Universiteit Utrecht

Faculteit Bètawetenschappen

Gereduceerde producten en schoven in de continue logica

Bachelorscriptie

Edwin Ma

Wiskunde

.

Scriptiebegeleider:

Dr. Jaap van Oosten
Faculteit Bètawetenschappen

Juni 2020

Samenvatting

De continue logica is een logica die ontwikkeld is voor het beschrijven van metrische ruimtes. De continue logica kent net als de klassieke logica de begrippen taal, L-structuur, L-formules, L-theorie en model. Als ϕ een L-formule en $\mathcal{M}$ een L-structuur, dan heeft de interpretatie van ϕ in $\mathcal{M}$ (,opgeschreven als $\phi^{\mathcal{M}}$) een waarheidsgehalte in het interval $[0, 1]$. Als $\phi^{\mathcal{M}} = 0$ dan zeggen we dat $\mathcal{M}$ de formule ϕ waar maakt. Als we bijvoorbeeld een formule willen hebben die waar is als twee variabelen x en y gelijk zijn, dan zouden we in klassieke logica de formule "$x = y$" nemen. In de continue logica zouden we de functie $d(x, y)$ nemen, waarbij d wordt geïnterpreteerd als de metriek in de onderliggende ruimte van de L-structuur. Als x gelijk is aan y dan is de afstand van x tot y gelijk aan 0. In dat geval is de formule $d(x, y)$ dus waar in de desbetreffende L-structuur. Als x niet gelijk is aan y dan is de afstand van x tot y groter dan 0. De formule $d(x, y)$ is dan niet waar. Het voordeel van continue logica is dat het structuren kan beschrijven en soms axiomatizeren die moeilijk te beschrijven zijn in de klassieke logica. Een voorbeeld hiervan zijn kansruimtes.

De overeenkomsten tussen continue logica (CL) en klassieke logica (KL) zijn groot. In 1.3 zullen we aantonen dat elke klassieke L-structuur $\mathcal{M}$ en elke klassieke formule ϕ om te zetten zijn naar een continue L-structuur $\hat{\mathcal{M}}$ en $\hat{\phi}$ zodat ϕ waar is in $\mathcal{M}$ dan en slechts dan als $\hat{\phi}$ waar is in $\hat{\mathcal{M}}$. Dit zegt dus eigenlijk dat CL een voortzetting is van KL. De parallellen tussen CL en KL gaaan nog verder. Veel meta-stellingen van KL zijn ook van toepassing (in aangepaste vorm) in CL. Denk hierbij aan de stelling van Łoś, compactheidsstelling. In deze bachelorscriptie zullen we deze twee stellingen ook bewijzen. Aangezien CL een voortzetting is van KL hebben we hiermee ook meteen deze stellingen in KL bewezen. Het feit dat deze stellingen ook gelden in aangepaste vorm in CL betekent dat we meer mogelijkheden hebben om bijvoorbeeld structuren te beschrijven zonder dat we gehinderd, terwijl we nog dezelfde hulpmiddelen in de vorm van meta-stellingen kunnen gebruiken.

Gereduceerde producten spelen een belangrijke rol binnen de literatuur over continue logica. Een gereduceerd product is een carthesisch product waar als het ware een filter op wordt gelegd. In de KL kunnen gereduceerde producten gebruikt worden om de compactheidsstelling te bewijzen en om niet-standaard analyse te definiëren. In de CL spelen onder andere een rol in het verifiëren van axiomatiseerbaarheid van een klasse van structuren. In hoofdstuk 2 gaan we het gereduceerde product van L-structuren in CL definiëren en aantonen dat dit voldoet aan alle eisen van een L-structuur. In hoofdstuk 3 zullen we kijken naar formules die waar zijn in het gereduceerde product. We zullen hierbij de stelling van Łoś bewijzen en als gevolg daarvan ook de compactheidsstelling. In hoofdstuk 4 zullen we definiëren wat het betekent om een schoof te zijn van L-structuren in CL. Tot slot zullen we kijken naar hoe we gereduceerde producten kunnen gebruiken om schoven van continue L-structuren te construeren.

Inhoudsopgave

1 Continue Logica

In het kort gezegd lijkt continue logica veel op klassieke logica behalve dat formules in de continue logica een waarheidsgehalte hebben dat in het interval $[0,1]$ ligt. De continue logica vormt de leidraad in deze bachelorscriptie. Het doel van dit hoofdstuk is dan ook om de lezer zowel bekend te maken met de continue logica als om de lezer te overtuigen van het nut van de continue logica. Dit hoofdstuk is ingedeeld in drie deelhoofdstukken. In het eerste deelhoofdstuk zullen we de definities geven van de continue logica. Deze zullen in de rest van deze scriptie veelvuldig terugkomen. In het tweede deel zullen we een voorbeeld geven van een klasse van L-structuren, namelijk kansruimtes. Dit is vooral bedoeld om de lezer meer intuïtie te geven wat betrefd de begrippen van die geïntroduceerd zijn in het eerste deelhoofdstuk. Het derde deel van dit hoofdstuk zal een vergelijking zijn tussen continue logica en klassieke logica.

1.1 Definities

De continue logica wordt aan de hand van dezelfde begrippen gedefinieerd als de klassieke logica. Er zijn meerdere variaties van definities mogelijk. In deze scriptie zullen we de definities gebruiken die impliciet of expliciet worden gebruikt in [1]. Deze variaties kunnen effect hebben op stellingen.

Definitie 1.1.1. Een *taal* L bestaat uit drie verzamelingen van symbolen: constantesymbolen, functiesymbolen en relatiesymbolen. We schrijven ook wel:

$$L = (con(L), fun(L), rel(L))$$

Verder heeft ieder functiesymbool f en ieder relatiesymbool R een bijbehorend natuurlijk getal $a(f)$ of $a(R)$ dat we de ariteit of plaatsigheid van f of R noemen. Als f of R een plaatsigheid n heeft, noemen we f of R een n-plaatsig functie of relatiesymbool. Tot slot heeft ieder functiesymbool f en ieder relatiesymbool R een functie Δ_f of Δ_R van $(0,1]$ naar $(0,1]$.

We zullen nu L beschouwen als een gegeven maar willekeurige taal. Nu gaan we definiëren wat een structuur van L is. In de literatuur worden dit ook wel metrische structuren genoemd.

Definitie 1.1.2. Een L-*structuur* $\mathcal{M}$ bestaat uit de volgende informatie:

1. Een metrische ruimte (M, d_M) die volledig is en diameter hoogstens 1 heeft. Volledigheid betekent dat elke Cauchyrij een limiet heeft en diameter hoogstens 1 betekent dat twee punten in de metrische ruimte hoogstens afstand 1 tot elkaar hebben.
2. Voor ieder constantesymbool c in L een element $c^{\mathcal{M}} \in M$
3. Voor ieder n-plaatsig functiesymbool f in L een functie $f^{\mathcal{M}} : M^n \to M$, zodat $f^{\mathcal{M}}$ voldoet aan Δ_f als modulus van uniforme continuïteit (zie def...).
4. Voor ieder n-plaatsig relatiesymbool R in L een functie $R^{\mathcal{M}} : M^n \to$, zodat $R^{\mathcal{M}}$ voldoet aan Δ_R als modulus van uniforme continuïteit.

Definitie 1.1.3. (Modulus van uniforme continuïteit) Zij Δ een functie van $(0,1]$ naar $(0,1]$. Zij f een functie van X naar Y, waarbij X en Y metrische ruimtes zijn. We zeggen dat een functie $f : X \to Y$ voldoet aan Δ als *modulus van uniforme continuïteit* als

$$(\forall \varepsilon \in (0,1])(\forall a, b \in X) d_X(a,b) < \Delta(\varepsilon) \Rightarrow d_Y(f(a), f(b)) \leq \varepsilon$$

Hierbij beschouwen we $[0,1]$ als metrische ruimte met de gebruikelijke metriek. We beschouwen voor een metrische ruimte (M, d_M), het product M^n als een metrische ruimte met afstandsfunctie

$$d_{M^n}((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) := \max_{1 \leq i \leq n} d_M(x_i, y_i)$$

Merk op dat dit inderdaad een metrische ruimte oplevert.

We hebben nu gedefinieerd wat structuren van een taal zijn. De eisen van een L-structuur lijken op het eerste gezicht veeleisend, maar er zijn handige manieren om een willekeurige metrische ruimte als L-structuur verwezenlijken. Deze zullen we niet uitwerken, maar alleen kort besprken. Een onvolledige metrische ruimte kan volledig gemaakt worden op een natuurlijke manier. De vervollediging van de metrische ruimte bestaat uit equivalentieklassen van Cuachy-rijen met de natuurlijke metriek. In [2] wordt aangetoond dat elke het waarheidsgehalte van een L-zin, zie 1.1.9, behouden blijft onder het volledig maken van een metrische ruimte. Voor metrische ruimtes met een diameter groter dan 1 zijn er ook manieren om deze te interpreteren als L-structuur. Dit kan met behulp van meer-soortige L-structuren te gebruiken. Daar gaan we in deze scriptie niet op in. Zie [2], hoofdstuk 15 voor een voorbeeld van meer-soortige L-structuren. Tot zullen we ook vaak tegenkomen dat we een structuur hebben die aan alle eisen van een L-structuur voldoet behalve dat behalve dat twee verschillende punten afstand 0 hebben tot elkaar. Hiervoor hebben we de volgende definitie:

Definitie 1.1.4. Een *pseudometrische ruimte* voldoet aan alle eise van een metrische ruimte, behalve dat twee verschillende punten afstand 0 tot elkaar mogen hebben. Een *L-prestructuur* bestaat uit een pseudometrische ruimte, die volledig is en diameter hoogstens 1, en verder aan alle eisen van een L-structuur voldoet.

We zullen in stelling 1.2.7 aantonen dat elke L-prestructuur is uit te delen naar een L-structuur.

We hebben nu gedefinieerd wat structuren van een taal zijn. We willen nu verder gaan met het definiëren van formules. Formules zijn eigenlijk een rij symbolen. Er wordt pas betekenis gegeven aan een formule als deze wordt geïnterpreteerd in een L-structuur. De interpretatie van een formule in een L-structuur is een functie van n variabelen in de onderliggende ruimte van de L-structuur naar het interval $[0, 1]$, waarbij n het aantal vrije variabelen in de formule is.

Definitie 1.1.5. Een L-term bestaat kan gevormd worden door toepassen van de volgende regels:

- Als c een constantesymbool is in L, dan is c een L-term
- Als x een symbool is van een vrije variabele dan is x een L-term
- Als $t_1, ..., t_n$ L-termen zijn en f is n-plaatsig functiesymbool in L met ariteit n, dan is $f(t_1, ..., t_n)$ een L-term.

Definitie 1.1.6. Een atomaire formule kan gevormd worden op twee manieren:

- Als t_1, t_2 L-termen zijn, dan is $d(t_1, t_2)$ een atomaire L-formule
- Als $t_1, ..., t_n$ L-termen zijn en R is een relatiesymbool van de taal L met ariteit n dan is $R(t_1, ..., t_n)$ een atomaire L-formule

De rest van de L-formules kan gevormd worden door herhaaldelijke toepassing van de volgende twee regels:

- Als $\phi_1, ..., \phi_n$ formules met u een continue functie van $[0, 1]^n$ naar $[0, 1]$ dan is $u(\phi_1, ..., \phi_n)$ een formule. We noemen u een connectief.
- Als $\phi(x, x_1, ..., x_n)$ een formule met x een vrije variabele, dan zijn $\sup_x \phi$ en $\inf_x \phi$ ook formules. We noemen sup en inf kwantoren. Vrije variabelen zijn variabelesymbolen die nog niet gebonden zijn aan een kwantor.

Opmerking 1.1.7. Onder de boven gegeven definitie is de verzameling van connectieven overaftelbaar. In veel gevallen is dit niet gewenst in verband met de Löwenheim-Skolem stellingen. Daarom wordt ook wel gekozen om een eindige basis van continue functies als connectieven te nemen.

Definitie 1.1.8. Zij L een taal en $\mathcal{M}$ een L-structuur met (M, d_M) als onderliggende metrische ruimte. We interpreteren een L-formule $\phi(x_1, ..., x_n)$ als een functie van $\phi^{\mathcal{M}} : M^n \to [0, 1]$, waarbij n het aantal vrije variabelen in ϕ is. Dit doen we door elk symbool te vervangen door zijn interpretatie. Een formule kan ook geen vrije variabelen hebben. In dat geval is de interpretatie alleen een getal in het interval $[0, 1]$.

- Het symbool d wordt vervangen door d_M.

- Een constantesymbool c van L wordt vervangen door $c^{\mathcal{M}}$, een functiesymbool f door $f^{\mathcal{M}}$ en een relatiesymbool R door $R^{\mathcal{M}}$.
- Een connectief wordt vervangen door zichzelf
- De $\sup_x$ en $\inf_x$ worden vervangen door $\sup_{x\in M}$ en $\inf_{x\in M}$

Hieronder staat een voorbeeld voor de duidelijkheid. Hierbij is c een constantesymbool, f een functiesymbool, R een relatiesymbool en u een functie van $[0,1]^2$ naar $[0,1]$.(De functie u is dus een connectief.) In eerste onderstaande vergelijking staat een formule van 4 vrije variabelen. In de onderste regel staat een interpretatie van diezelfde formule in de L-structuur $\mathcal{M}$. Deze interpretatie van een formule moeten we dus beschouwen als een functie van 4 variabelen in M naar $[0,1]$.

$$\phi(x_1,x_2,x_3,x_4) = u(sup_x R(x,x_1,x_2), d(c, f(x_3,x_4)))$$
$$\phi^{\mathcal{M}}(x_1,x_2,x_3,x_4) = u(sup_{x\in M} R^{\mathcal{M}}(x,x_1,x_2), d_M(c^{\mathcal{M}}, f^{\mathcal{M}}(x_3,x_4)))$$

De formules worden geïnterpreteerd als functies. Hierdoor is niet meteen duidelijk wanneer een formule waar voor een L-structuur. We kunnen dus ook nog niet spreken over modellen. Om dit wel te kunnen doen gebruiken we de volgende definitie.

