

VAKD2, Educatief Ontwerponderzoek

Jeroen Maes

3021068

Begeleider: Monica Wijers

Titel:

Shift-problem: vergelijkingen oplossen

Inhoud:

□:	Abstract	2
I:	Introductie	3
II:	Theorie	4
III:	Leerprobleem en onderzoeksvraag	7
IV:	Shift-problem: vergelijkingen oplossen en HLT	8
V:	Evaluatiemethode	10
VI:	Resultaten, conclusie en discussie	12
VII:	Visie	15
VIII:	Reflectie op het leerproces	16
IX:	Literatuurlijst	17

□: Abstract

Als gevolg van de heersende prestatiecultuur op het Goois lyceum hanteren veel leerlingen bij wiskunde een weten-dat (in tegenstelling tot weten-waarom) aanpak, waarbij voorgeschreven stappenplannen uit het hoofd geleerd worden. Een probleem hierbij is dat het geleerde slecht beklijft. In klas 4 vwo wiskunde B bleek uit vooronderzoek dat leerlingen deze aanpak hanteerden bij het oplossen van vergelijkingen. Veelvoorkomende problemen waar zij tegen aanliepen bij het oplossen van vergelijkingen als gevolg van deze weten-dat aanpak werden veroorzaakt door *procesdenken*, *visuele kenmerken met een sterke signaalfunctie en gebrek aan symbol sense*. In mijn onderzoek wordt dit leerprobleem gedeeltelijk opgelost door de leerlingen in een *shift-problem-lesson* te laten werken aan een door mij ontworpen *shift-problem*. Dit shift-problem heeft als doel de veelvoorkomende problemen te verminderen en de symbol sense van leerlingen te ontwikkelen. Daarmee wordt aangesloten op de onderzoeksvraag: *in hoeverre verminderen de veelvoorkomende problemen die leerlingen hebben met het oplossen van vergelijkingen tijdens en na het werken aan het shift-problem?* Aan dit onderzoek nemen drie lesobservatoren, waaronder ikzelf, en drie focusleerlingen deel, die beogen klas 4 vwo wiskunde B goed te representeren. De ingezette middelen voor dataverzameling zijn uitwerkbijlages, interviews, aantekeningen en uitwerkingen van een formatieve toets door de focusleerlingen. De data worden geanalyseerd door een hypothetisch en actueel leertraject te vergelijken. Uit het onderzoek komt naar voren dat de veelvoorkomende problemen van de focusleerlingen die expliciet aandacht krijgen gedurende het hele shift-problem, in dit geval procesdenken en het altijd uit willen werken van haakjes, op lange termijn verminderen.

I: **Introductie**

Op het Goois lyceum heerst een prestatiecultuur. Dit hangt mogelijk samen met het feit dat leerlingen op het Goois lyceum veelal uit Bussum, Naarden of Blaricum komen. In deze plaatsen zijn veel ouders hoogopgeleid. Mogelijk verwachten deze ouders dat hun kinderen ook een hoog opleidingsniveau zullen gaan genieten. Om tot hoger vervolgonderwijs te worden toegelaten is de hoogte van de behaalde cijfers op de middelbare school van belang. Leerlingen en hun ouders hechten waarschijnlijk mede hierdoor veel waarde aan het behalen van hoge cijfers.

Dit heeft tot gevolg dat veel leerlingen stappenplannen uit het hoofd leren bij wiskunde opgaven (weten-dat), in plaats van daadwerkelijk begrip te hebben van wat er `achter' de opgave schuil gaat (weten-waarom, weten-hoe en weten-over-weten). De leerlingen ervaren dit als een efficiënte manier om met zo min mogelijk inspanning tot zo hoog mogelijke cijfers te komen.

Voor het halen van een voldoende cijfer voor een toets die op korte termijn plaatsvindt kan deze weten-dat strategie soms inderdaad werken. Het enkel uit het hoofd leren van voorgeschreven stappenplannen heeft echter een keerzijde. Op lange termijn blijken veel leerlingen te vergeten wat ze op deze manier geleerd hebben. Kennis in het langetermijngeheugen is namelijk alleen toegankelijk als die geordend is in *cognitieve schema's*. Dit zijn "mentale structuren, die we ons kunnen voorstellen als netwerken van knooppunten (feiten, concepten, procedures, beelden) die onderling verbonden zijn door relaties ertussen" (Drijvers et al., 2018, pp. 26). Voor het opbouwen van een dergelijk cognitief schema blijkt inzicht in en begrip van het geleerde (weten-waarom, weten-hoe en weten-over-weten) essentieel te zijn.

Deze weten-dat cultuur wordt extra kracht bijgezet door het gebruik van de methode Getal en Ruimte (Dijkhuis, 2015), waar de leerlingen vaak stap-voor-stap procedures en uitgewerkte voorbeelden krijgen aangeboden.

Een onderwerp binnen de wiskunde waar ik recentelijk heb ondervonden dat leerlingen deze weten-dat aanpak hanteren, zonder daadwerkelijk betekenis te kunnen geven aan wat ze aan het doen zijn, is het oplossen van vergelijkingen. Een concreet voorbeeld waaruit dit bleek was dat de vergelijking $x^2(2x+1) = 3$ door een aantal leerlingen werd opgelost door te stellen dat $x = 3$ of $2x+1 = 3$. De leerlingen zagen in dit vooronderzoek niet in dat deze gevolgtrekking alleen maar opgaat indien rechts van het gelijkheidsteken nul staat. Het kunnen oplossen van vergelijkingen is voor vwo wiskunde B leerlingen een vereiste vaardigheid en wordt gespecificeerd in subdomein B5 van het examenprogramma (Slo, 2019, pp. 13).

II: Theorie

In deze sectie zal de relevante theorie voor dit onderzoek worden geïntroduceerd. Daarnaast ga ik nog wat specifieker in op het door mij eerder genoemde vooronderzoek.

Problemen en misvattingen bij het oplossen van vergelijkingen:

Een aantal oorzaken van problemen bij het oplossen van vergelijkingen zijn (Drijvers et al., 2018):

- *Procesdenken*. Leerlingen beschouwen bijvoorbeeld de expressie in het linkerlid van de vergelijking $5 \cdot (2x+1) = 3$ als een recept of actieplan: 'je neemt x , doet dat keer 2, telt er 1 bij op, en dan weer keer 5'. "Zo'n kijk op expressies kan het vinden van een oplossing in de weg staan, omdat het stuk tussen de haakjes dan niet zo snel als een geheel wordt beschouwd" (Drijvers et al., 2018, pp. 59). Deze dualiteit *proces-object* speelt bij het oplossen van vergelijkingen een belangrijke rol.
- *Visuele kenmerken met een sterke signaalfunctie*. Een aantal visuele kenmerken van expressies trekt sterk de aandacht en nodigt uit tot actie. Voorbeelden hiervan zijn de haakjes om $2x+1$ in de vergelijking $5 \cdot (2x+1) = 3$ die er als het ware om vragen uitgewerkt te worden en worteltekens in sommige vergelijkingen die er om 'schreeuwen' gekwadraterd te worden.
- *Gebrek aan overzicht van het beschikbare repertoire aan technieken en aan flexibiliteit om dit in te zetten*. "Leerlingen zijn soms onvoldoende in staat afstand te nemen van het probleem om te bepalen welke strategie in de gegeven situatie het beste kan worden toegepast" (Drijvers et al., 2018, pp. 60). Met het kiezen van de juiste oplossingsstrategie ontwikkelen leerlingen wendbaarheid, waarop ze kunnen terugvallen als de standaardalgoritmen niet bruikbaar zijn.

De laatst genoemde oorzaak komt voort uit een weten-dat strategie van leerlingen, waarbij voorgeschreven stappenplannen uit het hoofd worden geleerd. Dit zorgt er immers voor dat het beschikbare repertoire aan technieken en de wendbaarheid beperkt blijft.

Deze laatst genoemde oorzaak is ook herkenbaar bij het reeds onder I genoemde vooronderzoek. Ik liet de leerlingen in mijn 4 vwo wiskunde B klas op 20-9-2019 de vergelijking $2x^2 + x = 3$ oplossen, zonder dat zij gebruik mochten maken van de abc-formule. Meerdere leerlingen gingen de mist in door $2x^2 + x$ te ontbinden in factoren als $x \cdot (2x+1)$ en vervolgens te stellen dat $x = 3$ of $2x + 1 = 3$. Daarnaast werd soms niet correct ontbonden in factoren nadat de vergelijking tot de vorm $2x^2 + x - 3 = 0$ was herschreven. Hoofdoorzaak hiervan was dat niet werd ingezien dat het handig is linker- en rechterlid eerst door 2 te delen, alvorens tot ontbinding in factoren over te gaan. Ook de leerlingen die wel inzagen hoe ze de vergelijking tot $x^2 + 0.5x - 1.5 = 0$ konden omschrijven, waren niet altijd in staat deze expressie correct te ontbinden in factoren. Mogelijk zijn ze niet gewend aan breuken bij het ontbinden van een expressie in factoren. Deze door leerlingen gemaakte fouten laten zien dat de leerlingen niet voldoende *overzicht* hebben van het beschikbare repertoire aan technieken. Ontbinden in factoren is namelijk alleen maar zinvol bij het verdere

oplossingsproces zodra rechts van het gelijkheidsteken nul staat. Daarnaast zijn de leerlingen niet altijd *flexibel* genoeg om een ontbinding in factoren te herkennen zodra de coëfficiënt voor x^2 ongelijk is aan 1 of als er breuken voorkomen in een expressie.

Cognitieve schema's bij het oplossen van vergelijkingen:

Om kennis uit het langetermijngeheugen over het oplossen van vergelijkingen toegankelijk te maken moet dit dus geordend zijn in een samenhangend, cognitief schema. Wat is nodig om zo'n cognitief schema op te bouwen, zodanig dat de hiervoor besproken problemen bij het oplossen van vergelijkingen niet optreden?

Drijvers (2018) geeft aan dat zo'n cognitief schema voor het oplossen van vergelijkingen de samenkomst en onderlinge versterking is van onder andere de volgende aspecten:

- De dualiteit proces-object: een expressie moet niet alleen als procesbeschrijving, maar ook als algebraïsch object worden beschouwd.
- De visuele kenmerken van expressies: in sommige gevallen is het verstandig worteltekens te kwadrateren of haakjes uit te werken, maar in andere gevallen moet de neiging om tot actie over te gaan bij deze in het oog springende elementen van expressies worden onderdrukt.
- Algebraïsche basisvaardigheden en *symbol sense*: naast het kunnen uitvoeren van voorgeschreven stappenplannen of standaardprocedures (de algebraïsche basisvaardigheden of het weten-dat van de algebra), moeten leerlingen ook strategieën kunnen kiezen, algebraïsche vaardigheden kunnen toepassen, visueel verleidelijke stappen kunnen weerstaan en kunnen redeneren met algebraïsche verbanden (het weten-hoe en weten-waarom van de algebra). Voor dit laatste wordt in de internationale vakliteratuur het begrip *symbol sense* gebruikt. Daar waar het bij basisvaardigheden om procedureel werken, lokaal kijken en algebraïsch rekenen gaat, gaat het bij *symbol sense* om strategisch werken, globaal kijken en algebraïsch redeneren. Basisvaardigheden en *symbol sense* hebben elkaar nodig en vullen elkaar aan. Beide algebraïsche vaardigheden zijn ook vereisten voor vwo wiskunde B leerlingen, zoals blijkt uit het examencurriculum (Slo, 2019, pp. 44). In het curriculum worden ze *specifieke* respectievelijk *algemene* algebraïsche vaardigheden genoemd.

De beschrijving van *symbol sense* maakt duidelijk dat hierbij ook de proces-object dualiteit en de visuele kenmerken van expressies een rol spelen. Dit betekent dus ook dat de eerder genoemde drie oorzaken van problemen bij het oplossen van vergelijkingen niet los van elkaar kunnen worden gezien.

Shift-problem-lessons:

Een goede, realistische aanpak die bijdraagt aan het opbouwen van een dergelijk cognitief schema bij leerlingen is een *shift-problem-lesson* (Palha, 2013). De drijfveer achter shift-problem-lessons is: "In order to bridge the gap between the ideal learning process found in the literature and regular classroom practices we developed shift-problem-lessons. Shift-problem lessons are intended to be feasible for regular

teachers in regular classrooms and to stimulate students in their mathematical problem solving activity and reflection” (Palha, 2013, pp. 130).

De kern van deze aanpak bestaat uit het vervangen van een deel van de lessen uit de methode (het schoolboek) door probleemgericht samenwerken in kleine heterogene groepen. Hierbij worden zoveel mogelijk (aangepaste) opgaven uit het leerboek gebruikt. Het samenwerkend leren geschied hierbij op basis van het procesmodel (Dekker & Elshout-Mohr, 1998, in Palha, 2013). Dit houdt in “dat de teksten van de opgaven verschillen van die in het leerboek, aangezien de aangepaste opgaven niet de directe toepassingen zijn van recent geleerde theorie en niet worden voorafgegaan door uitgewerkte opgaven, noch ingebed worden in stap-voor-stap procedures” (Palha, 2013, pp. 210). De hierboven beschreven interventie heet shift-problem lesson. Deze shift-problem-lessons bouwen voort op theoretische constructen die compatibel zijn met een sociaal-constructivistisch perspectief op leren, te weten: problem-solving activiteiten, reflectieve discours, en samenwerkend leren en redeneren.

Het zojuist beschreven type opgaven (*shift-problems*) draagt bij aan *symbol sense*, en daaraan verwant ook aan de juiste omgang met de visuele kenmerken van expressies en de dualiteit proces-object. Dat deze shift-problems niet worden voorafgegaan door uitgewerkte opgaven of worden ingebed in stap-voor-stap procedures, zorgt er namelijk voor dat er veel meer een beroep op het strategisch werken, globaal kijken en algebraïsch redeneren van de leerling wordt gedaan. De leerlingen moeten flexibel zijn en een goed overzicht hebben van het beschikbare repertoire aan technieken.

Het onderzoek van Palha wijst uit dat de shift-problem-lessons in ieder geval bij het thema integraalrekening potentieel hebben (Palha, 2013, pp. 150).

III: Leerprobleem en onderzoeksvraag

In deze sectie zal ik eerst het leerprobleem introduceren. Om tot een gedeeltelijke oplossing van het leerprobleem te komen formuleer ik vervolgens de onderzoeksvraag.

Het leerprobleem:

Het leerprobleem waar mijn onderzoek zich op richt zijn de problemen waar leerlingen bij het oplossen van vergelijkingen tegenaan lopen als gevolg van een weten-dat aanpak. Hierbij beperkt ik me tot de problemen die worden veroorzaakt door *procesdenken*, *visuele kenmerken met een sterke signaalfunctie*, en *gebrek aan overzicht van het beschikbare repertoire aan technieken en aan flexibiliteit om dit in te zetten* (ofwel: gebrek aan *symbol sense*). Zoals eerder opgemerkt kunnen deze oorzaken niet los van elkaar worden gezien. Ik noem deze problemen vanaf hier veelvoorkomende problemen (met het oplossen van vergelijkingen).

De onderzoeksvraag:

Ik wil bovengenoemd leerprobleem in mijn 4 vwo wiskunde B klas gedeeltelijk oplossen door de leerlingen in een shift-problem-lesson aan een shift-problem te laten werken. Dit shift problem zou bij moeten dragen aan een samenhangend cognitief schema voor het oplossen van vergelijkingen, zodat de veelvoorkomende problemen met het oplossen van vergelijkingen minder op zullen treden.

Dit brengt me tot de volgende **onderzoeksvraag**:

In hoeverre verminderen de veelvoorkomende problemen die leerlingen hebben met het oplossen van vergelijkingen tijdens en na het werken aan het shift-problem?

Het verminderen van veelvoorkomende problemen met het oplossen van vergelijkingen als gevolg van een weten-dat aanpak is een sterke indicatie dat de weten-waarom, weten-hoe en weten-over-weten mentaliteit van leerlingen verbetert. Hierdoor zal opgedane kennis dus ook beter beklijven. Mogelijk zien leerlingen (en hun ouders) hierdoor op lange termijn ook in dat juist dit bijdraagt aan het halen van hoge cijfers.

IV: Shift-problem: vergelijkingen oplossen en HLT

In deze sectie komen achtereenvolgens het door mij ontworpen shift-problem, het daaraan gekoppelde hypothetische leertraject (HLT) en de onderbouwing van het lesplan van de shift-problem-les aan de hand van het Model Didactische Analyse aan de orde.

Het shift-problem:

Het door mij ontworpen shift-problem voor het oplossen van vergelijkingen bevindt zich in bijlage I. Hierin is per onderdeel ook een onderbouwing op basis van de literatuur opgenomen. Bij het uitwerken van dit shift-problem maken de leerlingen gebruik van een door mij gemaakte uitwerkbijlage. Deze bevindt zich in bijlage II.

Het hypothetische leertraject (HLT):

Het aan mijn shift-problem gekoppelde hypothetisch leertraject (HLT) bevindt zich in bijlage III. Per onderdeel van het shift-problem specificer ik de verwachtingen die ik van de leerlingen heb bij het uitwerken van dit onderdeel. Ook de onderbouwing van deze verwachtingen is opgenomen in de bijlage. Mijn eigen uitwerkingen van het shift-problem, die hebben bijgedragen aan de verwachtingen die ik van de leerlingen heb, bevinden zich in bijlage IV.

