Universiteit Utrecht
Master Onderzoek

Het begrip van kansrekening bij basisschoolleerlingen.

Een bijdrage aan de ontwikkeling van een nieuw model voor het scoren van de redenering van kinderen bij het oplossen van kans gerelateerde taken.

Nienke Jansen
3186318

Clinical Child and Adolescent Psychology

19 juni 2020

Supervisor: Jan Boom
Tweede beoordelaar: Nagila Koster

Abstract

Chance, probability, and uncertainty have a substantial influence on our day to day life. Despite the central importance of these concepts, it is clear that children (and many adults) often have great difficulty in thinking rationally about, and quantifying, probability. Will understanding of probability increase if education on this subject starts at a younger age? The Dutch government is planning on implementing a probability curriculum in primary schools across the Netherlands, therefore we researched the understanding of chance and probability concepts in elementary school students. In this microgenetic study 131 children from groups four, six and eight participated weekly, for 4 weeks in a spinner task. The expectation was that the older the child gets, the more advanced their strategies and their level of thinking regarding probability will be. Additionally, we expected an improvement in understanding probability over four weeks time. To test these hypotheses, the raw data was scored by *the conceptual framework* of Metz (1998) and *the levels of understanding randomness* of Boom (2020). For this study we extended the new model to make it more suitable to the task used in this study. These two methods were compared to see which method provides more useful results and is easier to work with. The results showed that the older children do use more advanced strategies in their level of thinking. In addition, data showed an improvement in the children's level of thinking over the four weeks. Furthermore, Boom's model proved subjectively easier to work with, but didn't show a clear distinction from Metz' model. Future research may build on this study to eventually inform educational programs on adding probability to their elementary math curriculum.

Samenvatting

Kans, waarschijnlijkheid en onzekerheid hebben een grote invloed in ons dagelijks leven. Desondanks hebben kinderen (en veel volwassenen) vaak grote moeite om kans- en waarschijnlijkheidsconcepten te bevatten. Zullen we een beter kansbegrip ontwikkelen wanneer er al op jongere leeftijd over deze onderwerpen onderwezen wordt? In Nederland ligt nu een nieuw kans en statistiek curriculum voor het rekenonderwijs op basisscholen op de planken, daarom hebben we het begrip van kans- en waarschijnlijkheidsconcepten onderzocht bij basisschoolleerlingen. In deze microgenetische studie namen 131 kinderen uit de groepen vier, zes en acht wekelijks, gedurende vier weken, deel aan een spinnertaak. Verwacht werd dat hoe ouder kinderen worden, hoe geavanceerder hun strategieën en hun denkniveau met betrekking tot kans zullen zijn. Daarnaast verwachtten we een verbetering in het begrip van kans over de vier weken. Deze hypothesen zijn getest door de ruwe data te scoren met behulp van *het conceptuele raamwerk* van Metz (1998) en *de niveaus van waarschijnlijkheidsbegrip* van Boom (2020). Voor dit onderzoek is het nieuwe model uitgebreid om het passend te maken voor de taak in deze studie. De twee modellen zijn vergeleken om te zien welke methode meer bruikbare resultaten oplevert en makkelijker werkbaar is. De resultaten laten zien dat oudere kinderen inderdaad geavanceerdere strategieën gebruiken en een hoger denkniveau hebben. Daarnaast is een verbetering in het denkvermogen van de kinderen over de vier weken gevonden. Bovendien bleek het model van Boom subjectief fijner om mee te werken, maar liet het geen duidelijke verschillen zien ten opzichte van het model van Metz. Vervolg onderzoek zou kunnen voortbouwen op deze studie om uiteindelijk advies te kunnen geven over de implementatie van lessen over kans in het basisonderwijs.

Veel dingen in ons leven zijn volledig voorspelbaar; als je je teen stoot doet het pijn en als je onder de douche stapt word je nat. Maar er zijn ook zoveel dingen in ons leven die niet duidelijk te voorspellen zijn, zoals het weer en of je nieuw uitprobeersel in de keuken wel lekker gaat zijn. Ons leven hangt aan elkaar van onzekere gebeurtenissen en we ervaren dit in veel gevallen als lastig, omdat we niet weten waar we aan toe zijn. Daarnaast maken we juist ook gebruik van die onvoorspelbaarheid, omdat het zorgt voor eerlijkheid; kijk naar de toss voor een voetbalwedstrijd, het spelen van een leuk bordspel, of het maken van een eerlijke verdeling van een groep mensen. Toch willen we in veel gevallen de wereld zoveel mogelijk voorspelbaar maken. Tegenwoordig kunnen we berekeningen maken om de waarschijnlijkheid van een bepaalde gebeurtenis te bepalen, bijvoorbeeld de kans op regen, of op bijwerkingen van een medicijn. Willekeur en onzekerheid zijn hoofdbegrippen in de statistiek en spelen daarmee een grote rol in wetenschap en onderzoek (Bryant & Nunes, 2012). Waarschijnlijkheid wordt gedefinieerd als de kwantificering van kans en één van de wiskundige componenten van waarschijnlijkheid is willekeur. Om willekeur volledig te kunnen begrijpen, moet je kunnen begrijpen dat een alleenstaande willekeurige gebeurtenis volledig onvoorspelbaar is, maar dat een combinatie van willekeurige gebeurtenissen ervoor kan zorgen dat er een voorspelbare structuur ontstaat (Metz, 1998). Deze concepten en hun relaties blijken voor kinderen én volwassenen erg lastig (Bryant & Nunes, 2012).

Eén van de eerste dingen die baby's leren is het effect van oorzaak en gevolg: als ik tegen dit belletje aan sla, maakt het geluid, als ik huil komt iemand me troosten. Willekeur is moeilijker te bevatten. Piaget en Inhelder (1975) stelden dan ook dat het brein eerst logica wil vinden en kans en waarschijnlijkheid secundaire concepten zijn. Kinderen hebben daarom de neiging om logische verwachtingen te generaliseren en toe te passen op alle gebeurtenissen in het leven. Metz (1998) en Langrall en Mooney (2005) vonden in hun onderzoek dat jonge kinderen de neiging hebben om orde en regelmaat toe te passen in kans-gerelateerde situaties. Dit deterministische denken wordt ook vaak terug gezien bij volwassenen en kans kwesties.

Kinderen in Nederland worden pas op de middelbare school onderwezen in kansrekening. De vraag die door veel wetenschappers in dit veld wordt gesteld is: helpt het om beter grip kunnen krijgen op concepten als kans en willekeur wanneer we hier eerder in onze ontwikkeling mee in aanraking komen door kansrekening gerelateerde taken toe te voegen aan het curriculum van het rekenonderwijs op basisscholen? Uit eerder onderzoek blijkt progressie in het begrip van kans en willekeur bij jonge kinderen, wanneer ze herhaaldelijk bezig zijn met kans-gerelateerde taken (Kafoussi ,2004). In delen van Australië, Canada, Engeland en New South Wales worden al dergelijke programma's aangeboden in het basisonderwijs (Nikiforidou & Pange, 2010), maar berichten hierover zijn wisselend. Threlfall (2004) beschrijft hoe het project in Engeland en New South Wales weer is teruggedraaid. Voor de simpele kansrekening taken die daar werden aangeboden was geen wiskundig begrip nodig, waardoor niet betrouwbaar kon worden gemeten of het curriculum daadwerkelijk leidde tot vooruitgang in begrip in kansrekening. Leeftijd speelde hierbij een rol, omdat moeilijkere taken niet passend zouden zijn bij de leeftijd door het te hoge niveau van wiskunde. Er lijkt geen consensus te zijn in wat kinderen precies begrijpen van kans en wat er voor nodig is om deze specifieke ideeën aan te leren. In Nederland ligt nu een herzien curriculum rekenonderwijs, waar statistiek en kans in zijn opgenomen, op de planken. Dit curriculum zal binnenkort geïmplementeerd worden in het basisonderwijs (curriculum.nu, 2019). Daarom is het nuttig om onderzoek te doen zodat antwoord kan worden gegeven op een aantal belangrijke vragen: Wat begrijpen kinderen op welke leeftijd van kans? Hoe veranderen deze concepten over leeftijd? Op welke leeftijd kunnen we starten met het aanbieden van kansrekening? En wat is daarin de beste manier om dit aan te leren?

Veel geleerden en onderzoekers hebben zich in de afgelopen eeuw over kansrekening en deze vragen ontfermd. In 1975 publiceerden Piaget en Inhelder (1975) hun baanbrekende onderzoek naar het begrip van kansrekening bij kinderen. Met ingenieuze taken heeft Piaget het begrip van kansrekening bij kinderen kunnen meten en een onderverdeling kunnen maken in leeftijd waarop kinderen kans concepten beginnen te begrijpen: In het prelogisch-intuitief stadium (4-7 jaar) hebben kinderen volgens hem geen intuïties voor willekeur of kans concepten en waarschijnlijkheid gevormd. In het concreet-operationeel stadium (8-10 jaar) beginnen de kinderen deze concepten te begrijpen en in het formeel-operationeel stadium (11-12 jaar) zijn deze concepten volledig ontwikkeld (Piaget & Inhelder, 1975). Volgens Piaget's ontwikkelingsmodel kunnen kinderen een onderscheid maken tussen zekerheid en onzekerheid vanaf een jaar of 7. Een andere belangrijk onderzoeker uit dezelfde tijd, Fischbein (1975), stelt dat kleuters van 3 tot 6 dit onderscheid al kunnen maken en kansen kunnen inschatten. Hij stelt dat intuïtie een belangrijke rol in speelt in het geven van oordelen over waarschijnlijkheid, maar door sociale invloeden en huidige school curricula, zou alleen het deterministische aspect zijn ontwikkeld. Er lijkt dus een intuïtief gevoel voor kansrekening te bestaan waarin kinderen onzekerheden herkennen en accepteren, maar deterministische verklaringen over-attribueren. Dit is ook terug gevonden in meerdere onderzoeken bij zowel volwassenen als kinderen (e.g., Jones, Langrall, Thornton, & Mogill 1997; Kahneman & Tversky, 1982; Konold, 1991; Metz, 1998; Shaughnessy, 1992). Dit ondersteunt de hypothese dat het vroegtijdig aanbieden van kansrekening een positief effect zal hebben op de betreffende vaardigheden.

