3: supersonisch snelle beweging

Veronderstel dat een beweging voldoet aan de formule:

$$s(t) = t^3$$

waarbij t de tijd in seconden is en s de afstand in m.

Dat wordt al gauw supersonisch snel. Na bijvoorbeeld 10 seconden is al 1 km afgelegd. Hieronder zie je de t,s -grafiek op het venster $[0,10]$ bij $[0,1000]$.



a) Hoe groot is de *gemiddelde* snelheid op het tijdsinterval [4,5]? En op [5,6]?

$$\frac{25}{1} = 25 \text{ m/s} \quad \frac{100}{1} = 100 \text{ m/s}$$

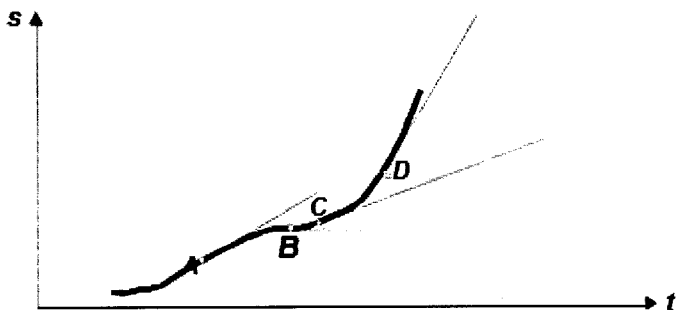
b) Bedenk tenminste twee manieren om de snelheid op *het moment* $t=5$ te bepalen en werk ze uit.

raaklijn: $525 \div 6,5$

$$s(t) = t^3 \quad s'(t) = 3t^2$$

Opgave 4: tijd-afstand-grafiek

In de tijd-afstand-grafiek hieronder is op vier tijdstippen (corresponderend met de punten A, B, C en D) de raaklijn getekend; dat wil dus zeggen de lijn die aangeeft, hoe de grafiek zich zou voortzetten als vanaf dat moment de snelheid niet meer zou veranderen.



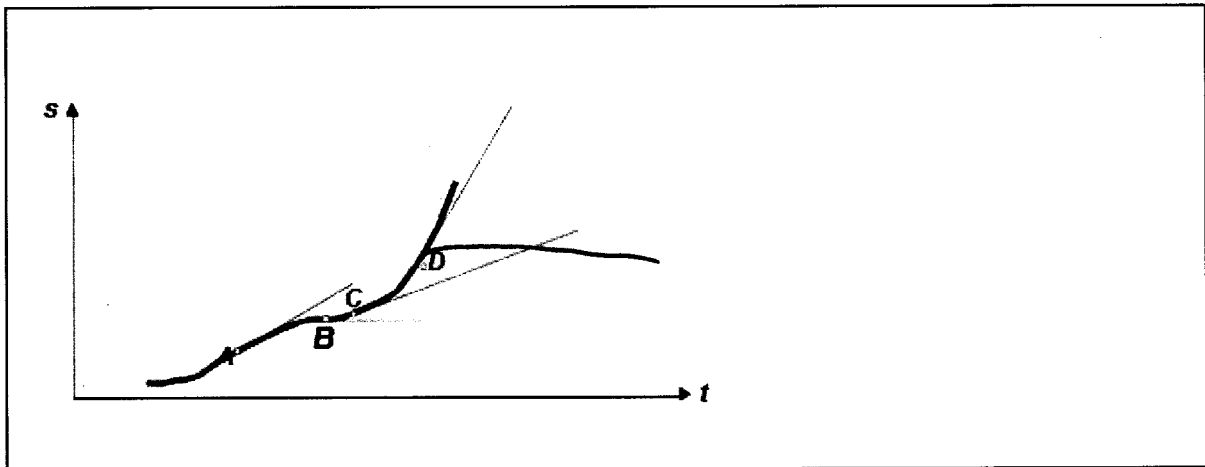
a) Wat betekent het voor de beweging dat de raaklijn in B horizontaal is?

hij staat stil → verwijzen eindmeting

b) Je kunt uit de grafiek aflezen dat na het tijdstip dat correspondeert met het punt D, de snelheid nog groter wordt. Verklaar dit.

de grafiek is stijler

c) Stel je voor dat de snelheid na dat tijdstip onmiddellijk zou gaan afnemen. Hoe moet de grafiek rechts van het punt D veranderen?



snelheid en afstand

Claire E...

als je de gemiddelde snelheid moet berekenen als je de snelheid op een bepaald punt moet berekenen

Pepijn v...

Het is de formule van de raaklijnen van elk punt,

Noor O...

1. Je berekend de snelheid op een punt.
2. je kan versnelling berekenen

Jasper ...

1 er wordt bij beide vakken gerekend met de afgeleide als het gaat om een verandering.
2

Tygo S...

Gemiddelde snelheid

Tim van...

1. Er wordt een raaklijn getekend
2. Bij de afgeleide wordt er iets op één tijdstip berekent.

Jivani J...

als je een v-t diagram hebt je kan de snelheid op 1 punt berekenen en de versnelling als je een v-t diagram hebt

Rigil Nj...

Er word beide gekeken naar een gemiddelde snelheid/versnelling in een punt
En hier kan/word dan weer een nieuwe functie van gemaakt, de afgeleiden

Myra Br...

er wordt een raaklijn getekend een tijdstip :)

Lilia Nie...

bij de raaklijn en iets op 1 tijdstip

Tristan ...

snelheid op 1 punt, gemiddelde snelheid.

Luc Ra...

?

Mees B...

versnelling omzetten

Jason Z...

f(x) t(x) grafiek

Jesper ...

raaklijn tekenen en daar de richtingscoëfficiënt

Maas D...