De shift-problem-les:

Het lesplanformulier van de shift-problem-les bevindt zich in bijlage V. Hierin worden ook de lesactiviteiten verantwoord. Deze les is ingericht volgens het didactisch analysemodel, zoals beschreven in paragraaf 2.1.3 van het boek 'handboek voor leraren' (Geerts, 2016, pp. 74-75). In dit kader worden na elkaar de beginsituatie van de leerlingen, de leerdoelen, de activiteiten en de bijdrage van de activiteiten aan het behalen van de leerdoelen, en de vaststelling van de leeropbrengst van de les besproken.

De beginsituatie van de leerlingen:

Klas 4 vwo wiskunde B bestaat uit de 23 leerlingen. De leerlingen hebben kennis van een divers scala aan technieken voor het oplossen van verschillende typen vergelijkingen, zoals geleerd in het hoofdstuk vergelijkingen en herleidingen uit Getal en Ruimte (Dijkhuis, 2015). Om wiskunde B te kunnen volgen in klas 4 vwo is hier in klas 3 vwo voor gekozen, onder voorwaarde dat het eindgemiddelde 6,5 of hoger is. Veel van deze leerlingen gaven in een enquête afgenomen in de eerste les van dit schooljaar aan dat ze wiskunde leuk vinden. Een aantal van de leerlingen heeft echter in de eerste plaats voor het vak gekozen, omdat ze verwachten hierdoor meer

kans op een goede baan te krijgen. Het betreft hier derhalve een gemotiveerde, getalenteerde klas, waar leerlingen zich van tijd tot tijd nog te veel lijken te beroepen op het 'stampen' van stappenplannen. Dit laatste kan het gevolg zijn van prestatiedruk en werd gesuggereerd door het vooronderzoek.

De (leer)doelen:

De leerdoelen worden opgesplitst in doelen die relevant zijn met betrekking tot de inhoud van deze les (L), de onderzoeksvraag (OV) en het sociaal-constructivistisch perspectief op leren (SCL). De evaluatie gedurende deze shift-problem-lesson zal zich richten op de leerdoelen die betrekking hebben op de inhoud van deze les (L) en het sociaal-constructivistisch perspectief op leren (SCL). De evaluatie van het leerdoel dat betrekking heeft op de onderzoeksvraag (OV) zal in de volgende sectie worden besproken.

De intentie is dat leerlingen aan het einde van de les een beter overzicht van verschillende typen vergelijkingen en daarbij passende oplossingsmethoden hebben (L).

Met oog op de onderzoeksvraag is het belangrijkste doel van de shift-problem-lesson toetsen in hoeverre de veelvoorkomende problemen die leerlingen hebben met oplossen van vergelijkingen verminderen tijdens het werken aan het shift-problem (OV).

Tot slot is met oog op het sociaal-constructivistisch perspectief op leren dat volgens de theorie naar voren komt in een shift-problem-lesson het interessant te kijken naar in hoeverre het werken in groepsverband aan onderdeel g van het shift-problem leerlingen actief aan het werk krijgt (SCL).

Activiteiten en bijdrage activiteiten aan het behalen van de leerdoelen:

Zie bijlage V voor een verantwoording van de lesactiviteiten.

Vaststelling leeropbrengst:

Hoe de leeropbrengst in deze les wordt vastgesteld is toegelicht in de kolom 'evaluatie van de leeropbrengst' van het lesplan. In deze (tussentijdse) evaluaties van de leeropbrengst en het verdere lesplan spelen de zes sleutelbegrippen van effectief leren (Ebbens, 2015, pp. 14-24) een grote rol. Wanneer van toepassing, zijn deze zes sleutelbegrippen ook cursief tussen haakjes in het lesplan vermeld. Tijdens het werken aan het shift-problem maak ik bijvoorbeeld het leren van de leerlingen zichtbaar door rond te lopen en vragen te stellen.

V: Evaluatiemethode

In deze sectie komen achtereenvolgens de deelnemers aan het onderzoek, de dataverzamelingsprocedure en de manier waarop de data geanalyseerd worden aan bod.

Deelnemers:

De deelnemers aan dit onderzoek zijn drie lesobservatoren en drie focusleerlingen uit klas 4 vwo wiskunde B. De lesobservatoren zijn ikzelf, mijn stagebegeleider Jacoliene van Wijk en wiskunde didacticus Monica Wijers. De focusleerlingen A, B, en C zijn geselecteerd op basis van hun behaalde cijfers voor SE 1. Leerling A is een leerling die een laag cijfer heeft behaald voor SE 1. Leerling B heeft gemiddeld gepresteerd. Tot slot is leerling C een leerling die een hoog cijfer heeft behaald op SE 1. Kijkend naar de onderzoeksvraag, het doel en de omvang van het shift-probleem en de klas, is het in detail analyseren van de shift-problemen van alle leerlingen moeilijk haalbaar. Er is daarom gefocust op drie leerlingen die de hele klas zo goed mogelijk representeren wanneer gekeken wordt naar wiskundig begrip.

Dataverzamelingsprocedure:

De middelen die ingezet zijn voor het verzamelen van data zijn de uitwerkbijlages van de drie focusleerlingen, de interviews met de drie focusleerlingen, aantekeningen van de wiskundige activiteiten van focusleerlingen B en C door respectievelijk Jacoliene van Wijk en Monica Wijers en de uitwerkingen van een shift formatieve toets door de drie focusleerlingen.

Uitwerkbijlages:

De uitgewerkte uitwerkbijlages van de drie focusleerlingen bevinden zich in bijlage VI.

Interviews:

Na de shift-probleem-les vonden interviews met de drie focusleerlingen plaats. Notities hiervan bevinden zich in bijlage VII. Tijdens deze interviews vroeg ik de focusleerlingen bij de verschillende onderdelen van het shift-probleem wat ze gedaan hebben en waarom. Op deze manier stimuleerde ik ze hardop na te denken over hun oorspronkelijke uitwerkingen en kreeg ik meer inzicht in hun denkprocessen. Op basis van hun antwoorden stelde ik specifiekere vragen om zo meer inzicht te krijgen in procesdenken, hun omgang met de visuele kenmerken van expressies en *symbol sense*. De interviews hadden dus een verdiepende functie ten opzichte van de uitwerkbijlages. Kijkend naar de onderzoeksvraag en het doel van het shift-probleem,

i.e. meer inzicht krijgen in veelgemaakte fouten met het oplossen van vergelijkingen, lijken schriftelijke uitwerkingen alleen inderdaad niet voldoende gedetailleerde informatie te kunnen bieden en geven verdiepende interviews waarschijnlijk nuttige aanvullende informatie. De focus op slechts drie leerlingen uit de 4 vwo wiskunde B klas maakt dit ook haalbaar.

Aantekeningen:

De aantekeningen hebben een ondersteunende functie ten opzichte van de uitwerkbijlages en de interviews. Ze worden aangetroffen in bijlage VIII. De wiskundige activiteiten van focusleerling A heb ik zelf waargenomen tijdens de shift-problem-lesson. Hier zijn geen aantekeningen van beschikbaar.

Shift formatieve toets:

In de onderzoeksvraag wordt gevraagd in hoeverre veelvoorkomende problemen verminderen tijdens *en na* het werken aan het shift-problem. Om na te gaan in hoeverre eventueel verkregen inzichten tijdens het werken aan het shift-problem bekijken bij de leerlingen heb ik circa vier weken na het werken aan het shift-problem de leerlingen een door mij ontwikkelde shift formatieve toets laten maken over het oplossen van vergelijkingen, waarin naast algebraïsche basisvaardigheden wederom *symbol sense* een belangrijke rol speelt. Deze bevindt zich in bijlage IX. De uitwerkingen van de shift formatieve toets door de drie focusleerlingen zijn opgenomen in bijlage X.

Analyse:

De tabel aan de hand waarvan de data geanalyseerd zijn bevindt zich in bijlage XI. In deze bijlage is ook een toelichting op de tabel opgenomen.

VI: Resultaten, conclusies en discussie

In deze sectie komen achtereenvolgens de resultaten van het onderzoek, de daar uit volgende conclusies inclusief de beantwoording van de onderzoeksvraag, en een kritische discussie over de waarde van het shift-problem en de bijbehorende shift-problem-lesson aan de orde.

Resultaten:

Een overzicht van de verzamelde data (i.e. de resultaten) bevindt zich in bijlage XII.

Conclusies:

Bovengenoemd resultatenoverzicht leidt tot een aantal conclusies. Op basis van deze conclusies wordt de onderzoeksvraag beantwoord. Vervolgens wordt geëvalueerd op de (leer)doelen van de shift-problem-lesson.

Conclusies:

Het overzicht in bijlage XII leidt tot de volgende conclusies:

- Veelvoorkomende problemen die gelijk blijven of verminderen bij de (focus)leerlingen tijdens en na het werken aan het shift-problem zijn *het altijd uit willen werken van haakjes en procesdenken* (zie kolom `inductief' voor alle focusleerlingen). Veelvoorkomende problemen die niet verminderen tijdens en na het werken aan het shift-problem zijn *het altijd willen kwadrateren van wortels* (zie kolom `inductief' voor alle focusleerlingen). Kijkend naar de opbouw van het shift-problem (bijlage I) is dit een indicatie dat de veelvoorkomende problemen waarop geanticipeerd is in de onderdelen a-f in het shift-problem (hier: haakjes altijd uit willen werken en procesdenken) inderdaad verminderen, terwijl problemen waarop niet geanticipeerd is in de onderdelen a-f (hier: wortels altijd willen kwadrateren) niet verminderen.
- De (focus)leerlingen hebben moeite met het maken van schetsen (zonder gebruik te kunnen maken van hun Grafische Rekenmachine) (zie kolom `inductief' voor alle focusleerlingen), wat aansluit bij Kop et al. (2017).
- De (focus)leerlingen hebben moeite met het onder woorden brengen van hun gedachtegang en/of reflectieproces (zie kolom `inductief' voor focusleerlingen A en C).

Beantwoording onderzoeksvraag:

Het antwoord op de onderzoeksvraag is dat de veelvoorkomende problemen van de (focus)leerlingen die expliciet aandacht krijgen gedurende het hele shift-problem

(onderdelen a-g) verminderen (zowel tijdens het werken eraan als een maand later). In dit shift-probleem zijn dat de problemen als gevolg van het in II besproken *procesdenken* en het altijd willen uitwerken van haakjes als *visueel kenmerk met een sterke signaalfunctie*.

Evaluatie shift-problem-lesson:

Dat het leerdoel met betrekking tot de inhoud van de shift-problem-lesson (L) beschreven in sectie IV is behaald blijkt uit het resultatenoverzicht (bijlage XII), waarin naar voren komt dat bij onderdeel g van het shift-probleem het overzicht van verschillende typen vergelijkingen en daarbij passende oplossingsmethoden is verbeterd bij de focusleerlingen. Het overzicht is namelijk tenminste uitgebreid met vergelijkingen met een gemeenschappelijke factor aan beide kanten. Kijkend naar de uitwerkbijlages van de overige leerlingen uit klas 4 vwo wiskunde B blijft deze conclusie gerechtvaardigd.

Dat het (leer)doel met betrekking tot de onderzoeksvraag (OV) beschreven in sectie IV is behaald blijkt uit de beantwoording van de onderzoeksvraag.

Dat leerlingen actief aan het werk waren in groepsverband (SCL) blijkt uit de creatieve vondsten bij onderdeel g in de uitwerkbijlages en de lesobservaties door Jacoliene van Wijk, Monica Wijers en mezelf.

Discussie:

Kijkend naar het resultatenoverzicht (bijlage XII) valt op dat zowel focusleerling A als focusleerling C bij het beantwoorden van onderdeel b geen gebruik heeft gemaakt van onderdeel a. Het is daarom interessant te onderzoeken of het omwisselen van de onderdelen a en b in het shift-probleem de samenhang tussen deze onderdelen verduidelijkt.

Ook valt in dit overzicht op dat de focusleerlingen bij onderdeel e niet of nauwelijks voldoen aan de verwachtingen geformuleerd in het HLT. Het onderdeel lijkt dan ook niet of nauwelijks bij te dragen aan het leerrendement van het shift-probleem. Om de lengte van het shift-probleem in te korten kan het in een toekomstige versie weggelaten worden.

Daarnaast is het interessant te kijken hoe onderdelen die anticiperen op het niet hoeven kwadrateren van een wortel in dit of een alternatief shift-probleem verwerkt kunnen worden, zodat ook onderzocht kan worden of dit veelvoorkomend probleem daardoor verminderd.

Verder valt in het overzicht op dat problemen die bij de focusleerlingen optreden bij het werken aan onderdeel g, zoals wortels kwadrateren en het niet herkennen van substitutie, ook weer optreden in opgave 9 op de formatieve toets. Dit wekt de indruk dat in een toekomstige shift-problem-lesson beter op het shift-probleem geëvalueerd kan worden met de leerlingen, zodat 'fouten' niet herhaald optreden.

Zoals in sectie II uitgelegd gaat het verminderd optreden van veelvoorkomende problemen hand in hand met de ontwikkeling van weten-waarom en een rijk cognitief schema voor het oplossen van vergelijkingen. Wat met oog hierop erg opvalt is dat focusleerling C een gemiddeld wiskunde cijfer heeft dat 2,5 punt hoger ligt dan dat van focusleerling B, terwijl de *symbol sense* van focusleerling C op basis van het overzicht niet beter lijkt te zijn: beide denken in termen van objecten en leggen verband tussen de onderdelen, maar willen anderzijds ook wortels steeds wegwerken. Dit roept de interessante vraag op in hoeverre er verband is tussen behaalde cijfers voor conventionele wiskunde toetsen (op het Goois lyceum) en het weten-waarom van de leerlingen.

Vermoedelijk een goede manier om *symbol sense* bij leerlingen aan te sterken is ze te laten schakelen tussen verschillende representaties van wiskundige begrippen. In dit kader is het interessant te kijken naar wat de manier is waarop in natuurkundige problemen (of in een ander vakgebied) wordt gekeken naar het oplossen van vergelijkingen. Dergelijke verschillende representaties kunnen in een shift-probleem worden verwerkt om te onderzoeken wat de invloed hiervan is op de ontwikkeling van *symbol sense*.

VII: Visie

In deze sectie beschrijf ik mijn visie op de rol als vakdidactisch ontwerper en onderzoeker.

Dit schooljaar wil ik nog een aantal keer een shift-problem ontwerpen en gebruiken in mijn 4 vwo wiskunde B klas. Voortkomend uit de discussie, zijn aandachtspunten daarbij onderdelen opnemen in het shift-problem die inspelen op het niet hoeven kwadrateren van wortels en een goede gezamenlijke evaluatie met de klas tijdens en na het werken aan het shift-problem.

Daarnaast vind ik het interessant shift-lessenseries te ontwikkelen waarbij de ontwikkeling van het weten-waarom van de leerlingen voorop staat. Met oog op mijn gecombineerde wiskunde en natuurkunde achtergrond vind ik het met name interessant leerlingen te laten schakelen tussen verschillende representaties van wiskundige begrippen in een wiskunde en natuurkunde context. Op deze manier krijg ik ook meer inzicht in de onderlinge samenhang tussen de lessen die worden gegeven bij wiskunde en natuurkunde.

Op de lange termijn ambieer ik als docent een combinatie van onderwijs en onderzoek. Het zou me bijvoorbeeld bijzonder boeien een postdoc naast mijn baan te doen waarin ik bijvoorbeeld het verband tussen behaalde cijfers voor conventionele wiskunde toetsen, zoals het centraal eindexamen, en het weten-waarom van leerlingen onderzoek.

VIII: Reflectie op het leerproces

In deze sectie reflecteer ik op de uitvoering van dit ontwerponderzoek.

Tijdens de shift-problem-lesson werd geconstateerd dat het shift-problem lang was. In de discussie is reeds besproken dat onderdeel e in een toekomstige versie weggelaten kan worden. Ook kan enkel op onderdelen a-c of d-f worden gefocust in verschillende versies van het shift-problem in plaats van op alle zes de onderdelen. Ook werd geconstateerd dat de evaluatie op het shift-problem tijdens de shift-problem-lesson verbeterd kan worden. Ik had bijvoorbeeld de leerlingen in groepjes kunnen laten overleggen over de opbrengsten van a-e, nadat ze hier individueel aan gewerkt hadden. Ook had ik tijdens de nabespreking van a-f de wisselwerking tussen de groepjes onderling meer kunnen stimuleren.

Als feedback op de posterpresentatie (bijlage XIII) kreeg ik terug dat de voorbeelden van veelvoorkomende problemen iets duidelijker toegelicht hadden mogen worden. Ook werd aangegeven dat in het shift-problem de connectie leggen met andere vakgebieden, zoals de natuurkunde, interessant zou kunnen zijn. Dit punt is ook opgenomen in de discussie.

Met veel ambitie en enthousiasme heb ik dit ontwerponderzoek uitgevoerd en het verslag geschreven. Ik wil Monica Wijers en Jacoliene van Wijk bedanken voor hun bijdrage aan de verzamelde data en bezielde begeleiding tijdens het proces. Zoals ook naar voren komt in mijn visie ben ik als bevoegd docent van plan voort te bouwen op dit onderzoek, waaraan ook zij hebben bijgedragen.