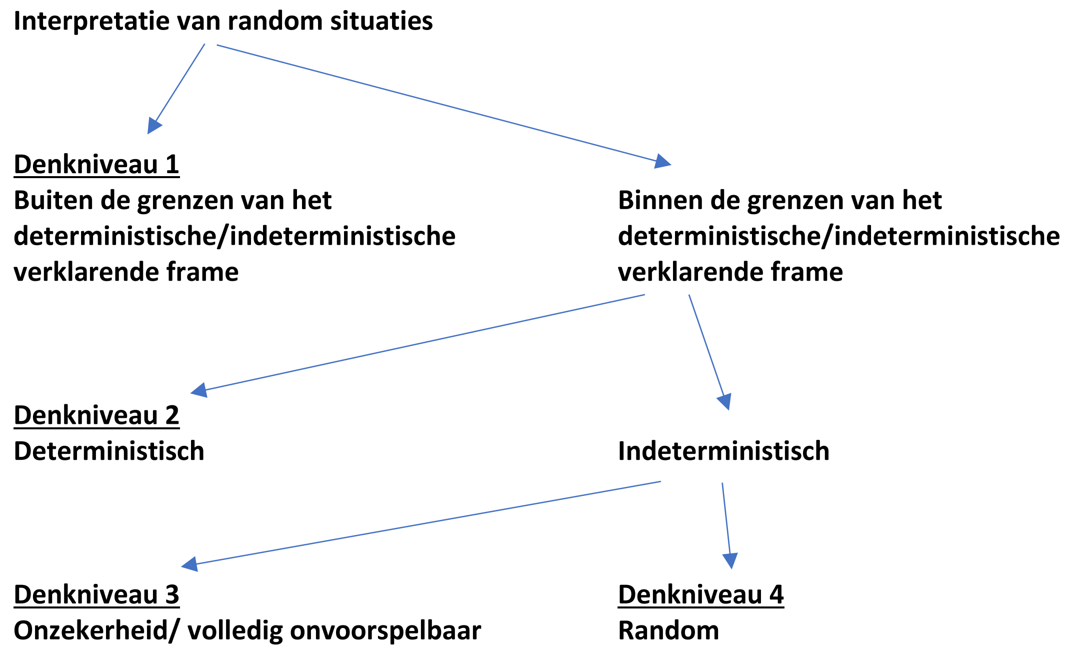
Ook in recente onderzoeken wordt afgevraagd of Piaget het begrip van kansrekening bij hele jonge kinderen niet heeft onderschat. Deze onderzoeken concludeerden dat kinderen voor de basisschoolleeftijd al onvoorspelbare situaties kunnen herkennen. Zij kunnen bijvoorbeeld onderscheid maken tussen meest en minst waarschijnlijke situaties (Way, 2003; Pange, 2003; Nikiforidou & Pange, 2007) en de waarschijnlijkheid van een gebeurtenis begrijpen (Jones et al., 1997; Falk & Wilkening, 1998). Er zijn zelfs onderzoeken die zeggen dat baby's al enige intuïtieve verwachtingen vormen over de relatieve waarschijnlijkheid tussen 2 mogelijke gebeurtenissen (Teglas et al, 2007; Xu and Denison, 2009; Xu and Garcia, 2008). In het laatstgenoemde onderzoek werden dozen gepresenteerd aan baby's met rode en witte ballen. Wanneer de onderzoeker rode ballen uit een doos trok met voornamelijk witte ballen, lieten de baby's een verraste reactie zien. Hieruit bleek dat ze een witte bal verwachtten na het zien van een meerderheid aan witte ballen.

Er is ondertussen veel bewijs dat probabilistisch denken gelinkt is aan de cognitieve ontwikkeling en dat kinderen zich hierbij door verschillende stadia van begrip in kansrekening bewegen (Way, 2003). Piaget (1975), maar ook recentere onderzoekers hebben modellen ontwikkeld om deze stadia in niveaus onder te brengen (Jones et al., 1997; Way, 2003; Metz, 1998). Ondanks de vele onderzoeken blijkt nog steeds onenigheid tussen onderzoekers over de aard van het denken in elke fase en de leeftijdscategorieën die elke fase omvatten. Dit suggereert dat er mogelijk nog geen nauwkeurige beschrijving is van de ontwikkeling in probabilistisch denken. Juist nu kansberekening opgenomen kan worden in het curriculum van basisscholen in Nederland is het belangrijk een heldere en nauwkeurige beschrijving te hebben om aan te toetsen.

Dit onderzoek is gebaseerd op eerder onderzoek van Metz (1998). Zij heeft een model opgesteld om het strategiegebruik van kinderen tijdens kansrekening gerelateerde taken in kaart te brengen (zie figuur 1). Dit conceptuele raamwerk is ontstaan uit wiskundige en cognitieve analyse van de concepten willekeur en waarschijnlijkheid.

Figuur 1

Het conceptuele raamwerk van Metz



Voor de spinner taak, waar het huidige onderzoek op gebaseerd is, bestaan vier denkniveaus, die elk onderverdeeld zijn in één of meerdere categorieën. Denkniveau 1 gaat ervan uit dat dat het kind de mogelijke patronen en de onzekerheid niet herkent. Dit is onderverdeeld in de categorieën: *het verwerpen van waarschijnlijkheid*, waarbij ongelijke kansen bij ongelijke kleuren niet worden gezien, *persoonlijke voorkeur*, waarbij het kind een keuze maakt op basis van bijvoorbeeld zijn lievelingskleur en *op waarneming gebaseerde redenering,* waarbij het kind zijn antwoord baseert op patronen die eerder plaats hebben gevonden. Bij denkniveau 2 hoort een deterministische denkwijze waarbij de onzekerheid niet wordt gezien, maar de mogelijke patronen wel. Dit niveau bestaat uit *persoonlijke controle,* waarbij het kind bijvoorbeeld de manier van draaien bepalend acht voor de uitkomst en *deterministische verwachtingen,* waarbij het kind op basis van de kleurverdeling de uitkomst zeker denkt te voorspellen. Bij denkniveau 3 wordt de onzekerheid wel begrepen, maar de mogelijke patronen niet. Hieronder valt *spinner gezien als een onvoorspelbare generator,* waarbij het kind de toevalsfactor ziet, maar geen aandacht besteedt aan de invloed van de kleurenverhoudingen. Denkniveau 4 is het meest gevorderde denkniveau, waarbij kinderen zowel de mogelijke patronen als de onzekerheid zien. Hieronder valt de categorie onderliggend aan randomness: *waarschijnlijkheid,* waar kinderen de willekeur en de waarschijnlijkheid op basis van de kleurenverhoudingen zien. Het model gaat ervan uit dat een individu de denkniveaus gradueel doorloopt.

In het huidige onderzoek willen we een nieuw model voorstellen om het begrip van kansrekening bij kinderen beter in kaart te brengen. Boom (2020) stelt drie levels voor die relevant zijn voor het huidige onderzoek, beginnend bij level 0: *geen begrip*, waarbij het kind geen systematische gedachten over kans heeft, geen waardering heeft voor willekeur en je het kind van alles kan wijsmaken. Een kansspel is voor hem magisch. In level 1 is *begrip gefocust op onvoorspelbaarheid*, waarbij het kind begrijpt dat er in een enkele kans proef meerdere uitkomsten zijn en dat er geen manier is om zeker te weten welke uitkomst zal worden gerealiseerd. Het kind begrijpt ook dat dit eerlijkheid in de hand werkt. En level 2: *voorspelbaarheid van de meest waarschijnlijke uitkomst*. Het kind begrijpt dat, hoewel er meerdere uitkomsten zijn en er geen manier is om te weten welke uitkomst zeker zal zijn, sommige uitkomsten waarschijnlijker zijn dan anderen. Dit model is ontwikkeld voor andere kans gerelateerde taken (Arbon, 2020) en is daarom aangepast zodat het ook toepasbaar is op de huidige spinner-taak. Op basis van het eerdergenoemde onderzoek naar de kans gerelateerde deterministische ontwikkeling bij kinderen (Fischbein, 1975) zijn twee niveaus toegevoegd aan het bestaande model: level 0,5 en level 1,5, om een nauwkeurigere indeling te bewerkstelligen. Level 0,5: Kinderen zien de onvoorspelbaarheid van een kans taak nog niet, ze denken dat de uitkomst voorspelbaar is, vaak door externe factoren als, ‘*het hangt af van hoe hard je draait*’ of ‘*de vorige keer was het ook zo, dus is het nu weer zo*’. Level 1,5: Kinderen laten zien dat ze de onvoorspelbaarheid snappen, en dat ‘geluk’ een rol speelt, maar lijken dit in situaties met ongelijke kansen, zoals een spinner met driekwart rood en een kwart geel, niet meer mee te nemen in hun overwegingen, waardoor ze zeker weten dat ze de uitkomst kunnen voorspellen. Dit model van Boom (2020) is gebruikt voor de scoring.