Teken de raaklijn. Het punt waar die het begin en einde op de grafiek snijdt, deed je de delta x gedeeld door delta

Jivani J...

raaklijn tekenen en dan delta s : delta t van 2 punten op de raaklijn

Noor O...

GGGGG.

Tristan ...

raaklijn tekenen en dan delta y : delta x van 2 punten op raaklijn

Claire E...

Teken zelf een raaklijn. Lees de twee uiterste punten af. Reken (verschil Y gedeeld door verschil X)

Jasper ...

een lijn teken waarmee je de lijn raakt. en daar de richting coëfficiënt van bepalen.

Tjalle M...

door een raaklijn te tekenen en dan $\Delta Y \div \Delta X$ te gebruiken om de richtingscoëfficiënt te weten te komen

Rigil Nj...

raaklijn tekenen en daar dan de richtingscoëfficiënt berekenen door middel van delta y/delta x

Pepijn v...

Het tekenen van een raaklijn. Daarna aflezen wat de snelheid is.

Luc Ra...

raaklijn tekenen dan de richtingscoëfficiënt bepalen door delta Y/delta X

Tim van...

$a = \Delta Y / \Delta X$
raaklijn maken

Tygo S...

raaklijn tekenen en delta x delen door delta y

Jason Z...

begin punt en eind punt. y delen door x

Lilia Nie...

Eerst teken je een raaklijn en dan doe je dy:dx

Myra Br...

Uitwerkbijlage formatieve eindmeting: de afgeleide

Naam: ~~Jacques~~
~~Maabkromm~~

Opdracht 1: beweging van een leerling ten opzichte van een bewegingssensor

a)

Dan is er geen verandering in ~~afstand~~ snelheid dus ?

b)

(i): $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow \frac{0,35}{1,1} = 0,32 \text{ m/s}$

(ii): $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow \frac{-0,4}{1,5} = -0,27 \text{ m/s}$ ← correct.

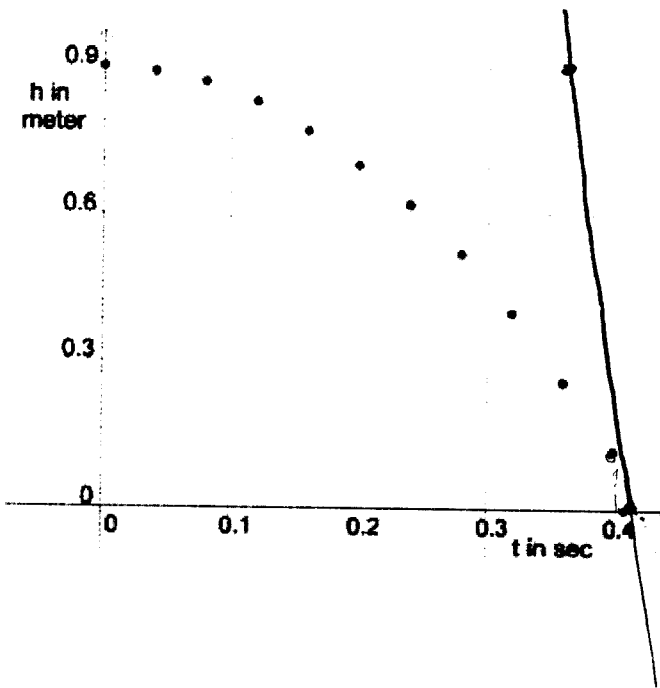
→ (iii): $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow \frac{0,2 - 0,7}{3,0 - 3} = \frac{0,7}{0,8} = 0,875 \text{ m/s}$

c)

versnelling? ← waarom twijfel je?

Opdracht 2: vallende kogel

Manier 1:



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow \frac{0 - 0,9}{0,4 - 0,35} =$$

$$\frac{-0,9}{0,05} = -18 \text{ m/s}$$

Manier 2:

A

$$h(t) = 0,9 - 4,9t^2$$

$$h'(t) = -9,8t$$

$$t = 0,4 \rightarrow$$

$$-9,8 \cdot 0,4 = -3,92$$

focus 11 C

~~13-11~~ 13-11.

1 a verandering snelheid

↳ snelheid genoemd
dus sneller.

b. duidelijk : rasterpunten
verwarrend x op y-as.

↳ AIP lastige punten → raakt in de war.
→ positie gelijk
→ niet logisch

2.

a) dus lijn niet verder, want onderaan geen as.
→ wel preciezer.

snelheid in punt = afgeleide

b. derde manier?

c)

↳ bij natuurkunde met gewicht
met grafiek.

~~5 nov.~~
30 okt

practicum → zag link met afgeleide

↳ gaf niet veel beter inzicht.

↳ achteraf

verschillen wis-nat : zag verschil al.

Als de formule voor de snelheid op één punt
die met raaklijn methode of algebra bepaald

Resultaten:

Hypothetische leertraject (HLT)			Actuele leertraject (ALT)		Deductief	Inductief
Fase	Verwachtingen (globaal)	Verwachtingen (specifiek)	Uitkomst (globaal)	Uitkomst (specifiek)	Vergelijk van HLT en ALT (-,0,+)	Opvallende bevindingen
1	Ik verwacht dat de leerlingen aanlopen tegen de beschreven problemen en misvattingen die zich voordoen bij het leren van het concept afgeleide, zoals beschreven in sectie II en daarnaast gedeeltelijk blijken uit het vooronderzoek beschreven in sectie I.	<ul style="list-style-type: none"> • Veel leerlingen zullen bij opdracht 1a geen zinvolle betekenis kunnen geven aan de gegeven differentiaalquotiënt. Bij onderdeel 1b zullen veel leerlingen (i) goed maken, onderdeel (ii) zal minder goed gaan, waarbij veel leerlingen het minteken vergeten of de x-coördinaat van C voor Δx gebruiken, en onderdeel (iii) zal nog minder goede antwoorden opleveren. • In opdracht 2 zullen veel leerlingen bij onderdeel a een differentiequotiënt berekenen, maar bij 	<p><i>Leerling A:</i> Laat een wisselend beeld zien met betrekking tot <i>inzicht in achterliggende concepten</i>, toont weinig inzicht in <i>de overgang van lokaal naar globaal</i> en toont weinig inzicht in <i>toepassen en transfer</i>.</p> <p><i>Leerling B:</i> Laat een matig beeld zien met betrekking tot <i>inzicht in achterliggende</i></p>	<p><i>Leerling A:</i> Geeft bij opdracht 1a een incorrecte betekenis van de differentiaalquotiënt, vergeet bij onderdeel (ii) van 1b het minnetje en komt bij (iii) van 1b met een incorrecte berekening tot het juiste antwoord. Gebruikt bij 2a de numerieke representatie. Verwijst bij 2b correct naar de lijn AB als hulplijn. Schat bij 2c correct het hellingsgetal, maar geeft hieraan geen zinvolle betekenis. Geeft geen zinvolle betekenis bij 2d.</p> <p><i>Leerling B:</i> Herkent bij opdracht 1a de notatie niet (input interview) en komt bij 1b niet tot zinvolle</p>	<p><i>Leerling A: +</i> Loopt inderdaad tegen veel van de veelvoorkomende problemen aan, maar toont meer <i>inzicht in achterliggende concepten</i> dan het HLT voorschrijft.</p> <p><i>Leerling B: +</i> Loopt inderdaad tegen veel van de veelvoorkomende problemen aan, maar toont iets meer inzicht in</p>	<p><i>Leerling A:</i> Vooral het getoonde inzicht bij 2b is opvallend, ook in verhouding tot leerling B en leerling C.</p> <p><i>Leerling B:</i> Laat bij opdracht 2 blijken dat ze juist beter gedijt bij het toepassen</p>

		<p>onderdeel b vaak niet zien wat de samenhang is met de lijn AB. Bij onderdeel c zullen de leerlingen in veel gevallen wel het hellingsgetal kunnen schatten, maar niet duidelijk de betekenis uit kunnen leggen. Bij onderdeel d komen weinig leerlingen tot een goed antwoord.</p>	<p><i>concepten</i>, toont weinig inzicht in <i>de overgang van lokaal naar globaal</i> en toont wisselend inzicht in <i>toepassen en transfer</i>.</p> <p><i>Leerling C:</i> Laat een wisselend beeld zien met betrekking tot <i>inzicht in achterliggende concepten</i>, toont redelijk inzicht in <i>de overgang van lokaal naar globaal</i> en toont redelijk inzicht in <i>toepassen en transfer</i>.</p>	<p>antwoorden door het abstractieniveau van de opgave (input interview). Gebruikt bij 2a de numerieke representatie. Komt na hulp bij 2b tot een meer zinvol antwoord dan het oorspronkelijke (input interview). Gaat bij 2c de mist in door gemiddelde snelheid en snelheid op één moment door elkaar te halen. Heeft geen idee bij 2d.</p> <p><i>Leerling C:</i> Geeft bij 1a een incorrecte betekenis, berekent onderdeel (ii) van 2b correct, maar gaat bij (iii) van 2b de mist in. Gebruikt bij 2a de numerieke representatie. Legt bij 2b de betekenis van lijn AB uit, maar niet de relatie met het gemiddelde van 2a. Heeft bij 2c een merkwaardige berekening, maar wel (wiskundig) correcte interpretatie. Komt bij 2d tot een slordig geformuleerd, maar correct antwoord.</p>	<p><i>toepassen en transfer</i> dan het HLT voorschrijft.</p> <p><i>Leerling C: 0</i> Toont met name meer inzicht in <i>de overgang van lokaal naar globaal</i> en <i>toepassen en transfer</i> dan het HLT voorschrijft.</p>	<p>van de afgeleide in een context (input interview).</p> <p><i>Leerling C:</i> Valt met name op door het slordig geformuleerde, maar in zekere zin correcte antwoord bij 2d, dat de <i>overgang van lokaal naar globaal</i> toetst.</p>
--	--	---	--	--	---	--