IX: Literatuurlijst

- Dijkhuis, J.H. et al. (2015). *Getal en Ruimte. Vwo B deel 3*. Groningen: Noordhoff Uitgevers.
- Drijvers, P. (2012). Wat bedoelen ze toch met... symbol sense? *Nieuwe Wiskrant*, 31(3), 39-42.
- Drijvers, P., van Streun, A., & Zwaneveld, B. (Red.) (2018). *Handboek wiskundedidactiek*. Amsterdam: Epsilon Uitgaven.
- Ebbens, S., & Ettekoen, K. (2015). *Effectief leren* (4^e druk). Houten: Noordhoff Uitgevers.
- Flokstra, J.H. (2006). *Activerende werkvormen*. Enschede: Stichting leerplanontwikkeling (SLO).
- Geerts, W., & Kralingen, R. (2016). *Handboek voor Leraren* (2e druk). Bussum: Uitgeverij Coutinho.
- Kop, P. M., Janssen, F. J., Drijvers, P. H. & van Driel, J. H. (2017). Graphing formulas: Unraveling experts' recognition processes. *The Journal of Mathematical Behavior*, 45, 167–182.
- Palha, S.A.G. (2013). Shift-problem-lessons: Fostering mathematical reasoning in regular classrooms. Amsterdam: UvA-DARE (Digital Academic Repository).
- Slo. (2019, 9 mei). *Syllabus centraal examen 2018 (bij het nieuwe examenprogramma)*. Geraadpleegd op 12 januari 2020, van https://www.examenblad.nl/examenstof/syllabus-2018-wiskunde-b-vwo/2018/vwo/f=/syllabus_wiskunde_B%20_2_versie_vwo_2018_nader_vast_gesteld_3.pdf

Shift-problem: vergelijkingen oplossen

Beschouw de functie $f(x) = (x - 1)(x + 3)(x - 4)$.

- a) Schets de grafiek van $f(x)$. Doe dit zonder de Grafische Rekenmachine.
Hint: maak eerst een tabel.
- b) Los op: $f(x) = 0$.
- c) Beschrijf in woorden hoe je onderdeel b) hebt aangepakt.

Beschouw de vergelijking $(x^2 - 7x + 12)(8x - 11) = (x^2 - 7x + 12)(3x + 14)$.

- d) Stel dat je deze vergelijking op moet lossen. Wat zou je eerste stap zijn? Waarom?
- e) Beschrijf in woorden hoe je het oplossen van deze vergelijking, vanaf stap 1, verder aan zou pakken.
- f) Los de vergelijking op volgens de strategie die je bij onderdelen d) en e) beschreven hebt.

Gaat het zoals je had verwacht?

Reflecteer op de strategie die je bij onderdelen d) en e) hebt opgeschreven. Wat was hier goed aan? Wat had beter gekund?

- g) Stel dat je onderstaande 10 vergelijkingen op zou moeten lossen. Welke vergelijkingen zou je met dezelfde strategie oplossen? Wat zou daarbij je eerste stap zijn? Gebruik de tabel op de uitwerkbijlage voor je uitwerking.

1. $(5x + 4)\sqrt{x - 4} = (x - 8)\sqrt{x - 4}$

6. $4 + 5x^3 = 40$

2. $\sqrt{x + 1} + \frac{5}{\sqrt{x+1}} = 6$

7. $\frac{x+1}{\sqrt{3x}} = \sqrt{x + 1}$

3. $(x - 3)^2 - 5(x - 3) - 14 = 0$

8. $(x^2 + 1)^2 = 40$

4. $(x - 1)(x + 3)(x - 4) = 0$

9. $(6x - 5)^3 = 8$

5. $(x^2 - 6)(x + 7) = 0$

10. $(x^2 - 7x)8x = (x^2 - 7x)3x$

Onderbouwing per onderdeel op basis van de literatuur:

Onderdeel a) van het shift-problem laat leerlingen verschillende representaties van functies aan elkaar relateren. Namelijk, als algebraïsche formule, als grafiek en als tabel. Functies kunnen dieper worden onderzocht door het aan elkaar relateren van verschillende representaties (Duval, 2006, in Kop et al., 2017). Een grafiek laat karakteristieken zien, zoals symmetrie, intervallen, keerpunten, en hier belangrijk, nulpunten. "It visualizes the "story" that an algebraic formula tells." (Kop et al., 2017, pp. 167). Het vermogen te kunnen schakelen tussen representaties is belangrijk in algebra en bij 'problem solving' in het algemeen.

De vergelijking in onderdeel b) van het shift-problem zou makkelijk opgelost moeten kunnen worden met de verkregen informatie over de nulpunten bij onderdeel a). Er staat namelijk letterlijk in formule vorm (de nulpunten van f vinden) wat visueel direct inzichtelijk is met de bij onderdeel a) gemaakte grafiek.

In onderdeel c) wordt gevraagd een weer andere representatie van de vergelijking bij b) te geven. Ditmaal een beschrijving in woorden. Hierdoor wordt de strategie die een leerling bij b) heeft gekozen nogmaals overdacht.

De functie $f(x)$ heeft een visueel kenmerk met sterke signaalfunctie. Namelijk de haakjes die er als het ware om vragen uitgewerkt te worden. De onderdelen a), b) en c) samen zouden er op zijn minst voor moeten zorgen dat de leerlingen inzien dat de haakjes uitwerken in deze situatie niet de meest efficiënte weg is naar het antwoord. Zodra leerlingen er wel voor kiezen de haakjes uit te werken duidt dit hier op procesdenken en gebrekkige *symbol sense*, omdat visueel verleidelijke stappen niet kunnen worden weerstaan, de functie onvoldoende als object wordt gezien en niet globaal naar het probleem als zodanig wordt gekeken.

Onderdeel d) van het shift-problem laat leerlingen nadenken over de eerste stap die genomen kan worden bij het oplossen van de gegeven vergelijking. In Drijvers (2012, pp. 41) wordt beschreven wat manieren zijn om in de dagelijkse praktijk in de les met het onderscheid basisvaardigheid – *symbol sense* om te gaan. Hierbij noemt hij onder andere bij het oplossen van vergelijkingen leerlingen aan te laten geven wat een geschikte eerste stap zou zijn en waarom. Hiermee dwing je leerlingen globaal te kijken naar een vergelijking en zelf een geschikte strategie te kiezen.

Onderdeel e) van het shift-problem laat leerlingen verder nadenken over hun gekozen strategie. Dit stelt ze ook vroegtijdig in staat eventuele problemen bij hun gekozen strategie te signaleren.

Onderdeel f) vraagt leerlingen de bij d) en e) gekozen strategie in te zetten bij het daadwerkelijk oplossen van de gegeven vergelijking en laat de leerlingen daarnaast op hun gekozen strategie reflecteren. Dit reflecteren sluit aan op het eerder genoemde sociaal-constructivistisch perspectief op leren in shift-problem-lessons. Reflectie biedt leerlingen de mogelijkheid nogmaals hun gekozen strategie te heroverwegen, en als een gekozen strategie vastloopt, een andere invalshoek te zoeken.

De gegeven vergelijking heeft wederom een visueel kenmerk met sterke signaalfunctie. De haakjes die er als het ware om vragen uitgewerkt te worden. De onderdelen a) t/m f) samen zouden er op zijn minst voor moeten zorgen dat de leerlingen inzien dat de haakjes uitwerken in dit geval niet de meest efficiënte manier is om de vergelijking op te lossen. Idealiter zouden ze er ook voor moeten zorgen dat leerlingen op het idee komen dat de vergelijking oplossen in feite neerkomt op twee afzonderlijke vergelijkingen oplossen zodra de gemeenschappelijke factor is geïdentificeerd. Zodra leerlingen er wel voor kiezen de haakjes uit te werken duidt dit hier wederom op procesdenken en gebrekkige *symbol sense*, omdat visueel verleidelijke stappen niet kunnen worden weerstaan, de expressies tussen haakjes onvoldoende als afzonderlijke objecten worden gezien en niet globaal naar het probleem als zodanig wordt gekeken. Daarnaast zou het in dit geval ook een indicatie zijn van weinig doortastendheid bij de leerlingen in het willen oplossen van de vergelijking.

Onderdeel g) doet een beroep op het overzicht dat leerlingen hebben van hun beschikbare repertoire aan technieken voor het oplossen van vergelijkingen en aan de flexibiliteit om dit in te zetten. Volgens Drijvers (2012, pp. 41) kan aandacht voor strategieën *symbol sense* bevorderen. Hij geeft als voorbeeld leerlingen een groot aantal vergelijkingen geven om op te lossen en steeds aan te geven wat een geschikte eerste stap zou zijn en waarom. In onderdeel g) wordt niet van de leerlingen verlangd de vergelijkingen allemaal op te lossen, maar moeten ze wel bedenken welke groepen vergelijkingen met dezelfde strategie kunnen worden opgelost. Bij deze identificatie speelt *symbol sense* een belangrijke rol. Leerlingen moeten namelijk zelf een geschikte strategie kiezen en herkennen, of de vergelijking omschrijven tot deze geschikte strategie herkend wordt. Daarvoor moeten ze strategisch werken en globaal naar de vergelijkingen kijken. Bij elke groep moet vervolgens wederom een eerste geschikte stap worden geformuleerd, wat ook weer aansluit bij het globaal kijken en zelf nadenken over een geschikte strategie. De leerlingen krijgen de tabel op de uitwerkbijlage ter beschikking om de opdracht uit te werken. In deze tabel wordt ook een beroep gedaan op de creativiteit van de leerlingen, door ze onder andere zelf een naam te laten bedenken voor de geïdentificeerde strategieën. Een slecht beargumenteerde of weinig overtuigende categorisering door leerlingen bij onderdeel g) zal een indicatie zijn van gebrekkige *symbol sense*.

Uitwerkbijlage shift-problem: vergelijkingen oplossen

a)

Tabel:

Schets:

b)

$$f(x) = 0$$

c)

Aanpak bij b):

d)

Eerste stap:

Dit zou mijn eerste stap zijn, omdat:

e)

Verdere aanpak na stap 1:

f)

$$(x^2 - 7x + 12)(8x - 11) = (x^2 - 7x + 12)(3x + 14)$$

Reflectie:

Ging het zoals je had verwacht?

Sterke punten van mijn strategie:

Verbeterpunten:

g)

Oplossingsstrategie	Zelf bedachte naam voor de strategie	Bijbehorende vergelijkingnummers	Eerste stap bij oplossen
A			
B			
C			
D			
...			
...			

Hypothetisch leertraject (HLT)

Hypothetisch leertraject (HLT)	
Onderdeel van het shift problem	Verwachtingen
a	<ul style="list-style-type: none">• De leerlingen zullen niet op basis van enkel de de karakteristieken van het functievoorschrift (nulpunten, derdegraadsfunctie) tot een correcte schets komen.• De leerlingen zullen relatief veel tijd besteden aan het maken van de tabel.• Wanneer een tabel met representatieve coördinaten is gemaakt, zal het maken van de schets soepel verlopen.
b	<ul style="list-style-type: none">• De leerlingen zullen, gebruikmakend van de verkregen inzichten bij a), de vergelijking vlot oplossen door óf de afzonderlijke factoren van $f(x)$ nul te stellen óf direct de oplossingen voor x op te schrijven.• De leerlingen zullen niet of nauwelijks tot haakjes uitwerken overgaan om de vergelijking verder op te lossen.
c	<ul style="list-style-type: none">• De leerlingen zullen iets schrijven over de nulpunten aflezen uit de grafiek bij a) en/of over de afzonderlijke factoren van $f(x)$ gelijk stellen aan nul.
d	<ul style="list-style-type: none">• De leerlingen zullen als eerste stap aangeven óf de haakje uit te werken óf een gemeenschappelijke factor te identificeren/splitsen.• De leerlingen die er voor kiezen de haakjes uit te werken zullen aangeven dat je haakjes altijd eerst uitwerkt (of iets vergelijkbaars).• De leerlingen die er voor kiezen de gemeenschappelijke factor te identificeren/splitsen zullen aangeven dat dit minder werk geeft of sneller is (of iets vergelijkbaars).
e	<ul style="list-style-type: none">• De leerlingen die er voor kiezen de haakjes uit te werken zullen beschrijven hoe ze dit aanpakken en hoe ze uiteindelijk termen van dezelfde graad in x groeperen (en mogelijk verwachten dat de termen van de laagste of hoogste graad tegen elkaar 'wegvallen') (of iets vergelijkbaars).• De leerlingen die er voor kiezen de gemeenschappelijke factor te identificeren/splitsen zullen aangeven dat je twee aparte vergelijkingen krijgt die je afzonderlijk kunt oplossen (of iets vergelijkbaars).

f	<ul style="list-style-type: none"> • Bij het oplossen van de vergelijking zullen de leerlingen die de haakjes uitwerken uiteindelijk vastlopen en zullen de leerlingen die de gemeenschappelijke factor hebben geïdentificeerd de twee resulterende vergelijkingen vlot oplossen. • Bij de reflectie zullen de leerlingen die de haakjes hebben uitgewerkt beseffen dat ze ergens de mist in zijn gegaan en hun denkproces heroverwegen. Dit zal zich uiten onder 'verbeterpunten'. Zij komen vervolgens tot het inzicht dat de haakjes uitwerken hier niet de handigste strategie is. • Bij de reflectie zullen de leerlingen die de gemeenschappelijke factor hebben geïdentificeerd vooral stil staan bij de sterke punten van hun strategie. Mogelijk beseffen zij daarnaast, door het denkproces nog eens te doorlopen, dat de kwadratische vergelijking zowel met de ABC-formule als 'ontbinden in factoren' kan worden opgelost.
g	<ul style="list-style-type: none"> • De leerlingen zullen, gebruikmakend van de verkregen inzichten bij de onderdelen a), b) en c), de vergelijkingen 4 en 5, waarbij een aantal factoren vermenigvuldigd nul geeft, vlot groeperen tot een oplossingsstrategie. Ze zullen als eerste stap aangeven dat de afzonderlijke factoren gelijk moeten worden gesteld aan nul (of iets vergelijkbaars). • De leerlingen zullen, gebruikmakend van de verkregen inzichten bij d), e) en f), de vergelijkingen 1 en 10, waarbij een gemeenschappelijke factor geïdentificeerd kan worden, groeperen tot een oplossingsstrategie. Ze zullen als eerste stap aangeven dat je de gemeenschappelijke factor apart moet nemen (of iets vergelijkbaars). De leerlingen zullen naar verwachting echter niet inzien dat vergelijking 7, na herschrijven, ook met deze oplossingsstrategie kan worden opgelost en zullen hier een aparte oplossingsstrategie voor bedenken. • De leerlingen zullen, gebruikmakend van voorkennis en de verkregen inzichten bij a) t/m f) om soms de neiging direct haakjes uit te werken te onderdrukken, de vergelijkingen 2 en 3 groeperen als vergelijkingen die met de substitutie- of bordjesmethode kunnen worden opgelost. Als eerste stap zullen zij aangeven het 'bordje' te vervangen door een nieuwe variabele (of iets vergelijkbaars). • De leerlingen zullen op basis van hun voorkennis de vergelijkingen 6, 8 en 9 groeperen tot een oplossingsstrategie. Als eerste stap zullen ze aangeven dat óf x apart moet worden gezet óf alle termen zonder x naar de andere kant moeten worden gebracht (of iets vergelijkbaars).

Onderbouwing:

De bij onderdeel a) eerst geformuleerde verwachting sluit aan bij de bevindingen van Kop et al. (2017). Zij geven in hun artikel aan dat het direct kunnen relateren van formules aan grafieken iets is waar een uitgebreid kennisrepertoire op het gebied van functies voor moet zijn ontwikkeld. Dit uitgebreide kennisrepertoire is bij leerlingen nog niet opgebouwd. Het lijkt daarom niet realistisch te verwachten dat ze direct tot een correcte schets komen, op basis van de karakteristieken van het functievoorschrift alleen. De verwachting dat leerlingen relatief veel tijd besteden aan het maken van de tabel is op basis van persoonlijke ervaring gedurende mijn lessen. Met meerdere representaties van de functie tot hun beschikking (formule en tabel) verwacht ik echter dat de leerlingen wel vlot tot een correcte schets kunnen komen.

De bij onderdelen b) en c) geformuleerde verwachtingen zijn wederom op basis van de meerdere representaties van de vergelijking die de leerlingen tot op dit punt gezien hebben (vergelijking als formule, als nulpunten van de grafiek en geformuleerd in woorden). In ieder geval verwacht ik dat ze tot op dit punt voldoende globaal naar de vergelijking hebben gekeken om niet tot het uitwerken van de haakjes over te gaan.