Bovenstaande modellen van Metz (1998) en Boom (2020) zullen worden vergeleken in het huidige onderzoek om te kijken welke methode meer werkbaar is en welke methode de meeste bruikbare resultaten oplevert. Daarmee wordt bijgedragen aan het opstellen van het nieuwe scoringsmodel van Boom (2020). Met deze modellen zal het begrip van kansrekening bij basisschool kinderen uit de groepen 4, 6 en 8, worden onderzocht door de strategieën in kaart te brengen die zij gebruiken bij het spelen van een kans gerelateerd spel met een spinner. De volgende twee vragen, met de daarbij horen de hypothesen zijn gesteld: Neemt het begrip van kans en waarschijnlijkheid toe met leeftijd? We verwachten dat, hoe ouder het kind wordt, hoe geavanceerder hun strategieën en hoe hoger hun denkniveau zal zijn in het begrip van kansrekening. Deze veronderstelling is gebaseerd op de bevindingen uit de onderzoeken van Jones, Way en Metz, waarin bewezen is dat probabilistisch denken gelinkt is aan cognitieve ontwikkeling en kinderen zich gradueel door meerdere stadia van kansbegrip bewegen (Jones et al., 1997; Way, 2003; Metz, 1998). De tweede vraag die wij willen beantwoorden is: Zullen het begrip en de denkstrategieën van de kinderen op het gebied van kansrekening verbeteren over vier wekelijkse sessies? We verwachten een groei over tijd te zien in deze vier weken. Dit is gebaseerd op eerder onderzoek van Kafoussi (2004) die zegt dat kinderen steeds meer begrijpen van kans gerelateerde taken door hier herhaaldelijk mee bezig te zijn. In dit onderzoek zal daarom gebruik gemaakt worden van een microgenetisch ontwerp. Dit houdt in dat er herhaalde metingen worden gedaan bij dezelfde personen over een bepaalde periode van tijd (Flynn, Pine & Lewis, 2006).

Methode

Participanten

In totaal hebben 131 leerlingen uit de groepen 4, 6 en 8 van twee verschillende reguliere basisscholen deelgenomen aan dit onderzoek (zie tabel 1 voor de demografische gegevens).

Tabel 1
Demografische gegevens participanten

Groep	Aantal			Leeftijd	
	Jongen	Meisje	Totaal	*M*	*SD*
4	27	19	46	8,25	0,49
6	23	19	42	10,12	0,45
8	20	23	43	12,03	0,62
Totaal	70	61	131	10,13	1,63

Werving participanten

Voor het werven van de participanten zijn 5 basisscholen in de omgeving van Amersfoort benaderd voor deelname aan dit onderzoek door middel van een brief (zie bijlage A). Daarvan hebben twee basisscholen toestemming gegeven voor het uitvoeren van het onderzoek: een openbare basisschool in Leusden en een katholieke basisschool in Amersfoort. Na goedkeuring van de scholen is een toestemmingsformulier naar ouders gestuurd (zie bijlage B).

Voor een brede leeftijdsrange én omdat de kinderen zelfstandig moesten kunnen schrijven, is gekozen voor de groepen 4, 6 en 8. Door drie groepen te nemen kan het begrip van kansrekening tussen de groepen worden vergeleken het denkniveau over leeftijd worden bekeken.

Onderzoeksdesign

In dit onderzoek is gebruik gemaakt van een microgenetisch design. Dat wil zeggen dat hetzelfde onderzoek herhaaldelijk is uitgevoerd om daarin verandering te observeren (Flynn, Pine & Lewis, 2006). Voor veel studies is leren door herhaling een verstorende factor in zuiver onderzoek, maar in deze studie wilden we juist dat de kinderen door deze herhaling beïnvloed zouden worden. Door dit design te gebruiken wordt een snelle natuurlijke ontwikkeling gestimuleerd, waardoor de kinderen leren door oefening en ervaring, zonder feedback of scholing, met de verwachting dat zij beter zullen presteren bij de volgende meting (Fyfe en Rittle-Johnson, 2016). In deze opzet zijn de metingen wekelijks verricht, gedurende 4 weken. Over deze vier weken is gepoogd verandering te registreren in het gebruik van strategieën in kansrekening bij leerlingen uit de groepen 4, 6 en 8.

Meetinstrumenten

In dit onderzoek is gebruik gemaakt van twee handgemaakte kleurendraaischijven met een diameter van 50,5 cm. De draaischijven zijn gebaseerd op een Pim Pam Pet spinner (zie bijlage C). Ze zijn goed uitgebalanceerd zodat ze verticaal opgehangen konden worden om zichtbaar te zijn voor alle leerlingen in het lokaal. Beide draaischijven bestaan uit twee kleuren. Draaischijf 1 is geschilderd in twee gelijke helften en draaischijf 2 heeft een driekwart/kwart verdeling. Aan de voorkant van de schijf met de kleuren is een neutrale schijf bevestigd met een kleine ronde uitsparing erin, zoals bij Pim Pam Pet. Bij het spel is verder gebruik gemaakt van twee uitgeknipte poppetjes in kleuren corresponderend met de kleuren op de draaischijven. Op het schoolbord is voor elk poppetje een ladder met 8 sporten getekend door de testleider, met bovenaan in het midden een tekening van een prinses (zie bijlage C). De testleider beschikte over een lijst met vragen die hardop zijn voorgelezen voor de klas. Elke week zijn de draaischijven in andere kleuren geverfd en de poppetjes in de desbetreffende corresponderende kleuren uitgeknipt om het spel afwisselend te maken en de kinderen gemotiveerd te houden.

Procedure

Alle leerlingen uit de groepen 4, 6 en 8 hebben deelgenomen aan het onderzoek, een aantal uitzonderingen daargelaten door ziekte of andere verplichtingen van een individuele leerling, waardoor zij minder testmomenten hebben gekend. De kinderen zijn in de maanden mei en juni van 2013 gedurende 4 weken elke week getest op een vast tijdstip gekozen in overleg met de groepsleerkacht. Het afnemen van de individuele momenten duurde ongeveer 30 minuten. De afname vond klassikaal plaats in het eigen klaslokaal van de betreffende groepen. De tafels waren ingedeeld in groepjes waarin de kinderen op hun eigen plaats zijn blijven zitten tijdens het onderzoek. De testleider stond voor de klas, waar ook de grote draaischijven zijn opgehangen. De taak is gepresenteerd in de vorm van een spel. Zo is geprobeerd de interesse en concentratie van de kinderen te waarborgen.

Het spel

Het spel begon met het tonen van de twee draaischijven waar het voorste egale vlak vanaf was gehaald. Draaischijf 1 bestond uit twee gelijke vlakken, bijvoorbeeld 50% blauw en 50% groen. Draaischijf 2 bestond uit 75% blauw en 25% groen. De uitleg was als volgt: De twee poppetjes moeten zo snel mogelijk de ladder op om de prinses te redden. De eerste vragen die gesteld werd door de testleider waren: *'Als het blauwe poppetje als eerste bij de prinses moet zijn, met welke schijf wil je dan spelen?' 'En waarom?'*.

Vervolgens zijn de egale vlakken op de schijven bevestigd en werd het spel los gespeeld met de kinderen die schijf 1 kozen. Kinderen die schijf 2 kozen zijn gevraagd de klas uit te gaan. Daarna werden de kinderen die schijf 2 kozen opgehaald en werd het spel met hen gespeeld, terwijl de andere kinderen buiten het klaslokaal wachtten. De testleider draaide aan de schijf en de kleur waarop de uitsparing uitkwam gaf aan welk poppetje een stapje omhoog mocht op de ladder. Degene die als eerste 8 stappen had gezet op de ladder was de winnaar.

Voor, tijdens en na het spel kregen de kinderen een aantal aan kansrekening gerelateerde vragen voorgelegd. Voor de uitleg en een overzicht van deze vragen, zie bijlage D. De kinderen werd gevraagd individueel hun antwoorden op te schrijven op een van te voren uitgedeeld lijntjespapier.

Scoring

De A4'tjes met de antwoorden van de proefpersonen zijn gesorteerd per groep en afnamemoment. De kinderen is gevraagd de geboortedatum, de eerste letter van de naam en het geslacht op te schrijven, zodat de individuele antwoorden over de vier weken gepaard konden worden, terwijl anonimiteit gewaarborgd bleef. De antwoorden zijn daarna ingevoerd in Excel en per cluster vragen gescoord. De vragen zijn geclusterd, omdat niet alle vragen individueel gescoord konden worden. Sommige antwoorden gaven op zichzelf niet genoeg informatie voor een score, maar wel in combinatie met een vervolg vraag (zoals '*waarom denk je dat?'*). Daarnaast zijn niet alle vragen meegenomen in de scoring, omdat aan sommige antwoorden geen betekenis kon worden gegeven (zoals een ja/nee antwoord op de vraag '*is dit eerlijk?*'). De antwoordclusters hebben een score toegekend gekregen aan de hand van de niveaus van *het conceptuele raamwerk* van Metz (1998) en *de niveaus van waarschijnlijkheidsbegrip* van Boom (2020), zodat de bruikbaarheid van deze twee scoringsmethoden vergeleken kon worden na analyse. Met behulp van een formule is voor de twee methoden een eindscore per afnamemoment per kind tot stand gekomen, zie bijlage D voor de uitwerking van deze scoring.

Zoals in de inleiding besproken is, geeft Metz vier denkniveaus aan, met daarbinnen meerdere categorieën. In bijlage E wordt hiervan een overzicht gegeven, inclusief antwoordvoorbeelden van de kinderen. Daarnaast zijn de antwoorden gescoord volgens de levels van begrip van Boom. In bijlage F wordt een uitgebreid overzicht met antwoordvoorbeelden gegeven van Boom's niveaus.

Data analyse

Metz gebruikt in haar *conceptuele raamwerk* vier denkniveaus die verder zijn uitgewerkt in zeven verdiepende categorieën. Voor de analyse zijn deze categorieën niet expliciet meegenomen en zijn haar vier globale denkniveaus vergeleken met de niveaus van Boom, omdat het model van Boom geen verdiepende categorieën kent.

Onderzoeksvraag 1: Neemt het begrip van kans en waarschijnlijkheid toe met leeftijd?

