



Universiteit Utrecht

Faculteit Bètawetenschappen

---

# Corruptie en efficiëntie in wachtrijen

---

BACHELORSCHRIJF

*Floris Koolen*

Wiskunde

*Begeleider:*

Dr. M. RUIJGROK  
Universiteit Utrecht

12-06-2020

## Samenvatting

In deze scriptie wordt een corrupt systeem gemodelleerd door middel van een wachtrij model waarin klanten bij aankomst een som smeergeld kunnen betalen waardoor zij voor klanten geplaatst worden die een lagere som smeergeld betaald hebben. Dit wachtrij model met corruptie kan als spel beschouwd worden waarbij de klanten de spelers zijn en de bepaling van de hoogte smeergeld die zij betalen de strategieruimte. Vervolgens worden de strategieën die tot Nash evenwichten van dit wachtrij model met corruptie leiden bepaald. Vanuit deze situaties wordt gekeken naar de verandering in opbrengst van de serviceverlener bij een verandering van de servicesnelheid. Er wordt specifiek laten zien dat er situaties bestaan waarin een verhoging van de servicesnelheid leidt tot een verhoging in opbrengst van de serviceverlener.

# Inhoudsopgave

<b>1</b>	<b>Inleiding</b>	<b>1</b>
1.1	Corruptie en de hypothese van Myrdal . . . . .	1
1.2	Corrupt wachtrij model van Lui . . . . .	1
1.3	Interpretatie resultaten . . . . .	2
1.4	Opbouw scriptie . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Wachtrij modellen en eigenschappen</b>	<b>4</b>
2.1	Karakteristieken van een wachtrij model . . . . .	4
2.2	Voorbeeld . . . . .	5
2.3	Verwachte bezetting wachtrij . . . . .	5
2.4	Verwachte wachttijd . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Speltheorie binnen wachtrijen</b>	<b>8</b>
3.1	Introductie Shuttlebus model . . . . .	8
3.2	Nash evenwichten . . . . .	8
3.3	Evolutionaire stabiele strategieën . . . . .	9
3.4	Kritieke waarde voor $\lambda$ . . . . .	10
3.5	Conclusies shuttlebus voorbeeld . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Een wachtrij model met corruptie</b>	<b>12</b>
4.1	Een wachtrij model met corruptie . . . . .	12
4.2	Verwachte wachttijd . . . . .	13
4.3	Zoektocht naar sociale optimale situaties . . . . .	15
4.4	Afleiden smeergeld functie . . . . .	16
4.5	Voorbeeld verdeling tijdswaardering . . . . .	18
4.6	Interpretatie Nash evenwichten . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Optimale snelheid van service</b>	<b>21</b>
5.1	Opbrengst van de serviceverlener . . . . .	21
5.2	Consequenties bij veranderingen van de servicetijd . . . . .	21
5.3	Opzoek naar de maximale opbrengst . . . . .	23
5.4	Weerlegging van de hypothese van Myrdal . . . . .	23
5.5	Uitbreiding: Kosten voor de serviceverlener . . . . .	23
<b>6</b>	<b>Conclusie</b>	<b>25</b>
	<b>Referenties</b>	<b>I</b>

# 1 Inleiding

## 1.1 Corruptie en de hypothese van Myrdal

Corruptie is een moeilijk te definiëren begrip wat daardoor ook moeilijk te bestuderen is. Ondanks dit is er een overeenstemming dat corruptie te maken heeft met het misbruiken van publieke macht waarin de regels omtrent het gebruiken van die publieke macht niet in acht worden genomen en er persoonlijk voordeel uit behaald wordt [4]. Er zijn veel wetenschappers die corruptie hebben geprobeerd te bestuderen en modellen en theorieën erover hebben opgesteld. Een van deze wetenschappers is Gunnar Myrdal. In zijn boek *Asian Drama: An Inquiry on the Poverty of Nations* stelt Myrdal de volgende hypothese: corrupte overheids medewerkers zorgen expres voor vertragingen zodat ze meer smeergeld ontvangen [8]. Deze hypothese zullen we in deze scriptie aanduiden met *de hypothese van Myrdal*. Het doel van deze scriptie is om de hypothese van Myrdal te weerleggen met behulp van een tegenvoorbeeld.