2	Ik verwacht dat de leerlingen na het maken van de vragen op het werkblad een verband gaan zien tussen het uit de metingen voortkomende s-t diagram en de gemiddeld gelopen snelheid. Een aantal zal ook het verband gaan zien tussen de gelopen snelheden op één moment en de afgeleide.	<ul style="list-style-type: none"> • Bij vragen A en B zullen de leerlingen prima in staat zijn de gemiddelde snelheid te berekenen over een gegeven tijdsinterval. • Het verklaren van het verschil tussen gemiddelde snelheid en snelheid op een tijdstip bij vraag B zal door de leerlingen in veel gevallen correct gedaan worden, maar de uitleg zal oppervlakkig zijn. • Bij vraag C zal in de verklaring de rol van de gelopen snelheid worden benoemd. • Bij vraag D zien de meeste leerlingen het verband tussen gelopen snelheid en vorm van de grafiek goed in. • Bij vraag E zal een kleiner gedeelte van de leerlingen dan bij D in staat zijn om, andersom, vanuit inzicht in eigen bewegingen tot een gevraagde grafiek te komen. 	<p><i>Leerling A (in groepsverband):</i> Er wordt duidelijk een verband gezien tussen de metingen en de gemiddeld gelopen snelheid. Het verband tussen de gelopen snelheden op één moment en de afgeleide wordt gedeeltelijk gezien.</p> <p><i>Leerling B (in groepsverband):</i> Er wordt gedeeltelijk een verband gezien tussen de metingen en de gemiddeld gelopen snelheid. Het verband tussen de gelopen snelheden op één</p>	<p><i>Leerling A (in groepsverband):</i> Bij vragen A en B worden de gemiddelde snelheden correct berekend. Bij vraag B wordt het verschil tussen gemiddelde snelheid en snelheid op één tijdstip goed toegelicht. Bij vraag C wordt de rol van de gelopen snelheid genoemd. Bij vraag D wordt het verband tussen gelopen snelheid en de vorm van de grafiek goed ingezien. Bij vraag E lukt het om vanuit inzicht in eigen bewegingen tot redelijke grafieken te komen (echter door tijdgebrek zonder de gevraagde software). Bij vraag F wordt niet tot een antwoord gekomen.</p> <p><i>Leerling B (in groepsverband):</i> Bij vragen A en B worden de gemiddelde snelheden correct berekend. Bij vraag B wordt het verschil tussen de gemiddelde snelheid en</p>	<p><i>Leerling A (in groepsverband): +</i> Er wordt inderdaad een verband gezien tussen de metingen en gemiddeld gelopen snelheid (en er wordt ook gedeeltelijk een verband gezien tussen gelopen snelheid op één moment en de afgeleide).</p> <p><i>Leerling B (in groepsverband): 0</i> Er wordt slechts gedeeltelijk een verband gezien tussen de metingen en gemiddeld gelopen snelheid (en er wordt ook gedeeltelijk een verband gezien tussen gelopen</p>	<p><i>Leerling A (in groepsverband):</i> Maakt (samen met groepje) werkblad zeer goed, zeker in vergelijking met leerlingen B en C (en hun groepjes).</p> <p><i>Leerling B (in groepsverband):</i> Gaaf er (in groepsverband) ten onrechte van uit dat bij het ontbreken van een vierde meting niet meer zinvol kan</p>
---	--	---	--	---	---	---

		<ul style="list-style-type: none"> Bij onderdeel F zal een aantal leerlingen op het idee komen dat met de raaklijnmethode de kolom met snelheden kan worden gereproduceerd. 	<p>moment en de afgeleide wordt gedeeltelijk gezien.</p> <p><i>Leerling C:</i> Het is moeilijk te beoordelen hoe goed er een verband wordt gezien tussen de metingen en de gemiddeld gelopen snelheid. Het verband tussen de gelopen snelheden op één moment en de afgeleide wordt gedeeltelijk gezien.</p>	<p>snelheid op één tijdstip voldoende toegelicht. Bij vraag C wordt de rol van de gelopen snelheid <u>niet</u> genoemd. Bij vraag D wordt het verband tussen gelopen snelheid en de vorm van de grafiek wat verwarrend uitgelegd. Bij vraag E en vraag F staan geen antwoorden.</p> <p><i>Leerling C:</i> Bij vragen A en B is niet duidelijk of de gemiddelde snelheden correct worden berekend en ontbreekt duidelijke toelichting. Bij vraag C wordt de rol van de gelopen snelheid genoemd, maar niet op een betekenisvolle manier. Bij vraag D wordt het verband tussen de gelopen snelheid en vorm van de grafiek foutief uitgelegd. Bij vraag E staat geen antwoord. Bij vraag F wordt bedacht dat de snelheid op één moment moet worden berekend, maar wordt de grafische representatie vergeten.</p>	<p>snelheid op één moment en de afgeleide).</p> <p><i>Leerling C (in groepsverband):</i> - Het is moeilijk te beoordelen hoe goed er een verband wordt gezien tussen de metingen en de gemiddeld gelopen snelheid (en er wordt slechts gedeeltelijk een verband gezien tussen gelopen snelheid op één moment en de afgeleide).</p>	<p>worden nagedacht over onderdelen E en F.</p> <p><i>Leerling C (in groepsverband):</i> Is (in groepsverband) de meetgegevens (in de vorm van s-t-diagrammen) kwijtgeraakt en heeft vervolgens oppervlakkige antwoorden geformuleerd, waaruit weinig zinvolle informatie valt te deduceren.</p>
--	--	--	---	---	--	--

3	Ik verwacht dat leerlingen na het maken van de vragen op het werkblad inzicht hebben in de betekenis van het differentiequotiënt en relatie met gemiddelde verandering.	<ul style="list-style-type: none"> • Veel leerlingen zullen inzien dat een interval oneindig veel getallen bevat, maar zullen vergeten te vermelden dat er dus ook oneindig veel waarden in het bereik mee corresponderen bij onderdeel a. • Bij onderdeel b zullen veel leerlingen inzien dat bij alle drie de grafieken de afgelegde weg in 10s hetzelfde is, dus ook de gemiddelde snelheid. • Bij onderdeel c zullen veel leerlingen correcte alternatieve bewegingen intekenen, maar zullen in veel gevallen paden nabootsen zoals in onderdeel b. • Bij onderdeel d zullen veel leerlingen tot een correct antwoord komen. 	<p><i>Leerling A:</i> Heeft een beetje inzicht in de betekenis van het differentiequotiënt en relatie met gemiddelde verandering.</p> <p><i>Leerling B:</i> Heeft, op basis van geschreven werk, inzicht in de betekenis van het differentiequotiënt en relatie met gemiddelde verandering.</p>	<p><i>Leerling A:</i> Ziet bij onderdeel a in dat je het gemiddelde van oneindig veel waarden in het bereik moet berekenen. Bij onderdeel b lijkt het inzicht aanwezig te zijn, maar ontbreekt een echte verklaring. Onderdeel c is niet gemaakt, omdat hier hetzelfde gedaan kan worden als bij onderdeel b met symmetrie (input interview). Bij onderdeel d wordt alleen antwoord gegeven op de laatste vraag. Het idee achter de toelichting is verder uitgelegd tijdens het interview.</p> <p><i>Leerling B:</i> Ziet bij onderdeel a in dat je het gemiddelde van oneindig veel waarden in het bereik moet berekenen. Bij onderdeel b wordt een duidelijke en correcte uitleg gegeven. Bij onderdeel c worden correcte alternatieve bewegingen ingetekend, maar wel in lijn met onderdeel b.</p>	<p><i>Leerling A: 0</i> Scoort met een beetje inzicht in de betekenis van het differentiequotiënt en de relatie met de gemiddelde verandering redelijk ten aanzien van de verwachting.</p> <p><i>Leerling B: +</i> Laat, op basis van het geschreven werk, inderdaad zien inzicht te hebben in de betekenis van het differentiequotiënt en de relatie met de gemiddelde verandering.</p>	<p><i>Leerling A:</i> Laat samen met leerling B zien wel degelijk inzicht te hebben in het beschouwen van oneindig veel waarden in het bereik bij onderdeel a.</p> <p><i>Leerling B:</i> Heeft deze opdracht samen gemaakt met een (cijfermatig) sterke leerling (input interview), waardoor het geschreven werk een vertekend beeld kan geven.</p>
---	---	--	---	---	--	---