Om dit te meten is gekozen om het eerste afnamemoment te nemen (week 1), omdat dit het basis niveau van de kinderen aangeeft, zonder dat de invloed van oefening intervenieert. Er is een frequentietabel opgesteld waarin de scores op alle levels voor alle groepen in deze week zijn weergegeven voor het model van Boom en het model van Metz, ook is er een lijngrafiek gemaakt voor een duidelijke visuele weergave. Voor de analyse van deze vraag zijn verschillende combinaties van de groepen met elkaar vergeleken: de groepen 4,6 en 8, groep 4 met 6 en 8 en groep 8 met 4 en 6. De gegevens zijn geanalyseerd in SPSS met een Chi-kwadraat toets om te onderzoeken of er verschil aanwezig is in niveau van kansbegrip tussen de groepen. Voor de toets zijn de laagste levels samengevoegd (0; 0,5 en 1 voor Boom en 1 en 2 voor Metz), omdat deze levels maar weinig voorkwamen. Doordat de frequenties van de variabelen nu groot genoeg waren, kon valide worden getest.

Onderzoeksvraag 2: Zullen het begrip van kansrekening en de denkstrategieën van de kinderen verbeteren over vier wekelijkse sessies?

Om deze vraag te kunnen beantwoorden is gekeken naar een stijging in niveau voor alle groepen over vier weken. De verdeling van de niveaus over alle vier de weken is weergegeven in een frequentietabel. Daarnaast is een lijngrafiek opgesteld ter verduidelijking. Om statistisch te toetsen of er een significante verschillen aanwezig zijn, zijn meerdere Chi-kwadraat toetsen uitgevoerd in SPSS tussen week 1 en 2, week 2 en 3, week 3 en 4 en week 1 en 4. Vervolgens is dieper ingegaan op het eerste en laatste meetmoment, omdat we uiteindelijk willen weten of de kinderen verbeterd zijn in hun begrip van kansrekening na de vier weken. Uit een opgestelde kruistabel tussen die twee weken is af te lezen hoeveel leerlingen minimaal één niveau vooruit zijn gegaan in die tijd (af te lezen boven de diagonaal), hoeveel leerlingen constant zijn gebleven (af te lezen aan de diagonaal) en hoeveel er minimaal één niveau achteruit gegaan zijn (af te lezen onder de diagonaal). Vervolgens is hier een binomiale toets voor uitgevoerd via een formule in Excel (=binom.verd(aantal-gunstig;experimenten;kans-gunstig;cumulatief)). Hiermee is onderzocht of er een significant verschil is tussen het aantal kinderen dat minimaal één level is gestegen en het aantal kinderen dat minimaal één level is gedaald (Field, 2014), zodat kan worden gezien of er significant meer kinderen vooruit dan achteruit zijn gegaan in hun begrip. Daarnaast is de vooruitgang van de leerlingen per basisschoolgroep bekeken met binomiale toetsen. Tenslotte zijn op basis van de lijngrafiek nog een aantal binomiale toetsen uitgevoerd voor de weken 2 en 3.

Resultaten

Er is 4,9% aan ontbrekende waarden gevonden. Hiervan komt een heel klein deel door leerlingen die bepaalde antwoorden niet hebben ingevuld of omdat antwoorden onleesbaar waren. De scoring is gedaan per cluster vragen, daardoor konden genoeg clusters gescoord worden om voor elk kind een eindscore per week te berekenen en vormden deze incidentele ontbrekende waarden geen probleem. Het grootste deel ontbrekende data komt doordat er soms een leerling afwezig is geweest tijdens een afnamemoment. Geen enkele leerling is meer dan één keer afwezig geweest, waardoor iedereen altijd minimaal drie testmomenten heeft gekend.

Onderzoeksvraag 1: Neemt het begrip van kans en waarschijnlijkheid toe met leeftijd?

Om deze vraag te beantwoorden hebben we gekeken naar het eerste afnamemoment, week 1. In tabellen 2a en 2b zijn de frequenties van de niveaus per groep weergegeven voor het model van Metz en het model van Boom.

Tabel 2a
Niveaus van kansbegrip per groep over week 1

	Metz			
	Groep			
Niveau	4	6	8	Totaal
1	12	3	0	15
2	21	14	9	44
3	10	2	0	12
4	3	21	30	54
Totaal	46	40	39	125

Tabel 2b
Niveaus van kansbegrip per groep over week 1

	Boom			
	Groep			
Niveau	4	6	8	Totaal
0	8	1	0	9
0,5	7	3	2	12
1	9	2	0	11
1,5	19	14	8	41
2	3	20	29	52
Totaal	46	40	39	125

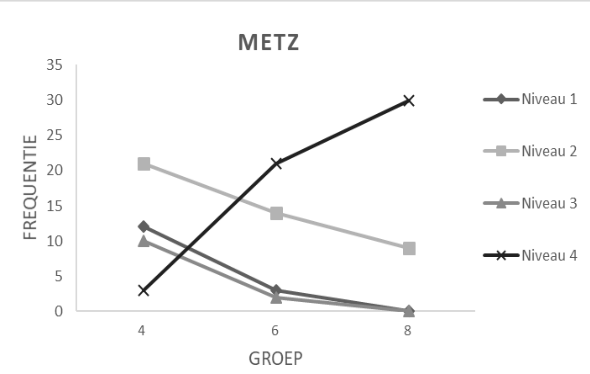
De groepen 4 (*n* = 46) en 6 (*n* = 40) en 8 (n = 39) zijn met elkaar vergeleken met behulp van een Chi-kwadraat toets: Metz, $\chi2$ (4) = 47.94, *p* = 0,001; Boom, $\chi2$ (4) = 48.04, *p* = 0,001. Dit betekent dat er een significant verschil is tussen de groepen 4, 6 en 8 in niveau van begrip van kansrekening voor beide modellen.

Vervolgens is nog een Chi-kwadraat toets uitgevoerd voor groep 4 (*n* = 40) tegenover de groepen en 8 en 6 (*n* = 79): Metz, $\chi2$ (1) = 39.91, *p* = .001; Boom, $\chi2$ (2) = 43.21, *p* = .001. De niveaus binnen groep 4 verschillen significant van de levels binnen de hogere groepen 6 en 8.

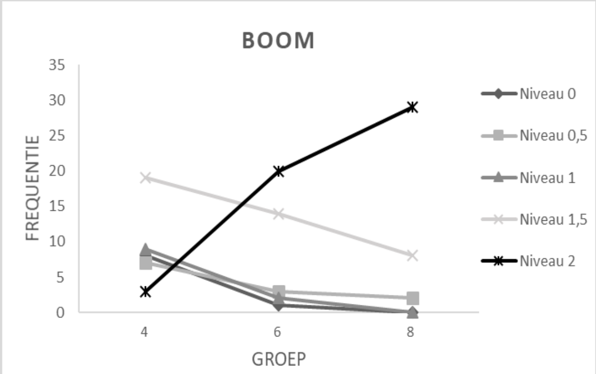
Hetzelfde is gedaan voor groep 8 (n = 39) tegenover de groepen 4 en 6 (n = 86): Metz, $\chi 2$ (1) = 26.27, *p* = .001; Boom, $\chi 2$ (2) = 26.51, *p* = .001. Ook hier verschillen de niveaus binnen groep 8 significant van de lagere groepen 4 en 6.

In figuur 1a en 1b is dit verschil in niveau duidelijk te zien voor beide modellen in een stijging over leeftijd van het hoogste niveau en een daling van de laagste niveaus.

Figuur 1a
Niveau verdeling per groep over week 1



Figuur 1b
Niveauverdeling per groep over week 1



Onderzoeksvraag 2: Zullen het begrip van kansrekening en de denkstrategieën van de kinderen verbeteren over vier wekelijkse sessies?

In onderstaande frequentietabellen (tabel 3a en 3b) is de verdeling te zien van de niveaus van kansbegrip voor alle groepen over vier weken voor het model van Boom en het model van Metz.

Tabel 3a
Verdeling van de niveaus over vier weken

	Metz				
	Week				
Niveau	1	2	3	4	Totaal
1	15	12	15	6	48
2	44	26	15	18	103
3	12	13	20	18	63
4	54	72	72	86	284
Totaal	125	123	122	128	498

Tabel 3b

Verdeling van de niveaus over vier weken

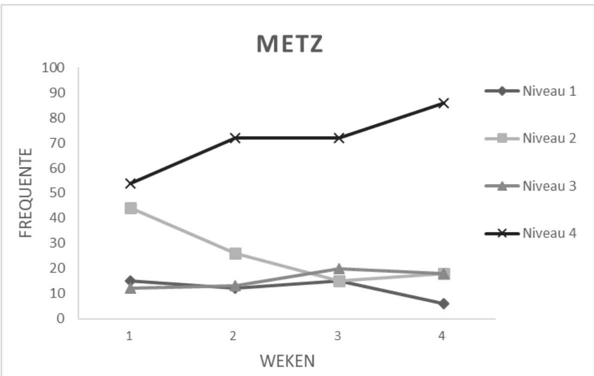
	Boom				
	Week				
Niveau	1	2	3	4	Totaal
0	9	12	11	4	48
0,5	12	4	21	16	53
1	11	11	20	15	57
1,5	41	27	8	11	87
2	52	69	62	82	265
Totaal	125	123	122	128	498

Uit de Chi- kwadraat toetsen blijkt een significant verschil tussen week 1 en week 2: Metz, $\chi 2$ (4) = 32.73, p = .001; Boom, $\chi 2$ (4) = 54.40, p = .001, tussen week 2 en week 3: Metz, $\chi 2$ (4) = 16.58, p = .002; Boom, $\chi 2$ (4) = 16.59, p = .002 en tussen week 3 en 4: Metz, $\chi 2$ (4) = 28.29, p = .001; Boom, $\chi 2$ (4) = 25.68, p = .001. Als laatste is de eerste week met de laatste vergeleken. Hier wordt ook een significant verschil gezien voor beide modellen: Metz, $\chi 2$ (4) = 10.59, p = .032; Boom, $\chi 2$ (4) = 17.92, p = .001. Dit betekent dat er een verschil zit in niveau van kansbegrip tussen alle weken.

In de lijngrafieken (figuur 2a en 2b) is dit verschil te zien in een stijgende lijn voor het hoogste niveau over de vier weken en een dalende lijn voor de laagste niveaus voor beide modellen.