Definitie 1.1.9. Een L-*zin* is een L-formule zonder vrije variabelen. Als ϕ een L-zin is en $\mathcal{M}$ een L-structuur waarbij $\phi^{\mathcal{M}} = 0$, dan zeggen we dat $\mathcal{M}$ de zin ϕ waar maakt. We schrijven dan ook wel $\mathcal{M} \models \phi$. Als $\phi^{\mathcal{M}} \neq 0$, dan maakt $\mathcal{M}$ de zin ϕ niet waar en schrijven we $\mathcal{M} \not\models \phi$.

Men zou zich kunnen afvragen waarom het getal 0 de waarheid aangeeft en niet het getal 1(, of een ander getal zoals 1/2). Hier is geen speciale reden voor. Een formule is immers altijd om te keren door het connectief $u : x \to |x-1|$. De enige reden dat het getal 0 de waarheid aangeeft is omdat hierdoor de parallel met de klassieke logica het zichtbaarst blijft. Neem bijvoorbeeld de formule $d(a,b)$, waarbij a en b twee constantesymbolen zijn. Deze formule is waar in $\mathcal{M}$ als $d_M(a^{\mathcal{M}}, b^{\mathcal{M}}) = 0$. Dit geldt alleen als $a^{\mathcal{M}}$ gelijk is aan $b^{\mathcal{M}}$. Het symbool 'd' is dus als het ware een vervanging van het symbool '='. Dit is dus de reden dat het getal 0 de waarheid aangeeft. Tot nog de definitie van een L-theorie en een model.

Definitie 1.1.10. Een L-*theorie* T is een verzameling L-zinnen. Een L-structuur $\mathcal{M}$ is een model van T als elke zin in T waar is in $\mathcal{M}$. Oftewel voor alle $\phi \in T$ geldt $\phi^{\mathcal{M}} = 0$.

1.2 Kansruimtes als L-structuren

In het vorige deelhoofdstuk hebben we veel begrippen gedefinieerd, waaronder een L-structuur en L-formule. In dit deelhoofdstuk zullen we een voorbeeld geven van een klasse van L-structuur namelijk kansruimtes. Kansruimtes zijn een goed voorbeeld hiervoor, omdat ze op zo'n manier zijn te construeren als L-structuur dat de kansfunctie behouden blijft als een relatie. Daarnaast kan de klasse van kansruimtes geaxiomatiseerd worden, voor het bewijs hiervan zie [3]. We zullen eerst een definitie van een kansruimte. Kansruimtes zelf zijn echter niet het hoofdonderwerp van deze scriptie en daarom zullen we ook niet dieper in gaan op de definities of eigenschappen van kansruimtes. Verder zullen we ook aantonen dat we L-prestructuren kunnen uitdelen naar l-structuren. Dit zullen we ook doen voor kansruimtes.

Definitie 1.2.1. Een familie $\mathcal{B}$ van deelverzamelingen van X is een σ-algebra van X als voldoen wordt aan de volgende drie eigenschappen:

1. $X \in \mathcal{B}$
2. $\forall U \in \mathcal{B}, X - U \in \mathcal{B}$
3. Als I een aftelbare verzameling is en $U_i \in \mathcal{B}$ voor alle $i \in I$, dan is $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{B}$

Definitie 1.2.2. Stel Ω is een niet-lege deelverzameling en $\mathcal{B}$ is een σ-algebra op Ω. Een *maat* μ op X is een afbeelding $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ die voldoet aan:

$$\mu(\emptyset) = 0$$

en, voor elke telbare collectie van paarsgewijs disjuncte verzamelingen $(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ ($\sigma -$ additivity)

$$\mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(A_j)$$

Definitie 1.2.3. Een kansruimte is een drietal $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$, waarbij Ω een niet-lege verzameling is, $\mathcal{B}$ een σ-algebra op Ω is en $\mathbb{P}$ een maat is op $(\Omega, \mathcal{B})$ met $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

Tot zover de definities van een kansruimte. We zullen niet verder in gaan op kansruimtes, omdat het niet het hoofdonderwerp is. We nemen voor de rest wel een aantal elementaire dingen aan over kansruimte zoals dat $\in \mathcal{B}$ en $A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \in \mathcal{B}$ als $A, B \in \mathcal{B}$. We gaan direct verder met het maken van een pseudometrische ruimte van een kansruimte.

Lemma 1.2.4. *Stel* $(\Omega, \mathcal{B}, \mathcal{P})$ *is een kansruimte. Definieer de functie* $D : \mathcal{B}^2 \to \mathbb{R}$ *door:*

$$D(A, B) := \mathbb{P}(A \triangle B) \tag{1.1}$$

Hierbij geldt $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$. *Het tweetal* $(\mathcal{B}, D)$ *vormt een pseudometrische ruimte*

Bewijs. We gaan de voorwaarden van een pseudometriek na. Om te beginnen geldt voor alle $A, B \in \mathcal{B}$ dat $D(A, B) = \mathbb{P}(A \triangle B) \geq 0$, want $\mathbb{P}$ is altijd groter dan 0. Daarnaast geldt $D(A, A) = \mathbb{P}(A \triangle A) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$, vanwege de definitie van een maat. Ook geldt symmetrie, want $D(A, B) = \mathbb{P}(A \triangle B) = \mathbb{P}(B \triangle A) = D(B, A)$. Dan rest nu alleen nog de driehoeksongelijkheid. Merk op dat

$$A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = (A \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C^c)$$

Merk op dat de verzamelingen, waarvan de vereniging wordt genomen aan de rechterkant van de vergelijking, disjunct zijn. Dus:

$$D(A, B) = \mathbb{P}(A \cap B^c \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B^c \cap C^c) + \mathbb{P}(A^c \cap B \cap C) + \mathbb{P}(A^c \cap B \cap C^c)$$

Eenzelfde soort vergelijking geldt ook voor $B \triangle C$ en $A \triangle C$, vanwege een symmetrisch argument. We krijgen dan:

$$D(A, B) = \mathbb{P}(A \cap B^c \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B^c \cap C^c) + \mathbb{P}(A^c \cap B \cap C) + \mathbb{P}(A^c \cap B \cap C^c) \tag{1.2}$$

$$D(B, C) = \mathbb{P}(A \cap B \cap C^c) + \mathbb{P}(A^c \cap B \cap C^c) + \mathbb{P}(A \cap B^c \cap C) + \mathbb{P}(A^c \cap B^c \cap C) \tag{1.3}$$

$$D(A, C) = \mathbb{P}(A \cap B \cap C^c) + \mathbb{P}(A \cap B^c \cap C^c) + \mathbb{P}(A^c \cap B \cap C) + \mathbb{P}(A^c \cap B^c \cap C) \tag{1.4}$$

Merk op dat elke term in de rechterkant van vergelijking 1.4 zit in de rechterkant van vergelijking 1.2 of in de rechterkant van vergelijking 1.3. Dus $D(A, B) + D(B, C) \geq D(A, C)$. Hebben we de driehoeksongelijkheid bewezen. En daarmee hebben we bewezen dat $(\mathcal{B}, D)$ een pseudometrische ruimte is.

□

Definitie 1.2.5. We definiëren nu een taal L^{kans} met constantesymbolen **0** en **1**, functiesymbolen $\cdot^c, \wedge, \vee$ en relatiesymbool P. Het functiesymbool $\cdot^c$ en het
relatiesymbool P zijn 1-plaatsig. De functiesymbolen $\wedge, \vee$ zijn 2-plaatsig. Verder geldt:
$\Delta_{\cdot^c}(\epsilon) = \epsilon$,$\Delta_P(\epsilon)$,$\Delta_\wedge(\epsilon) = \epsilon/2$ en $\Delta_\vee(\epsilon) = \epsilon/2$

We willen nu een kansruimte realiseren als L^{kans}-structuur.

Stelling 1.2.6. *Stel weer* $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ *is een kansruimte. We definiëren nu een structuur* $\mathcal{M}$ *door:*

1. *Als onderliggende ruimte de pseudometrische ruimte* $(\mathcal{B}, D)$ *te nemen die we in lemma 1.2.4 gedefinieerd hebben.*
2. *De interpretaties van constantesymbolen zijn:* $\mathbf{0} = \varnothing$ *en* $\mathbf{1} = \Omega$
3. *De interpretaties van functiesymbolen zijn:* $A^{\cdot c^{\mathcal{M}}} = A^c$*,*$A \wedge^{\mathcal{M}} B := A \cap B$ *en* $A \vee^{\mathcal{M}} B := A \cup B$
4. *Het enige relatiesymbool* P *wordt geïnterpreteerd door:* $P^{\mathcal{M}}(A) = \mathbb{P}(A)$

Dan is $\mathcal{M}$ *een* L^{kans}*-prestructuur*

Bewijs. Om te beginnen zullen we bewijzen dat de pseudometrische ruimte volledig is en diameter hoogstens 1 heeft. Het is duidelijk dat de diameter hoogstens 1 is, want $D(A, B) = \mathbb{P}(A \triangle B) \leq 0$, want een kans van een gebeurtenis is altijd kleiner of gelijk aan 1. Voor het bewijs van de volledigheid van deze ruimte verwijs ik naar [3] (propositie 4.7). Dan rest nu alleen nog te bewijzen dat de interpretaties van functiesymbolen voldoen aan hun bijbehorende modulus van uniforme continuïteit. Gegeven een $\varepsilon \in (0, 1]$. Zij $D(A, B) < \Delta^{\cdot c}(\epsilon) = \varepsilon$ dan is $D(A^{\cdot c^{\mathcal{M}}}, B^{\cdot c^{\mathcal{M}}}) = D(A^c, B^c) = \mathbb{P}(A^c \triangle B) = \mathbb{P}((A^c \cap (B^c)^c) \cup ((A^c)^c \cap B^c)) = \mathbb{P}((A^c \cap B) \cup (A \cap B^c)) = D(A, B) < \varepsilon$. Dus de interpretatie van $^{\cdot c}$ voldoet aan $\Delta_{\cdot c}$ als modulus van uniforme continuïteit. Voor de bewijzen dat de interpretaties van P, $\wedge$ en $\vee$ dat ook doen zie weer [3]. □

Stelling 1.2.7. *(Uitdelen van een prestructuur) Stel* $\mathcal{M}$ *met onderliggende pseudometrische ruimte* (M, d_M) *is een* L*-prestructuur (voor een willekeurige taal* L*). Definieer de relatie* $\sim$ *in* M *door:*

$$a \sim b \iff d_M(a, b) = 0$$

De relatie $\sim$ *is een equivalentierelatie. Definieer nu de functie* $\hat{d} : (M/\sim)^2 \to \mathbb{R}$ *door:*

$$\hat{d}([a], [b]) = d_M(a, b)$$

De functie $\hat{d}$ *is welgedefinieerd en het paar* $((M/\sim), \hat{d})$ *vormt een metrische ruimte. Definieer nu de structuur* $\hat{\mathcal{M}}$ *door* $((M/\sim), \hat{d})$ *als onderliggende metrische ruimte te nemen. De interpretatie van een constantesymbool* c *in* L *definiëren we* $c^{\hat{\mathcal{M}}} := [c^{\mathcal{M}}]$*. De interpretatie van een functiesymbool* f *definiëren we door* $f^{\hat{\mathcal{M}}}([x_1], ..., [x_n]) := [f^{\mathcal{M}}(x_1, ..., x_n)]$*. Dit is welgedefinieerd. De structuur* $\hat{\mathcal{M}}$ *is een* L*-structuur. De interpretatie van een relatiesymbool* R *definiëren we door* $R^{\hat{\mathcal{M}}}(x_1, ..., x_n) := R^{\mathcal{M}}(x_1, ..., x_n)$

Bewijs. We beginnen moeten eerst aantonen dat $\sim$ een equivalentierelatie is. Stel voor de rest van dit bewijs dat $a, b, c \in M$. We weten dat $d_M(a, a) = 0$ dus $a \sim a$. We weten ook dat $d_M(a, b) = 0 \Rightarrow d_M(b, a) = 0$ dus $a \sim b \Rightarrow b \sim a$. Als $a \sim b$ en $b \sim c$ dan $d_M(a, b) = d_M(b, c) = 0$ Dus $0 \leq d_M(a, c) \leq d_M(a, b) + d_M(b, c) = 0$. Dus $d_M(a, c) = 0$. Hiermee hebben we bewezen dat $\sim$ een equivalentierelatie is.
Neem aan dat $a, a', b, b' \in M$ waarbij $a \sim a'$ en $b \sim b'$. Vanwege de driehoeksongelijkheid weten we dat $d(a, b) \leq d(a, a') + d(a', b') + d(b', b) = 0 + d(a', b') + 0 = d(a', b')$. Met een symmetrisch argument kunnen we ook bewijzen dat $d(a', b') \leq d(a, b)$. Dus $d(a, b) = d(a', b')$ als $a \sim a'$. Hiermee hebben we bewezen dat de functie $\hat{d}$ welgedefinieerd is. De functie $\hat{d}$ voldoet verder nog aan alle eisen van een metriek. Het paar $(M/\sim, \hat{d}$ is dus een metrische ruimte.
Stel f is een n-plaatsig functiesymbool in L en $a_i, a_i' \in M$ voor alle $i \in \{1, 2, ..., n\}$ zodanig dat $a_i \sim a_i'$. Merk op dat $d_{M^n}((a_1, ..., a_n), (a_1', ..., a_n') = 0$. Hieruit volgt dat voor alle $\epsilon > 0$ geldt $d_{M^n}((a_1, ..., a_n), (a_1', ..., a_n') < \Delta_f(\epsilon)$. We weten dat $f^{\mathcal{M}}$ voldoet aan Δ_f als modulus van uniforme continuïteit. Dus

$$d_M(f^{\mathcal{M}}(a_1, ..., a_n), f^{\mathcal{M}}(a_1', ..., a_n')) < \epsilon$$

voor alle $\epsilon > 0$. Dus $f^{\mathcal{M}}(a_1, ..., a_n) = f^{\mathcal{M}}(a_1', ..., a_n')$. Daarom is $f^{\hat{\mathcal{M}}}$ welgedefinieerd. Hetzelfde argument is te gebruiken om de welgedefinieerdheid van $R^{\hat{\mathcal{M}}}$ te bewijzen.
Tot slot voldoet $\hat{\mathcal{M}}$ aan alle eisen van een L-structuur, want de eigenschappen van een metriek en uniforme continuïteit blijven behouden onder de deze specifieke veranderingen. □

Een prestructuur is dus altijd op een natuurlijke manier uit te delen naar een ëchte"structuur. Wat het betekent om een natuurlijke manier te zijn zullen we verder bespreken in ... Voor nu zullen we verder gaan met kansruimtes. Stelling 1.2.7 kan namelijk ook gebruikt worden op de L^{kans}-prestructuur, die was voortgekomen uit een kansruimte, zoals beschreven in dit hoofdstuk. Het resultaat noemen we een kansstructuur of soms een kansalgebra.