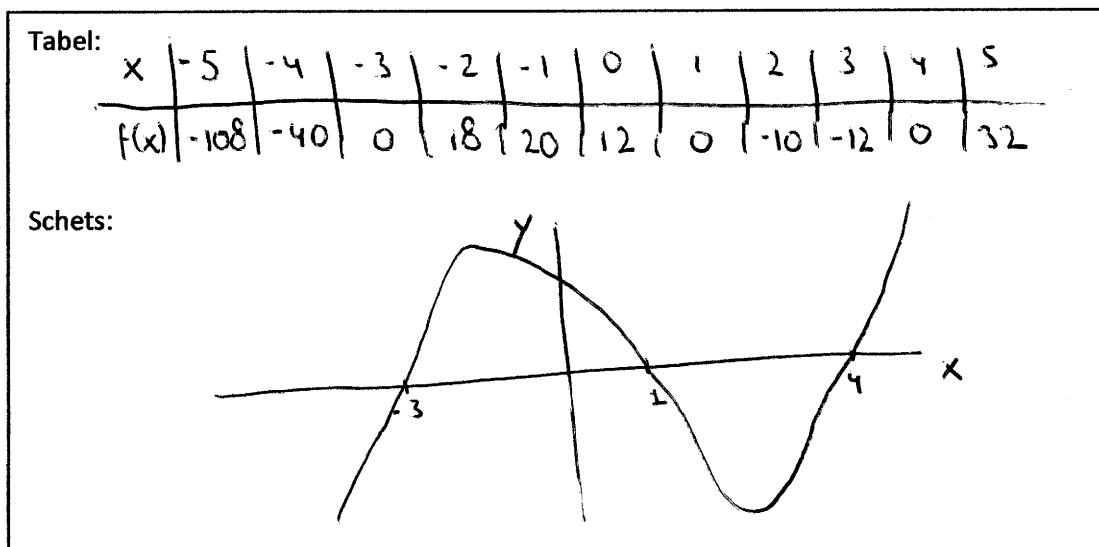
De bij onderdelen d) en e) geformuleerde verwachtingen zijn voornamelijk gebaseerd op mijn eigen uitwerkingen van het shift probleem in bijlage IV. Ik verwacht echter nog steeds dat een aantal leerlingen bij deze visueel lastiger uitziende vergelijking dan bij onderdeel b) tot het uitwerken van de haakjes over zal gaan, omdat het een visueel kenmerk met sterke signaalfunctie is. Ik verwacht persoonlijk niet dat naast deze twee manieren van uitwerken leerlingen nog andere exotische methodes gaan bedenken.

De bij onderdeel f) eerst geformuleerde verwachting is gebaseerd op de voorkennis van leerlingen in mijn 4 vwo wiskunde B klas. De overige twee verwachtingen hier zijn er op gebaseerd dat ik verwacht dat na reflectie de leerlingen tot op dit punt voldoende globaal naar de vergelijking hebben gekeken om te beseffen dat het uitwerken van de haakjes hier niet de meest efficiënte manier is om de vergelijking op te lossen. De overige beweringen/verwachtingen hier zijn speculatief en persoonlijk.

Bij onderdeel g) is in de HLT zelf duidelijk aangegeven waarop de verwachtingen op gebaseerd zijn. Ze zijn daarnaast ook gebaseerd op mijn eigen uitwerkingen van het shift probleem in bijlage IV. Dat ik verwacht dat vergelijking 7 door leerlingen als aparte oplossingsstrategie wordt gecategoriseerd hangt samen met het feit dat de vergelijking eerst moet worden herschreven voordat hij bij een andere strategie kan worden geplaatst. Het herkennen van de gemeenschappelijke wortel aan beide kanten van het gelijkheidsteken en het herschrijven doen namelijk beide een beroep op sterk ontwikkelde strategische vaardigheden en *symbol sense* van de leerlingen. Deze kwam uit het vooronderzoek niet naar voren. Ik verwacht niet dat dit na het werken aan dit *shift problem* dusdanig sterk veranderd is.

Uitwerkbijlage shift problem: vergelijkingen oplossen

a)



b)

$$f(x) = 0$$
$$(x-1)(x+3)(x-4) = 0$$
$$x = 1 \vee x = -3 \vee x = 4$$

c)

Aanpak bij b): Ik heb ~~bij b)~~ geconcludeerd dat de nulpunten van de grafiek bij a) ook de oplossingen bij b) zijn.

d)

Eerste stap: De gemeenschappelijke factor aan beide kanten bepalen
Dit zou mijn eerste stap zijn, omdat: je dan niet de haakjes hoeft uit te werken.

e)

Verdere aanpak na stap 1:

- $8x - 11$ gelijk stellen aan $3x + 14$
en $x^2 - 7x + 12$ gelijk stellen aan nul.
- de eerste vergelijking oplossen met de balansmethode en de kwadratische vergelijking met de ABC-formule.

f)

$$(x^2 - 7x + 12)(8x - 11) = (x^2 - 7x + 12)(3x + 14)$$

$$x^2 - 7x + 12 = 0 \quad \vee \quad 8x - 11 = 3x + 14$$

$$x_{\pm} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 12}}{2}$$

$$5x = 25$$

$$x = 5.$$

$$x_{\pm} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$x = 3 \quad \vee \quad x = 4$$

Reflectie:

Ging het zoals je had verwacht? Ja.

Sterke punten van mijn strategie:

- eerst gekeken naar gemeenschappelijke factoren
- opsplitsing in twee afzonderlijke vergelijkingen

Verbeterpunten:

- de kwadratische vergelijking kon ook zonder de ABC-formules worden opgelost

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$(x-3)(x-4) = 0$$

$$x = 3 \quad \vee \quad x = 4.$$

g)

Oplossingsstrategie	Zelf bedachte naam voor de strategie	Bijbehorende vergelijking-nummers	Eerste stap bij oplossen
A	gemeenschappelijke factor identificeren	1, 7, 10	De gemeenschappelijke factor aan beide kanten van de vergelijking bepalen.
B	terugrekenen (x staat op 1 plaats)	6, 8, 9	x vrij maken. (alle termen/factoren zonder x naar de 'rechterkant' brengen)
C	bordjesmethode	2, 3	'Bordje' vervangen door nieuwe variabele. zodat sta
D	factor nul methode	4, 5	De afzonderlijke factoren gelijk stellen aan nul.
...			
...			

Lesplanformulier *shift-problem-lesson*

Datum: 22-11-19	Klas: 4vwisb	Les: <i>shift-problem-lesson</i> : vergelijkingen oplossen	Hfdstk: 3: vergelijkingen en herleidingen	
<p>Beginsituatie leerlingen: De leerlingen hebben kennis van een divers scala aan technieken voor het oplossen van verschillende typen vergelijkingen. Aanname is echter dat deze kennis voornamelijk 'weten dat' van aard is.</p>		<p>Benodigde materialen:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Powerpoint presentatie - 26 * shift problem - 26 * uitwerkbijlage shift problem 		
<p>(Eventuele doelen van docent)</p> <ul style="list-style-type: none"> - Toetsing in hoeverre de veelvoorkomende problemen die leerlingen hebben met het oplossen van vergelijkingen verminderen bij het werken aan het shift problem. - Toetsing in hoeverre het werken in groepsverband aan onderdeel g van het shift problem de leerlingen actief aan het werk krijgt. 		<p>Leerdoelen voor leerlingen in deze les: Aan het einde van de les hebben de leerlingen een beter overzicht van verschillende typen vergelijkingen en daarbij passende oplossingsmethoden.</p>		
Tijd	Lesfase	Activiteit Docent	Activiteit Leerling	Evaluatie van leeropbrengst
13:30-13:40	Binnenkomst + introductie	<ul style="list-style-type: none"> - Spoorboekje doornemen en leerdoel van de les presenteren - Voorkennis activeren en instructie op het shift problem (<i>betekenis geven aan de leerstof</i>) 	<ul style="list-style-type: none"> - Tas van tafel - Structuur les en doel shift problem verwerken (<i>heldere structuur in opbouw van de leerstof</i>) - Tafels in proefwerkopstelling zetten 	
13:40-13:55	Werken aan shift problem onderdelen a-f	<ul style="list-style-type: none"> - Uitdelen shift problem 	<ul style="list-style-type: none"> - Individueel werken aan onderdelen a-f van het shift problem - Indien klaar: aan de slag met onderdeel g (<i>het juiste niveau van de leerstof</i>) 	<ul style="list-style-type: none"> - Checken op begrip door rondlopen en vragen stellen (<i>zichtbaarheid van leren</i>)
13:55-14:10	Werken aan shift problem onderdeel g	<ul style="list-style-type: none"> - Instructie op onderdeel g van het shift problem 	<ul style="list-style-type: none"> - In heterogene groepjes van 3 a 4 werken aan onderdeel g van het shift problem (<i>aandacht voor nieuwsgierigh./motiv.</i>) - Indien klaar: de vergelijkingen bij onderdeel g oplossen (<i>het juiste niveau van de leerstof</i>) 	<ul style="list-style-type: none"> - Checken op begrip door rondlopen en vragen stellen (<i>zichtbaarheid van leren</i>)

14:10-14:20	Bespreken oplossingen onderdeel g + huiswerk	<ul style="list-style-type: none"> - Leerlingen uit groepjes kiezen om tabel toe te lichten - Huiswerk toelichten 	<ul style="list-style-type: none"> - Mondeling toelichten gevonden oplossing bij onderdeel g - Shift problems inleveren! 	<ul style="list-style-type: none"> - Leerlingen toelichting laten geven op gemaakte keuzes bij tabel (toetsing leerdoel op basis van <i>individuele aanspreekbaarheid</i>)
-------------	--	---	--	---

Activiteiten *shift-problem-lesson* en bijdrage activiteiten aan het behalen van de leerdoelen:

Tijdens de binnenkomst en introductie (13:30-13:40) wordt de inhoud van de les (het spoorboekje) doorgelopen, zodat de structuur in de opbouw van de leerstof helder is voor de leerlingen. Vervolgens wordt het leerdoel van de les geïntroduceerd en wordt op basis daarvan gecheckt wat de parate kennis is van de leerlingen van verschillende typen vergelijkingen en bijbehorende oplossingsmethoden. Dit wordt gedaan aan de hand van een schema op het bord. Vervolgens wordt het doel van het shift problem aan de leerlingen uitgelegd. De bijdrage van deze lesfase aan het behalen van het leerdoel (L) is leerlingen activeren voor deelname aan de les, voorkennis activeren en betekenis geven aan de leerstof.

Tijdens het werken aan de onderdelen a t/m f van het shift problem (13:40-13:55) werken de leerlingen individueel in proefwerkopstelling. Dit omdat onderling overleg bij deze onderdelen te veel versturende invloed zal hebben op de resultaten van het onderzoek. Als een leerling bijvoorbeeld van een medeleerling hoort dat deze om goede redenen haakjes niet uitwerkt, zal deze leerling er zeker ook niet voor kiezen dit te doen. In geval leerlingen eerder klaar zijn, wordt als vorm van differentiatie leerlingen de mogelijkheid gegeven alvast met onderdeel g aan de slag te gaan.

Voordat leerlingen gaan werken aan onderdeel g van het shift problem, wordt een korte toelichting gegeven op de verwachte aanpak. Tijdens het werken aan dit onderdeel g (13:55-14:10) wordt als activerende werkvorm werken in heterogene groepjes van 3 a 4 leerlingen ingezet. Bij het werken in heterogene groepjes vind wederzijdse afhankelijkheid plaats doordat elk groepslid een deel van de informatie bezit (Ebbens, 2015, pp. 136). Groepsleden hebben elkaar nodig om alle informatie te weten te komen en moeten als 'expert' functioneren voor medegroepsleden: het moet verwoord worden. Door de hulp die leerlingen elkaar op deze manier bieden bij het categoriseren van de vergelijkingen in dit onderdeel, zal hun overzicht van verschillende typen vergelijkingen en daarbij passende oplossingsmethoden verbeteren. Deze lesfase draagt dus bij aan de leerdoelen (L en SCL) van deze les.

Tijdens het bespreken van de oplossingen van onderdeel g van het shift problem geef ik steeds één leerling per groepje de beurt om de gevonden categorisering van vergelijkingen toe te lichten. Daarbij is het ook interessant vervolgens de gegeven antwoorden met andere groepen te vergelijken, om inzicht te krijgen in waar gemeenschappelijk over gedacht wordt en waar groepjes onderling andere gedachten over hebben. De gegeven antwoorden worden schematisch op het bord weergegeven. Leerlingen worden op deze manier allemaal verantwoordelijk gesteld en kunnen individueel worden aangesproken om hun antwoorden te geven. Andere leerlingen geven hierop commentaar. Doordat op deze manier zowel de leerlingen kritisch nadenken over de hoofdvraag van de les als dat de docent inzicht krijgt in het begrip van de leerlingen met betrekking tot de hoofdvraag draagt deze activerende werkvorm effectief bij aan de leerdoelen van de les (L en SCL) (Flokstra, 2006, pp. 17).

Uitwerkbijlage shift problem: vergelijkingen oplossen

a)

Tabel:

$$\frac{x}{9}$$

Schets:

b)

$$(x-1)(x+3)(x-4)=0 \quad f(x)=0$$

$$x=1 \vee x=-3 \vee x=4$$

$$x=1$$

$$x=-3$$

$$x=4$$

c)

Aanpak bij b):

De functie staat al in de vorm van

d)

Eerste stap:

De haakjes wegwerken

Dit zou mijn eerste stap zijn, omdat:

e)

Verdere aanpak na stap 1:

alle getallen naar de linker kant van de =
zetten zodat je = 0 krijgt

f)

$$(x^2 - 7x + 12)(8x - 11) = (x^2 - 7x + 12)(3x + 14)$$
$$8x^3 - 11x^2 - 56x^2 + 77x + 96x - 132 =$$

Reflectie:

Ging het zoals je had verwacht?

Sterke punten van mijn strategie:

Verbeterpunten:

g)

Oplossingsstrategie	Zelf bedachte naam voor de strategie	Bijbehorende vergelijking-nummers	Eerste stap bij oplossen
A	Wegstrepen	1 en 10	Bijde kanten delen door iets
B	vermenigvuldigen	2 en 7	Allebei de keer iets
C	gewoon uitrekenen	3 en 6	Gewoon de vergelijking uitrekenen
D	iets keer iets = 0	4 en 5	Antwoord uit de haakjes halen
E	wortels	8 en 9	wortel er uit halen
...			

Uitwerkbijlage shift problem: vergelijkingen oplossen

a)

Tabel:

X	1	2	3	4	5	6	7	0	-1	-2	-3
Y	0	-10	-12					0	20		0

Schets:

b)

$f(x) = (x-1)(x+3)(x-4) = 0$

~~$f(x) = (x^2 - 1x + 3x - 3)(x-4) = 0$~~

~~$f(x) = x^3 - x^2 + 3x^2 - 3x - 4x^2 + x - 12x + 12 = 0$~~

~~$f(x) = x^3 - 2x^2 - 14x + 12 = 0$~~

~~$x(x^2 - 2x - 14) = 0$~~ ?

$x = 1 \quad \vee \quad x = -3 \quad \vee \quad x = 4$

c)

Aanpak bij b): ~~ik heb eerst alles uit de haakjes gehaald~~

-> Behunt het aflezen

d)

Eerste stap: ~~alles uit de haakjes halen~~

delen door $(x^2 - 7x + 12)$

Dit zou mijn eerste stap zijn, omdat: dan is de vergelijking een stuk makkelijker

e)

Verdere aanpak na stap 1: Dan zou ik alle x 'en naar de ene kant ende rest naar de ander dat zou ik dan uitbreken en dan haal ik het x cijfer voor de x weg endan heb ik resultaat :

f)

$$(x^2 - 7x + 12)(8x - 11) = (x^2 - 7x + 12)(3x + 14)$$

$$8x - 11 = 3x + 14 \quad \vee \quad x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$8x - 3x = 14 + 11 \quad \vee \quad (x - 3)(x - 4)$$

$$5x = 25 \quad \vee \quad x = 3 \quad \vee \quad x = 4$$

$$x = 5$$

$$x = 3 \vee x = 4 \vee x = 5$$

Reflectie:

Ging het zoals je had verwacht? JA

Sterke punten van mijn strategie: het werd een stuk makkelijker en zelfs te doen.

Verbeterpunten: misschien meer opschrijven.

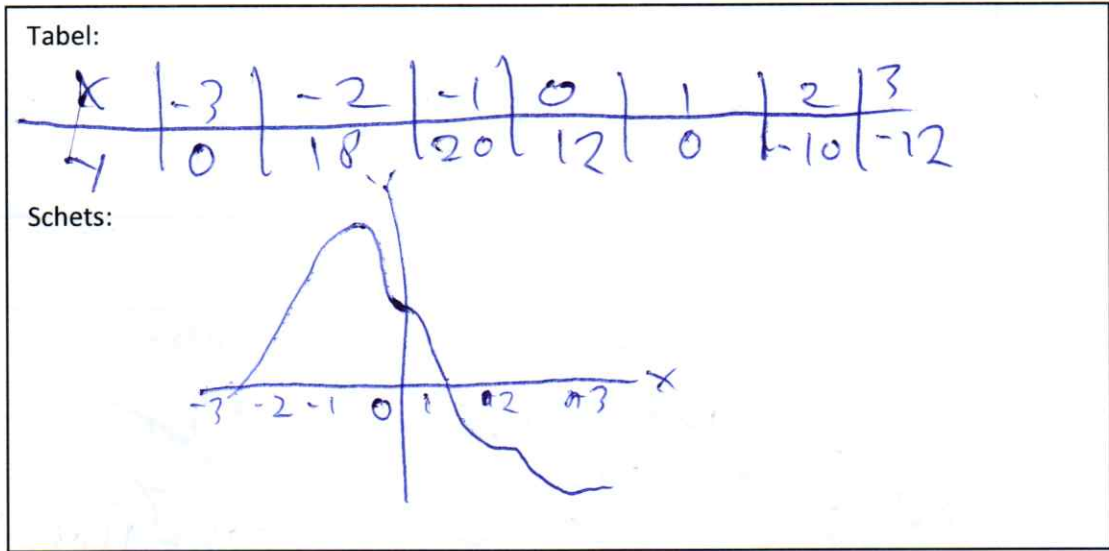
g)

Oplossingsstrategie	Zelf bedachte naam voor de strategie	Bijbehorende vergelijking-nummers	Eerste stap bij oplossen
A lezen door $\sqrt{x^2}$	wegstrepen	1, 10, 11 17	lezen door $\sqrt{x^2}$ een grafisch materiaal screep overeenkomende factoren weg
B	quadraten	2, 3	Reet er - onlinier lid kwadraten
C	wortelen	8, 9, 6	Reet er - onlinier lid van (machts) wortelzetfel
D	nul-of-nul	4, 5	aflezen
...			
...			