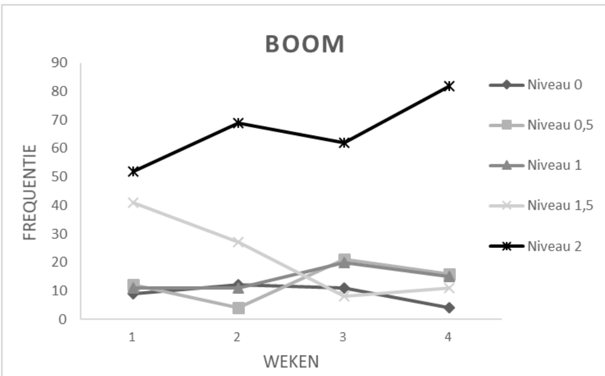
Figuur 2a

Niveauverdeling per week voor alle groepen samen



Figuur 2b

Niveauverdeling per week voor alle groepen samen



In kruistabellen 4a en 4b zijn de frequenties van de niveaus te zien van de eerste tegenover de laatste week. Uit deze tabel valt af te lezen dat, met het model van Metz, er 54 leerlingen minimaal één niveau omhoog zijn gegaan, 53 leerlingen op hetzelfde niveau zijn blijven hangen en 15 leerlingen minimaal één niveau zijn gedaald. Voor het model van Boom zijn de cijfers als volgt: 50 leerlingen zijn minimaal één niveau gestegen, 50 leerlingen zijn gelijk gebleven en 22 leerlingen zijn een niveau gedaald.

Tabel 4a
Niveauverdeling van week 1 ten opzichte van week 4

	Metz				
	Week 4				
Week 1	1	2	3	4	Totaal
1	**2**	7	3	2	14
2	1	**8**	4	31	44
3	2	0	**3**	7	12
4	1	3	8	**40**	52
Totaal	6	18	18	80	122

Tabel 4b
Niveauverdeling van week 1 ten opzichte van week 4

	Boom					
	Week 4					
Week 1	0	0,5	1	1,5	2	Totaal
0	**1**	3	2	1	1	8
0,5	0	**5**	4	1	2	12
1	2	0	**0**	1	8	11
1,5	1	4	3	**6**	27	41
2	0	4	6	2	**38**	50
Totaal	4	16	15	11	76	122

Uit de binomiale toets blijkt dat de proportie afwijking van 0,5 significant is voor beide modellen, p = 0,01. Dit betekent dat er significant meer leerlingen gestegen zijn in niveau van kansbegrip dan gedaald na herhaaldelijke oefening met de kans taak.

Ook is de groei binnen de basisschoolgroepen onderzocht tussen week 1 en week 4. In tabel 5 wordt de stijging en daling van het aantal leerlingen per groep weergegeven.

Tabel 5
Beweging in niveau van leerlingen per groep tussen week 1 en week 4

	Groep					
	4		6		8	
	Metz	Boom	Metz	Boom	Metz	Boom
Gestegen	32	29	13	12	9	9
Gelijk	8	9	15	11	30	30
Gedaald	4	6	11	16	0	0

Groep 4 liet op de binomiale toets met een proportie afwijking van 0,05 zien dat significant meer leerlingen vooruitgegaan zijn in niveau dan gedaald: Metz, p = .001; Boom, p = .007. Voor groep 6 is voor beide modellen geen significant verschil gevonden tussen de leerlingen die minimaal één niveau zijn gestegen en de leerlingen die minimaal één niveau zijn gedaald. In groep 8 zijn wel significant meer leerlingen vooruit gegaan dan gedaald voor beide modellen, met een proportie afwijking van 0,5, p = .002.

Op basis van figuur 5a en 5b is het interessant om te kijken naar de weken 2 en 3. Er is wel een significant verschil gebleken uit de Chi-kwadraat toets, maar op basis van de lijngrafiek is er geen groei tussen de twee weken te zien voor het hoogste niveau bij het model van Metz en bij Boom zelfs een achteruitgang. In tabel 6 wordt de stijging en daling van het aantal leerlingen tussen deze twee weken weergegeven.

Tabel 6
Beweging in niveau van leerlingen tussen week 2 en week 3

	Metz	Boom
Gestegen	29	23
Gelijk	62	57
Gedaald	27	36

Uit de binomiale test blijkt voor beide modellen geen significante afwijking. Ook op groepsniveau is dit niet significant. Dit betekent dat er ongeveer evenveel voor als achteruitgang gezien wordt tussen deze twee weken.

Discussie

De doelstelling van dit onderzoek was het in kaart brengen van het begrip van kansrekening bij basisschoolleerlingen en derhalve de twee modellen van Metz (1998) en Boom (2020) te vergelijken door twee vragen te onderzoeken en daarmee het verschil te bestuderen tussen de twee modellen. De eerste vraag die in deze studie is onderzocht is: *Neemt het begrip van kans en waarschijnlijkheid toe met leeftijd?* Gebaseerd op eerder onderzoek naar de verschillende stadia van kansbegrip waar kinderen zich doorheen bewegen, onder andere door Piaget en Inhelder (1975), Jones et al. (1997), Way (2003) en Metz (1998), verwachtten we dat hoe ouder het kind wordt, hoe geavanceerder de strategieën en het denkniveau zullen zijn in het begrip van kansrekening. Deze hypothese is op basis van de onderzoeksresultaten bevestigd. Alle frequenties van de niveaus binnen de groepen verschillen significant van elkaar tussen de groepen. Er is dus een verschil tussen de groepen in niveau van kansbegrip. Wanneer we kijken naar de lijngrafieken (figuur 1a en 1b) zien we een duidelijke stijgende lijn voor het hoogste niveau van kansbegrip en een duidelijk dalende lijnen voor de laagste niveaus. Kansbegrip neemt dus toe met de leeftijd. Dit is consistent met eerder onderzoek van onder andere Bryant en Nunes (2012), die stellen dat een beter begrip van kans samenhangt met de gevorderde cognitieve ontwikkeling van kinderen in hogere basisschoolgroepen.

De tweede vraag die is onderzocht luidt: *Zullen het kansbegrip van de kinderen en hun denkstrategieën verbeteren over vier wekelijkse sessies?* In lijn met eerder onderzoek van Kafoussi (2004), waaruit is gebleken dat kinderen vooruitgaan in hun begrip van kans en waarschijnlijkheid naar mate zij meer in aanraking komen met kans gerelateerde taken, verwachtten wij een groei over tijd te zien in deze vier weken. De frequenties van de niveaus verschillen tussen alle weken voor alle groepen significant, er is dus een duidelijk verschil te zien in niveau tussen de weken. Wanneer we kijken naar de lijngrafieken (figuur 2a en 2b) zien we een stijging van het hoogste niveau over de vier weken en een daling van de laagste niveaus. Uit de resultaten blijkt ook dat er significant meer leerlingen in niveau zijn gestegen dan in niveau zijn gedaald na vier weken. De hypothese dat er een vooruitgang te zien is over tijd kan worden bevestigd. Dit kan impliceren dat de kinderen gebruik hebben gemaakt van de ruimte om kans te ontdekken door ervaring, zonder instructie of begeleiding. Dit is in lijn met eerder onderzoek van Fyfe en Rittle-Johnson (2016) en zal belangrijk kunnen zijn om besluiten te kunnen nemen over of, en hoe kans onderwijs ingericht kan worden.

Echter, wanneer we kijken naar de vooruitgang in begrip van kans per groep, valt op dat deze groei niet te zien is in groep 6 en zijn er volgens het model van Boom zelfs meer kinderen achteruit gegaan in vier weken. Daar zijn twee mogelijke verklaringen voor. Ten eerste zou dit kunnen komen doordat de kinderen in deze groep beduidend vaker hebben gekozen om met de half/half draaischijf te spelen. Dit heeft tot gevolg dat ze met hun antwoorden nooit kunnen bewijzen dat ze begrijpen dat ze de toevalsfactor zien, maar ook dat sommige uitkomsten waarschijnlijker zijn. De schijf is verdeeld in twee gelijke helften, dus alle mogelijke uitkomsten berusten alleen op toeval, hierdoor hebben zij nooit het hoogste niveau kunnen scoren en bleven zij hangen op niveau 3 van Metz of niveau 1 van Boom. Dit zou ook een andere opvallende bevinding kunnen verklaren. Op basis van de lijngrafiek (figuur 2a en 2b) is bij het model van Metz geen vooruitgang te zien tussen de tweede en derde week van onderzoek en bij het model van Boom zelfs een daling. In week drie is opvallend vaker voor de half/half schijf gekozen dan in week twee. Dit probleem zou ondervangen kunnen worden in toekomstig onderzoek, door de kinderen niet met de half/half schijf te laten spelen, maar het spel voort te zetten met alleen de schijf met de driekwart/kwart verdeling. Een tweede verklaring voor het gebrek aan groei in groep 6 kan zijn dat maar 10 leerlingen van de 40 in de vier weken hebben meegemaakt dat het poppetje met het kleinste vak op de driekwart/kwart draaischijf heeft gewonnen. Voor de andere klassen ligt dit aantal leerlingen hoger. De leerlingen die dit hebben meegemaakt hebben bewezen gekregen dat hoewel sommige uitkomsten waarschijnlijker zijn, toeval ook een grote rol speelt in deze taak. Hierdoor kwamen zij in het hoogste niveau van begrip van kansrekening uit en bleven de kinderen die dit niet hebben meegemaakt vaker hangen op een deterministisch niveau. Een oplossing zou kunnen zijn om een dergelijke taak digitaal te maken, zodat de uitkomsten gecontroleerd kunnen worden en alle participanten dezelfde ervaringen hebben (Järvelä, Ekman, Kivikangas, & Ravaja, 2014).