Definitie 1.2.8. Zij $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ een kansruimte. De kansstructuur van deze kansruimte is een L^{kans}-structuur $\mathcal{K}$ met:

1. De metrische ruimte $(\Omega/\sim, d)$, waarbij de $\sim$ de equivalentierelatie is op Ω gedefinieerd door:
$$A \sim B \iff \mathbb{P}(A \triangle B) = 0$$
De metriek d is gedefinieerd door:
$$d([A],[B]) = \mathbb{P}(A \triangle B)$$
2. De interpretaties van constantesymbolen zijn: $\mathbf{0}^{\mathcal{K}} = [\varnothing]$ en $\mathbf{1}^{\mathcal{K}} = [\Omega]$
3. De interpretaties van functiesymbolen zijn: $[A]^{\cdot c^{\|}} = [A^c]$,$[A] \wedge^{\mathcal{K}} [B] := [A \cap B]$ en $[A] \vee^{\mathcal{K}} [B] := [A \cup B]$
4. Het enige relatiesymbool P wordt geïnterpreteerd door: $P^{\mathcal{K}}([A]) = \mathbb{P}(A)$

Het mooie van deze L-structuur is dat de kansfunctie $\mathbb{P}$ op een gemakkelijke manier kan worden geïnterpreteerd door een relatiesymbool. Dit is niet mogelijk in de Klassieke logica. We kunnen de klasse van kansstructuren zelfs axiomatiseren. Een klasse van structuren is te axiomatiseren als er een L-structuur T bestaat waarvoor geldt dat een model $\mathcal{M}$ een model is van T dan en slechts dan als $\mathcal{M}$ in de klasse zit. (Voor de definities van een L-theorie en model zie 1.1.10.) In dit geval geldt dus dat er een L^{kans}-theorie T (van 18 L-zinnen) bestaat waarvoor geldt dat een L^{kans}-structuur $\mathcal{M}$ een kansstructuur is dan en slechts dan als $\mathcal{M}$ een model is van T. Voor het volledige bewijs van de axiomatisering van kansstructuren zie [3] hoofdstuk 4. Voor verdere discussie over kansruimtes als L-structuren zie [2], hoofdstuk 16. Het axiomatiseren van een klasse van structuren kan nuttig zijn om deze klasse beter te begrijpen. Bewijsbomen kunnen ook gebruikt worden in de CL. Doordat kansstructuren te axiomatiseren zijn, kunnen we ook bewijsbomen gebruiken om dingen formeel te bewijzen voor kansstructuren, en dus voor kansruimtes.

1.3 Vergelijking tussen continue logica en klassieke logica

Tot nu toe hebben we in dit hoofdstuk alle begrippen gedefinieerd die nodig zijn om de continue logica te begrijpen en hebben we een nuttig voorbeeld gegeven van een L-structuur. In dit deelhoofdstuk gaan we de CL met KL vergelijken. We zullen bewijzen dat de CL een voortzetting vormt van de KL. Daarnaast zullen we kijken in hoe verre we formules in CL kunnen vergelijken met KL. Voor dit deelhoofstuk wordt er dus ook vanuit gegaan dat de lezer bekend is met de KL. Als dat niet zo is, verwijs ik naar [4] en in het bijzonder naar de definitie van een L-structuur (definition 2.3.1) en de interpretatie van formules (definition 2.3.3). Het idee en uitwerking van dit deelhoofdstuk is door auteur zelf bedacht.

Stel $\mathcal{M}$, met onderliggende verzameling M, is een model van een klassieke taal $L = (con(L), fun(L), rel(L))$. Vorm nu de taal $\hat{L}$ in continue logica door te stellen dat $\hat{L} = (con(L), fun(L), rel(L))$ met dezelde ariteiten als in de taal L en voor elk functie f of relatiesymbool R is $\Delta_f(\epsilon) = \Delta_R(\epsilon) = 1/2$. Neem aan dat $\mathcal{M}$ een L-structuur is (in KL) met de verzameling M als onderliggende ruimte.
Definieer de $\hat{L}$-structuur $\hat{\mathcal{M}}$, met als onderliggende metrische ruimte de verzameling M met de discrete metriek erop. Stel c is een constantesymbool in L. Dan is $c^{\hat{\mathcal{M}}}$ hetzelfde element van M als $c^{\mathcal{M}}$. Hetzelfde geldt voor functiesymbolen. Als R een relatiesymbool in L, dan geldt $R^{\hat{\mathcal{M}}}(a^1, ..., a^n) = 0$ als $\mathcal{M} \models R(a^1, ..., a^n)$ en $R^{\hat{\mathcal{M}}}(a^1, ..., a^n) = 1$ als $\mathcal{M} \not\models R(a^1, ..., a^n)$. Merk op dat alle interpretaties van functies en relaties ook voldoen aan de modulus van uniforme continuïteit, vanwege de discrete metriek.

We kunnen formules in klassieke logica nu als het ware vertalen naar continue logica. Dit doen we door steeds tekens te verwisselen in de formule. De constante-,functie en relatiesymbolen blijven hetzelfde. Ook symbolen van variabelen blijven hetzelfde. Een L-term blijft dus altijd hetzelfde. Stel $\phi(x_1, ..., x_n)$ is een L-formule. We definiëren nu de *vertaling* van ϕ en noemen dit $\hat{\phi}(x_1, ..., x_n)$ een formule in CL

- Als $\phi =$ "$s = t$" is, met s, t L-termen. Dan is $\phi' = d(s,t)$
- Als $\phi = R(t_1, ..., t_n)$ is, dan is $\hat{\phi} = R(t_1, ..., t_n)$
- Als $\phi = \neg\psi$, dan $\hat{\phi} = |\hat{\psi} - 1|$
- Als $\phi = \psi \wedge \tau$, dan $\hat{\phi} = \max(\hat{\psi}, \hat{\tau})$
- Als $\phi = \psi \vee \tau$, dan $\hat{\phi} = \min(\hat{\psi}, \hat{\tau})$
- Als $\phi = \psi \to \tau$, dan $\hat{\phi} = \max(0, \hat{\tau} - \hat{\psi})$
- Als $\phi = \forall_x \psi$, dan $\hat{\phi} = \sup_x \hat{\psi}$
- Als $\phi = \exists_x \psi$, dan $\hat{\phi} = \inf_x \hat{\psi}$

Stelling 1.3.1. *Zij L een taal in KL, $\mathcal{M}$ een L-structuur en $\phi(x_1, ..., x_n)$ een L-formule. Laat $\hat{L}$,$\hat{\mathcal{M}}$ en ϕ de omzettingen zijn van KL naar CL zoals in de bovenste paragrafen beschrijven. Als $\mathcal{M} \models \phi(a^1, ..., a^n)$, waarbij $a^1, ..., a^n \in M$, dan $\hat{\phi}^{\mathcal{M}'}(a^1, ..., a^n) = 0$. Als $\mathcal{M} \not\models \phi(a^1, ..., a^n)$, waarbij $a^1, ..., a^n \in M$, dan $\phi^{\mathcal{M}'}(a^1, ..., a^n) = 1$.*

Bewijs. Merk eerst op dat constanten en functies in $\mathcal{M}$ en $\hat{\mathcal{M}}$ hetzelfde worden geïnterpreteerd. Dit betekent dus dat termen zonder vrije variabelen hetzelfde element in $\mathcal{M}$ en $\hat{\mathcal{M}}$ representeren. We gaan dit nu met inductie op de complexiteit van een L-formule ϕ bewijzen. We zeggen dat ϕ voldoet aan de hypothese als de stelling waar is voor de formule ϕ. We beginnen door aan te tonen dat atomaire formules voldoen aan de hypothese.

- Stel $\phi =$ "$s = t$", waarbij s, t twee L-termen. Stel $\mathcal{M} \models \phi$, dan is s gelijk aan t, dus $\hat{\phi}^{\hat{\mathcal{M}}} = d_M(s,t) = 0$. Stel $\mathcal{M} \not\models \phi$ dan is s niet gelijk aan t, dus $\hat{\phi}^{\hat{\mathcal{M}}} = d_M(s,t) = 1$, vanwege de discrete metriek.
- Stel ϕ van de vorm $R(t_1, ..., t_n)$. Dan voldoet $\hat{\phi}$ per definitie aan de hypothese.

Atomaire formules voldoen dus aan de hypothese. Stel nu dat ψ en τ voldoen aan de hypothese.

- Laat $\phi = \neg\psi$. Stel $\mathcal{M} \models \phi$ dan $\mathcal{M} \not\models \psi$ dus $\hat{\psi}^{\hat{\mathcal{M}}} = 1$ dus $\hat{\phi}^{\hat{\mathcal{M}}} = |\hat{\psi} - 1| = |1 - 1| = 0$
  Stel $\mathcal{M} \not\models \phi$ dan $\mathcal{M} \models \psi$ dus $\hat{\psi}^{\hat{\mathcal{M}}} = 0$ dus $\hat{\phi}^{\hat{\mathcal{M}}} = |\hat{\psi} - 1| = |0 - 1| = 1$
- Laat $\phi = \psi \wedge \tau$. Stel $\mathcal{M} \models \phi$, dan $\mathcal{M} \models \psi$ en $\mathcal{M} \models \tau$. Hiermee geldt $\hat{\phi}^{\hat{\mathcal{M}}} = \max(\hat{\psi}, \hat{\tau}) = \max(0,0) = 0$. Stel $\mathcal{M} \not\models \phi$, dan $\mathcal{M} \not\models \psi$ of $\mathcal{M} \not\models \tau$. In beide gevallen geldt $\max(\hat{psi}, \hat{tau}) = 1$. Dus $\hat{\phi} = 1$
- Laat $\phi = \psi \vee \tau$. Stel $\mathcal{M} \models \phi$, dan $\mathcal{M} \models \psi$ of $\mathcal{M} \models \tau$. In beide gevallen geldt $\min(\hat{\psi}, \hat{\tau}) = 0$. Dus $\hat{\phi}^{\hat{\mathcal{M}}} = 0$. Stel $\mathcal{M} \not\models \phi$, dan $\mathcal{M} \not\models \psi$ en $\mathcal{M} \not\models \tau$. Dus $\hat{\phi}^{\hat{\mathcal{M}}} = \min(\hat{psi}, \hat{tau}) = \min(1,1) = 1$.
- Laat $\phi = \psi \to \tau$. Stel $\mathcal{M} \models \phi$. Als $\mathcal{M} \models \psi$ dan $\mathcal{M} \models \tau$. Dus $\hat{\phi}^{\hat{\mathcal{M}}} = \max(0, \hat{\tau} - \hat{\psi}) = \max(0, 0 - 0) = 0$
  Als $\mathcal{M} \not\models \psi$, dan $\hat{\phi}^{\hat{\mathcal{M}}} = \max(0, \hat{tau} - \hat{psi}) = \max(0, \hat{tau} - 1)$. We weten dat $\hat{tau} \leq 1$ dus $\hat{\phi}^{\hat{\mathcal{M}}} = 0$.
  Stel $\mathcal{M} \models \phi$, dan moet $\mathcal{M} \models \psi$ en $\mathcal{M} \not\models \tau$. Dus $\hat{\phi}^{\hat{\mathcal{M}}} = \max(0, \hat{\tau} - \hat{\psi}) = \max(0, 1 - 0) = 1$.
- Laat $\phi = \forall_x \psi(x)$. Stel $\mathcal{M} \models \phi$ dan $\mathcal{M} \models \psi(x)$ voor alle $x \in M$. Dus $\hat{\psi}^{\hat{\mathcal{M}}} =$ voor alle $x \in M$. Dus $\hat{\phi}^{\hat{\mathcal{M}}} = 0$.
  Stel $\mathcal{M} \not\models \phi$ dan bestaat er een $x \in M$ zodat $\mathcal{M} \not\models \psi(x)$. Dus er bestaat een $x \in M$ zodat $\hat{\psi}^{\hat{\mathcal{M}}} = 1$, dus $\hat{\phi}^{\hat{\mathcal{M}}} = 1$.
- Laat $\phi = \exists_x \psi(x)$. Stel $\mathcal{M} \models \phi$, dan bestaat er een $x \in M$ waarbij $\mathcal{M} \models \psi(x)$. Dus er bestaat een $x \in M$ zodat $\hat{\psi(x)}^{\hat{\mathcal{M}}} = 0$. Dus $\hat{\phi}^{\hat{\mathcal{M}}} = 0$.
  Stel $\mathcal{M} \not\models \phi$, dan geldt voor alle $x \in M$ dat $\mathcal{M} \not\models \psi$. Dus $\hat{\psi}^{\hat{\mathcal{M}}} = 1$. Dus $\hat{\phi}^{\hat{\mathcal{M}}} = 1$

□

In woorden gezegd valt elke L-structuur in KL om te zetten in L-structuur in CL. Hierdoor is CL op te vatten als een voortzetting van de KL.