			<p><i>Leerling C:</i> Heeft, op basis van geschreven werk, geen inzicht in de betekenis van het differentiequotiënt en relatie met gemiddelde verandering.</p>	<p>Bij onderdeel d wordt een duidelijke en correcte uitleg gegeven.</p> <p><i>Leerling C:</i> Ziet bij onderdeel a in dat het interval oneindig veel waarden bevat, maar vergeet de relatie te leggen met waarden uit het bereik. Bij onderdelen b, c en d ontbreken antwoorden, omdat het doel van het werkblad verwarrend is (input interview).</p>	<p><i>Leerling C:</i> - Laat <u>niet</u> zien inzicht te hebben in de betekenis van het differentiequotiënt en de relatie met de gemiddelde verandering.</p>	<p><i>Leerling C:</i> Vraag is in hoeverre leerling tijdens de les gemotiveerd is geweest om aan dit werkblad te werken, omdat het hem niet direct zinvol leek (input interview). Zijn uitwerkingen kunnen daarom een vertekenend beeld geven.</p>
--	--	--	--	---	--	--

4	Ik verwacht dat de leerlingen na de uitleg en het maken van de vragen op het werkblad begrip hebben van de overgangen van globaal naar lokaal (gemiddelde snelheid -> snelheid op één moment) en van lokaal naar globaal (snelheid op één moment -> de afgeleide) die bij de introductie van de afgeleide een rol spelen.	<ul style="list-style-type: none"> • Bij opgave 1 zullen leerlingen in veel gevallen inzien dat bij onderdeel b de grafiek een rechte lijn is, maar bij onderdeel c met de raaklijnmethode meer hulp van de docent nodig hebben. • Bij opgave 2 zullen de leerlingen bij onderdeel a het gemiddelde met formules in veel gevallen goed berekenen, maar bij onderdeel b de grafische interpretatie lastiger vinden. Bij onderdeel c zal het differentiëren veelal goed gaan, maar de grafische interpretatie bij onderdeel d meer hulpvragen opleveren. • Bij opgave 3 zullen de leerlingen met onderdeel a nauwelijks problemen ervaren en bij onderdeel b in veel gevallen zowel de raaklijnmethode als de afgeleide in 	<p><i>Leerling A:</i> Laat een wisselend beeld zien kijkend naar begrip van de overgang van globaal naar lokaal. Laat matig begrip zien van de overgang van lokaal naar globaal.</p> <p><i>Leerling B:</i> Laat goed begrip zien van de overgang van globaal naar lokaal. Laat goed begrip zien van de</p>	<p><i>Leerling A:</i> Laat in opgave 1c begrip van de raaklijnmethode zien, maar komt bij onderdeel a en b niet tot een (correct) antwoord. Berekent bij opgave 2a correct het gemiddelde, maar weet bij opgave 2b geen correcte grafische beschrijving te geven. Komt bij opgave 2c niet op het idee dat hier de rekenregels gebruikt kunnen worden om $v(t)$ te differentiëren (input interview), maar geeft bij onderdeel d een correct antwoord. Loopt bij opgave 3a niet tegen problemen aan, maar noemt bij 3b enkel (correct) de raaklijnmethode. Laat bij opgave 4 zien de grafische weergave goed te kunnen interpreteren, maar haalt bij onderdeel a wel snelheid en versnelling door elkaar.</p> <p><i>Leerling B:</i> Ziet bij opgave 1b in dat de grafiek een rechte lijn is en maakt onderdeel 1c gedeeltelijk correct zonder hulp van de docent.</p>	<p><i>Leerling A:</i> - Zowel begrip van de overgang globaal->lokaal als van de overgang lokaal->globaal voldoet <u>niet</u> aan de verwachtingen.</p> <p><i>Leerling B:</i> + Zowel begrip van de overgang globaal->lokaal als van de overgang lokaal->globaal voldoet aan de verwachtingen.</p>	<p><i>Leerling A:</i> Geeft aan dat juist de grafische representatie van de afgeleide haar beter ligt dan de afgeleide in formulevorm, tegen de verwachtingen in (input interview). Deze observatie volgt ook uit het werkblad.</p> <p><i>Leerling B:</i> Heeft deze opdracht samen gemaakt met een (cijfermatig) sterke leerling (input interview),</p>
---	---	---	--	--	---	--