Wanneer we de twee ontwikkelingsmodellen van Boom en Metz vergelijken valt op dat er eigenlijk weinig verschil is in uitkomsten van de analyses. Een vergelijking maken op categorie niveau zou misschien kunnen leiden tot meer verschillen. Het nieuwe model van Boom is opgesteld omdat er uit het werken met *het conceptuele raamwerk* van Metz is gebleken dat de volgorde waarin de kinderen de denkniveaus en categorieën worden veronderstelt te doorlopen, niet logisch lijkt te zijn. Waar Metz op waarneming gebaseerde redenering (‘*het was de vorige keer zo, dus is het nu ook zo*’) heeft ondergebracht onder denkniveau 1, lijkt dit meer gekoppeld te zijn aan deterministisch denken. Dit deterministisch denken lijkt op twee verschillende manieren in de ontwikkeling naar voren te komen. Voorafgaand aan denkniveau 3, dus als onzekerheid en onvoorspelbaarheid nog niet worden gezien, zoals is gebleken uit eerder onderzoek van Piaget en Inhelder (1975) die zeggen dat kinderen eerst deterministische oorzaak en gevolg relaties moeten begrijpen voordat ze iets snappen van random gebeurtenissen. Maar er lijkt ook een deterministisch niveau na denkniveau 3 te bestaan. Kinderen snappen hier de onvoorspelbaarheid al wel, maar zien dit in taken met ongelijke kansen niet meer. Dit zou verklaard kunnen worden door het onderzoek van Fischbein (1975), die zegt dat door school curricula en sociale invloeden voornamelijk de deterministische kant ontwikkeld wordt, waardoor de kinderen deterministische verklaringen over-attribueren.

Wat wel opvalt bij het model van Metz is dat de meeste leerlingen tussen week 1 en 4 een sprong maken van denkniveau 2 naar denkniveau 4 en dus denkniveau 3 overslaan (tabel 4a). Bij het model van Boom komt dit niveau (gefocust op onvoorspelbaarheid) eerder voor in de sequentie (niveau 1). Voor dit model worden geen grote sprongen gezien in vooruitgang (tabel 4b), dit impliceert dat de leerlingen voor het model van Boom de niveaus meer gradueel doorlopen. Daarnaast is opmerkelijk dat het model van Boom een sterkere daling laat zien van kansbegrip bij leerlingen dan het model van Metz. Dit zou ook kunnen komen door de verschuiving van het niveau dat gefocust is op de onvoorspelbaarheid. Voor Metz is dit niveau 3, dat zit tegen het hoogste niveau 4 aan. Bij Boom ligt dit niveau lager op de schaal, als niveau 1, met nog twee niveaus daarboven. Ook het niveau van persoonlijke controle (‘*het ligt eraan hoe hard je draait*’) ligt bij Boom lager op de schaal. Hierdoor zou het kunnen zijn dat een score op één van deze schalen voor Metz een vooruitgang betekent en voor Boom een achteruitgang.

Op basis van deze bevindingen kan niet gezegd worden welke methode nu de beste resultaten laat zien, er zijn weinig verschillen gevonden tussen de twee modellen en ze lijken dus even bruikbaar. Wel kan op basis van persoonlijke ervaring met de scoring volgens beide modellen subjectief gezegd worden dat het model van Boom als werkbaarder wordt ervaren, omdat er een meer logische opbouw van niveaus in lijkt te zitten.

Kwaliteiten, beperkingen en indicaties voor vervolgonderzoek

Deze studie is op verschillende vlakken vernieuwend en onderscheidend. We bieden een nieuw model aan dat een specifieke volgorde beschrijft waarin kinderen kans constructen leren. Eerdere onderzoeken lieten hierin een inconsistentie zien (Piaget & Inhelder, 1975; Jones et al., 1997; Way, 2003; Metz, 1998). Het is de eerste studie die het nieuwe model van Boom (2020) heeft vergeleken met het oudere model van Metz (1998) om te onderzoeken of het een beter model is om het niveau van kansbegrip in onder te brengen. Een tweede kwaliteit van dit onderzoek is het microgenetische design. Dit design is niet vaak eerder gebruikt om groei in het begrip van kansberekening bij kinderen te onderzoeken. Het uitvoeren van vier sessies zorgde voor bruikbare inzichten in het effect van herhaling en ervaring op de vooruitgang tussen deze sessies. Dit is in lijn met de studie van Flynn, Pine en Lewis (2006), waarin uitgelegd wordt dat met de microgenetische benadering het proces van verandering in vaardigheden, kennis en begrip gedurende een korte periode kan worden weergegeven. Een derde kwaliteit van dit onderzoek is de gelijke verdeling van de participanten over de groepen en daarbij de relatief grote steekproefomvang. Door de taak klassikaal af te nemen, konden veel kinderen tegelijk bereikt worden. Al liggen daar ook meteen beperkingen. Er is de leerlingen gevraagd individueel antwoord te geven op de vragen, maar door het zitten in groepjes zijn kinderen soms gaan overleggen, wat terug te vinden is in gelijkende antwoorden. Ook kon er tussendoor niet gecontroleerd worden wat de kinderen opgeschreven hadden, waardoor achteraf bleek dat niet iedereen even serieus was in hun antwoorden. Een ander nadeel van de klassikale afname is dat er niet doorgevraagd kon worden bij te beknopte of onduidelijke antwoorden. Voor vervolg onderzoek zou individuele afname toch gewenst zijn om deze beperkingen te ondervangen. Een vierde sterke eigenschap van het onderzoek is de scoring. Doordat de twee modellen met elkaar vergeleken zijn is er veel aandacht besteed aan het bestuderen en aanvullen van de niveaus van het nieuwe model van Boom. Hierdoor is heel gedetailleerd gekeken naar de bijbehorende scoring. Wel is de scoring gedaan door maar één persoon, waardoor een subjectieve interpretatie niet te vermijden is. Het advies voor vervolg onderzoek zou dan ook zijn om de scoring te laten doen door meerdere personen, die van te voren een training hebben gehad, waardoor een goede inter-beoordelaarsbetrouwbaarheid behaald kan worden. Een vijfde sterke punt is dat de taak is aangeboden als een spel. Deze spelvorm heeft het leuk en interessant gehouden voor de kinderen. Echter, deze taak zou te simpel kunnen zijn om de vooruitgang in begrip in kansrekening echt betrouwbaar te kunnen meten, al zou een moeilijkere taak waar wiskundige kennis voor nodig is weer niet passend zijn bij de basisschoolleeftijd (Threlfall, 2004). Het gebruik van meerdere simpele taken zou een oplossing kunnen zijn.

Naast deze sterke punten heeft deze studie nog een aantal beperkingen. Allereerst hebben er maar twee scholen deelgenomen aan dit onderzoek, waardoor er geen representatieve afspiegeling weergegeven is van alle reguliere basisscholen in Nederland. Hoewel deze twee basisscholen wel van elkaar verschilden, de ene katholiek en de andere openbaar, zou voor toekomstig onderzoek aangeraden worden meerdere basisscholen met verschillende achtergronden op te nemen in de studie. Ten tweede werd er een motivatieverlies over de weken opgemerkt. De antwoorden van sommige kinderen werden over de weken heen korter of minder serieus. Ze leken verveeld te raken door de herhaling van vier weken lang dezelfde taak verrichten. Hoewel hier in de resultaten niet veel van terug te zien is, zouden we toch aanraden om in een volgende studie meerdere taken aan te bieden. Dit houdt het voor de kinderen interessanter, maar zorgt er ook voor dat er beter onderscheid gemaakt kan worden in wat nou precies aansluit bij welke leeftijd, waardoor er dus meer informatie is over de manier waarop kans onderwijs aangeboden kan worden. Bovendien zou het aanbieden van verschillende taken ons meer kunnen vertellen over de algemene werkbaarheid van de nieuwe scoringsmethode van Boom. Zo kan gekeken worden of het voor meerdere taken een goed model is om kinderen onder te verdelen niveau van begrip van kansrekening in plaats van alleen specifiek voor de spinner taak. Een laatste implicatie voor vervolg onderzoek betreft de gestelde vragen tijdens de taak. Niet alle vragen die gesteld zijn, zijn ook daadwerkelijk meegenomen in de scoring, omdat ze niet genoeg informatie boden. Daarnaast zijn niet alle vragen die in dit onderzoek gescoord zijn even belangrijk geweest voor het strategiegebruik van de kinderen. Het is aan te raden om nog eens goed te kijken naar welke vragen precies gesteld moeten worden om bruikbare antwoorden te krijgen voor de scoring.

Concluderend kan gezegd worden dat uit beide scoringsmodellen blijkt dat oudere kinderen geavanceerdere strategieën gebruiken in het oplossen van deze kans gerelateerde spinner taak dan jongere kinderen, hun denkniveau met betrekking tot kans en waarschijnlijkheid ligt hoger. Daarnaast zien we een vooruitgang in begrip wanneer kinderen geoefend hebben met deze taak. Toekomstig onderzoek zou verder kunnen bouwen op deze studie, om het nieuwe model van Boom verder te ontwikkelen, maar ook zodat uiteindelijk adequaat advies gegeven kan worden aan onderwijs instanties over of, en hoe kans onderwijs vorm gegeven zou moeten worden voor basisscholen om het begrip van kans bij kinderen te vergroten. Het zou mooi zijn als vervolg onderzoek meer informatie weet te verkrijgen over hoe kinderen hun begrip van kansberekening toepassen in het dagelijks leven, zodat samen met kans onderwijs op jongere leeftijd, een betere basis gelegd kan worden voor een groter begrip van kansrekening en statistiek op latere leeftijd.

Bijlagen

Bijlage A
Brief aan scholen

Geachte heer/mevrouw,

Vanuit de Universiteit van Utrecht is vorig jaar een interessant onderzoek gestart naar het begrip van kansberekening bij basisschoolkinderen. Dit jaar zet ik dit onderzoek voort in teken van mijn masterscriptie. Uit eerder onderzoek is gebleken dat kansberekening en statistiek op latere leeftijd een heikel punt blijven. Nu blijkt dat jonge kinderen al enig begrip hebben van onzekerheid bij willekeurige verschijnselen. Kansberekening wordt nu pas aangeboden op de middelbare school, maar zal een eerdere start met kans gerelateerde taakjes het begrip op latere leeftijd vergroten? Dit is een onderzoek dat zal bijdragen aan de ontwikkeling van het rekenonderwijs.