2 Gereduceerde producten

Een gereduceerd product is als het ware een carthesisch product van L-structuren waar een filter over heen wordt gelegd. We zullen dan ook eerst definiëren wat een filter is. Later zullen we ook ultrafilters gebruiken om zo gereduceerde producten nog verfijnder te maken. Gereduceerde producten kunnen gebruikt worden in de KL om bijvoorbeeld de compactheidsstelling te bewijzen of om de non-standaard analyse te definiëren. In de CL spelen gereduceerde producten een nog belangrijkere rol dan in KL. Ze worden onder andere gebruikt om de axiomatiseerbaarheid van een klasse van structuren te bewijzen. Twee bekende stellingen die over gereduceerde producten gaan zijn de stelling van Łoś en de Keisler-Shelah stelling. In hoofdstuk 3 zullen we de stelling van Łoś in CL bewijzen. Deze stelling zegt iets over de relatie tussen formules die waar zijn in het gereduceerde product en formules die waar zijn in de L-structuren die vermenigvuldigd worden. In dit hoofdstuk gaan we het gereduceerde product van L-structuren definiëren. We volgens hierbij [1] en [2]. We zullen eerst de onderliggende metrische ruimte van het gereduceerde product definiëren. Daarna zullen we aantonen dat deze metrische ruimte ook compleet is en diameter hoogstens 1 heeft. Daarna zullen we de interpretaties van constante, functie- en relatiesymbolen geven. Tot slot zullen we aantonen dat alle interpretaties van functie en relatiesymbolen ook voldoen aan hun bijbehorende modulus van uniforme continuïteit. Daarmee hebben we bewezen dat het gereduceerde product voldoet aan alle eisen voor een L-structuur.

Definitie 2.0.1. Zij I een verzameling. Een *filter* $\mathcal{F}$ op I is een niet-lege deelverzameling van $\mathcal{P}(I)$ die voldoet aan de volgende criteria:

1. $\mathcal{F}$ is gesloten onder eindige doorsnede: als $A, B \in \mathcal{F}$ dan $A \cap B \in \mathcal{F}$
2. $\mathcal{F}$ is gesloten onder vergroting: als $A \in \mathcal{F}$ en $A \subseteq B \subseteq I$, dan $B \in \mathcal{F}$

Opmerking 2.0.2. In de literatuur is het soms ook gebruikelijk om te veronderstellen dat $\varnothing \notin \mathcal{F}$ als $\mathcal{F}$ een filter is. Het verschil is dat $\mathcal{P}(I)$ geen fitler is, terwijl dat zonder deze eis wel zo is.

Voorbeeld 2.0.3. We geven een aantal voorbeelden van filters (zonder bewijs):

1. De verzameling $\{I\}$ is een filter op I.
2. De machtsverzameling $\mathcal{P}(I)$ is een filter op I
3. Als $J \subset I$ dan is $\mathcal{F} := \{F \in \mathcal{P}(I) : J \subseteq F\}$ een filter op I
4. Als $|I|$ oneindig is, dan is de de verzameling van co-eindige deelverzamelingen van I ($\{F \in I : |F - I| < \infty\}$) een filter op I

Lemma 2.0.4. *Laat $\prod_{i \in I} M_i$ het Cartesisch product zijn van L-structuren M_i. Laat $d_{\mathcal{F}} : (\prod_{i \in I} M_i)^2 \to [0, \infty)$ gedefinieerd door:*

$$d_{\mathcal{F}}(a, b) := \inf_{S \in \mathcal{F}} \sup_{i \in S} d^{M_i}(a_i, b_i)$$

Dan is het paar $(\prod_{i \in I} M_i, d_{\mathcal{F}})$ een pseudometrische ruimte.

Bewijs. We gaan simpelweg de voorwaarden van een metriek na. Stel $a, b, c \in \prod i \in IM_i$

1. (niet-negativiteit) Aangezien d_{M_i} een afstandsfunctie is geldt $d_{M_i}(a_i, b_i) \geq 0$ voor alle $i \in I$
Dus $d_{\mathcal{F}}(a, b) = \inf_{S \in \mathcal{F}} \sup i \in Sd^{M_i}(a_i, b_i) \geq 0$
2. Voor alle $i \in I$ geldt $d^{M_i}(a_i, a_i) = 0$. Dus $d_{\mathcal{F}}(a, a) = \inf_{S \in \mathcal{F}} \sup i \in Sd^{M_i}(a_i, a_i) = 0$
3. Aangezien $d_{M_i}(a_i, b_i) = d_{M_i}(b_i, a_i)$ geldt ook $\inf_{S \in \mathcal{F}} \sup_{i \in S} d_{M_i}(a_i, b_i) = \inf_{S \in \mathcal{F}} \sup_{i \in S} d_{M_i}(b_i, a_i)$. Dus $d_{\mathcal{F}}((a)_{\mathcal{F}}, (b)_{\mathcal{F}}) = d_{\mathcal{F}}((b)_{\mathcal{F}}, (a)_{\mathcal{F}})$

4. We weten $d_F(a,b) = \inf_{S\in F} \sup i \in S d_{M_i}(a_i,b_i)$, dus voor elke $\varepsilon > 0$ bestaat er een $S_1 \in F$ zodat $\sup_{i\in S_1} d_{M_i}(a_i,b_i) < d_F(a,b)+\varepsilon$. Op gelijke wijze geldt er ook dat er een $S_2 \in F$ bestaat zodanig dat $\sup_{i\in S_2} d_{M_i}(b_i,c_i) < d_F(b,c)+\varepsilon$. Stel nu $S' = S_1 \cap S_2$ dan gedlt:

$$\begin{aligned} d_F(a,c) &= \inf_{S\in\mathcal{F}} \sup_{i\in S} d_{M_i}(a_i,c_i) \\ &\leq \sup_{i\in S'} d_{M_i}(a_i,c_i) \\ &\leq \sup_{i\in S'}((d_{M_i}(a_i,b_i)+d_{M_i}(b_i,c_i))) \\ &\leq \sup_{i\in S'} d_{M_i}(a_i,b_i) + \sup_{i\in S'} d_{M_i}(b_i,c_i) \\ &< d_F(a,b)+d_F(b,c)+2\varepsilon \end{aligned}$$

Daarnaast is ε willekeurig klein dus $d_F(a,c) \leq d_F(a,b)+d_F(b,c)$

Hierbij hebben we aangetoond dat $(\prod_{i\in I} M_i, d_{\mathcal{F}})$ een pseudometrische ruimte is. □

Iedere pseudometrische ruimte is uit te delen naar een metrische ruimte. Voor het bewijs hiervoor zie stelling 1.2.7. In dit geval komt dat neer op het volgende. We definiëren een relatie $\sim_{\mathcal{F}}$ op $\prod_{i\in I} M_i$ gedefinieerd door:

$$a \sim_{\mathcal{F}} b \iff \inf_{S\in\mathcal{F}} \sup_{i\in S} d_{M_i}(a_i,b_i) = 0$$

De relatie $\sim_{\mathcal{F}}$ vormt een equivalentieklasse. Een equivalentieklasse van een element $(a_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i$ noteren we met $(a)_{\mathcal{F}}$. We definiëren nu een functie $d_M : (\prod_{i\in I} M_i/_{\sim_{\mathcal{F}}})^2 \to [0,1]$ door:

$$d_M((a)_{\mathcal{F}},(b)_{\mathcal{F}}) = \inf_{S\in\mathcal{F}} \sup_{i\in S} d_{M_i}(a_i,b_i)$$

Het tweetal $(\prod_{M_i}/_{\sim_{\mathcal{F}}}, d_M)$ vormt een metrische ruimte. Zie stelling 1.2.7 voor een bewijs hiervoor.
We geven nu eerste de definitie van het gereduceerde product en zullen in de rest van dit hoofdstuk aantonen dat deze definitie voldoet aan alle eisen van een L-structuur.

Definitie 2.0.5. Zij I een niet-lege verzameling en $\mathcal{F}$ een filter op I. Zij L een taal en M_i een L-Structuur voor elke $i \in I$. Het gereduceerde product, wat we M noemen, is een L-structuur bestaande uit de onderliggende metrische ruimte $(\prod_{M_i}/_{\sim_{\mathcal{F}}}, d_M)$. Hierbij is $\sim_{\mathcal{F}}$ een relatie op $\prod_{i\in I} M_i$ gedefinieerd door:

$$a \sim_{\mathcal{F}} b \iff \inf_{S\in\mathcal{F}} \sup_{i\in S} d_{M_i}(a_i,b_i) = 0$$

Een equivalentieklasse van een element $a \in \prod_{i\in I} M_i$ noteren we met $(a)_{\mathcal{F}}$.
De metriek d_M is gedefinieerd door

$$d_M(a,b) = \inf_{S\in\mathcal{F}} \sup_{i\in S} d_{M_i}(a_i,b_i)$$

Als c een constantesymbool van de taal L is, dan interpreteren we $c^{\prod_{\mathcal{F}} M_i}$ door:

$$c^{\prod_{\mathcal{F}} M_i} = (c^{M_i})_{\mathcal{F}}$$

Als f een functiesymbool van de taal L met ariteit n dan interpreteren we $f^{\prod_{\mathcal{F}} M_i} : M^n \to M$ door

$$f^M(x^1,...,x^n) = (f^{M_i}(x_i^1,...,x_i^n))_{\mathcal{F}}$$

Als P een relatiesymbool van de taal L met ariteit n dan interpreteren we $P^{\prod_{\mathcal{F}} M_i} : M^n \to [0,1]$ door

$$P^{\prod_{\mathcal{F}} M_i}(x^1,...,x^n) = \inf_{S\in\mathcal{F}} \sup_{i\in I} P^{M_i}(x_i^1,...,x_i^n)$$

Zoals gezegd gaan we in de rest van dit hoofdstuk gebruiken om aan te tonen dat dit daadwerkelijk een L-structuur is. Lezers die al overtuigd zijn van dit gegeven kunnen de rest van dit hoofdstuk dan ook overslaan. Lemma 2.0.6 bewijst dat de onderliggende metrische ruimte van het gereduceerde product volledige is. De laatste twee lemma's bewijzen dat de interpretaties van functiesymbolen en relatiesymbolen voldoen aan hun bijbehorende modulus van uniforme continuïteit.

Lemma 2.0.6. *Elke Cauchy-rij in de metriek* $(\prod_{,} d_M)$ *convergeert.*

Bewijs. Laat $(x_k)_{k\geq 1}$ een Cauchy-rij zijn in $(\prod_{i\in I} M_i, d_{\mathcal{F}})$. Zonder verlies van algemeenheid kunnen we zeggen dat $d(x^k, x^{k+1}) < 2^{-k}$. Voor $m \geq 1$ nemen we $A_m := \{i \in I : \forall_{j\leq m} d_{M_i}(x_i^j, x_i^{j+1}) < 2^{-j}\}$. We weten dat $d_{\mathcal{F}}(x^k, x^{k+1}) = \limsup_{\mathcal{F}} d_{M_i}(x_i^k, x_i^{k+1}) < 2^{-k}$, dus er bestaat een $S^k \in \mathcal{F}F$ zodat $\sup d_{M_i}(x_i^k, x_i^{k+1}) < 2^{-k}$ voor elke $k \geq 1$. Vanwege de eerste eigenschap van een filter weten we dat $S_m = \bigcap_{k\leq m} S^k \in \mathcal{F}$ Aangezien nu $S_m \subseteq A_m \subset I$ en $S_m \in \mathcal{F}$ geldt $A_m \in F$, vanwege de tweede eigenschap van een filter. Definieer nu $(y_i)_{i\in I}$ door:

1. Als $i \notin A_1$ dan is y_i een willekeurig element in $M - i$
2. Als er een zekere $m \in \mathbb{N}$ is zodat $i \in A_m - A_{m+1}$ dan is $y_i = x_i^{m+1}$
3. als $i \in A_m$ voor alle $m \in \mathbb{N}$, dan is y_i gelijk aan de limiet van de Cauchy-rij $(x_i^m)_{i\in I}$ in M_i, immers $d_{M_i}(x_i^m, x_i^{m+1}) < 2^{-m}$ als $x^m \in A_m$ wat in dit geval is voor alle m. Daarnaast geldt ook dat M_i compleet is omdat het een L-structuur is.