		<p>formulevorm toepassen!</p> <ul style="list-style-type: none"> Bij opgave 4 zullen de leerlingen de grafische weergave goed kunnen interpreteren: de horizontale raaklijn bij a en de manier waarop de grafiek verandert bij veranderde snelheid bij b en c. 	<p>overgang van lokaal naar globaal.</p> <p><i>Leerling C:</i> Laat goed begrip zien van de overgang van globaal naar lokaal. Laat goed begrip zien van de overgang van lokaal naar globaal.</p>	<p>Berekent bij opgave 2a correcte gemiddeldes en geeft bij onderdeel 2b een correcte, maar wat ongelukkig geformuleerde, grafische interpretatie. Maakt zowel opgaves 2c en 2d correct zonder hulpvragen. Bij opgave 3 wordt onderdeel a correct uitgewerkt, maar wordt bij onderdeel b de limietdefinitie van de afgeleide als manier gegeven (in plaats van het volgens de verwachting toepassen van de differentieerregels). Laat bij opgave 4 zien de grafische representatie goed te kunnen interpreteren.</p> <p><i>Leerling C:</i> Ziet bij opgave 1b in dat de grafiek een rechte lijn moet zijn en lost 1c op met de raaklijnmethode zonder hulp van de docent. Berekent bij opgave 2a correcte gemiddeldes en heeft bij 2b geen probleem met de grafische interpretatie. Differentieert correct bij</p>		<p>waardoor het geschreven werk een vertekend beeld kan geven.</p> <p><i>Leerling C: +</i> Maakt (vrijwel) elke opdracht op dit werkblad correct, waardoor de relatief slechte prestaties bij de werkbladen van fase 2 (in groepsverband) en fase 3 extra opvallen en het beeld van</p>
--	--	---	--	--	--	---

				<p>2c en kent ook de grafische benadering bij 2d.</p> <p>Opgave 3a wordt correct gemaakt en bij 3b worden zowel de raaklijnmethode als de afgeleide in formulevorm toegepast!</p> <p>Laat bij opgave 4 zien de grafische weergave goed te kunnen interpreteren.</p>		<p>verminderde motivatie in die twee fases versterken.</p>
--	--	--	--	---	--	--

5	Ik verwacht dat de leerlingen na het maken van de peerfeedback vragen onder de sectie 'de afgeleide bij wiskunde en natuurkunde' als onderdeel van de presentatie in bijlage X inzicht hebben in de verschillen en overeenkomsten tussen de afgeleide bij wiskunde en natuurkunde en situaties in de natuurkunde waarbij de afgeleide een rol speelt zien als bijzondere gevallen van de algemene beschrijvingen bij wiskunde.	<ul style="list-style-type: none"> • Bij de vraag op slide 13 verwacht ik dat de leerlingen tenminste één overeenkomst kunnen noemen op basis van hun eigen ervaring. • Bij de vraag op slide 16 verwacht ik dat de leerlingen een tweede verschil kunnen noemen. • Bij de vraag op slide 19 verwacht dat ik de leerlingen de raaklijnmethode in eigen woorden beschrijven en iets zeggen over de differentiequotiënt. 	<p><i>Leerling A:</i> Laat een goed inzicht zien in de overeenkomsten en verschillen tussen de afgeleide bij wiskunde en natuurkunde.</p> <p><i>Leerling B:</i> Laat een wisselend beeld zien met betrekking tot inzicht in overeenkomsten en verschillen tussen de afgeleide bij wiskunde en natuurkunde.</p> <p><i>Leerling C:</i> Laat een redelijk goed inzicht zien in de overeenkomsten en verschillen tussen de afgeleide bij wiskunde en natuurkunde.</p>	<p><i>Leerling A:</i> Geeft als antwoord op de vraag op slide 13 een correcte overeenkomst. Beschrijft als antwoord op de vraag op slide 19 de raaklijnmethode en differentiequotiënt in eigen woorden.</p> <p><i>Leerling B:</i> Geeft een incorrect antwoord op de vraag op slide 13 en/of heeft de vraag verkeerd geïnterpreteerd. Beschrijft als antwoord op de vraag op slide 19 de raaklijnmethode en differentiequotiënt in eigen woorden.</p> <p><i>Leerling C:</i> Geeft feitelijk een incorrect antwoord op de vraag op slide 13, maar noemt wel twee overeenkomsten waarmee hij inzicht toont in snelheid op één punt en de tweede afgeleide. Beschrijft als antwoord op de vraag op slide 19 de raaklijnmethode en differentiequotiënt in eigen woorden.</p>	<p><i>Leerling A: +</i> Laat inderdaad een goed inzicht zien in de overeenkomsten/verschillen tussen de afgeleide bij wiskunde en natuurkunde.</p> <p><i>Leerling B: 0</i> Er wordt redelijk aan de verwachtingen voldaan, aangezien het beeld wisselend is met betrekking tot het inzicht in overeenkomsten/verschillen tussen de afgeleide bij wiskunde en natuurkunde.</p> <p><i>Leerling C: +</i> Laat inderdaad een goed inzicht zien in de overeenkomsten/verschillen tussen de afgeleide bij wiskunde en natuurkunde.</p>	<p><i>Leerling A/B/C:</i> De vraag op slide 16 is enkel klassikaal genoemd en beantwoord en inzicht hierin kan daarom niet goed worden beoordeeld. In hoeverre situaties in de natuurkunde waarbij de afgeleide een rol speelt worden gezien als bijzondere gevallen van de algemene beschrijvingen bij wiskunde is niet goed te beoordelen, omdat hierover geen vraag is opgenomen in de presentatie.</p>
---	--	---	---	--	--	--