~~Leerling C~~ Leerling C

Uitwerkbijlage shift problem: vergelijkingen oplossen

a)



b)

$$f(x) = 0$$
$$(x - 1)(x + 3)(x - 4) = 0$$
$$x - 1 = 0 \quad \vee \quad x + 3 = 0 \quad \vee \quad x - 4 = 0$$
$$x = 1 \quad \vee \quad x = -3 \quad \vee \quad x = 4$$

c)

Aanpak bij b): Doordat je meerdere dingen vermenigvuldigt en het wordt 0, is 1 van die dingen 0. Ik hef alle delen apart berekent als het antwoord 0 is.

d)

Eerste stap: ~~De formule vereenvoudigen door de balansmethode en uit te rekenen~~ Ik deel beide kanten door $(x^2 - 7x + 12)$
Dit zou mijn eerste stap zijn, omdat:
Ik dan tot een formule kan komen die ik kan oplossen

0 2 2

e)

Verdere aanpak na stap 1:

Ik los de vergelijking op

f)

$$(x^2 - 7x + 12)(8x - 11) = (x^2 - 7x + 12)(3x + 14)$$

~~$$8x^3 - 11x^2 + 56x^2 + 77x + 98x - 132 = 3x^3 + 11x^2 + 21x^2 + 36x + 168$$~~

~~$$8x^3 - 67x^2 + 177x + 132 = 3x^3 + 22x^2 + 36x + 168$$~~

~~$$5x^3 - 60x^2 + 235x + 300 = 0$$~~

~~$$x^3 - 12x^2 + 47x - 60 = 0$$~~

$$8x - 11 = 3x + 14$$

$$5x = 25$$

$$x = 5$$

Reflectie:

2a

Ging het zoals je had verwacht?

Sterke punten van mijn strategie:

het lukt gewoon

Verbeterpunten:

g)

Oplossingsstrategie	Zelf bedachte naam voor de strategie	Bijbehorende vergelijking-nummers	Eerste stap bij oplossen
A	Wegdelen	1, 10	Beide kanten delen door ie_b
B	$ie_b \times$ $ie_b = 0$	1, 5	Alles apart uitrekenen voor $ie_b = 0$
C	wortelste	8, 9	Aan beide kanten de wortel of de quadmwortel
D	vermenigvuldigen	2, 7	Beide kanten vermenigvuldigen met betreffende
... E	Omron uitrekenen	3, 6	Omron uitrekenen
...			



$$\begin{aligned}
 (x+b) + (y-k) &= R^2 \\
 (x-b) - R^2 &= -(y+k)^2 \\
 &= -y^2 - 2ky - k^2 \\
 (x-b) - R^2 + k &= -y^2 - 2ky - k^2 + k \\
 &= -y^2 - 2ky - k^2 + k
 \end{aligned}$$

~~Waarom?~~ Leerling A

→ a wist a niet, niet hoe te beginnen
Normaal gaat tabel wel goed.

b) haakjes → niet helemaal

$$| -1 = 0 \Rightarrow \text{dus } x = 1.$$

herkenning object.

c) oerwoording namen zoeken
↳ begint goed

d) zeg haakjes staan → wegwerken

↳ weet niet bij a ^{niet} ~~weet~~,
bij d ^{wel} ~~niet~~

↳ blijf

Komt tijdens dit interview erachter dat het makkelijker kan!

e)

f) stopt → x^3 klopt niet

→ wist niet meer
Geen tijd voor reflectie.

g) 1 en 10 : herkent blokjes

2 en 7 : $\sqrt{\text{wortel}}$ en $x+1$

allebei $x \sqrt{x+1}$

3 en 6 : haakjes + gewoon uitrekenen.

4 en 5: blokjes herkennen
antwoord per blokje

8 en 9: zien 3 in wortels
verwerken

blokjes worden sterk herkend.

Komt tijdens de interactie
dat wat belangrijk is

Wat zijn de reflecties
die niet worden
gevoeld

Wat zijn de reflecties
die niet worden
gevoeld

$\sqrt{1+x}$

Wat zijn de reflecties
die niet worden
gevoeld

Vandaag:

- was kt1
- personeelsdag
- agendapunten
- nakijken

1-2-corbee

langskomen

pilot Peter

Lennart

~~Wanneer het gaat:~~ Leerling B

a) Eerst naar nulpunten kijken \rightarrow o invullen voor x .

gevoerde waarden aangepast aan

\rightarrow punten slim gekozen

\rightarrow later bedacht dat ~~nulpunten~~

getallen in haakjes $f(x)=0$ geeft

punten in tabel geplot \rightarrow lijn erdoorheen.

b) Eerst moei \bar{y} h doen \rightarrow haakjes

wegwerken

Toen naar a!

\rightarrow toen naar haakjes

1 factor nul

\rightarrow geheel nul

derdemachtsfunctie

\rightarrow kenmerken.

Op dat moment meer met 1 \rightarrow proces.

\rightarrow daarna met 2 \rightarrow object

(hst nog niet gehad)

c) \rightarrow nul punten grafisch

\rightarrow nul punten functie.

d) delen door $x^2 - 7x + 12$

↳ houdt machtheffing over.

e) gedetailleerde beschrijving
voor $8x - 11 = 3x + 14$

formule gelezen \rightarrow aan beide
kanten hetzelfde
 \rightarrow kun je toch wegdelen.
eerst vgl. in zijn geheel.

d) was nuttig

1st erg naar vgl kijken.
daarna o) onnodig.

f) misschien meer opschrijven:
in woorden verhaal meer opschrijven.

g) 1, 10 & 3:

↳ 3 was niet heel duidelijk
iets naar andere kant

halen

-14 laten

staan

\Rightarrow dus als 1 & 10.

streep overeenkomstige fact. weg

kwadrateren ~~worden~~ al weg

zet in dat restterm

tevoorschijn kon

8 & 9 & 6: machtswortel

4,5: link met a leggen.

\rightarrow aflezen met nulpunten
grafieken.

~~leerling C~~ leerling C : 23/11/2020 p. 108

a) onregelmatige functie
streven voor tabel : 7 punten
niet trots op schets \rightarrow y-as geschat.

bij andere functie:
nodige punten
7 kiezen
grootte stappen.

b) niet onderdeel al gebruikt
dingen keer elkaar nul
 \rightarrow één is nul.

3 factor met kleine aanpassing in x.

d) heek er nog een keer na
zag aparte blokjes
kwam later.

e) "Ik los ugi op"
 $x^3 \rightarrow$ is dit wel de goede weg

Bij het uitwerken bij f) gooi je
werkwijze om

e) en f) Niet veel meer over vertellen
Los in gewoon op

\rightarrow verder is er niet
zoveel aan

g) 1 en 10 horen bij elkaar :

hetzelfde als bij d) \rightarrow legt link.
4 en 5 : als dingen keer elkaar 0 zijn dan
hetzelfde als bij 1. zijn
dingen
nul
link!

8 en 9: worttjes \rightarrow machten weghalen

tussen haakjes wordt
als iets geven.

2 en 7: beide kanten met $\sqrt{\quad}$

vermenigvuldigen
 \rightarrow breuk weg

3 en 6: gewoon uitreken
haakjes wegwerken /
proces. balansmethode
 \rightarrow substitutie nu geven $x-3$.
object

obs.

① ~~Janneke~~ ^{linc} oerend stung door om haakjes weg te werken

~~Janneke~~ ^{linc} streeft goetse factoren weg!

(± 5 à 6 linc. doen dat)

groepje met ~~Janneke~~ ^{linc} stukke pen → doet met mee

Jongen oerend met meisje

~~Janneke~~ ^{linc} heeft hele blad al ingevuld

de andere 2 niet.

↓ blijft spelen met pen

Na oetloop oantijd: "delen door nets"

hadben als 1,10 2,7

~~Janneke~~

~~Janneke~~ ^{linc}

→ "ik denk dat p & g ongeveer het zelfde werken den moet je eerst wortel trekken"

Wacht

Jongen: ik denk dat je gelijk hebt meisje → snapt 2-heren

Namen vertinnen is leuk! "marktanalyse" "marktanalyse"

③ wel/mits het
14:10 blauw

Onderwerp: vergelijkingen oplossen

Datum: woensdag 18 december 2019

Beschikbare tijd: 40 minuten

De Grafische Rekenmachine is NIET toegestaan.

Geef je antwoorden in de daarvoor beschikbare vakken.

Deze toets bestaat uit 9 vragen en er kunnen in totaal 32 punten worden behaald.

Een beroep doen op hogere machten

Gegeven is de vergelijking $x^4 = 15$.

1p **1** Hoeveel oplossingen heeft deze vergelijking?

Aantal oplossingen:

Stel $x^n = p$ met n even en $p < 0$.

3p **2** Hoeveel oplossingen heeft deze vergelijking?

Licht je antwoord toe aan de hand van een schets van de grafieken van $y_1 = x^n$ (n even) en $y_2 = p$ ($p < 0$). Teken de schetsen in één assenstelsel.

Schets:

Aantal oplossingen + toelichting aan de hand van de schets:

3p **3** Los algebraïsch op.

$$x^4 - 8x^2 - 9 = 0$$

De prijs van de algebra

Algebra kost tijd, en dus geld.
Een gedetailleerde prijslijst vind je hieronder.

Prijslijst:	
bewerkingen +, -, x, :, /	1 punt per keer
kwadrateren	2 punten per keer
3-de macht nemen	3 punten per keer
4-de macht nemen	4 punten per keer
enz.	enz.
variabelen aanroepen	1 punt per keer
haakjes en gewone getallen	gratis

Voorbeeld: wat kost $3n + m$?

3	gewoon getal	gratis
n	aanroep variabele	1 punt
3 x n	vermenigvuldiging	1 punt
m	aanroep variabele	1 punt
3 x n + m	optellen	1 punt
<i>Totaalprijs</i>		<i>4 punten</i>

6p **4** De expressies $(x - 5)(x - 1)$ en $(x - 3)^2 - 4$ zijn gelijkwaardig. Bereken de prijs van beide expressies.

De prijs van $(x - 5)(x - 1)$:

Totaalprijs *punten*

De prijs van $(x - 3)^2 - 4$:

Totaalprijs *punten*

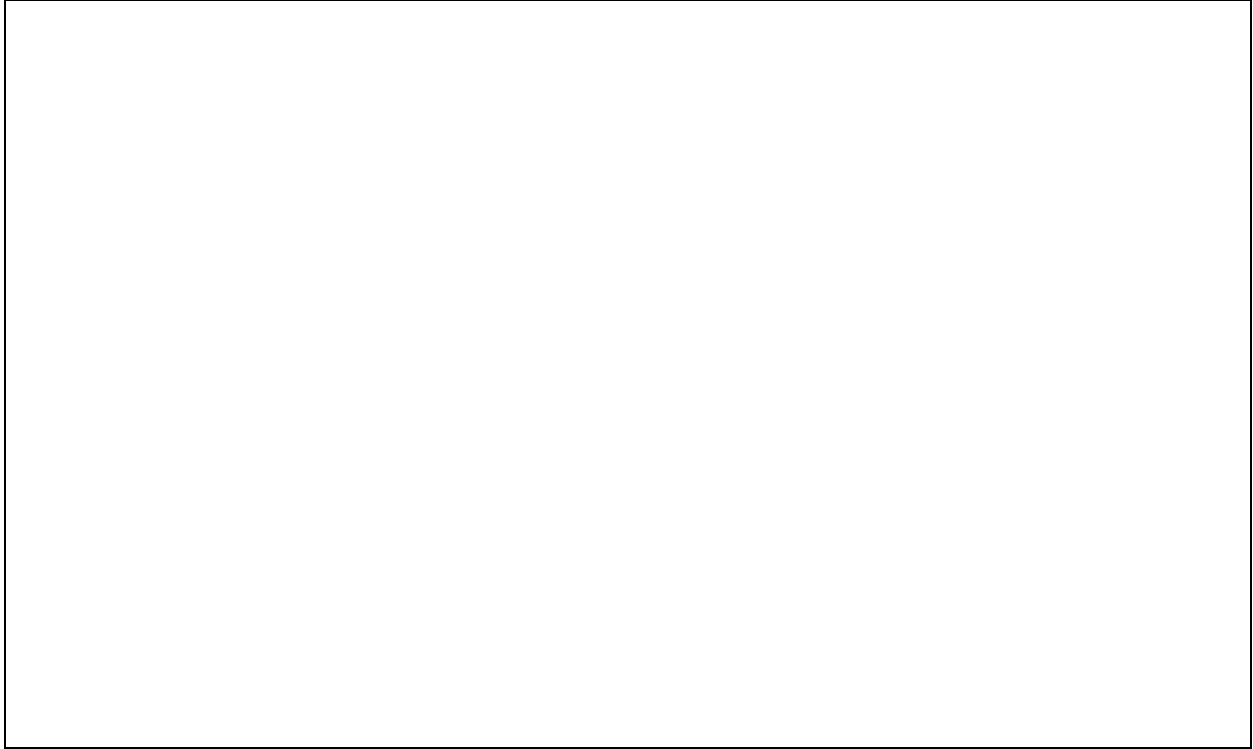
De groenteman

Een groenteman op de markt verkoopt appels en peren. De appels kosten €1 per kg en de peren €2 per kg.

Op een zaterdag verkoopt hij in totaal 200 kg appels en peren.

De opbrengst is €300.

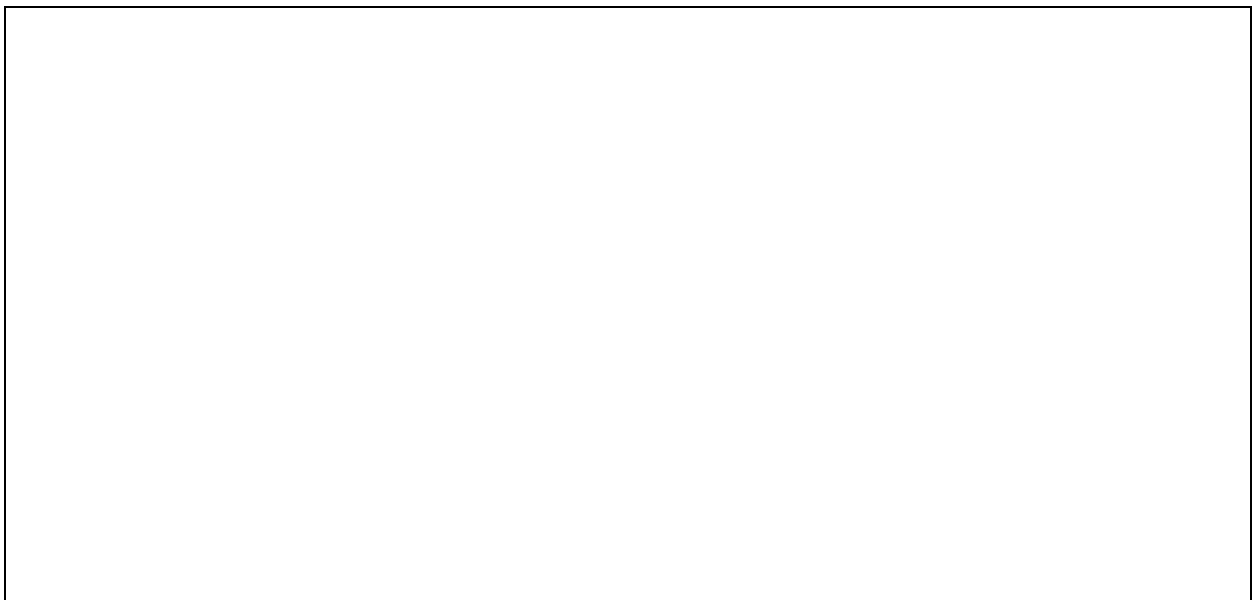
- 4p **5** Hoeveel kg appels heeft hij die dag verkocht? Laat duidelijk zien hoe je aan je antwoord komt.