Bekijk nu $d_{M_i}(x_i^m, y_i)$ op een gegeven $i \in A_m$ (en m willekeurig). Het is duidelijk dat dit naar nul gaat als m naar oneindig gaat. We weten dat $d_M(x^k, y) \leq \sup_{i\in A_m} d_{M_i}(x_i^k, y_i)$Dus $[(y_i)_{i\in I}]$ is de limiet van $(x_k)_{k\geq 1}$. Hiermee is bewezen dat elke Cuachy-rij een limiet heeft en dat M volledig is. □

Lemma 2.0.7. *Als f een functiesymbool van de taal L is, dan is de functie f^M is welgedefinieerd ,heeft deze Δ_f als modulus of uniform continuity en het bereik ligt in* $[0,1]$

Bewijs. Gegeven $\varepsilon > 0$ en $a^1, b^1, ..., a^n, b^n \in \prod_{i\in I} M_i$, neem aan

$$d_{M^n}((a^1_{\mathcal{F}}, ..., a^n_{\mathcal{F}}), (b^1_{\mathcal{F}}, ..., b^n_{\mathcal{F}})) < \Delta_f(\varepsilon)$$

oftewel voor elke $1 \leq k \leq n$ geldt: $d_M(a^k_{\mathcal{F}}, b^k_{\mathcal{F}}) < \Delta_f(\varepsilon)$.

Dus er is een $S^k_\varepsilon \in \mathcal{F}$ zodat $\sup_{i\in S^k_\varepsilon} d_{M_i}(a^k_i, b^k_i) < \Delta_f(\varepsilon)$. Neem $S_\varepsilon = S^k_\varepsilon \cap ... \cap S^n_\varepsilon \in \mathcal{F}$. Hiervoor geldt:

$$\sup_{i\in S_\varepsilon} d_{M_i^n}((a^1_i, ..., a^n_i), (b^1_i, ..., b^n_i)) < \Delta_f(\varepsilon)$$
$$\sup_{i\in S_\varepsilon} d_{M_i}(f(a^1_i, ..., a^n_i), f(b^1_i, ..., b^n_i)) \leq \varepsilon$$
$$\inf_{S\in\mathcal{F}} \sup_{i\in S} d_{M_i}(f(a^1_i, ..., a^n_i), f(b^1_i, ..., b^n_i)) \leq \varepsilon$$
$$d_M((f_i(a^1_i, ..., a^n_i))_{\mathcal{F}}, (f_i(b^1_i, ..., b^n_i))_{\mathcal{F}}) \leq \varepsilon$$

Hiermee hebben we bewezen dat f^M een Δ_f als modulus of uniform continuity heeft, mits f^M welgedefinieerd is. Stel

$$d_{m^n}((a^1_{\mathcal{F}}, ..., a^n_{\mathcal{F}}), (b^1_{\mathcal{F}}, ..., b^n_{\mathcal{F}})) = 0$$

dan is

$$d_M((f_i(a^1_i, ..., a^n_i))_{\mathcal{F}}, (f_i(b^1_i, ..., b^n_i))_{\mathcal{F}}) \leq \varepsilon d_M((f_i(a^1_i, ..., a^n_i))_{\mathcal{F}}, (f_i(b^1_i, ..., b^n_i))_{\mathcal{F}}) = 0$$

Aangezien ε willekeurig klein kan zijn. Hiermee hebben we bewezen dat f^M welgedefinieerd is.

□

Lemma 2.0.8. *De functie P^M is welgedefinieerd en heeft Δ_P als modulus of uniform continuity.*

Bewijs. Gegeven $\varepsilon > 0$ en $a^1, b^1, ..., a^n, b^n \in \prod_{i \in I} M_i$, neem aan

$$d_{m^n}((a^1_{\mathcal{F}}, ..., a^n_{\mathcal{F}}), (b^1_{\mathcal{F}}, ..., b^n_{\mathcal{F}})) < \Delta_P(\varepsilon)$$

oftewel voor elke $1 \leq k \leq n$ geldt: $d_M(a^k_{\mathcal{F}}, b^k_{\mathcal{F}}) < \Delta_f(\varepsilon)$.

Dus er is een $S^k_\varepsilon \in \mathcal{F}$ zodat $\sup_{i \in S^k_\varepsilon} d_{M_i}(a^k_i, b^k_i) < \Delta_P(\varepsilon)$. Neem $S_\varepsilon = S^k_\varepsilon \cap ... \cap S^n_\varepsilon \in \mathcal{F}$. Hiervoor geldt:

$$\sup_{i \in S_\varepsilon} d_{M^n_i}((a^1_i, ..., a^n_i), (b^1_i, ..., b^n_i)) < \Delta_P(\varepsilon)$$
$$\sup_{i \in S_\varepsilon} d_{[0,1]}(P^{M_i}(a^1_i, ..., a^n_i), P(b^1_i, ..., b^n_i)) \leq \varepsilon$$
$$\sup_{i \in S_\varepsilon} |P_{M_i}(a^1_i, ..., a^n_i) - P(b^1_i, ..., b^n_i)| \leq \varepsilon$$

We gebruiken een bewijs uit het ongerijmde om aan te tonen dat voor een willekeurige $S \in \mathcal{F}$ geldt: $sup_{i \in S \cap S_\varepsilon} P^{M_i}(a^1_i, ..., a^n_i) - sup_{i \in S \cap S_\varepsilon} P^{M_i}(b^1_i, ..., b^n_i)| \leq \varepsilon$. Stel dat dit niet het geval is. Neem zonder verlies van algemeenheid aan dat $sup_{i \in S \cap S_\varepsilon} P^{M_i}(a^1_i, ..., a^n_i) > sup_{i \in S \cap S_\varepsilon} P^{M_i}(b^1_i, ..., b^n_i) + \varepsilon$. Dan bestaat er een $i \in S_\varepsilon$ zodat $P_{M_i}(a^1_i, ..., a^n_i) > P(b^1_i, ..., b^n_i) + \varepsilon$, wat leidt tot een tegenspraak.
Via eenzelfde redenering geldt: $|\inf_{S \in \mathcal{F}} sup_{i \in S \cap S_\varepsilon} P^{M_i}(a^1_i, ..., a^n_i) - \inf_{S \in \mathcal{F}} sup_{i \in S \cap S_\varepsilon} P^{M_i}(b^1_i, ..., b^n_i)| \leq \varepsilon$. Oftewel $d_{[0,1]}(P^M(a^1_i, ..., a^n_i), P^M(b^1_i, ..., b^n_i)) \leq \varepsilon$. Hiermee is bewezen dat P^M een modulus of uniform continuity Δ_P heeft, mits P^M welgedefinieerd. Welgedefinieerdheid is op dezelfde manier aan te tonen als bij f^M. □

3 formules die waar zijn in het gereduceerde product

In dit hoofdstuk zijn we op zoek naar formules die waar zijn in het gereduceerde product. We zijn vooral geïnteresseerd in formules ϕ waarvoor geldt:

$$\phi^M(a^1_{\mathcal{F}}, ..., a^n_{\mathcal{F}}) = \inf_{S\in\mathcal{F}} sup_{i\in S}\phi^{M_i}(a^1_i, ..., a^n_i) \tag{3.1}$$

In lemma 3.0.1 bewijzen we dat vergelijking 3.1 voldoet als ϕ een atomaire formule is. In stelling **??** bewijzen we dat de ϕ voldoet aan vergelijking 3.1 als ϕ is opgebouwd uit atomaire formules en de kwantoren inf en sup. Beide stellingen komen uit [1]. We zullen echter ook een voorbeeld geven van een gereduceerd product en L-formule waarvoor vergelijking 3.1 niet geldt. Om toch te zorgen dat alle formules voldoen aan de vergelijking introduceren we de notie van ultraproducten. Voor gereduceerde producten die ultraproducten geldt de formule altijd, zie stelling 3.0.6. Hiermee kunnen we de Compactheidsstelling zie stelling 3.0.8 voor continue logica bewijzen. Alle bewijzen in dit hoofdstuk zijn door de auteur zelf bedacht met uitzondering van het bewijs van 3.0.2, die uit [1] komt, en het bewijs voor de compactheidsstelling, dat een bewijs dat vaak voor komt in de literatuur, zoals in [2] en [4].

Lemma 3.0.1. *Als $\alpha(x_1, ..., x_n)$ een atomaire formule en $a^1, ..., a^n \in \prod_{i\in I} M_i$, dan geldt:*

$$\alpha^M(a^1_{\mathcal{F}}, ..., a^n_{\mathcal{F}}) = \inf_{S\in\mathcal{F}} sup_{i\in S}\alpha^{M_i}(a^1_i, ..., a^n_i)$$

Bewijs. We gaan dit met inductie op α bewijzen. Als α geen functiesymbool bevat dan is α van de vorm $d(x_1, x_2)$ of $R(x_1, ..., x_n)$. In beide gevallen voldoet α per definitie aan de stelling. Stel dat voor alle formules met k functiesymbolen of minder de stelling geldt. Neem nu een formule β met $k + 1$ functiesymbolen. Stel een functiesymbool in β is f. Dan is $\beta(x_1, ..., x_n) = \alpha(x_1, ..., f(x_s..., x_t), ..., x_n)$, waarbij α slechts k functiesymbolen heeft en dus voldoet aan de stelling. Dus

$$\begin{aligned}\beta^M(a^1_{\mathcal{F}}, ..., a^n_{\mathcal{F}}) &= \alpha^M(a^1_{\mathcal{F}}, ..., f(a^s_{\mathcal{F}}..., a^t_{\mathcal{F}}), ..., a^n_{\mathcal{F}}) \\ &= \alpha^M(a^1_{\mathcal{F}}, ..., (f_i(a^s_i..., a^t_i))_{\mathcal{F}}, ..., a^n_{\mathcal{F}}) \\ &= inf_{S\in\mathcal{F}} sup_{i\in S}\alpha^{M_i}(a^1_i, ..., f_i(a^s_i..., a^t_i), ..., a^n) \\ &= inf_{S\in\mathcal{F}} sup_{i\in S}\beta^{M_i}(a^1_i, a^n)\end{aligned}$$

Uit inductie volgt dat alle atomaire formules voldoen aan de stelling. □

Stelling 3.0.2. *Als $\alpha(x_1, ..., x_n)$ een L-formule opgebouwd uit atomaire formules, de kwantoren inf en sup, connectives max (van iedere ariteit) en strikt stijgende connectives met ariteit 1., stel $a^1, ..., a^n \in \prod_{i\in I} M_i$ dan geldt:*

$$\alpha^M(a^1_{\mathcal{F}}, ..., a^n_{\mathcal{F}}) = \inf_{S\in\mathcal{F}} sup_{i\in S}\alpha^{M_i}(a^1_i, ..., a^n_i)$$

Bewijs. We gaan dit bewijzen met behulp van inductie op ϕ. Het atomaire geval hebben we aangetoond in lemma 3.0.1.

Claim 1. Stel $\phi(x, x_1..., x_n)$ voldoet aan de inductiehypothese (vergelijking 3.1) Dan voldoet $\sup_x \phi(x, x_1, ..., x_n)$ ook aan de inductiehypothese.

Bewijs van Claim: Stel $\phi(x_1, .., x_n)$ voldoet aan de inductiehypothese. Gegeven $\varepsilon > 0$ bestaat er een $a \in \prod_{i\in I} M_i$ zodat $\phi(a_{\mathcal{F}}, a^1_{\mathcal{F}}, ..., a^n_{\mathcal{F}}) > \sup_x \phi(x, a^1_{\mathcal{F}}, ..., a^n_{\mathcal{F}}) - \varepsilon$. Dus

$$\begin{aligned}\sup_x \phi(x, a^1_{\mathcal{F}}, ..., a^n_{\mathcal{F}}) - \varepsilon &< \phi(a_{\mathcal{F}}, a^1_{\mathcal{F}}, ..., a^n_{\mathcal{F}}) \\ &= \inf_{S\in\mathcal{F}} \sup_{i\in S} \phi(a_{\mathcal{F}}, a^1_{\mathcal{F}}, ..., a^n_{\mathcal{F}}) \\ &\le \inf_{S\in\mathcal{F}} \sup_{i\in S} \sup_x \phi(x, a^1_{\mathcal{F}}, ..., a^n_{\mathcal{F}})\end{aligned}$$

Aangezien ε willekeurig klein mag zijn, $\sup_x \phi(x, a^1_{\mathcal{F}}, ..., a^n_{\mathcal{F}}) \leq \inf_{S\in\mathcal{F}} \sup_{i\in S} \sup_x \phi(x, a^1_{\mathcal{F}}, ..., a^n_{\mathcal{F}})$.
Aan de andere kant geldt dat $\phi^M(a_{\mathcal{F}}, a^1_{\mathcal{F}}, ..., a^n_{\mathcal{F}}) \leq \sup_x \phi(x, a^1_{\mathcal{F}}, ..., a^n_{\mathcal{F}})$ voor alle $a \in \prod_{i\in I} M_i$. Dus $\inf_{S\in\mathcal{F}} \sup_{i\in S} \phi^{M_i}(a_i, a^1_i, ..., a^n_i) \leq$

$$\phi^M(a_{\mathcal{F}}, a^1_{\mathcal{F}}, ..., a^n_{\mathcal{F}} \leq \sup_x \phi^M(x, a^1_{\mathcal{F}}, ..., a^n_{\mathcal{F}})$$
$$\inf_{S\in\mathcal{F}} sup_{i\in S}\phi^{M_i}(a_i, a^1_i, ..., a^n_i) \leq \sup_x \phi^M(x, a^1_{\mathcal{F}}, ..., a^n_{\mathcal{F}})$$
$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists S' \in \mathcal{F}) \sup_{i\in S'} \phi^{M_i}(a_i, a^1_i, ..., a^n_i) \leq \sup_x \phi^M(x, a^1_{\mathcal{F}}, ..., a^n_{\mathcal{F}}) + \varepsilon$$

Neem nu een $a \in \prod_{i\in I} M_i$ zodat voor alle $i \in I$

$$\phi^{M_i}(a_i, a^1_i, ..., a^n_i) + \varepsilon \geq \sup_x \phi^{M_i}(x, a^1_i, ..., a^n)$$

Dan krijgen we hiermee voor alle $i \in S'$

$$\sup_x \phi^{M_i}(x, a^1_i, ..., a^n) \leq \phi^{M_i}(a_i, a^1_i, ..., a^n_i) + \varepsilon < \sup_x \phi^M(x, a^1_{\mathcal{F}}, ..., a^n_{\mathcal{F}}) + 2\varepsilon$$

Dus geldt $\inf_{S\in\mathcal{F}} \sup_{i\in S} \sup_x \phi^{M_i}(x, a^1_i, ..., a^n) \leq \sup_x \phi^M(x, a^1_{\mathcal{F}}, ..., a^n_{\mathcal{F}}) + 2\varepsilon$. Aangezien ε willekeurig klein mag zijn geldt: $\inf_{S\in\mathcal{F}} \sup_{i\in S} \sup_x \phi^{M_i}(x, a^1_i, ..., a^n) \leq \sup_x \phi^M(x, a^1_{\mathcal{F}}, ..., a^n_{\mathcal{F}})$.