6	Ik verwacht dat de beschreven problemen en misvattingen die zich voordoen bij het leren van het concept afgeleide, zoals beschreven in sectie II en daarnaast gedeeltelijk blijken uit het vooronderzoek beschreven in sectie I, minder optreden bij de leerlingen bij het maken van de eindmeting dan bij de beginmeting.	<ul style="list-style-type: none"> In opdracht 1 zullen veel leerlingen bij onderdeel a een correcte betekenis toekennen aan een afgeleide die gelijk is aan nul, bij onderdeel b zullen (ii) en (iii) meer correcte antwoorden opleveren dan bij onderdeel 1b van de startmeting en onderdeel c zal tot weinig correcte antwoorden leiden. In opdracht 2 zullen veel leerlingen de raaklijnmethode (slordig) uitwerken als eerste berekening en op het idee komen dat het berekenen van de afgeleide hier van pas kan komen bij de tweede berekening. Ze zullen echter de afgeleide vervolgens evalueren op een onnauwkeurig afgelezen tijdstip. Er zullen nauwelijks leerlingen als derde berekeningsmethode op het idee komen dat ook de gemiddelde snelheid 	<p><i>Leerling A:</i> Toont enigszins <i>inzicht in achterliggende concepten</i>, toont weinig inzicht in <i>de overgang van lokaal naar globaal</i> en toont enigszins inzicht in <i>toepassen en transfer</i>.</p> <p><i>Leerling B:</i> Toont enigszins <i>inzicht in achterliggende concepten</i>, toont weinig inzicht in <i>de overgang van lokaal naar globaal</i> en toont wisselend</p>	<p><i>Leerling A:</i> Interpreteert opdracht 1a verkeerd (input interview), waardoor tot incorrect antwoord wordt gekomen, maar wel inzicht in situatie toont. Geeft bij onderdeel b meer correcte antwoorden dan bij 1b van de startmeting, waaronder een correct onderdeel (iii), maar heeft geen antwoord bij 1c. Werkt bij opdracht 2 de raaklijnmethode uit, maar voor een verkeerd tijdstip. Komt niet op het idee dat het berekenen van de afgeleide hier van pas kan komen, maar ziet de afgeleide wel als een formule voor meerdere raaklijnen (input interview). Bedenkt geen derde berekeningsmethode.</p> <p><i>Leerling B:</i> Kent bij opdracht 1a een correcte betekenis toe aan de afgeleide die nul is na 3,5 seconden. Komt bij opdracht 1b tot gedeeltelijk correcte berekeningen, wat een aanzienlijke verbetering</p>	<p><i>Leerling A: 0</i> Vergelijkend met de uitkomst (globaal) van fase 1 is het inzicht in <i>toepassen en transfer</i> iets toegenomen.</p> <p><i>Leerling B: 0</i> Vergelijkend met de uitkomst (globaal) van fase 1 is het <i>inzicht in achterliggende concepten</i> iets toegenomen.</p>	<p><i>Leerling A:</i> Geeft aan de opgaves op de eindmeting heel anders te vinden, omdat ze meetkundiger van aard zijn dan in het boek (input interview).</p> <p><i>Leerling B:</i> Loopt, tegen de verwachtingen in, in verhouding tot leerling A tegen meer veelvoorkomende problemen met de afgeleide aan</p>
---	--	---	--	--	--	--

		<p>bepaald kan worden op een zeer klein interval rond het moment dat de kogel de grond treft.</p>	<p>inzicht in <i>toepassen en transfer</i>.</p> <p><i>Leerling C:</i> Toont een goed inzicht in <i>achterliggende concepten</i>, toont goed inzicht in <i>de overgang van lokaal naar globaal</i> en toont goed inzicht in <i>toepassen en transfer</i>.</p>	<p>is ten opzichte van opdracht 1b van de startmeting. Geeft geen betekenisvol antwoord bij opdracht 1c. Werkt bij opdracht 2 niet de raaklijnmethode uit, maar gaat met de gemiddelde snelheid aan de slag, vanwege verwarring met natuurkunde (input interview). Bedenkt wel dat de afgeleide ingezet kan worden als tweede berekeningsmethode, maar was van plan dat te proberen met de limietdefinitie en had de rekenregels niet bedacht (input interview). Bedenkt geen derde berekeningsmethode.</p> <p><i>Leerling C:</i> Kent bij opdracht 1a een correcte betekenis toe aan de afgeleide die nul is na 3,5 seconden. Komt bij opdracht 1b tot gedeeltelijk correcte berekeningen, maar laat geen verbetering zien ten opzichte van opdracht 1b van de startmeting. Geeft het correcte antwoord bij 1c,</p>		<p>en laat gedurende de 3-lesse-op-een-rij ook wat minder ontwikkeling zien.</p> <p><i>Leerling C:</i> Geeft aan dat hij al voor de 3-lesse-op-een-rij veel zaken die gerelateerd zijn aan de veelvoorkomende problemen en verschillen en overeenkomsten tussen de afgeleide bij wiskunde en</p>
--	--	---	--	--	--	--

				<p>met enige twijfel (input interview).</p> <p>Werkt bij opdracht 2 de raaklijnmethode uit, maar onnauwkeurig, als gevolg van zowel een onnauwkeurig afgelezen tijdstip als een niet onder de as doorgetrokken raaklijn. Bedenkt daarnaast dat als onderdeel van de tweede manier de afgeleide ingezet kan worden, maar evalueert deze op een onnauwkeurig afgelezen tijdstip.</p> <p>Verwijst als derde manier naar het v-t-diagram bij natuurkunde, in feite equivalent aan manier 1 (input interview).</p>		<p>natuurkunde als wist, terwijl hij opvallend genoeg toch van de drie focusleerlingen het meest ontwikkeling laat zien gedurende de 3-lessen-op-een-rij.</p>
--	--	--	--	---	--	---