Buitenbeentjes

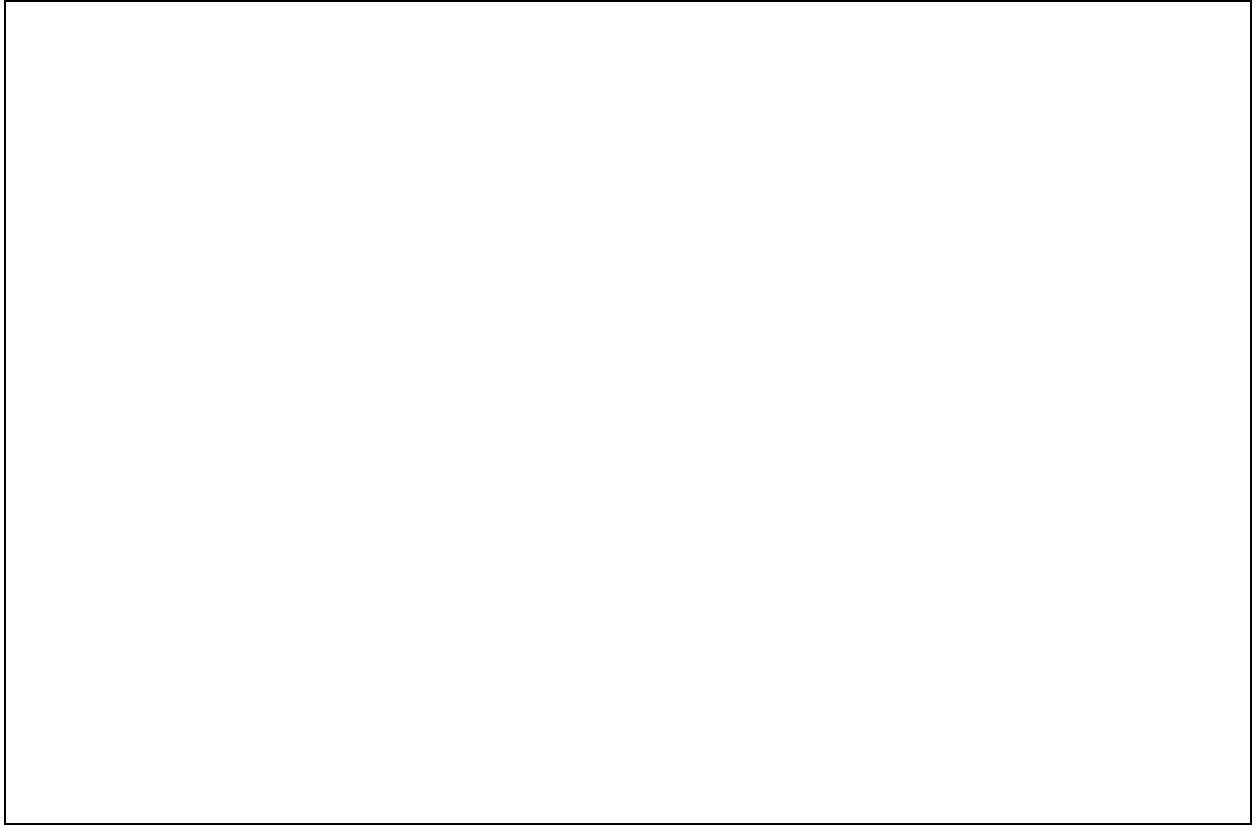
- 3p **6** Bereken exact de oplossingen.

$$|5 - x^2| = 11$$



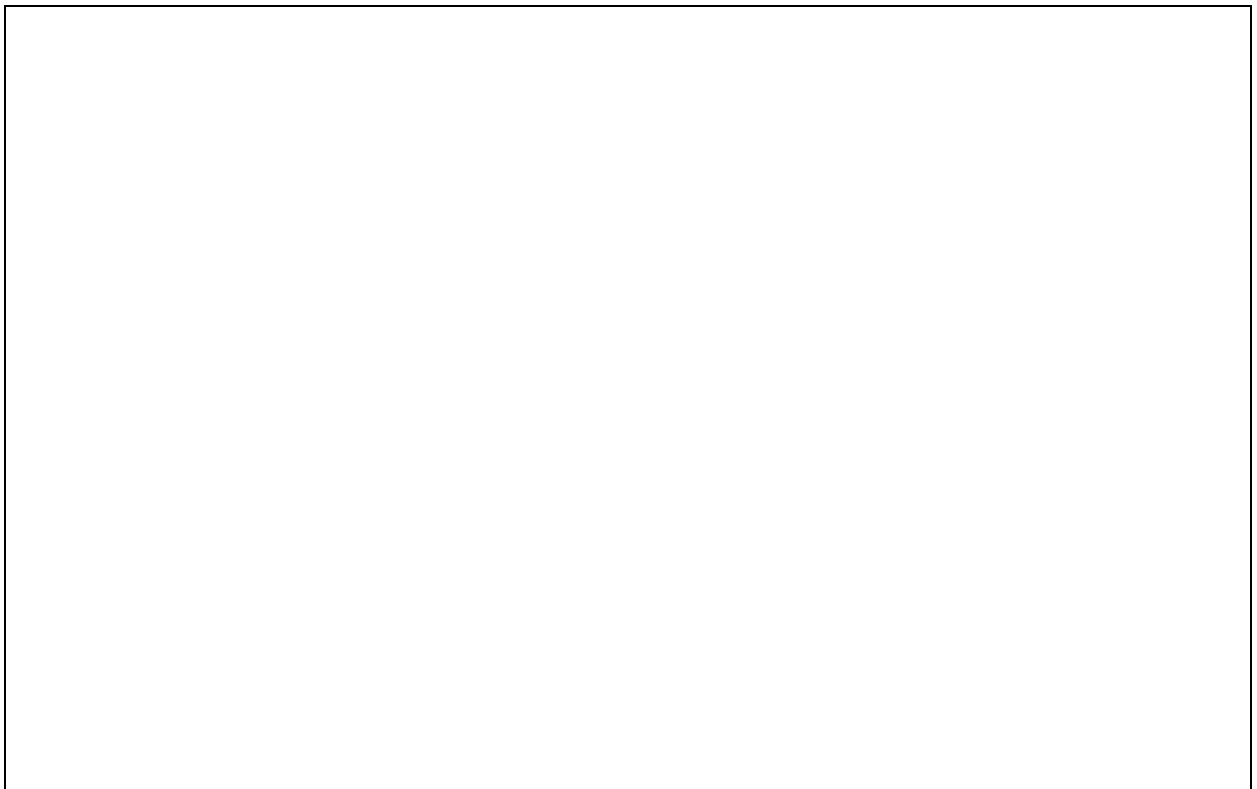
3p **7** Los exact op.

$$\frac{x^3 - 8}{x^2 + 4} = \frac{x^3 - 8}{3x + 8}$$



3p **8** Los algebraïsch op.

$$2x - 5\sqrt{x} = 3$$



Vergelijkingen zijn groepsdieren

Stel dat je de onderstaande vijf vergelijkingen op zou moeten lossen:

1. $(6x + 3)\sqrt{x - 2} = (x - 7)\sqrt{x - 2}$

2. $\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} = 6$

3. $\frac{x+1}{\sqrt{5x}} = \sqrt{x+1}$

4. $(x - 1)^2 - 5(x - 1) + 13 = 0$

5. $(x^2 - 2x)(8x + 3) = (x^2 - 2x)7x$

6p **9** Welke vergelijkingen kun je met dezelfde strategie oplossen? Wat is daarbij de eerste stap? Laat per vergelijking (zonder woorden) zien wat de eerste stap is in het oplossingsproces. Vorm zo min mogelijk oplossingsstrategieën.

Oplossingsstrategie	Bijbehorende vergelijking-nummers	Eerste stap bij het oplossen
A	Nummer: <ul style="list-style-type: none"> • 1 • ... 	Eerste stap: <ul style="list-style-type: none"> • bij 1: ... • ...
B	Nummer: <ul style="list-style-type: none"> • ... • ... 	Eerste stap: <ul style="list-style-type: none"> • ... • ...
...	Nummer: <ul style="list-style-type: none"> • ... • ... 	Eerste stap: <ul style="list-style-type: none"> • ... • ...

EINDE van deze toets

Formatieve toets 4 VWO wiskunde B

Naam: Max Schuurman
Leerling A

Onderwerp: vergelijkingen oplossen
Datum: woensdag 18 december 2019
Beschikbare tijd: 40 minuten

De Grafische Rekenmachine is NIET toegestaan.

Geef je antwoorden in de daarvoor beschikbare vakken.

Deze toets bestaat uit 9 vragen en er kunnen in totaal 32 punten worden behaald.

14+

Een beroep doen op hogere machten

Gegeven is de vergelijking $x^4 = 15$.

1p 1 Hoeveel oplossingen heeft deze vergelijking?

1 Aantal oplossingen: 2

Stel $x^n = p$ met n even en $p < 0$.

3p 2 Hoeveel oplossingen heeft deze vergelijking?

Licht je antwoord toe aan de hand van een schets van de grafieken van $y_1 = x^n$ (n even) en $y_2 = p$ ($p < 0$).

Schets:

0



Aantal oplossingen + toelichting aan de hand van de schets:

Er zijn geen oplossingen dus de grafieken raakt de x-as niet

3p 3 Los algebraïsch op.

$$x^4 - 8x^2 - 9 = 0$$

3

Stel $x^2 = u$
 $u^2 - 8u - 9 = 0$
 $(u-9)(u+1)$
 $u=9 \vee u=-1$
 $x^2=9 \vee x^2=-1$
 $x=3 \vee x=-3$

De prijs van de algebra

Algebra kost tijd, en dus geld.

Een gedetailleerde prijslijst vind je hieronder.

Prijzlijst:	
bewerkingen +, -, x, :, /	1 punt per keer
kwadrateren	2 punten per keer
3-de macht nemen	3 punten per keer
4-de macht nemen	4 punten per keer
enz.	enz.
variabelen aanroepen	1 punt per keer
haakjes en gewone getallen	gratis

Voorbeeld: wat kost $3n + m$?

3	gewoon getal	gratis
n	aanroep variabele	1 punt
$3 \times n$	vermenigvuldiging	1 punt
m	aanroep variabele	1 punt
$3 \times n + m$	optellen	1 punt
Totaalprijs		4 punten

- 6p **4** De expressies $(x - 5)(x - 1)$ en $(x - 3)^2 - 4$ zijn gelijkwaardig. Bereken de prijs van beide expressies.

De prijs van $(x - 5)(x - 1)$:

X aanroep variabele 1 punt

2

Totaalprijs punten

De prijs van $(x - 3)^2 - 4$:

Totaalprijs punten

1

De groenteman

Een groenteman op de markt verkoopt appels en peren. De appels kosten €1 per kg en de peren €2 per kg.

Op een zaterdag verkoopt hij in totaal 200 kg appels en peren.

De opbrengst is €300.

- 4p 5 Hoeveel kg appels heeft hij die dag verkocht? Laat duidelijk zien hoe je aan je antwoord komt.

$$\begin{cases} a+p=200 & \text{g} \\ a+2p=300 & \text{---} \end{cases}$$

$$-p = -100$$

$$p = 100 \quad \left. \begin{array}{l} a+100=200 \\ a+p=200 \end{array} \right\} a=100$$

$$a=100$$

100 kg appels

$$\begin{array}{l} a = \dots \\ p = \dots \end{array}$$

3

Buitenbeentjes

- 3p 6 Bereken exact de oplossingen.

$$|5 - x^2| = 11$$

$$5 - x^2 = 11 \quad \vee \quad 5 - x^2 = -11$$

$$-x^2 = 6 \quad \vee \quad -x^2 = -16$$

$$x^2 = -6 \quad \vee \quad x^2 = 16$$

$$\text{h.n.} \quad x = 4 \quad \vee \quad x = -4$$

3

3p 7 Los exact op.

$$\frac{x^3 - 8}{x^2 + 4} = \frac{x^3 - 8}{3x + 8}$$

$$\cancel{x}^1 X^2 + 4 = 3X + 8$$

$$X^2 - 3X - 4 = 0$$

$$(x-4)(x+1)$$

$$x=4 \vee x=-1$$

vold vold.

1

3p 8 Los algebraïsch op.

$$2x - 5\sqrt{x} = 3$$

stel $\sqrt{x} = u$

$$2u^2 - 5u = 3$$

$$2u^2 - 5u - 3 = 0$$

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 49$$

$$u = \frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2} \vee u = \frac{5+7}{4} = 3$$

$$\sqrt{x} = -\frac{1}{2} \vee \sqrt{x} = 3$$

$$\cancel{x = \frac{1}{4}} \vee x = 9$$

1

Vergelijkingen zijn groepsdieren

Stel dat je de onderstaande vijf vergelijkingen op zou moeten lossen:

1. $(6x + 3)\sqrt{x - 2} = (x - 7)\sqrt{x - 2}$

2. $\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} = 6$

3. $\frac{x+1}{\sqrt{5x}} = \sqrt{x+1}$

4. $(x - 1)^2 - 5(x - 1) + 13 = 0$

5. $(x^2 - 2x)(8x + 3) = (x^2 - 2x)7x$

6p **9** Welke vergelijkingen los je met dezelfde strategie op? Wat is daarbij de eerste stap? Laat per vergelijking (zonder woorden) zien wat de eerste stap is in het oplossingsproces.

Oplossingsstrategie	Bijbehorende vergelijking-nummers	Eerste stap bij het oplossen
A	Nummer: • 1 • 5 }	Eerste stap: • bij 1: $\sqrt{x-2} = 0$ • bij 5: $x^2 - 2x = 0$
B	Nummer: • ... • ...	Eerste stap: • ... • ...
...	Nummer: • ... • ...	Eerste stap: • ... • ...

EINDE van deze toets

Formatieve toets 4 VWO wiskunde B

Naam: Maria de Groot
Leerling B

Onderwerp: vergelijkingen oplossen
Datum: woensdag 18 december 2019
Beschikbare tijd: 40 minuten

De Grafische Rekenmachine is NIET toegestaan.

Geef je antwoorden in de daarvoor beschikbare vakken.

Deze toets bestaat uit 9 vragen en er kunnen in totaal 32 punten worden behaald.

18+

Een beroep doen op hogere machten

Gegeven is de vergelijking $x^4 = 15$.

1p 1 Hoeveel oplossingen heeft deze vergelijking?

1

Aantal oplossingen: 2

Stel $x^n = p$ met n even en $p < 0$.

3p 2 Hoeveel oplossingen heeft deze vergelijking?

Licht je antwoord toe aan de hand van een schets van de grafieken van $y_1 = x^n$ (n even) en $y_2 = p$ ($p < 0$).

0

Schets:

Aantal oplossingen + toelichting aan de hand van de schets:
2 oplossingen, want hij raakt elkaar 2keer dit kun je lezen in de schets

3p 3 Los algebraïsch op.
 $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

3

Stel $x^2 = u$
 $u^2 - 8u - 9 = 0$
 $(u-9)(u+1) = 0$
 $u = 9 \vee u = -1$
 $x^2 = 9 \vee x^2 = -1$
 $\sqrt{9} \vee x = -\sqrt{9} \vee x = \sqrt{-1} + k \cdot N$
 $x = 3 \vee x = -3$

De prijs van de algebra

Algebra kost tijd, en dus geld.

Een gedetailleerde prijslijst vind je hieronder.

Prijzlijst:	
bewerkingen +, -, x, :, /	1 punt per keer
kwadrateren	2 punten per keer
3-de macht nemen	3 punten per keer
4-de macht nemen	4 punten per keer
enz.	enz.
variabelen aanroepen	1 punt per keer
haakjes en gewone getallen	gratis

Voorbeeld: wat kost $3n + m$?

3	gewoon getal	gratis
n	aanroep variabele	1 punt
$3 \times n$	vermenigvuldiging	1 punt
m	aanroep variabele	1 punt
$3 \times n + m$	optellen	1 punt
Totaalprijs		4 punten

6p 4 De expressies $(x - 5)(x - 1)$ en $(x - 3)^2 - 4$ zijn gelijkwaardig. Bereken de prijs van beide expressies.

De prijs van $(x - 5)(x - 1)$:

haakje	gewoon getal	gratis x4
x	variabelen aanroepen	1 punt x2
-	Bewerking	1 punt x2
5	gewoon getal	gratis x2
$(x-5) \times (x-1)$	vermenigvuldigen	1 punt

Totaalprijs punten 5

De prijs van $(x - 3)^2 - 4$:

$(x-3)^2$	=	gratis x2
x	=	1
-	=	1 x2
3x4	=	gratis
$(x-3)^2$	=	2

Totaalprijs punten 5

5

De groenteman

Een groenteman op de markt verkoopt appels en peren. De appels kosten €1 per kg en de peren €2 per kg.

Op een zaterdag verkoopt hij in totaal 200 kg appels en peren.

De opbrengst is €300.

5 Hoeveel kg appels heeft hij die dag verkocht? Laat duidelijk zien hoe je aan je antwoord komt.

noem Appels: x & peren: y

~~$x + 2y = 200$~~
 $x + y = 200$

$x + 2y = 300$ -

$-y = -100$

$y = 100$

$x + 100 = 200$
 $x = 100$

100^{kg} Peren &
100^{kg} Appels

3

Buitenbeentjes

6 Bereken exact de oplossingen.

$$|5 - x^2| = 11$$

$5 - x^2 = 11$ \vee $5 - x^2 = -11$

$x^2 = 6$ \vee $-x^2 = -16$

$x^2 = -6$ \vee $x^2 = 16$

$x = \sqrt{6}$ \vee $x = \sqrt{16}$ \vee $x = -\sqrt{16}$

$x = 8$ \vee $x = -8$

4 -4

2

3p 7 Los exact op.

$$\frac{x^3 - 8}{x^2 + 4} = \frac{x^3 - 8}{3x + 8}$$

$$\begin{aligned}x^3 - 8 &= 0 \vee x^2 + 4 = 3x + 8 \\x^3 &= 8 \vee x^2 - 3x - 4 = 0 \\x &= \sqrt[3]{8} \vee (x - 4)(x + 1) = 0 \\x &= 2 \vee x = 4 \vee x = -1\end{aligned}$$

2

V. —

3p 8 Los algebraisch op.

$$2x - 5\sqrt{x} = 3$$

Kwad ratieren
 $(2x)^2 - (5\sqrt{x})^2 = 3^2$
 $4x^2 + 25x = 9$

$$4x^2 + 25x - 9 = 0$$

$$D = (25)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-9) =$$

$$625 + 144 = 769$$

$$x = \frac{-25 - \sqrt{769}}{2 \cdot 4} \vee x = \frac{-25 + \sqrt{769}}{8} =$$

$$(-25 - \sqrt{769}) \cdot 8 \vee (-25 + \sqrt{769}) \cdot 8$$

$$-200 - 8\sqrt{769} \vee -200 + 8\sqrt{769}$$

$$-25 - \sqrt{769}$$

$$x = -6,59 \vee x = 0,34$$

$$\begin{array}{r}600 \\100 \\100 \\25 \\ \hline 625\end{array}$$

$$\begin{array}{r}16 \\9x \\ \hline 90 \\54 \\ \hline 144\end{array}$$

Vergelijkingen zijn groepsdieren

Stel dat je de onderstaande vijf vergelijkingen op zou moeten lossen:

1. $(6x + 3)\sqrt{x - 2} = (x - 7)\sqrt{x - 2}$

2. $\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} = 6$

3. $\frac{x+1}{\sqrt{5x}} = \sqrt{x+1}$

4. $(x - 1)^2 - 5(x - 1) + 13 = 0$

5. $(x^2 - 2x)(8x + 3) = (x^2 - 2x)7x$

6p **9** Welke vergelijkingen los je met dezelfde strategie op? Wat is daarbij de eerste stap? Laat per vergelijking (zonder woorden) zien wat de eerste stap is in het oplossingsproces.