Daarmee geldt dus dat $\inf_{S\in\mathcal{F}} \sup_{i\in S} \sup_x \phi^{M_i}(x, a^1_i, ..., a^n) = \sup_x \phi^M(x, a^1_{\mathcal{F}}, ..., a^n_{\mathcal{F}})$. Dus als $\phi(x, x_1, ..., x_n)$ voldoet aan de hypothese dan voldoet $\sup_x \phi(x, x_1, .., x_n)$ dat ook. ■

Claim 2. Stel weer dat $\phi(x, x_1, ..., x_n)$ voldoet aan de inductiehypothese. Dan voldoet $\inf_x \phi(x, x_1, ..., x_n)$ dat ook.

Bewijs van Claim: Gegeven $\varepsilon > 0$. Er bestaat een $a \in \prod_{i\in I} M_i$ zodat

$$\phi^M(a_{\mathcal{F}}, a^1_{\mathcal{F}}, ..., a^n_{\mathcal{F}}) < \inf_x \phi^M(x, a^1_{\mathcal{F}}, ..., a^n_{\mathcal{F}}) + \varepsilon \tag{3.2}$$

Dus

$$\inf_x \phi^M(x, a^1_{\mathcal{F}}, ..., a^n_{\mathcal{F}}) + \varepsilon > \phi^M(a_{\mathcal{F}}, a^1_{\mathcal{F}}, ..., a^n_{\mathcal{F}}) = \inf_{S\in\mathcal{F}} \sup_{i\in S} \phi^{M_i}(a_i, a^1_i, ..., a^n_i) \geq \inf_{S\in\mathcal{F}} \sup_{I\in S} inf_x \phi^{M_i}(x, a^1_i, ..., a^n_i)$$

Aangezien ε willekeurig klein kan zijn geldt: $\inf_x \phi^M(x, a^1_{\mathcal{F}}, ..., a^n_{\mathcal{F}}) \geq \inf_{S\in\mathcal{F}} \sup_{I\in S} inf_x \phi^{M_i}(x, a^1_i, ..., a^n_i)$
Aan de andere kant geldt voor alle $a \in \prod_{I\in I} M_i$,

$$\inf_x \phi^M(x, a^1_{\mathcal{F}}, ..., a^n_{\mathcal{F}}) \leq \phi^M(a_{\mathcal{F}}, a^1_{\mathcal{F}}, ..., a^n_{\mathcal{F}}) = \inf S \in \mathcal{F} \sup i \in S \phi^{M_i}(a_i, a^1_i, ..., a^n_i)$$

Ofwel voor elke $S \in \mathcal{F}$ geldt: $\sup_{i\in S} \phi^{M_i}(x, a_1, ..., a_n) \geq \inf_x \phi^M(x, a^1_{\mathcal{F}}, ..., a^n_{\mathcal{F}})$. Neem nu $a \in \prod_{i\in I} M_i$ op zo'n manier dat:

$$\phi^{M_i}(a_i, a^1_i, ..., a^n_i) \leq \inf_x \phi^{M_i}(a_i, a^1_i, ..., a^n_i)$$

Neem nu een willekeurige $S \in \mathcal{F}$, dan geldt:

$$\begin{aligned}\sup_{I\in S} \inf_x \phi^{M_i}(x, a^1_i, ..., a^n_i) &\geq \sup_{i\in S}(\phi^{M_i}(a_i, a^1_i, ..., a^n_i) - \varepsilon)\\ &= \sup_{i\in S}(\phi^{M_i}(a_i, a^1_i, ..., a^n_i)) - \varepsilon\\ \geq \inf_x \phi^M(x, a^1_{\mathcal{F}}, ..., a^n_{\mathcal{F}}) - \varepsilon\end{aligned}$$

Wederom geldt dat ε willekeurig klein mag zijn en daarom wegvalt, daarnaast geldt ook dat we $S \in \mathcal{F}$ willekeurig is. Daarom kunnen we van de linkerkant het infimum nemen. Dan krijgen we

$$\inf_{S\in\mathcal{F}} \sup_{I\in S} \inf_{x} \phi^{M_i}(x, a_i^1, ..., a_i^n) \geq \inf_{x} \phi^{M}(x, a_{\mathcal{F}}^1, ..., a_{\mathcal{F}}^n) \tag{3.3}$$

Daarmee hebben we twee kanten van een ongelijkheid bewezen. Dus geldt

$$\inf_{S\in\mathcal{F}} \sup_{I\in S} \inf_{x} \phi^{M_i}(x, a_i^1, ..., a_i^n) = \inf_{x} \phi^{M}(x, a_{\mathcal{F}}^1, ..., a_{\mathcal{F}}^n) \tag{3.4}$$

Als $\phi(x, x_1, ..., x_n)$ voldoet aan de inductiehypothese. Dan voldoet $\inf_x \phi(x, x_1, ..., x_n)$ dat ook. ■

We hebben hiermee aan de hand van inductie op de complexiteit van ϕ de stelling bewezen. □

We zouden graag willen dat alle formules in het gereduceerde product voldoen aan vergelijking 3.1. Dit is echter niet het geval. Om er toch voor te zorgen dat alle formules in een zeker gereduceerd product voldoen aan vergelijking 3.1, introduceren we de notie van een ultrafilter en een ultraproduct. We zullen bewijzen dat alle formules in een ultraproduct voldoen aan vergelijking 3.1.

Definitie 3.0.3. Een *Ultrafilter* is een maximaal filter. Een filter $\mathcal{F}$ op I is een *Ultrafilter* als

1. $\mathcal{F} \neq \mathcal{P}(I)$
2. als $\mathcal{U}$ een filter op I en $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{U}$, dan $\mathcal{U} = \mathcal{P}(I)$

Voorbeeld 3.0.4. (Voorbeeld van een ultrafilter) Als x een element is van I. Dan is $\mathcal{U} := \{U \in \mathcal{P}(I) : x \in U\}$ een ultrafilter op I. Een ultrafilter van deze vorm noemen we *principaal*

Met het lemma van Zorn kunnen we eenvoudig bewijzen dat elk voor elk filter $\mathcal{F} \neq \mathcal{P}(I)$ een ultrafilter $\mathcal{F}$ bestaat, waarvoor $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$. Er bestaat dus ook een ultrafilter op I dat het filter van co-eindige deelverzamelingen op I uitbreidt. Dit ultrafilter kan niet principaal zijn. Er bestaan dus ultrafilters die niet principaal zijn.

Lemma 3.0.5. *Als $\mathcal{F}$ een ultrafilter dan geldt ook dat*

$$\sup_{S\in\mathcal{F}} \inf_{i\in S} \lambda_i = \inf_{S\in\mathcal{F}} \sup_{i\in S} \lambda_i. \tag{3.5}$$

Bewijs. We gaan dit bewijzen met behulp van contrapositie. Eerst moeten we echter een noodzakelijke claim bewijzen.

Claim 1. Zij $(\lambda_i)_{i\in I}$ een collectie reële getallen geïndexeerd op I. Zij $\mathcal{F}$ een filter op I. Dan geldt:

$$\sup_{S\in\mathcal{F}} \inf_{i\in S} \lambda_i \leqslant \inf_{S\in\mathcal{F}} \sup_{i\in S} \lambda_i \tag{3.6}$$

Bewijs van Claim: Stel dit is niet het geval is, dan geldt: $\liminf_{\mathcal{F}} \lambda_i > \limsup_{\mathcal{F}} \lambda_i$. Zeg $\liminf_{\mathcal{F}} \lambda_i = V$ en $\limsup_{\mathcal{F}} \lambda_i = W$. Dan geldt voor alle $\varepsilon > 0$ dat er $S_1, S_2 \in F$ bestaan zodat $\inf_{i\in S_1} > V - \varepsilon$ en $\sup_{i\in S_2} < W + \varepsilon$.
Neem nu $S = S_1 \cap S_2 \in F$, dan geldt dat $\inf_{i\in S} \lambda_i > V - \varepsilon$ en $\sup_{i\in S} \lambda_i < W + \varepsilon$.
Stel nu dat $\varepsilon = (V - W)/2$, merk op dat dit positief is want $V > W$, dan krijgen we

$$\inf_{i\in S} \lambda_i > V - \varepsilon = V - (V + W)/2 = W - (V + W)/2 = W - \varepsilon > \sup_{i\in S} \lambda_i$$

Dit is uiteraard een tegenspraak, dus $\liminf_F \lambda_i \leqslant \limsup_F \lambda_i$ ■

Stel dat we een filter $\mathcal{F} \neq \mathcal{P}(I)$ hebben waarvan we niet weten of het een ultrafilter is of niet. Stel nu ook dat voor de collectie reële getallen $(\lambda_i)_{i\in I}$ vergelijking 3.5 niet op gaat. Uit Claim 1 weten we dat $\liminf_F \lambda_i \leqslant \limsup_F \lambda_i$. Dan moet $\liminf_F \lambda_i < \limsup_F \lambda_i$. Zeg weer $\liminf_F \lambda_i = \alpha$ en $\limsup_F \lambda_i = \beta$. Dan $\alpha < \beta$. Definieer nu een filter F' door

$$\hat{F} := \{U \in \mathcal{P}(I) : \exists V \in F, V \cap \{i \in I : \lambda_i < (\alpha + \beta)/2\} \subseteq U\}. \tag{3.7}$$

We checken eerst of $\hat{F}$ inderdaad een filter niet gelijk aan $\mathcal{P}(I)$ is aan de hand van de twee voorwaarden van een filter, zie 2.0.1.

1. Stel $A, B \in \hat{F}$, dan er bestaan $A', B' \in F$, zodat

$$A' \cap \{i \in I : \lambda_i < (\alpha+\beta)/2\} \subseteq A$$
$$B' \cap \{i \in I : \lambda_i < (\alpha+\beta)/2\} \subseteq B$$

   Hiermee geldt ook direct dat

$$(A' \cap B') \cap \{i \in I : \lambda_i < (\alpha+\beta)/2\} \subseteq A \cap B \tag{3.8}$$

   We hadden aangenomen dat $\mathcal{F}$ en $A', B' \in \mathcal{F}$, dus $A' \cap B' \in \hat{F}$. Dit feit gecombineerd met de constructie van $\hat{F}$ en vergelijking 3.8 impliceert dat $A \cap B \in \hat{F}$.

2. Stel $A \in \hat{F}$, dan is er een $A' \in F$ waarbij $A' \cap \{i \in I : \lambda_i < (V+W)/2\} \subseteq A$. Voor alle $A \subseteq B \subseteq I$ geldt dus $A' \cap \{i \in I : \lambda_i < (V+W)/2 \subseteq U\} \subseteq B$. Dus $B \in \hat{F}$.

We weten ook dat $\varnothing \notin F'$, want voor alle $S \in F$ geldt $S \cap \{i \in I : \lambda_i < ()V+W)/2\} \neq \varnothing$, want $\liminf \lambda_i = V < ()V+W)/2$. Dus F' is een filter.
Merk ook $F \subseteq F'$. We willen nu nog aantonen dat $F' \neq F$. Neem een willekeurige $S \in F$, dan geldt $S \cap \{i \in I : \lambda_i < ()V+W)/2\} \in F'$. Stel dat $S \cap \{i \in I : \lambda_i < ()V+W)/2\} \in F$, dan $\limsup_F \lambda_i \leq ()V+W)/2$, which is a contradiction, because $(V+W)/2 < W = \limsup_F \lambda_i$. Dus $F \subsetneq F'$. Dus F is geen ultrafilter. Oftewel $\liminf_F \lambda_i \neq \limsup_F \lambda_i$ impliceert F geen ultrafilter. Dus F ultrafilter impliceert $\liminf_F \lambda_i = \limsup_F \lambda_i$ □

Stelling 3.0.6. *Zij I een niet-lege verzameling en $\mathcal{U}$ een ultrafilter op I. Zij ook L een taal, en M_i L-structuren voor elke $i \in I$. Voor elke L-formule ϕ geldt:*

$$\phi^{\prod_{\mathcal{U}} M_i}(a^1_{\mathcal{F}}, ..., a^n_{\mathcal{F}}) = \inf_{S \in \mathcal{F}} sup_{i \in S} \phi^{M_i}(a^1_i, ..., a^n_i) \tag{3.9}$$

Bewijs. We gebruiken voor dit bewijs weer inductie op de complexiteit van ϕ. We hebben al bewezen dat elke atomaire formule voldoet aan vergelijking 3.9 in lemma 3.0.1. Daarnaast hebben we in stelling 3.0.2 de inductiestap bewezen voor kwantoren. We moeten nu alleen de inductiestap bewijzen voor connectives.