Specifiek zal mijn scriptie gaan over het verschil in begrip van kansberekening per leeftijd, ontwikkeling over tijd en de invloed van beloning hierop. Ik zou graag voor vier weken iedere week een leuk taakje doen met kinderen uit de groepen vier, zes en acht. Dit neemt maximaal een half uurtje per klas in beslag. Uiteraard volgt er meer informatie bij blijk van interesse.

Graag wil ik weten of uw school het leuk zou vinden om deel te nemen aan dit onderzoek. Het draagt bij aan de ontwikkeling van het rekenonderwijs op basisscholen, waar kansberekening wellicht ook in opgenomen kan gaan worden. Bovendien is het een leuk en leerzaam onderzoek voor uw leerlingen en het zal de leerkrachten en de kinderen weinig inspanning kosten.

Over enkele dagen neem ik telefonisch contact met u op om deze brief toe te lichten, eventuele vragen te beantwoorden en u te vragen of uw school zou willen deelnemen.

Indien u vragen of opmerkingen heeft, ben ik op onderstaand telefoonnummer of e-mailadres te bereiken.

Met vriendelijke groet,

Nienke Jansen
Begeleider: Dr. Jan Boom
Universiteit van Utrecht

Bijlage B
Brief aan ouders

Geachte ouders van groep 4, 6 en 8,

Ik ben Nienke Jansen, studente kinder- en jeugdpsychologie aan de Universiteit van Utrecht. Vanuit mijn master opleiding doe ik onderzoek naar het begrip van kansberekening bij basisschoolkinderen. Vanuit (school) heb ik toestemming gekregen mijn onderzoek onder andere op deze school te doen. Hier ben ik erg blij mee.

De Universiteit van Utrecht is vorig jaar met het interessante onderzoek gestart naar het begrip van kansberekening bij basisschoolkinderen. Dit jaar zet ik dit onderzoek voort. Uit eerder onderzoek is gebleken dat kansberekening en statistiek op latere leeftijd een heikel punt blijven. Nu blijkt dat jonge kinderen al enig begrip hebben van onzekerheid bij willekeurige verschijnselen. Kansberekening wordt nu pas aangeboden op de middelbare school, maar zal een eerdere start met kans gerelateerde taakjes het begrip op latere leeftijd vergroten? Dit is een onderzoek dat zal bijdragen aan de ontwikkeling van het rekenonderwijs.

Ik zal vanaf week 21, vier weken achter elkaar bij uw kind in de groep een leuk taakje komen afnemen. Dit taakje gebeurt klassikaal. Ik zal voor de klas staan met twee Pim Pam Pet achtige draaischijven. De ene draaischijf is half rood, half geel. De tweede draaischijf is voor driekwart rood en voor een kwart geel. Door middel van een spelletje winst en verlies en een aantal vragen die ik de kinderen tijdens het spel zal stellen, kijk ik naar leeftijd, ontwikkeling en invloed van beloning.

Ik zal uw kind alleen om geboortedatum en geslacht vragen, hierdoor blijven de gegevens anoniem. Met de gegevens zal alleen door mij en mijn begeleider vanuit de Universiteit gewerkt worden en de uiteindelijke resultaten zullen binnen de universiteit blijven.

<u>Wanneer u bezwaar heeft tegen deelname van uw kind aan dit onderzoek kunt u dat aangeven bij de betreffende leerkracht.</u>

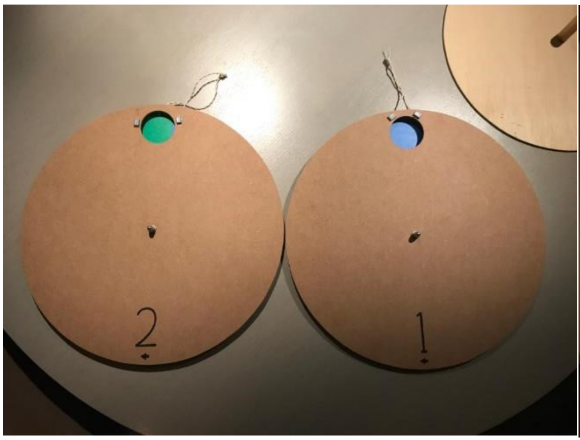
Ik hoop u hiermee voldoende te hebben geïnformeerd. Voor vragen en/of opmerkingen kunt u altijd met mij contact opnemen.

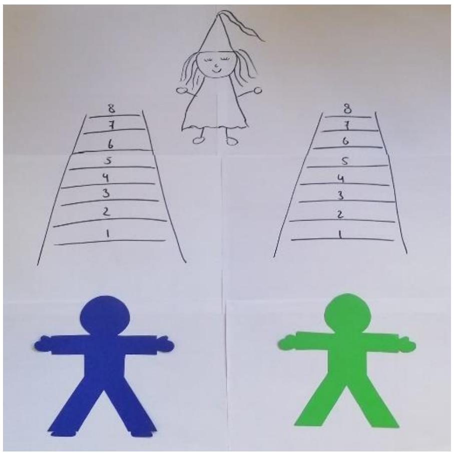
Met vriendelijke groet,

Nienke Jansen

Bijlage C

Draaischijven en spelopzet





Bijlage D

Speluitleg, gestelde vragen en scoring

Schrijf op:

- Eerste letter van je naam
- Geboortedatum
- Jongen/meisje

We gaan nu een spel spelen. We hebben een groen poppetje en een blauw poppetje. Ze hebben allebei een ladder waar ze op moeten klimmen, met 8 treden, om de prinses uit de toren te redden. Ik zal je vertellen hoe het spelletje werkt. Ik ga zo dadelijk aan het rad draaien. Als het rad op blauw komt, mag het blauwe poppetje een stapje vooruit. Als het rad op groen komt op mag het groene poppetje een stapje vooruit. Een van de poppetjes wint als hij als eerste bij het laatste vakje is, zodat hij de prinses kan redden! Oké, ik laat even zien hoe de schijf draait *(voordoen).*

1. Als het blauwe poppetje als eerste bij de prinses moet zijn, met welke schijf wil je dan spelen?

2. En waarom?

(Vraag 1+2 samen gescoord)

Kinderen met draaischijf 1 beginnen. Draaischijf 2 de klas uit.

3. Op welke trede denk je dat het groene poppetje zal zijn als het blauwe poppetje op 6 is?

4. Waarom denk je dat?

5. En weet je dat zeker?

(Vraag 3+4+5 samen gescoord)

Spel begint.

6. Waarom gebeurde <deze volgorde>? *(Na 4x draaien)*

(Vraag 6 alleen gescoord)

7. Kan het groene poppetje nog steeds winnen? *(Na 6x draaien)*

(Vraag 7 alleen gescoord)

8. Wat denk jij dat de kansen zijn dat het groene poppetje gaat winnen?

9. Wat denk je dat de kansen zijn dat het blauwe poppetje gaat winnen?

(Vraag 8+9 niet gescoord)

10. Waarom ligt het groene/het blauwe poppetje zo ver voorop? *(Na 8x draaien)*

(Vraag 10 alleen gescoord)

11. Is dit eerlijk?

(Vraag 11 niet gescoord)

12. Heeft een van de poppetjes meer kans om te winnen? Waarom wel/niet?

Na het spelen.

13. Hoe komt het dat het groene/het blauwe poppetje gewonnen heeft?

(Vraag 12+13 samen gescoord)

14. Denk je dat het groene poppetje altijd hier eindigt (in dit vakje)? Waarom wel/niet?

(Vraag 14 alleen gescoord)

15. Kan het groene poppetje winnen met deze draaischijf of denk je dat dat onmogelijk is?

(Vraag 15 alleen gescoord)

De eindscore is per week als volgt opgebouwd:

Voor Boom:

- Er zijn tellingen gedaan per participant, per week, per niveau (bv. hoe vaak komt niveau 0 voor bij participant 1 in week 1, hoe vaak 0,5, enz.).
- Vervolgens is specifiek gekeken naar vraag 7 en 15. Is de score op een van de twee van het hoogste niveau (2)?
- Als het antwoord hierop positief is: komt het hoogste niveau meer dan 2x voor?

Dan is de eindscore van het hoogste niveau (2).

- Maar is er meer dan 2x 0,5 gescoord?

Dan is de eindscore 0,5.

- Is dit beide niet het geval?

Dan telt het niveau met de hoogste frequentie als eindscore.

Voor Metz:

- Er zijn tellingen gedaan per participant, per week, per niveau (bv. hoe vaak komt niveau 1 voor bij participant 1 in week 1, hoe vaak 2, enz.).
- Vervolgens is specifiek gekeken naar vraag 7 en 15. Is de score op een van de twee van het hoogste niveau (4)?
- Als het antwoord hierop positief is: komt het hoogste niveau meer dan 2x voor?

Dan is de eindscore van het hoogste niveau (4).

- Is dit niet het geval?

Dan telt het niveau met de hoogste frequentie als eindscore.

Bijlage E

Niveaus Metz, inclusief antwoordvoorbeelden

Er zijn vier denkniveaus waarbinnen meerdere categorieën bestaan. In de inleiding zijn deze categorieën gedefinieerd. Hieronder volgt een overzicht van de denkniveaus en de bijbehorende categorieën met antwoordvoorbeelden:

Denkniveau 1*:* Buiten de grenzen van het deterministische/indeterministische verklarende frame. De mogelijke patronen en de onzekerheid worden niet herkend.

Categorieën:

1. *Het verwerpen van waarschijnlijkheid*

Het komt bij het kind niet op dat ongelijke kleurvakken ongelijke kansen hebben.