EEN BLIK OP DE TOEKOMST: GEÏNTEGREERD DIFFERENTIAALREKENING-KINEMATICA ONDERWIJS

TE VEEL ABSTRACTIE LEIDT MAAR AF

Jeroen Maes

INHOUD

- Context
- Probleem en onderzoeksvraag
- Ontwerp en methode
- Opbrengsten

CONTEXT

CONTEXT



sectie natuurkunde

kinematica

≠



sectie wiskunde

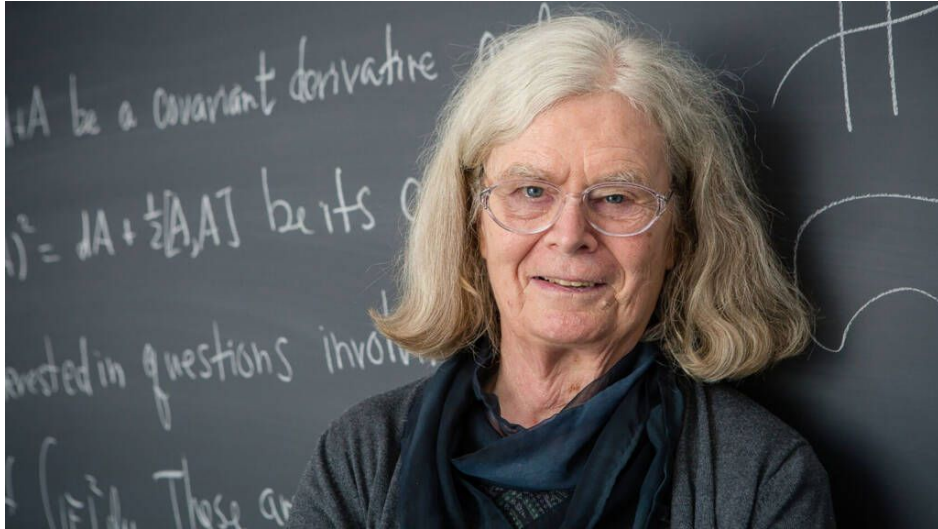
differentiaalrekening

PROBLEEMSTELLING
EN
ONDERZOEKSVRAAG

VEELVOORKOMENDE PROBLEMEN MET DE AFGELEIDE

- weinig inzicht in achterliggende concepten -> differentiequotiënt
- de overgang van lokaal naar globaal -> helling op één punt (lokaal) vs de afgeleide (globaal)
- toepassen en transfer -> kennis van natuurkunde toepassen bij wiskunde

STRATEGIE



ONDERZOEKSVRAAG

In hoeverre verminderen de veelvoorkomende problemen die leerlingen hebben bij het leren van de afgeleide gedurende een reeks van 3-lessen-op-een-rij waarin zij geïntegreerd differentiaalrekening-kinematica onderwijs aangeboden hebben gekregen?

ONTWERP EN METHODE

ONTWERP: VERGELIJK VAN DE AFGELEIDE BIJ WISKUNDE EN NATUURKUNDE

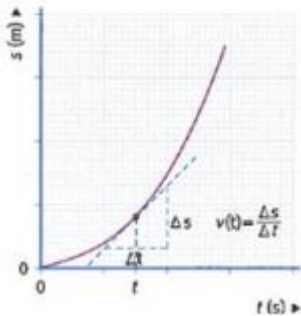
Verschillen:

- verschillen bij het maken van grafieken
- verschillen in notatie en taalgebruik
- verschillen in werkwijze

ONTWERP: VERGELIJK VAN DE AFGELEIDE BIJ WISKUNDE EN NATUURKUNDE

Verschillen in werkwijze:

1. Wiskunde: x kiezen, vervolgens $x + h$ heel dichtbij kiezen, de lijn tussen $f(x)$ en $f(x+h)$ visualiseren, de functiewaarden $f(x)$ en $f(x+h)$ bepalen, het differentiequotient berekenen en de limiet nemen voor $h \rightarrow 0$. **Of: de afgeleide berekenen met rekenregels en een x -waarde invullen in de afgeleide.**
2. Omschrijf de werkwijze, zoals je die kent van natuurkunde om bijvoorbeeld de snelheid op één tijdstip te bepalen.



Raaklijn schetsen en op willekeurige plek Δs en Δt bepalen
en door elkaar delen.

METHODE: HLT -> ALT

3 focusleerlingen

Methode

wis: $9\frac{1}{2}$
...
...

wis: 7
...
...

wis: 5
...
...



Lln C

Lln B

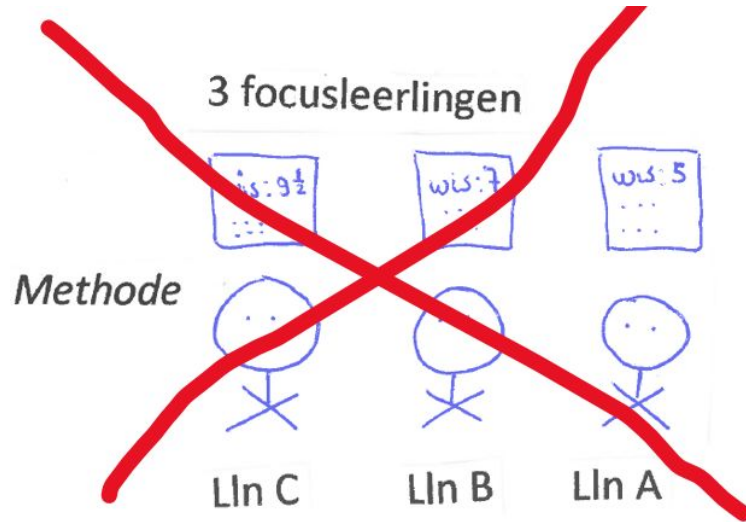
Lln A

OPBRENGSTEN

CONCLUSIES

- De veelvoorkomende problemen blijken (een beetje) te verminderen
- Toepassingen en contexten dragen bij aan een beter begrip van de afgeleide.
- Het expliciet maken van verschillen en overeenkomsten van de afgeleide bij wiskunde en natuurkunde draagt zinvol bij aan begrip van de afgeleide.

DISCUSSIE



Vraag: hoe kun je de drie focusleerlingen zo representatief mogelijk kiezen voor je onderzoek?