## 1.2 Corrupt wachtrij model van Lui

In deze scriptie volgen we grotendeels het wachtrij model dat Francis T. Lui in [7] gebruikt om de hypothese van Myrdal te weerleggen. In dit model wordt een systeem met corruptie gemodelleerd met behulp van een wachtrij model waarin omkoping mogelijk is.

Een wachtrij model is een model waarin klanten een service verlangen van een serviceverlener. Er worden echter beperkingen gesteld door middel van aannames aan de capaciteit en snelheid van de serviceverlener waardoor niet alle klanten direct bij aankomst geholpen kunnen worden. Hierdoor ontstaat een wachtrij. In algemene wachtrij modellen kunnen klanten bij aankomst kiezen tussen plaatsnemen in de wachtrij of afzien van de wachtrij. In het model met corruptie krijgen klanten echter de optie om bij aankomst een som smeergeld te betalen. Zij worden vervolgens in de wachtrij geplaatst voor alle klanten die een lagere som smeergeld hebben betaald. In dit wachtrij model met corruptie kan de serviceverlener die klanten helpt gezien worden als een corrupte overheids medewerker uit de hypothese van Myrdal.

Om de hypothese van Myrdal te weerleggen moeten we het gedrag van klanten in het systeem bepalen. Voor het bepalen van het gedrag van klanten maken we gebruik van speltheorie. Het wachtrij model met corruptie kan namelijk als een spel gezien worden waarin de klanten de spelers zijn. Om te bepalen welke strategie klanten zullen kiezen bij het bepalen van de hoogte van de som smeergeld of de strategie om af te zien van de wachtrij zoeken we naar een Nash evenwicht. Klanten zullen bij het maken van een keuze hun eigen individuele opbrengst willen maximaliseren. Ook zullen we het criterium van sociale quasi-optimaliteit toevoegen om het tegenvoorbeeld te versterken. In wachtrijen die sociaal quasi-optimaal zijn is voor een gegeven aantal klanten de gemiddelde wachttijd geminimaliseerd. Vanuit deze situaties kijken we vervolgens naar de opbrengst aan smeergeld van de serviceverlener. We bepalen hoe de smeergeld opbrengst zal veranderen bij het veranderen van de servicesnelheid en aan de hand hiervan zullen we de hypothese van Myrdal weerleggen.

### 1.3 Interpretatie resultaten

Ondanks dat de resultaten van deze scriptie gefocust zijn op het weerleggen van de hypothese van Myrdal kunnen we ze ook breder interpreteren. Als we de sommen smeergeld inclusief bijhorende plaatsing in de wachtrij als legale betalingen zien, dan is het wachtrij model met corruptie dat behandeld wordt een bruikbaar veiling model voor veilingen waarbij een wachtrij betrokken is. In dit veiling model wordt de service van de serviceverlener geveild die een bepaalde waarde voor klanten heeft. In dit veiling model functioneren de sommen smeergeld als een soort smeermiddel; de sommen smeergeld kunnen zorgen voor een sociaal quasi-optimale plaatsing van klanten. Deze plaatsing zorgt dat klanten met een hoge tijdswaardering worden in de wachtrij geplaatst worden voor klanten met een lagere persoonlijke tijdswaardering. De som smeergeld die een klant kiest geeft hem precies de minimale wachttijd die hij nog accepteert. Als de opbrengst van de sommen smeergeld echter niet voor de serviceverlener is dan kunnen de gevonden resultaten in deze scriptie voor het wel of niet versnellen van de service niet gebruikt worden voor dit mogelijke veiling model [7].

### 1.4 Opbouw scriptie

Deze scriptie is opgebouwd uit vier hoofdstukken.

In hoofdstuk 2 zullen we een introductie van wachtrij theorie geven. Dit zullen we doen door verschillende karakteristieken van een wachtrij model te introduceren. Vervolgens geven we een voorbeeld van een algemene wachtrij en laten we zien hoe het verwachte aantal klanten in de wachtrij op een willekeurig tijdstip en de verwachte wachttijd voor een nieuwe klant op een willekeurig tijdstip bepaald kunnen worden.

Het doel van hoofdstuk 3 is om aan te tonen hoe het gedrag van klanten met behulp van speltheorie in wachtrijen bepaald kan worden. Dit wordt gedaan door een voorbeeld te geven van een wachtrij model. Dit wachtrij model kan gezien worden als een spel waarbij de klanten de spelers zijn en zij kunnen als strategieën kiezen tussen twee verschillende wachtrijen. Bij dit spel leiden we verschillende Nash evenwichten af en bespreken we vervolgens deze Nash evenwichten. Een Nash evenwicht is een situatie binnen de speltheorie waarin geen speler zich kan verbeteren door eenzijdig van strategie te veranderen. Nash evenwichten kunnen als reële situaties gezien worden voor het gedrag van spelers.