Oplossingsstrategie	Bijbehorende vergelijking-nummers	Eerste stap bij het oplossen
2	Nummer: <ul style="list-style-type: none"> • 1 • 5 	Eerste stap: <ul style="list-style-type: none"> • bij 1: $\sqrt{x-2} = 0 \vee (6x+3) = (x-7)$ • bij 5: $(x^2-2x) = 0 \vee 8x+3 = 7x$
2	Nummer: <ul style="list-style-type: none"> • 1 2 • 3 • ... 	Eerste stap: <ul style="list-style-type: none"> • Bij 3: $\left(\frac{x+1}{\sqrt{5x}}\right)^2 = (\sqrt{x+1})^2$ • Bij 2: $(\sqrt{x})^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^2 = 6^2$
...	Nummer: <ul style="list-style-type: none"> • 4 • ... • ... 	Eerste stap: <ul style="list-style-type: none"> • x+1 2 stel $x+1 = u$ • ... $u^2 - 5u + 13 = 0$

EINDE van deze toets

Formatieve toets 4 VWO wiskunde B

Naam:

~~Leerling C~~
Leerling C

Onderwerp: vergelijkingen oplossen
Datum: woensdag 18 december 2019
Beschikbare tijd: 40 minuten

De Grafische Rekenmachine is NIET toegestaan.

Geef je antwoorden in de daarvoor beschikbare vakken.

26+

Deze toets bestaat uit 9 vragen en er kunnen in totaal 32 punten worden behaald.

Een beroep doen op hogere machten

Gegeven is de vergelijking $x^4 = 15$.

1p 1 Hoeveel oplossingen heeft deze vergelijking?

1

Aantal oplossingen: 2

Stel $x^n = p$ met n even en $p < 0$.

3p 2 Hoeveel oplossingen heeft deze vergelijking?

Licht je antwoord toe aan de hand van een schets van de grafieken van $y_1 = x^n$ (n even) en $y_2 = p$ ($p < 0$).

3

Schets:

Aantal oplossingen + toelichting aan de hand van de schets:
De grafieken y_1 en y_2 hebben geen snijpunten.
Er zijn dus geen oplossingen.

3p 3 Los algebraïsch op.

$x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

3

~~Stel~~ $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$ $x^2 = -1$ \vee $x^2 = 9$
Stel $x^2 = u$ ~~geen opl.~~ \vee $x = 3$ \vee $x = -3$
 $u^2 - 8u - 9 = 0$
 $(u+1)(u-9) = 0$
 $u+1=0$ \vee $u-9=0$
 $u = -1$ \vee $u = 9$

De prijs van de algebra

Algebra kost tijd, en dus geld.

Een gedetailleerde prijslijst vind je hieronder.

Prijzlijst:	
bewerkingen +, -, x, :, /	1 punt per keer
kwadrateren	2 punten per keer
3-de macht nemen	3 punten per keer
4-de macht nemen	4 punten per keer
enz.	enz.
variabelen aanroepen	1 punt per keer
haakjes en gewone getallen	gratis

Voorbeeld: wat kost $3n + m$?

3	gewoon getal	gratis
n	aanroep variabele	1 punt
$3 \times n$	vermenigvuldiging	1 punt
m	aanroep variabele	1 punt
$3 \times n + m$	optellen	1 punt
Totaalprijs		4 punten

6p **4** De expressies $(x - 5)(x - 1)$ en $(x - 3)^2 - 4$ zijn gelijkwaardig. Bereken de prijs van beide expressies.

De prijs van $(x - 5)(x - 1)$:

aanroep variabele 1
 vermenigvuldigen 1
 optellen 1
 afhebben 1
 afhebben 1
 1 +
 4

Totaalprijs 4 punten 1 1 1 1

De prijs van $(x - 3)^2 - 4$:

afhebben 1
 Kwadrateren 2
 Variable aanroepen 1
 afhebben 1
 1 +
 5

Totaalprijs 5 punten 1 2 1 1

6

De groenteman

Een groenteman op de markt verkoopt appels en peren. De appels kosten €1 per kg en de peren €2 per kg.

Op een zaterdag verkoopt hij in totaal 200 kg appels en peren.

De opbrengst is €300.

- 4p 5 Hoeveel kg appels heeft hij die dag verkocht? Laat duidelijk zien hoe je aan je antwoord komt.

$$\begin{array}{r} x + y = 200 \\ x + 2y = 300 - \\ \hline \end{array}$$

$$-y = -100$$

$$y = 100$$

$$x + y = 200$$

$$\begin{array}{l} x = \dots \\ y = \dots \end{array}$$

$$x + 100 = 200$$

$$x = 100, \text{ dus}$$

100 KG appels

Buitenbeentjes

- 3p 6 Bereken exact de oplossingen.

$$|5 - x^2| = 11$$

$$|5 - x^2| = 11$$

$$5 - x^2 = 11 \quad \vee \quad 5 - x^2 = -11$$

$$-x^2 = 6 \quad \vee \quad -x^2 = -16$$

$$x^2 = -6 \quad \vee \quad x^2 = 16$$

$$\text{Geen opl.} \quad \vee \quad x = 4 \quad \vee \quad x = -4$$

3p 7 Los exact op.

$$\frac{x^3 - 8}{x^2 + 4} = \frac{x^3 - 8}{3x + 8}$$

$$\frac{x^3 - 8}{x^2 + 4} = \frac{x^3 - 8}{3x + 8}$$

$$\cancel{(2-8)} \cancel{3x+8} \quad x^3 - 8 = 0 \quad \vee \quad x^2 + 4 = 3x + 8$$

$$x^3 = 8 \quad \vee \quad x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$x^3 = 2 \quad \vee \quad (x+1)(x-4) = 0$$

$$x+1=0 \quad \vee \quad x-4=0$$

$$x = -1 \quad \vee \quad x = 4$$

✓...

2

3p 8 Los algebraisch op.

$$2x - 5\sqrt{x} = 3$$

$$2x - 5\sqrt{x} = 3$$

$$-5\sqrt{x} = 3 - 2x$$

$$\sqrt{x} = \frac{3 - 2x}{-5}$$

$$x = \frac{(3 - 2x)(3 - 2x)}{(-5)(-5)} = \frac{9 - 12x + 4x^2}{25}$$

$$25x = 4x^2 - 12x + 9$$

$$4x^2 - 37x + 9 = 0$$

$$D = (-37)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 1225, \quad \sqrt{D} = 35$$

$$x = \frac{37 \pm 35}{2 \cdot 4} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \quad \vee \quad x = \frac{37 + 35}{2 \cdot 4} = \frac{72}{8} = 9$$

Valid - niet

Valid.

37
77
159
110
1969 - 1825

2
35
14
175
10 30
12 21

Vergelijkingen zijn groepsdieren

Stel dat je de onderstaande vijf vergelijkingen op zou moeten lossen:

1. $(6x + 3)\sqrt{x - 2} = (x - 7)\sqrt{x - 2}$

2. $\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} = 6$

3. $\frac{x+1}{\sqrt{5x}} = \sqrt{x+1}$

4. $(x - 1)^2 - 5(x - 1) + 13 = 0$

5. $(x^2 - 2x)(8x + 3) = (x^2 - 2x)7x$

6p **9** Welke vergelijkingen los je met dezelfde strategie op? Wat is daarbij de eerste stap? Laat per vergelijking (zonder woorden) zien wat de eerste stap is in het oplossingsproces.

Oplossingsstrategie	Bijbehorende vergelijking-nummers	Eerste stap bij het oplossen
A	Nummer: <ul style="list-style-type: none"> • 1 • 5. 	Eerste stap: <ul style="list-style-type: none"> • bij 1: ... $6x + 3 = x - 7 \quad \checkmark \quad \sqrt{x-2} = 0$ • Bij 5: $8x + 3 = 7x \quad \checkmark \quad x^2 - 2x = 0$
B	Nummer: <ul style="list-style-type: none"> • 4. • ... 	Eerste stap: <ul style="list-style-type: none"> • .. $x - 1 = 0$ • ...
...	Nummer: <ul style="list-style-type: none"> • 2 • 3 	Eerste stap: <ul style="list-style-type: none"> • ... $\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{x}} = \frac{6}{1}$ • ... $\frac{x+1}{\sqrt{5x}} = \frac{\sqrt{x+1}}{1}$

EINDE van deze toets

Analyse van de data:

Hypothetisch leertraject (HLT)		Actuele leertraject (ALT)		Deductief	Inductief
Onderdeel van het shift probleem	Verwachtingen (per onderdeel)	Tijdens het werken aan het shift probleem (per onderdeel en IIn)	Vergelijk van het shift probleem en de formatieve toets (per leerling)	Vergelijk van HLT en ALT (-,0,+) (per leerling)	Opvallende bevindingen (per leerling)
a	<ul style="list-style-type: none"> • Zoals in HLT 	<i>Leerling A:</i> <i>Leerling B:</i> <i>Leerling C:</i>	<i>Leerling A:</i> <i>Leerling B:</i> <i>Leerling C:</i>	<i>Leerling A:</i> <i>Leerling B:</i> <i>Leerling C:</i>	<i>Leerling A:</i> <i>Leerling B:</i> <i>Leerling C:</i>
b	<ul style="list-style-type: none"> • Zoals in HLT 	<i>Leerling A:</i> <i>Leerling B:</i> <i>Leerling C:</i>			
c	<ul style="list-style-type: none"> • Zoals in HLT 	<i>Leerling A:</i> <i>Leerling B:</i> <i>Leerling C:</i>			
d	<ul style="list-style-type: none"> • Zoals in HLT 	<i>Leerling A:</i> <i>Leerling B:</i> <i>Leerling C:</i>			
e	<ul style="list-style-type: none"> • Zoals in HLT 	<i>Leerling A:</i> <i>Leerling B:</i> <i>Leerling C:</i>			

f	<ul style="list-style-type: none"> • Zoals in HLT 	<i>Leerling A:</i> <i>Leerling B:</i> <i>Leerling C:</i>			
g	<ul style="list-style-type: none"> • Zoals in HLT 	<i>Leerling A en C (in groepsverband):</i> <i>Leerling B (in groepsverband):</i>			

Toelichting op de tabel:

De verkregen data worden geanalyseerd door het actuele leertraject (ALT) van de drie focusleerlingen te vergelijken met het hypothetische leertraject (HLT) (kolom 1 en 2). Hierbij wordt het ALT opgesplitst in twee componenten (kolom 3 en 4): het leertraject van de leerlingen tijdens het werken aan het shift problem enerzijds en een vergelijking van de uitwerkingen bij het shift problem en de shift formatieve toets op basis van veelgemaakte fouten anderzijds. Omdat het HLT verwachtingen per onderdeel van het shift problem uitspreekt geeft de eerste component van het ALT ook samenvattingen per onderdeel en daarbinnen per focusleerling. Vervolgens worden het HLT en ALT (beide componenten van het ALT in acht genomen) met elkaar vergeleken per focusleerling (deductief, kolom 5) en wordt de match tussen HLT en ALT negatief (-), neutraal (0) of positief (+) beoordeeld, voorzien van een toelichting. Tot slot worden opvallende bevindingen genoteerd per focusleerling (inductief, kolom 6). De beschreven structuur van de tabel impliceert dat deze het beste eerst van boven naar beneden en vervolgens van links naar rechts kan worden gelezen.

Resultaten:

Hypothetisch leertraject (HLT)		Actuele leertraject (ALT)		Deductief	Inductief
Onderdeel van het shift probleem	Verwachtingen (per onderdeel)	Tijdens het werken aan het shift probleem (per onderdeel en IIn)	Vergelijk van het shift probleem en de formatieve toets (per leerling)	Vergelijk van HLT en ALT (-,0,+) (per leerling)	Opvallende bevindingen (per leerling)
a	<ul style="list-style-type: none"> De leerlingen zullen niet op basis van enkel de karakteristieken van het functievoorschrift (nulpunten, derdegraadsfunctie) tot een correcte schets komen. De leerlingen zullen relatief veel tijd besteden aan het maken van de tabel. Wanneer een tabel met representatieve coördinaten is gemaakt, zal het maken van de schets soepel verlopen. 	<p><i>Leerling A:</i> Komt niet tot een schets (bijlage VI). Komt niet tot een tabel, omdat het niet duidelijk is hoe te beginnen (bijlage VI en VII).</p> <p><i>Leerling B:</i> Komt na trial en error tot vrijwel correcte schets door x waarden te gokken die f=0 geven (bijlage VI en VII). Besteed veel tijd aan de tabel en schets (bijlage VI).</p> <p><i>Leerling C:</i> Komt niet tot correcte schets (bijlage VI). Gebruikt standaard 7 punten voor een tabel, zoals geleerd in het verleden (negatief en positief) (bijlage VII).</p>	<p><i>Leerling A:</i> Scoort op de formatieve toets gemiddeld op de algebraïsche basisvaardigheden, die in opgaves 1, 3, 5, 6, 7 en 8 getoetst worden (bijlage X). Identificeert in opgave 9 de gemeenschappelijke factoren in vergelijkingen 1 en 5 (bijlage X), net zoals in onderdeel g van het shift probleem! Beschouwt bij de eerste stap echter maar één van de twee vergelijkingen. Herkent niet vgl 3 als onderdeel van dezelfde strategie en herkent niet de substitutiemethode. Scoort nul punten bij de schetsen van opgave 2 (bijlage X), vergelijkbaar met onderdeel a van het shift probleem. Scoort nauwelijks bij opgave 4 die ook een weten waarom aanpak toetst (bijlage X).</p>	<p><i>Leerling A: 0</i> <u>a: 0</u> Komt inderdaad niet tot een correcte schets, maar besteed nauwelijks tijd aan het onderdeel en loopt direct vast. <u>b: 0</u> Lost de vergelijking op, maar beroept zich niet op a. <u>c: -</u> Komt niet tot schrijven. <u>d: +</u> Werkt inderdaad de haakjes weg, omdat ze de haakjes als een signaal ziet ze uit te werken. <u>e: 0</u> Geeft een beschrijving, maar deze gaat met name over de balansmethode. <u>f: 0</u> Loopt inderdaad vast, maar komt niet tot reflectie.</p>	<p><i>Leerling A:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> Heeft moeite met schetsen. Schrijft weinig op, omdat niet duidelijk is hoe te beginnen of naar woorden gezocht wordt. Is in staat een expressie als algebraïsch object te beschouwen, zoals blijkt uit onderdelen b en g en het inzicht over onderdeel d tijdens het interview! Is gedurende het shift probleem steeds minder geneigd haakjes uit te werken, wanneer onderdelen d en g vergeleken worden.