Voorbeeld:

- Het maakt niets uit met welke draaischijf er gespeeld wordt, heeft geen effect op het spel
- Gewoon/weet niet
- Omdat ik goed ben
- Ik had geduimd

2. *Persoonlijke voorkeur*

Het kind kiest een draaischijf op basis van voorkeur van kleur of vorm.

Voorbeeld:

- Ik kies voor de draaischijf met meer blauw omdat dat mijn lievelingskleur is

3. *Op waarneming gebaseerde redenering*

Het kind baseert zijn antwoorden op verbanden of patronen die eerder plaats hebben gevonden.

Voorbeeld:

- Ik denk dat hij op vakje drie van de ladder eindigt omdat dat de vorige keer ook zo was

Denkniveau 2: Deterministisch. De mogelijke patronen worden wel herkend maar de bijbehorende onzekerheid niet

Categorieën:

4. *Persoonlijke controle*

De manier waarop de draaischijf gedraaid wordt is bepalend voor de uitkomst

Voorbeeld:

- Het ligt aan hoe hard u draait
- Ik ben slim en ik heb hier een methode voor
- Je kan het voorspellen als je alles weet van krachten, snelheid en draaischijven
- Er zit een magneet in

5. *Deterministische verwachtingen*

Verwachting op basis van de kleurenverdeling van de draaischijf, maar begrijpt de onzekerheid van deze voorspelling niet.

Voorbeeld:

- Blauw heeft het meest dus die wint

Denkniveau 3: Onzekerheid/volledig onvoorspelbaar. De mogelijke patronen worden niet herkend maar de onzekerheid wel.

Categorieën:

6. *Spinner gezien als een onvoorspelbare generator*

Het kind ziet de draaischijf als kans generator, maar besteed geen aandacht aan de invloed van de kleurenverhouding van de draaischijf op de uitkomst.

Voorbeeld:

- Dit komt door geluk
- Voorspelt waar groen is, maar je weet het nooit.
- Alleen maar kans, tenzij hier mee geknoeid is

Denkniveau 4: Random. Het kind ziet de draaischijf als een willekeurige generator waar hij geen invloed op heeft en ziet ook dat de verschillende kansen overeenkomen met de kleurenverhoudingen

Categorieën:

7. *Waarschijnlijkheid*

De mogelijke patronen én de onzekerheid wordt herkend. De uitkomst kan niet met zekerheid voorspeld worden, maar sommige uitkomsten zijn waarschijnlijker dan anderen.
Voorbeeld:

- De schijf heeft meer blauw, daarom heeft blauw meer kans om te winnen
- Kan groen nog wel winnen? ‘’Ja, maar hij heeft weinig kans’’
- Kan winnen, maar kleine kans, als je veel geluk hebt
- Denkt dat groen ongeveer daar is want blauw heeft voordeel, maar je kan 8x op blauw komen en 8 keer op groen.

Bijlage F

Niveaus Boom inclusief antwoordvoorbeelden

Boom stelt drie niveaus van begrip van kansberekening, met daarnaast twee deterministische niveaus. In de inleiding zijn deze gedefinieerd. Hieronder volgt een uitgebreid overzicht, inclusief antwoordvoorbeelden:

Niveau 0: Geen begrip, ze snappen de concepten van kans en waarschijnlijkheid niet. De kinderen hebben geen systematische gedachten over kans, je kan hen nog van alles wijsmaken, magisch denken, wisselend denken, fatalistisch denken, etc. Geen raamwerk, geen uitleg, geen serieuze voorspellingen (wel uitingen van verlangen), geen waardering voor willekeur.

Voorbeeld:

- Duimen
- Favoriete kleur
- Iets heel graag willen
- Het gebeurde gewoon, hij kwam vaak op blauw
- Omdat wij goed/slim zijn
- Totale onzin
- Weet niet
- Gewoon

Niveau 0,5: Determinisme. De kinderen snappen de concepten van kans en waarschijnlijkheid niet. Ze zien de onvoorspelbaarheid van een kans taak ook nog niet, maar denken de uitkomst met zekerheid te kunnen voorspellen. Vaak betrekken ze hierbij externe factoren.

Voorbeeld:

- Je speelt vals
- Er zit een magneet in
- Het ligt eraan hoe hard je draait
- De vorige keer was het ook zo

Niveau 1: Begrip is gefocust op onvoorspelbaarheid. Kinderen neigen ernaar om gelijke kansen te zien voor alle uitkomsten. Ze begrijpen de waarde van onvoorspelbaarheid, maar

zijn niet in staat om een strategie te gebruiken die op ongelijke kansen binnen het spel zijn gebaseerd. Ze begrijpen dat onvoorspelbaarheid wordt gebruikt om eerlijkheid te creëren.
Voorbeelden:

- Kan je niet weten
- Geluk, toeval, volledig onvoorspelbaar
- Alleen maar kans
- Kleurenverhouding heeft geen invloed
- Ja en nee

Niveau 1,5: Determinisme. Bij gelijke kansen zien ze de onvoorspelbaarheid. Ze zien de meerdere mogelijkheden en weten niet zeker wat eruit komt. Bij ongelijke kansen (een draaischijf met 3/4 – 1/4 , een dobbelsteen met 2x 6 erop, een ballenbak met meer rode dan witte ballen) lijken ze de toevalsfactor vergeten te zijn. Toeval en geluk speelt geen rol meer, het is overduidelijk en zeker, ze kunnen de uitkomst voorspellen (bv. 10x draaien met de spinner: ¾ wordt sowieso het meest gedraaid).
Voorbeelden:

- Blauw heeft het meest op de schijf, dus die wint sowieso
- Ik weet zeker dat hij na 6x draaien op 6 komt, want blauw is het meeste

Niveau 2: Voorspelbaarheid van de meest waarschijnlijke uitkomst. Het kind begrijpt dat, hoewel er meerdere uitkomsten zijn en er geen manier is om te weten welke uitkomst zeker zal zijn en sommige uitkomsten waarschijnlijker zijn dan anderen. Het kind erkent dat als er geen waarschijnlijkheidsverschillen zijn, er geen voorspelling mogelijk is, maar als daar wel verschillen in zijn dat voorspelling wel mogelijk is en hier kunnen ze op dit niveau ook gebruik van maken om voordelen te creëren in een spel.
Voorbeeld:

- Blauw is groter dus heeft meer kans
- Groen kan ook nog winnen, maar weinig kans.

Literatuur

Arbon, S (2020). A framework for children's understanding of probability: Effects of repeated experience, material, and real-life contexts. Unpublished internal manuscript.

Boom, J. (2020). Levels of understanding randomness. Unpublished internal manuscript.

Bryant, P., & Nunes, T. (2012). Children's understanding of probability: A literature review (full report). *Londres: The Nuffield Foundation*.

Curriculum.nl (2019). Geraadpleegd van: https://www.curriculum.nu/voorstellen/rekenen-wiskunde/

Falk, R., & Wilkening, F. (1998). Children's construction of fair chances: Adjusting probabilities. *Developmental Psychology, 34*(6), 1340–1357.

Field, A. (2014). *Discovering statistics using IBM SPSS statistics.* California: Sage

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht Reidel Publishing Company.

Flynn, E., Pine, K., & Lewis, C. (2006). The microgenetic method: time for change? *The Psychologist, 19,* 152 155.

Fyfe, E.R., Rittle-Johnson, B. (2016). Feedback both helps and hinders learning: The causal role of prior knowledge. Journal of Educational Psychology, 108, 82-97. doi:10.1037/edu0000053

Järvelä, S., Ekman, I., Kivikangas, J. M., & Ravaja, N. (2014). A practical guide to using digital games as an experiment stimulus. *Transactions of the Digital Games Research Association*, *1*(2).

Jones, G. A., Langrall, C. W., Thornton, C. A., & Mogill, A. T. (1997). A framework for assessing and nurturing young children's thinking in probability. *Educational Studies in Mathematics*, *32*, 101–125.

Kafoussi, S. (2004). Can kindergarten children be successfully involved in probabilistic tasks? *Statistics Education Research Journal, 3*(1), 29-39.

Kahneman, D., & Tversky, A. (1982). Variants of uncertainty. *Cognition*, *11*, 143–157.

Konold, C. (1991). Understanding students' beliefs about probability. In *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 139-156). Springer, Dordrecht.

Langrall, C. W., & Mooney, E. S. (2005). Characteristics of elementary school students' probabilistic reasoning. In *Exploring probability in school* (pp. 95-119). Springer, Boston, MA.

Metz, K. E. (1998). Emergent understanding and attribution of randomness: Comparative analysis of the reasoning of primary grade children and undergraduates. *Cognition and Instruction*, *16*(3), 285-365.

Nikiforidou, Z., & Pange, J. (2007). Sample space and the structure of probability combinations in preschoolers. *WORKING GROUP 5. Stochastic Thinking 685*, 782.

Nikiforidou, Z., & Pange, J. (2010). The notions of chance and probabilities in preschoolers. *Early childhood education journal*, *38*(4), 305-311.

Pange, J. (2003). Teaching probabilities and statistics to preschool children. *Information Technology in Childhood Education Annual, 1*, 163–172.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1975). *The Origin of the Idea of Chance in Children.* London: Routledge & Kegan Paul.

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 465–494). New York: Macmillan.

Teglas, E., Girotto, V., Gonzales, M. and Bonatti, L. (2007) Intuitions of probabilities shape expectations about the future at 12 months and beyond. *Proceedings of the National Academy of Sciences, 104*(48), 19156–19159.

Threlfall, J. (2004). Uncertainty in mathematics teaching: the National Curriculum experiment in teaching probability to primary pupils. *Cambridge Journal of Education, 34*(3), 297-314.

Way, J. (2003). The development of young children's notions of probability. *Proceedings of CERME, 3*, 1-8.

Xu, F., & Denison, S. (2009) Statistical inference and sensitivity to sampling in 11-month-old Infants. *Cognition, 112*, 97–104.

Xu, F., & Garcia, V. (2008) Intuitive statistics by 8-month-olds. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *105*, 5012–5015.