Laat $\psi_1, ..., \psi_n$ L-formules zijn, die voldoen aan de inductiehypothese. Laat u een continue functie van $[0,1]^n$ naar $[0,1]$ zijn en laat $\phi = u(\psi_1, ..., \psi_n)$. De functie u is dus een connectief. Definieer de getallen K_m, $1 \leq m \leq n$ door:

$$K_m := \sup_{S \in \mathcal{U}} \inf_{i \in S} \psi_m^{M_i} = \inf_{S \in \mathcal{U}} \sup_{i \in S} \psi_m^{M_i}$$

We weten dat de laatste gelijkheid geldt, omdat $\mathcal{U}$ een ultrafilter is. Gegeven een $\epsilon > 0$, vanwege de continuïteit van u bestaat er een $\delta > 0$ zodat

Als voor alle $1 \leq m \leq n$, $x_m \in (K_m - \delta, K_m + \delta)$ dan $u(x_1, ..., x_n) \in (u(K_1, .., K_n) - \epsilon, u(K_1, .., K_n) + \epsilon)$

Door de manier waarop we K_m hebben gedefinieerd, bestaat er een $A^\delta_m \in \mathcal{U}$ zodat $\sup_{i \in A^\delta_m} \psi^{M_i} < K + \delta$ en $B^\delta_m \in \mathcal{U}$ zodat $\inf_{i \in B^\delta_m} \psi^{M_i} > K - \delta$. Neem nu $C^\delta_m := A^\delta_m \cap B^\delta_m \in \mathcal{U}$. Voor elke $i \in C_m$ geldt nu $K - \delta < \psi^{M_i}_m < K + \delta$ Definieer nu $C := \bigcap_{1 \leq m \leq n} C_m$. Vanwege de continuïteit van u geldt nu voor alle $i \in C$ dat $\phi^{M_i} = u(\psi^{M_i}_1, ..., \psi^{M_i}_n) \in (u(K_1, .., K_n) - \epsilon, u(K_1, .., K_n) + \epsilon)$. Hiermee verkrijgen we de volgende vergelijkingen:

$$\begin{aligned}
u(K_1, .., K_n) - \varepsilon &\leq \inf_{i \in C} \phi^{M_i} \\
&\leq \sup_{S \in \mathcal{U}} \inf_{i \in S} \phi^{M_i} \\
&= \inf_{S \in \mathcal{U}} \inf_{i \in S} \phi^{M_i} \\
&\leq \sup_{i \in C} \phi^{M_i} \\
&\leq u(K_1, .., K_n) + \varepsilon
\end{aligned}$$

Aangezien ε willekeurig klein mag zijn geldt: $\sup_{S\in\mathcal{U}}\inf_{i\in S}\phi^{M_i} = u(K_1, .., K_n)$. We hadden aangenomen dat $\psi_1, ..., \psi_n$ aan de inductiehypothese voldoen. Dus $\psi_m^M = \inf_{S\in\mathcal{U}}\sup_{i\in S}\psi_m^{M_i} = K_m$. Hiermee bewijzen we tot slot:

$$\phi^M = u(\psi_1^M, ..., \psi_n^M) = u(K_1, ..., K_n) = \sup_{S\in\mathcal{U}}\inf_{i\in S}\phi^{M_i}$$

Hiermee hebben we de inductiestap voor connectieven bewezen. We hadden het atomaire geval bewezen in lemma 3.0.1. De inductiestap voor kwantoren is bewezen in stelling 3.0.2. Elke formule voldoet dus aan de inductiehypothese. Hiermee is de stelling bewezen. □

Stelling 3.0.6 geeft het verband aan tussen waarheid in het gereduceerde product en waarheid in de L-structuren die vermenigvuldigd worden. Hieruit volgt meteen een mooi verband in de vorm van het volgende corollarium.

Corrollarium 3.0.7. *Zij I een niet-lege verzameling en $\mathcal{U}$ een ultrafilter op I. ZIj ook L een taal en M_i L-structuren voor elke $i \in I$. Laat ϕ een L-zin zijn waarvoor geldt dat $\phi^{M_i} = K$ voor elke $i \in I$, waarbij K een constante in $[0, 1]$. Dan is $\phi^{\prod_{\mathcal{U}} M_i} = K$. (Het interassentste geval is natuurlijk $K = 0$.)*

Bewijs. Uit 3.0.6 volgt:

$$\phi^{\prod_{\mathcal{U}} M_i}(a^1_{\mathcal{F}}, ..., a^n_{\mathcal{F}}) = \inf_{S\in\mathcal{F}} sup_{i\in S}\phi^{M_i}(a^1_i, ..., a^n_i) = \inf_{S\in\mathcal{F}} sup_{i\in S}K = K$$

□

Corrollarium 3.0.7 als we werken met modellen. Stel we hebben een L-theorie met een aantal modellen. We weten dan meteen dat het gereduceerde product van een aantal modellen ook een model is. Dit kan handig om zijn om bijvoorbeeld te zoeken naar niet-standaard modellen. De volgende stelling gebruikt een soortgelijk idee. We sluiten hiermee ook dit hoofdstuk af.

Stelling 3.0.8. *(Compactheidsstelling) Laat T een L-theorie zijn zodat elke eindige deeltheorie van T een model heeft. Dan heeft T een model*

Bewijs. Laat I de verzameling van alle deelverzamelingen van T zijn. Voor een element $i = \phi_1, ..., \phi_n$ uit I, kies een model M_i van $\phi_1, ..., \phi_n$. Voor elke L-zin $\phi \in T$, laat $\hat{\phi} = \{i \in I | \phi \in i\}$. Definier $\mathcal{F} = \{F \subseteq I | \exists\phi_1, ..., \phi_n \in T, \hat{\phi}_1 \cap ... \cap \hat{\phi}_n \subseteq F\}$.
De verzameling $\mathcal{F}$ vormt een filter op I, want:

- Stel $A \in \mathcal{F}$ en $A \subseteq B \subseteq I$. Dan $\exists\phi_1, ..., \phi_n$ zodat $\hat{\phi}_1 \cap ... \cap \hat{\phi}_n \subseteq A \subseteq$. Dus $B \in \mathcal{F}$
- Stel $A, B \in \mathcal{F}$. Dan $\exists\phi_1, ..., \phi_n \in T$ zodat $\hat{\phi}_1 \cap ... \cap \hat{\phi}_n \subseteq A$ en $\exists\phi_{n+1}, ..., \phi_m \in T$ met $m \geq n + 1$ zodat $\hat{\phi}_1 \cap ... \cap \hat{\phi}_n \subseteq A$. Dan $\hat{\phi}_1 \cap ... \cap \hat{\phi}_m \subseteq (A \cap B)$

Met behulp van het Lemma van Zorn is makkelijk te bewijzen dat er voor een filter $\mathcal{F}$ een ultrafilter $\mathcal{U}$ bestaat zodat $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$. Laat $M = \prod_{\mathcal{U}} M_i$. Nu geldt voor willekeurige $\phi \in T$

$$\begin{aligned}\phi^M &= \inf_{S\in U}\sup_{i\in S}\phi^{M_i} \\ &\leq \sup_{i\in\hat{\phi}}\phi^{M_i} \\ &= 0\end{aligned}$$

Aangezien sowieso geldt $\phi^M \geq 0$ geldt $\phi^M = 0$ voor elke $\phi \in T$. Dus M is een model van T. □

4 Schoven van gereduceerde producten

Een schoof is een collectie van objecten die geïndiceerd zijn op de open verzamelingen van een topologische ruimte, die voldoet aan een aantal eisen. Deze objecten kunnen bijvoorbeeld verzamelingen, groepen of ringen zijn. In dit hoofdstuk zullen we schoven van L-structuren in CL definiëren en construeren. Schoven worden onder andere gebruikt in de algebraïsche topologie. In KL kunnen schoven op zichzelf ook gezien worden als een L-structuur. Ze selen hierbij een opvallende rol, want formules gedragen zich niet zoals gebruikelijk in een normale L-structur. Als de formule $\neg(\phi \wedge \psi)$ waar is in een schoof dan hoeft dat nog niet te impliceren dat $\neg\phi$ of $\neg\psi$ waar is in de schoof. Zowel de CL als schoven verbreden het idee van waarheid. Het is daarom op zijn minst interessant om deze ideeën te combineren. Het idee voor dit hoofdstuk komt uit [1].

Om de eisen van een schoof te kunnen definiëren hebben we eerst het begrip homomorfisme nodig.

Definitie 4.0.1. Gegeven twee L-structuren M,N en een functie $h : M \to N$, dan is h een homomorfisme als:

1. $d_N(h(a), h(b)) \leq d_M(a, b)$ voor alle $a, b \in M$;
2. $p^N(h(a_1), ..., h(a_n)) \leq P^M(a_1, ..., a_n)$ voor alle relatiesymbolen P met ariteit n en $a_1, ..., a_n \in M$
3. $F^N(h(a_1), ..., h(a_n)) = h(F^M(a_1, ..., a_n))$ voor elk functiesymbool F met ariteit n en $a_1, ..., a_n \in M$
4. $C^N = h(c^M)$ voor elk constantesymbool c

Lemma 4.0.2. *Gegeven een taal L, twee L-structuren M,N, en een functie $h : M \to N$ en $a_1, ..., a_n \in M$. De functie h is een homomorfisme dan en slechts dan als voor elke atomaire formule $\alpha(x_1, ..., x_n)$ geldt:*

$$\alpha^N(h(a_1), ..., h(a_n)) \leq \alpha^M(a_1, ..., a_n) \tag{4.1}$$

Bewijs. Als h een homomorfisme en s is een L-term dan is $s^N = h(s^M)$ vanwege eigenschappen 3 en 4 van een homomorfisme. Daaruit volgt dat elke atomaire formule voldoet aan vergelijking 4.1, vanwege eigenschappen 1 en 2 van een homomorfisme.

Stel nu dat we weten dat vergelijking 4.1 geldt voor alle atomaire formules. Aan de eerste twee voorwaarden van een homomorfisme wordt meteen voldaan. Stel nu $\alpha(x_1, ..., x_{n+1}) = d(F(x_1, ..., x_n), x_{n+1})$. Merk op dat dit een atomaire formule is dus geldt vanwege vergelijking 4.1:

$$\alpha^N(h(a_1), ..., h(a_n), h(F^M(a_1, ..., a_n))) \leq \alpha^M(a_1, ..., a_n, F^M(a_1, ..., a_n))$$
$$d_N(F^N(h(a_1), ..., h(a_n), h(F^M(a_1, ..., a_n)))) \leq d_M(F^M(a_1, ..., a_n), F^M(a_1, ..., a_n)) = 0$$

Dus $d_N(F^N(h(a_1), ..., h(a_n), h(F^M(a_1, ..., a_n)))) = 0$, dus $d_N(F^N(h(a_1), ..., h(a_n))) = h(F^M(a_1, ..., a_n))$, wat het derde criterium van een homomorfisme bewijst.
Stel nu $\alpha(x_1) = d(x_1, c)$. Dan geldt:

$$\alpha^N(h(c^M)) \leq \alpha^M(c^M)$$
$$d_N(h(c^M), c^N) \leq d_M(c^M, c^M) = 0$$

Geeft $d_N(h(c^M), c^N) = 0$, dus $h(c^M) = c^N$. Hiermee is het laatste criterium bewezen. □

Definitie 4.0.3. Gegeven een taal L. Zij X een topologische ruimte. Een preshoof $\mathbb{F}$ van L-structuren op X bestaat uit de volgende informatie:

- Voor elke open deelverzameling $U \subseteq X$, een L-structuur $\mathbb{F}(U)$
- Voor elke inclusie $V \subset U$ van open deelverzamelingen van X, een L-homomorphismen $\rho_{UV} : \mathbb{F}(U) \to \mathbb{F}(V)$

die voldoet aan de volgende criteria:

- ρ_{UU} is the identiteit van $\mathbb{F}(U) \to \mathbb{F}(U)$
- Als $W \subseteq V \subseteq U$ drie open deelverzamelingen, dan $\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}$
- $\mathbb{F}(\emptyset) = 1_L$, waar bij 1_L een L-structuur is waarvan de metrische ruimte precies een element heeft en de relatiesymbolen worden geinterpreteerd als de 0-functie. De functiesymbolen en constantesymbolen hebben slechts een mogelijke interpretatie.

Definitie 4.0.4. Een preschoof is een schoof wanneer voldaan wordt aan de volgende criteria:

- Zij I een indexverzaemling,$U = \bigcup_{i \in I} U_i$ een open covering, waarbij U open. Dan geldt voor alle L-formules $\alpha(x_1, ..., x_n)$ en alle $s_1, ..., s_n \in \mathbb{F}(U)$,

$$\alpha^{\mathbb{F}(U)}(s_1, ..., s_n) = \sup_{i \in I} \alpha^{\mathbb{F}(U_i)}(\rho_{UU_i}(s_1), ..., \rho_{UU_i}(s_n))$$

- Zij I een indexverzameling, U een open deelverzameling en $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ een open covering. Als $s_i \in \mathbb{F}(U_i)$ voor elke $i \in I$ op zo'n manier dat $\rho_{U_i(U_i \cap U_j)}(s_j) = \rho_{U_j(U_i \cap U_j)}(s_j)$ voor elke $i, j \in I$, dan is er een unieke $s \in \mathbb{F}(U)$ zodat $\rho_{UU_i}(s) = s_i$ voor elke $i \in i$

Tot zover de definitie van een schoof van L-structuren. De volgende stelling geeft ons een manier om schoven van L-structuren te construeren.