b	<ul style="list-style-type: none"> De leerlingen zullen, gebruikmakend van de verkregen inzichten bij a), de vergelijking vlot oplossen door óf de afzonderlijke factoren van $f(x)$ nul te stellen óf direct de oplossingen voor x op te schrijven. De leerlingen zullen niet of nauwelijks tot haakjes uitwerken overgaan om de vergelijking verder op te lossen. 	<p><i>Leerling A:</i> Schrijft direct de oplossingen voor x op door juiste objecten in functievoorschrift te herkennen. Maakt geen gebruik van a) (bijlages VI en VII).</p> <p><i>Leerling B:</i> Werkt eerst haakjes uit, maar komt gedurende de opgave tot het inzicht dat het antwoord bij a) is af te lezen! (bijlages VI en VII).</p> <p><i>Leerling C:</i> Herkent vorm van de vergelijking en de juiste objecten. Maakt geen gebruik van a) en werkt geen haakjes uit (bijlages VI en VII).</p>	<p><i>Leerling B:</i> Scoort op de formatieve toets hoog op de algebraïsche basisvaardigheden, die in opgaves 1, 3, 5, 6, 7 en 8 getoetst worden (bijlage X). Identificeert in opgave 9 de gemeenschappelijke factoren in vergelijkingen 1 en 5 en schrijft de eerste stappen correct op (bijlage X), net zoals in onderdeel g van het shift problem! Herkent echter niet vgl 3 als onderdeel van dezelfde strategie en herkent de substitutiemethode voor slechts één vergelijking. Heeft nog steeds de neiging wortels te kwadrateren (bijlage X), net zoals in onderdeel g van het shift problem. Scoort nul punten bij de schetsen van opgave 2 (bijlage X), terwijl bij onderdeel a van het shift problem uiteindelijk tot een vrijwel goede schets wordt gekomen. Scoort hoog bij opgave 4 die ook een weten waarom aanpak toetst (bijlage X).</p>	<p><u>$g: 0$</u> Vergelijkingen 4 en 5 samen en 1 en 10 samen worden inderdaad gegroepeerd. Vergelijking 3 wordt inderdaad niet herkend. De substitutiemethode en terugreken methode worden echter niet herkend. <u>Formatieve toets: 0</u> Bij opgave 9, vergelijkbaar met onderdeel g, worden opnieuw vergelijkingen met gemeenschappelijke factoren herkend. Beschouwt bij de eerste stap echter maar 1 van de 2 vglen. Herkent ook de substitutiemethode niet. Heeft nog steeds moeite om tot een correcte schets te komen, in overeenstemming met het HLT.</p>	<ul style="list-style-type: none"> Maakt bij b geen gebruik van a en bij g geen gebruik van $a-f$. Heeft bij het zien van wortels in onderdeel g van het shift problem en op de formatieve toets sterk de neiging deze weg te willen werken. Is op de formatieve toets in staat naar expressies te kijken als algebraïsche objecten en werkt niet direct haakjes uit, zoals blijkt uit opgave 9.
---	---	--	---	---	--

c	<ul style="list-style-type: none"> De leerlingen zullen iets schrijven over de nulpunten aflezen uit de grafiek bij a) en/of over de afzonderlijke factoren van $f(x)$ gelijk stellen aan nul. 	<p><i>Leerling A:</i> Maakt goed beginnende zin niet af, doordat ze niet op de juiste woorden kan komen (zoekt het woord factor) (bijlages VI en VII).</p> <p><i>Leerling B:</i> Leest nulpunten af uit grafiek bij a) en heeft ondertussen bedacht dat dit ook de nulpunten van de functie zijn (bijlages VI en VII)!</p> <p><i>Leerling C:</i> Stelt afzonderlijke factoren van $f(x)$ gelijk aan nul.</p>	<p><i>Leerling C:</i> Scoort op de formatieve toets zeer hoog op de algebraïsche basisvaardigheden, die in opgaves 1, 3, 5, 6, 7 en 8 getoetst worden (bijlage X). Identificeert in opgave 9 de gemeenschappelijke factoren in vergelijkingen 1 en 5 en schrijft de eerste stappen correct op (bijlage X), net zoals in onderdeel g van het shift problem! Herkent echter niet vgl 3 als onderdeel van dezelfde strategie en herkent de substitutiemethode voor slechts één vergelijking. Heeft nog steeds de neiging vgl met wortels te groeperen (bijlage X), net zoals vgl 2 en 7 in onderdeel g van het shift problem. Hij kwadrateert echter niet. Scoort maximaal bij de schetsen in opgave 2 (bijlage X). Scoort maximaal bij opgave 4 die ook een weten waarom aanpak toetst (bijlage X).</p>	<p><i>Leerling B: +</i> <u>a: 0</u> Besteed inderdaad veel tijd aan de tabel, maar komt (op inefficiënte wijze) tot vrijwel correcte schets. <u>b: +</u> Schrijft (uiteindelijk) direct oplossingen op en maakt gebruik van a! <u>c: +</u> Schrijft inderdaad over het aflezen van nulpunten bij a! <u>d: +</u> Beschrijft inderdaad de gemeenschappelijke factor en het makkelijker worden van de vgl! <u>e: -</u> Benoemt de twee vergelijkingen en het afzonderlijk oplossen niet. <u>f: +</u> Lost de resulterende vgl'en inderdaad vlot op en merkt op dat haar strategie de vergelijking vergemakkelijkte.</p>	<p><i>Leerling B:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> Vertoont wisselvallig gedrag met betrekking tot het maken van schetsen, wanneer onderdeel a van het shift problem en opgave 2 van de formatieve toets vergeleken worden. Is zeer reflectief, zoals blijkt uit onderdelen b, c, d en f. Is gedurende het shift problem steeds beter in staat expressies als algebraïsche objecten te herkennen en steeds minder geneigd haakjes uit te werken, wanneer onderdelen a, d en g vergeleken worden. Maakt bij b gebruik van a en bij g van a-f!
---	--	---	---	--	--

d	<ul style="list-style-type: none"> • De leerlingen zullen als eerste stap aangeven óf de haakje uit te werken óf een gemeenschappelijke factor te identificeren/splitsen. • De leerlingen die er voor kiezen de haakjes uit te werken zullen aangeven dat je haakjes altijd eerst uitwerkt (of iets vergelijkbaars). • De leerlingen die er voor kiezen de gemeenschappelijke factor te identificeren/splitsen zullen aangeven dat dit minder werk geeft of sneller is (of iets vergelijkbaars). 	<p><i>Leerling A:</i> Geeft aan de haakjes uit te werken (bijlage VI). Zag haakjes staan en werkte ze weg. Kan niet goed verklaren waarom ze dit bij b) niet deed en bij d) wel. Komt er tijdens interview achter dat het makkelijker kan! (bijlage VII).</p> <p><i>Leerling B:</i> Identificeert de gemeenschappelijke factor! Geeft aan hier door te delen en dat dit een makkelijkere vergelijking oplevert (bijlage VI, VII en VIII).</p> <p><i>Leerling C:</i> Werkte in eerste instantie de haakjes uit (bijlage VIII). Komt er vervolgens achter dat beide kanten een gemeenschappelijke factor hebben en past antwoord aan! Herkent hierbij de juiste objecten (bijlages VI en VII).</p>		<p><u>g: +</u> Enkel de substitutiemethode wordt niet herkend. De overige vglen worden correct gegroepeerd en er wordt een link gelegd met voorgaande onderdelen! <u>Formatieve toets: +</u> Herkennt enkel de substitutiemethode maar gedeeltelijk. Heeft moeite tot een correcte schets te komen, in overeenstemming met het HLT. Groepeert de vergelijkingen nagenoeg correct en beschrijft goed de eerste stap.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Heeft bij het zien van wortels sterk de neiging te kwadrateren, in zowel het shift problem als op de formatieve toets. • Is op de formatieve toets in staat naar expressies te kijken als algebraïsche objecten en werkt niet direct haakjes uit, zoals blijkt uit opgave 9.
---	---	--	--	---	---

e	<ul style="list-style-type: none"> De leerlingen die er voor kiezen de haakjes uit te werken zullen beschrijven hoe ze dit aanpakken en hoe ze uiteindelijk termen van dezelfde graad in x groeperen (en mogelijk verwachten dat de termen van de laagste of hoogste graad tegen elkaar 'wegvallen') (of iets vergelijkbaars). De leerlingen die er voor kiezen de gemeenschappelijke factor te identificeren/splitsen zullen aangeven dat je twee aparte vergelijkingen krijgt die je afzonderlijk kunt oplossen (of iets vergelijkbaars). 	<p><i>Leerling A:</i> Geeft aan alle getallen/termen naar de linkerkant te zetten, zodanig dat je rechts nul krijgt (bijlage VI)</p> <p><i>Leerling B:</i> Beschrijft in detail de balansmethode. Gaat niet in op de twee afzonderlijke vergelijkingen (bijlage VI en VII)</p> <p><i>Leerling C:</i> Geeft aan de vergelijking gewoon op te lossen. Is niet veel meer over te vertellen (bijlage VI en VII).</p>		<p><i>Leerling C: 0/+</i> <u>a: 0</u> Komt inderdaad niet tot een correcte schets, terwijl de tabel juist wel als representatief kan worden beschreven. <u>b: 0</u> Werkt inderdaad geen haakjes uit, maar verwijst niet naar onderdeel a. <u>c: +</u> Stelt inderdaad de afzonderlijke factoren van $f(x)$ gelijk aan nul. <u>d: 0</u> Benoemt inderdaad de gemeenschappelijke factor, maar geeft geen uitleg. <u>e: -</u> Beschrijft niets.</p>	<p><i>Leerling C:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> Baseert zich bij het maken van schetsen op standaard procedures in plaats van op karakteristieken van het functievoorschrift. Reflecteert wel, maar brengt reflectieproces niet onder woorden en geeft geen uitleg, zoals blijkt uit onderdelen d, e en f. Is in staat een expressie als algebraïsch object te beschouwen, zoals blijkt uit onderdelen b, c en g en het inzicht tijdens het werken aan onderdeel f.
---	---	--	--	--	---

f	<ul style="list-style-type: none"> • Bij het oplossen van de vergelijking zullen de leerlingen die de haakjes uitwerken uiteindelijk vastlopen en zullen de leerlingen die de gemeenschappelijke factor hebben geïdentificeerd de twee resulterende vergelijkingen vlot oplossen. • Bij de reflectie zullen de leerlingen die de haakjes hebben uitgewerkt beseffen dat ze ergens de mist in zijn gegaan en hun denkproces heroverwegen. Dit zal zich uiten onder 'verbeterpunten'. Zij komen vervolgens tot het inzicht dat de haakjes uitwerken hier niet de handigste strategie is. • Bij de reflectie zullen de leerlingen die de gemeenschappelijke factor hebben geïdentificeerd vooral stil staan bij de sterke punten van hun strategie. 	<p><i>Leerling A:</i> Ziet bij de uitwerking van de haakjes dat een derde macht ontstaat en dit klopt niet. Wist het niet meer en had geen tijd voor de reflectie (bijlage VI en VII).</p> <p><i>Leerling B:</i> Lost de resulterende vergelijkingen vlot op (bijlage VI). Merkt bij de reflectie op dat de gekozen strategie de zaak vergemakkelijkte, maar is ook van mening dat ze in woorden meer op had kunnen schrijven! (bijlage VI en VII).</p> <p><i>Leerling C:</i> Komt er gedurende het onderdeel achter dat haakjes uitwerken niet nodig is. Lost slechts één van de twee resulterende vergelijkingen vlot op. Vindt reflectie overbodig (bijlage VI en VII).</p>		<p><u>f: 0</u> Lost 1 van de 2 resulterende vergelijkingen op en reflecteert niet.</p> <p><u>g: 0</u> Vergelijkingen 4 en 5 samen en 1 en 10 samen worden inderdaad gegroepeerd. Vergelijking 3 wordt inderdaad niet herkend. De substitutiemethode wordt maar gedeeltelijk herkend en de terugreken methode wordt niet herkend.</p> <p><u>Formatieve toets: 0/+</u> Komt makkelijk tot correcte schetsen, i.t.t. het HLT, en herkent de substitutiemethode maar gedeeltelijk. Groepeert de vergelijkingen met gemeenschappelijke factor wel correct en beschrijft correct de eerste stap!</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Is gedurende het shift problem steeds minder geneigd haakjes uit te werken, wanneer onderdelen d en g vergeleken worden. • Maakt bij g gebruik van a. • Heeft bij het zien van wortels in onderdeel g van het shift problem en op de formatieve toets sterk de neiging deze weg te willen werken. • Is op de formatieve toets in staat naar expressies te kijken als algebraïsche objecten en werkt niet direct haakjes uit, zoals blijkt uit opgave 9.
---	---	--	--	--	--

g	<ul style="list-style-type: none"> De leerlingen zullen, gebruikmakend van de verkregen inzichten bij de onderdelen a), b) en c), de vergelijkingen 4 en 5, waarbij een aantal factoren vermenigvuldigd nul geeft, vlot groeperen tot een oplossingsstrategie. Ze zullen als eerste stap aangeven dat de afzonderlijke factoren gelijk moeten worden gesteld aan nul (of iets vergelijkbaars). De leerlingen zullen, gebruikmakend van de verkregen inzichten bij d), e) en f), de vgl 1 en 10, waarbij een gem. factor geïdentificeerd kan worden, groeperen tot een oplossingsstrategie. Ze zullen als eerste stap aangeven dat je de gemeenschappelijke factor apart moet nemen (of iets vergelijkbaars). De leerlingen zullen naar verwachting echter niet inzien dat vergelijking 7, na herschrijven, ook met deze oplossingsstrategie kan worden opgelost en zullen hier een aparte oplossingsstrategie voor bedenken. 	<p><i>Leerling A en C (in groepsverband):</i> Groeperen vgl 4 en 5 tot een oplossingsstrategie! Herkennen daarbij de juiste objecten. Leerling A formuleert eerste stap als “antwoord uit de haakjes halen” en leerling C legt de link met a) (bijlage VI en VII). Groeperen vgl 1 en 10 tot een oplossingsstrategie! Herkennen niet dat vgl 7 ook bij deze strategie hoort. Herkennen de juiste objecten en gemeenschappelijke factor. Formuleren eerste stap als “beide kanten delen door iets” (bijlage VI, VII en VIII). Herkennen de substitutiemethode nergens (bijlage VI). Leerling C herkent substitutie tijdens interview! Herkennen vergelijking 6 als een “gewoon uitrekenen” vergelijking (bijlage VI en VII).</p>			
---	--	--	--	--	--

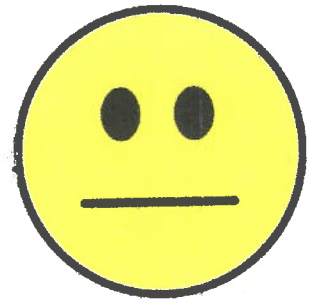
	<ul style="list-style-type: none"> • De leerlingen zullen, gebruikmakend van voorkennis en de verkregen inzichten bij a) t/m f) om soms de neiging direct haakjes uit te werken te onderdrukken, de vergelijkingen 2 en 3 groeperen als vergelijkingen die met de substitutie- of bordjesmethode kunnen worden opgelost. Als eerste stap zullen zij aangeven het 'bordje' te vervangen door een nieuwe variabele (of iets vergelijkbaars). • De leerlingen zullen op basis van hun voorkennis de vergelijkingen 6, 8 en 9 groeperen tot een oplossingsstrategie. Als eerste stap zullen ze aangeven dat óf x apart moet worden gezet óf alle termen zonder x naar de andere kant moeten worden gebracht (of iets vergelijkbaars). 	<p>Hebben bij het zien van wortels sterk de neiging deze weg te willen werken (bijlage VI en VII).</p> <p><i>Leerling B (in groepsverband):</i> Groepeert vgl 4 en 5 en legt link met grafieken onderdeel a)! (bijlage VI en VII) Groepeert vgl 1 en 10 en legt link met onderdeel d)! Herkent echter niet dat vgl 7 ook bij deze strategie hoort en vindt vgl 3 wel soortgelijk (bijlages VI en VII). Herkent de substitutiemethode nergens (bijlage VI). Groepeert vgl 6, 8 en 9! Formuleert wat ze gemeenschappelijk hebben als 'machtswortel trekken' (bijlages VI, VII en VIII). Heeft bij het zien van wortels sterk de neiging te kwadrateren (bijlage VI en VII).</p>			
--	---	---	--	--	--

SHIFT PROBLEM: VERGELIJKINGEN OPLOSSEN

The smart way to solve equations!

Jeroen Maes, 3021068

Context:



Weten-dat



Weten-
waarom

Onderzoeksvraag

In hoeverre verminderen veelvoorkomende problemen die leerlingen hebben met het oplossen van vergelijkingen tijdens en na het werken aan het shift-problem?
Voorbeelden problemen: **schetsen maken, procesdenken, haakjes altijd uitwerken, wortels altijd kwadrateren.**

Context voor oplossing
shift-problem-lesson



samenwerken in groepjes



aangepaste opgaves

Onderzoek:

Shift problem

Stel dat je onderstaande 10 vergelijkingen op zou moeten lossen. Welke vergelijkingen zou je met dezelfde strategie oplossen? Wat zou daarbij je eerste stap zijn? Gebruik de tabel op de uitwerkbijlage voor je uitwerking.

- $(5x + 4)\sqrt{x - 4} = (x - 8)\sqrt{x - 4}$
- $\sqrt{x + 1} + \frac{5}{\sqrt{x+1}} = 6$
- $(x - 3)^2 - 5(x - 3) - 14 = 0$
- $(x - 1)(x + 3)(x - 4) = 0$
- $(x^2 - 6)(x + 7) = 0$
- $4 + 5x^3 = 40$
- $\frac{x+1}{\sqrt{3x}} = \sqrt{x+1}$
- $(x^2 + 1)^2 = 40$
- $(6x - 5)^3 = 8$
- $(x^2 - 7x)8x = (x^2 - 7x)3x$

Oplossingsstrategie	Zelf bedachte naam voor de strategie	Bijbehorende vergelijking-nummers	Eerste stap bij oplossen
A			
B			

3 focusleerlingen

Methode

wis: 9½



Lln C

wis: 7



Lln B

wis: 5



Lln A

Opbrengsten:

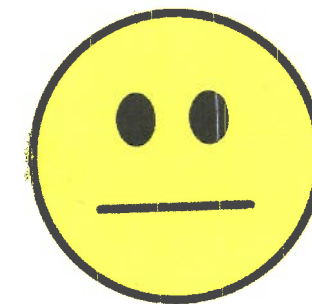
Conclusies



Problemen die verminderen:

- haakjes altijd uitwerken
- procesdenken

Problemen die niet verminderen:



- wortels kwadrateren
- schetsen maken zonder GR

weten-waarom lln C ≈ weten-waarom lln B

Discussie

Er is weinig verband tussen behaalde cijfers voor conventionele toetsen en het weten-waarom van leerlingen.