Stelling 4.0.5. *Voor elke $x \in X$ laat M_x een L-structuur zijn. Gegeven een familie van filters $\mathcal{F}(U)$ waarbij $\mathcal{F}(U)$ een filter is op U voor elke $U \neq \varnothing$ open in X. Laat $\mathbb{M}(U)$ het gereduceerde product $\prod_{\mathcal{F}(U)} M_x$ zijn en laat $\mathbb{M}(\varnothing) = 1_L$ Stel $\mathcal{F}(U)$ voldoet aan de volgende criteria:*

- *als $V \subseteq U$ open deelverzamelingen, dan $\mathcal{F}(V) = \{S \cap V | S \in \mathcal{F}(U)\}$*
- *Zij I een index en $U = \bigcup_{i \in I} U_i$, als $S_i \in \mathcal{F}(U_i)$ voor elke $i \in I$ dan $\bigcup_{i \in I} S_i \in \mathcal{F}(U)$*

Stel $\rho_{UV}((a_x)_{x \in X})/ \sim_{\mathcal{F}} (U) := (a_x)_{x \in V}/ \sim_{\mathcal{F}(V)}$. Dan is de familie van L-structuren $\mathbb{M}$ een schoof op X.

Bewijs. We zullen eerst aantonen dat ρ welgedefinieerd is, daarna dat $\mathbb{M}$ een preschoof is en tot slot dat $\mathbb{M}$ een schoof is. Stel $\varnothing \neq V \subseteq U$, met U,V open. Stel $a, b \in \prod_{x \in U} M_x$, waarbij $a \sim_{\mathcal{F}(U)} b$. Dan geldt:

$$0 = \inf_{S \in \mathcal{F}(U)} \sup_{x \in S} d_{M_x}(a_x, b_x) \geq \inf_{S \in \mathcal{F}(U)} \sup_{x \in S \cap V} d_{M_x}(a_x, b_x) = \inf_{S \in \mathcal{F}(V)} \sup_{x \in S} d_{M_x}(a_x, b_x) \geq 0$$

Dus $\inf_{S \in \mathcal{F}(V)} \sup_{x \in S} d_{M_x}(a_x, b_x) = 0$ geeft $a|_V \sim_{\mathcal{F}(U)} b|_V$. Dus ρ is welgedinieerd.
Nu gaan we bewijzen dat $\mathbb{M}$ een preschoof is. Gegeven een atomaire formule $\alpha(x_1, ..., x_n)$ en $a^1, ..., a^n \in \prod_{x \in U} M_X$. Merk op

$$\begin{aligned} \alpha^{\prod_{\mathcal{F}(V)} M_x}((a^1|_V)_{\mathcal{F}(V)}, ..., (a^n|_V)_{\mathcal{F}(V)}) &= \inf_{S \in \mathcal{F}(V)} \sup_{x \in S} \alpha^{M_x}(a^1_x, ..., a^n_x) \\ &= \inf_{S \in \mathcal{F}(U)} \sup_{x \in S \cap V} \alpha^{M_x}(a^1_x, ..., a^n_x) \\ &\leq \inf_{S \in \mathcal{F}(U)} \sup_{x \in S} \alpha^{M_x}(a^1_x, ..., a^n_x) \\ &= \alpha^{\prod_{\mathcal{F}(U)} M_x}(a^1_{\mathcal{F}(U)}, ..., a^n_{\mathcal{F}(U)}) \end{aligned}$$

Hiermee is bewezen dat ρ een homomorfisme is. Het is ook duidelijk dat ρ_{UU} de identiteit is en dat $\rho_{VW} \circ \rho_{UV} = \rho_{UW}$, als $W \subseteq V \subseteq U$. Daarnaast geldt per definitie $\mathbb{M}(\varnothing) = 1_L$. Hiermee is dus bewezen dat $\mathbb{M}$ een preschoof is op X.

We gaan nu voorwaarde 1 van een schoof bewijzen. Stel $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ een open covering en $\alpha(x_1, ..., x_n)$ een atomaire formule. We weten al dat:

$$\alpha^{\mathbb{M}(U)}(a^1_{\mathcal{F}(U)}, ..., a^n_{\mathcal{F}(U))} \geq \sup_{i \in I} \alpha^{\mathbb{M}(V)}((a^1|_V)_{\mathcal{F}(V)}, ..., (a^n|_V)_{\mathcal{F}(V)})$$

Stel dat er geen gelijkheid is in de bovenste vergelijking. Dan is er dus een getal $K \in [0,1]$ dat strikt tussen de bovenstaande waarden ligt. Dit geeft:

$$\sup_{i \in I} \alpha^{\mathbb{M}(V)}((a^1|_V)_{\mathcal{F}(V)}, ..., (a^n|_V)_{\mathcal{F}(V)}) < K < \sup_{i \in I} \inf_{S \in \mathcal{F}(U_i)} \sup_{x \in S} \alpha^{M_x}(a^1_x, ..., a^n_x) < K$$

Dus voor alle $i \in I$ bestaat er een $S_i \in \mathcal{F}(U_i)$ waarbij $\sup_{x \in S_i} \alpha^{M_x}(a^1_x, ..., a^n_x) < K$. Volgens de voorwaarden van deze stelling geldt nu dat $S' = \bigcup_{i \in I} S_i \in \mathcal{F}(U)$. Voor S' geldt dus dat $\sup_{x \in S'} \alpha^{M_x}(a^1_x, ..., a^n_x) < K$. Dus $\inf_{S \in \mathcal{F}(U)} \sup_{x \in S} \alpha^{M_x}(a^1_x, ..., a^n_x) < K$. Dit leidt tot een tegenspraak dus geldt er gelijkheid. Hiermee hebben we de eerste voorwaarde van een schoof bewezen.

Nu gaan we de tweede voorwaarde van een schoof bewijzen. Stel U een open deelverzameling van X en $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ een open overdekking van U. Stel $a^i \in \prod_{x \in U_i} M_x$, voor $i \in I$ en neem aan dat

$$\rho_{U_i(U_i \cap U_j)}(a^i_{\mathcal{F}(U_i)}) = \rho_{U_j(U_i \cap U_j)}(a^j_{\mathcal{F}(U_j)})$$

voor alle $i, j \in I$. Zeggen dat twee elementen in een L-structuur gelijk zijn is hetzelfde als zeggen dat de afstand tussen de twee gelijk is aan 0. Voor ieder tweetal $(i,j) \in I^2$ en $\varepsilon > 0$, bestaat er een $S^{\varepsilon}_i j$ zodat $d_{M_x}(a^i_x, a^j_x) < \varepsilon$ voor alle $x \in S^{\varepsilon}_i j$.

Maak nu van I een welordening. Dit kan met de well-Ordering Theorem, hiervoor is het keuzeaxioma nodig, zie [4]. Definieer nu een element $a \in \prod_{x \in U} M_x$ door:

$$a_x := (a^{i_x})_x \text{ waarbij } i_x := \min\{i \in I : x \in U_i\}$$

We gaan inductie gebruiken om aan te tonen dat $a|_{U_i} \sim_{\mathcal{U}_\rangle} a^i$. Stel $i = \min\{I\}$. Dan geldt voor alle $x \in U_i$ dat $i_x = i$, dus $a_x = a^i_x$. Dus $a|_{U_i} \sim_{\mathcal{F}(U_i)} a^i$

Stel dat $i > min\{I\}$ en $a|_{U_j} \sim_{\mathcal{F}(U_j)} a^j$ voor alle $j < i$. Voor elke $\varepsilon > 0$ en $j < i$ geldt dus:

$$\inf_{S \in \mathcal{F}(U_j)} \inf x \in S d_{M_x}(a_x, a^j_x) = 0$$

Er bestaat dus voor elke $j < i$ een $P_j \in \mathcal{F}(U_j)$ zodat $\sup_{x \in P_j} d_{M_x}(a_x, a^j_x) < \varepsilon$. Laat $Q_j = P_j \cap S^{\varepsilon}_i j$. Voor alle $x \in Q_j$ geldt vanwege de driehoeksongelijkheid:

$$d_{M_x}(a_x, a^i_x) \leq d_{M_x}(a^i_x, a^j_x) + d_{M_x}(a_x, a^j_x) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \tag{4.2}$$

Definieer ook de verzameling $F = U_i - \bigcup_{j<i} U_j$. Voor elke $x \in F$ geldt $i_x = i$. Dus voor alle $x \in F$ geldt $d_{M_x}(a_x, a^i_x) = 0$.
Hiermee weten we ook dat voor alle $x \in F \bigcup j < iQ_j$ geldt: $d_{M_x}(a_x, a^i_x) \leq 2\varepsilon$. We willen nu aantonen dat $F \bigcup j < iQ_j$ in het filter $\mathcal{F}(U_i)$ zit.

We weten dat $S^{\varepsilon}_i j \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$ dus $S^{\varepsilon}_i j \subseteq U_i \cap U_j$. Dus:

$$\begin{aligned} Q_j &= P_j \cap S^{\varepsilon}_i j \\ &= P_j \cap (S^{\varepsilon}_i j \cap (U_i \cap U_j)) \\ &= P_j \cap (U_i \cap U_j) \cap S^{\varepsilon}_i j \end{aligned}$$

We weten dat $P_j \in \mathcal{F}(U_i)$, dus $P_j \cap (U_i \cap U_j) \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$ vanwege de eerste eis van de stelling. Dit betekent dat Q_j een doorsnede is van twee verzamelingen, namelijk $P_j \cap (U_i \cap U_j)$ en S^{ε}_{ij} die allebei in $\mathcal{F}(U_i \cap U_j)$

zitten. Dus $Q_j \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$.

Vanwege de tweede eis van de stelling geldt:

$$\bigcup_{j<i} Q_j \in \mathcal{F}(\bigcup_{j<i}(U_i \cap U_j) = \mathcal{F}(U_i \cap (\bigcup_{j<i} U_j)$$

Wegens de eerste eis van de stelling bestaat er een $T \in \mathcal{F}(U_i)$ zodat $\bigcup_{j<i} Q_j = T \cap U_i \cap (\bigcup_{j<i} U_j$, want $U_i \cap (\bigcup_{j<i} U_j \subseteq U_i$. Hiermee geldt:

$$\begin{aligned} T &\subseteq T \cup F \\ &= \bigcup_{j<i} Q_j \cup (T - \bigcup_{j<i} Q_j) \cup F \\ &= \bigcup_{j<i} Q_j \cup (T - \bigcup_{j<i} Q_j) \cup (U_i - \bigcup_{j<i} U_j) \\ &= \bigcup_{j<i} Q_j \cup (U_i - \bigcup_{j<i} U_j) \\ &= \bigcup_{j<i} Q_j \cup T \end{aligned}$$

We weten dat $T \in \mathcal{F}(U_i)$ dus $\bigcup_{j<i} Q_j \cup T \in \mathcal{F}(U_i)$. Hiermee krijgen we:

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{M}(U_i)}(a|_{U_i}, a^i) &= \inf_{S \in \mathcal{F}(U_i)} \sup_{i \in S} d_{M_x}(a_x, a_x^i) \\ &\leq \sup_{i \in \bigcup_{j<i} Q_j \cup T} d_{M_x}(a_x, a_x^i) \\ &< 2\varepsilon \end{aligned}$$

Aangezien ε willekeurig klein is geldt $d_{\mathbb{M}(U_i)}(a|_{U_i}, a^i) = 0$. Hiermee hebben we de tweede voorwaarde van een schoof bewezen, op uniciteit na, hebben bewezen.
We willen bewijzen dat a uniek is. Neem willekeurige a en a' waarvoor de vergelijkingen gelden. Voor elke $S \in F(X)$ is er een $i \in I$ zodat $S \cap U_i \neq \varnothing$.

$$\begin{aligned} (a|_{U_i})_{\mathcal{F}(U_i)} &= (a'|_{U_i})_{\mathcal{F}(U_i)} \\ d_{\mathbb{M}(U_i)}(a|_{U_i}, a'|_{U_i}) &= 0 \\ \inf_{S \in \mathcal{F}(U_i)} \sup_{x \in S} d_{M_x}(a_x, a'_x) &= 0 \\ (\forall \varepsilon > 0)(\exists S \in \mathcal{F}(U_i)) \sup_{x \in S} d_{M_x}(a_x, a'_x) &< \varepsilon \end{aligned}$$

Kies $S_i^\varepsilon \in \mathcal{F}(U_i)$ op zo'n manier dat $\sup_{x \in S_i^\varepsilon} d_{M_x}(a_x, a'_x) < \varepsilon$. Volgens voorwaarde 2 van de stelling geldt: $\bigcup_{i \in I} S_i^\varepsilon \in \mathcal{F}(U)$. Uiteraard geldt $\sup_{\bigcup_{i \in I} S_i^\varepsilon} d_{M_x}(a_x, a'_x) < \varepsilon$. Dus

$$\inf_{S \in \mathcal{F}} \sup x \in S d_{M_x}(a_x, a'_x) < \varepsilon$$

Aangezien ε willekeurig klein mag zijn geldt: $d_{\mathbb{M}(U)}(a, a') = 0$. Waarmee we de uniciteit van de tweede voorwaarde van een schoof hebben bewezen. □

Referenties

[1] Vinicius Cifú Lopes. „Reduced products and sheaves of metric structures". In: *Mathematical Logic Quarterly* 59.3 (2013).

[2] I Ben Yaacov e.a. „Model theory for metric structures". In: *London Mathematical Society Lecture Note Series* 350 (2008), p. 315.

[3] Fan Yang. *Continuous Logic and Probability Algebras.* 2016.

[4] Ieke Moerdijk en Jaap van Oosten. „Sets,Models and Proofs". In: (2018).