In hoofdstuk 4 wordt het wachtrij model met corruptie van Lui geïntroduceerd. Dit wachtrij model kan ook als een spel beschouwd worden waarin de klanten de spelers zijn en het bepalen van de hoogte van een som smeergeld die zij betalen de strategieruimte. Omdat individuele klanten hun gedrag zullen laten afhangen van de verwachte wachttijd leiden we een uitdrukking voor de verwachte wachttijd af. Vervolgens kijken we naar sociale quasi-optima om het tegenvoorbeeld voor de hypothese van Myrdal te versterken. Een sociaal quasi-optimale situatie is een situatie waarin de gemiddelde kosten gemaakt door het wachten per klant geminimaliseerd worden. We laten zien dat er voorwaarden bestaan met betrekking tot de strategie van klanten waardoor sociaal quasi-optimale situaties optreden. Hierna stellen we een functie voor het bepalen van de som smeergeld op die individueel optimaal is voor elke klant en tonen we aan dat deze smeergeld functie tot een zowel sociaal quasi-optimum

---

als een individueel optimum leidt. We nemen voor het uitwerken van deze smeergeldfunctie een voorbeeld van een verdeling voor de tijdswaardering van klanten.

Hoofdstuk 5 richt zich op het weerleggen van de hypothese van Myrdal. We doen dit door eerst een functie voor de opbrengst van de serviceverlener te introduceren. Daarna laten we zien hoe deze functie in de gevonden Nash evenwichten verandert bij het veranderen van de servicetijd. Ook laten we zien voor welke servicetijd de opbrengst voor de serviceverlener maximaal is. De weerlegging van de hypothese van Myrdal doen we door middel van een tegenvoorbeeld. Vervolgens geven we nog een korte uitbreiding op het model door kosten voor de serviceverlener te introduceren. We leggen uit dat dit geen verschil maakt voor de weerlegging van de hypothese van Myrdal.

Deze scriptie is voornamelijk gebaseerd op [7], [3] en [1]. Aan het begin van elk hoofdstuk wordt aangegeven welke literatuur gebruikt is voor dat betreffende hoofdstuk.

## 2 Wachtrij modellen en eigenschappen

Dit hoofdstuk is grotendeels gebaseerd op [3] en [1]. Wachtrij theorie kent verschillende modellen, afhankelijk van verschillen in aannames. In het algemeen geldt dat er een stroom van klanten is die geholpen worden door één of meerdere serviceverleners. De klanten hechten een bepaalde waarde aan de service die aan hun verleend wordt. Deze service kunnen we ook zien als een cadeau dat uitgedeeld wordt.

### 2.1 Karakteristieken van een wachtrij model

Wachtrijen worden onder andere gekarakteriseerd door de volgende factoren:

- Het aankomst proces van nieuwe klanten.  
Vaak wordt er aangenomen dat de tijden tussen aankomsten van nieuwe klanten onafhankelijk en identiek verdeeld zijn. Vaak wordt gekozen voor een Poisson proces waarbij de intervallen tussen aankomsten exponentieel verdeeld zijn.
- De service discipline.  
Er zijn verschillende manieren om service te verlenen. De service discipline die het meeste voorkomt is "first-come first-served" (*FCFS*) en is gebaseerd op het "wie het eerste komt wie als eerste maalt" principe. Dit leidt tot een wachtrij die veel in het dagelijks leven voorkomt en waarbij nieuwe klanten achteraan moeten aansluiten. Dit is echter zeker niet de enige service discipline. Er zijn ook wachtrijen die gebaseerd zijn op bijvoorbeeld willekeurige volgorde, prioriteiten of "wie het laatste komt wie als eerste maalt".
- De servicetijden. De aannames die gemaakt worden rondom de tijd die het kost om service te verlenen kunnen per model verschillen. Er kan bijvoorbeeld aangenomen worden dat de servicetijden onafhankelijk zijn van het aankomst proces van nieuwe klanten en de lengte van de wachtrij. Vaak wordt er aangenomen dat de servicetijden onafhankelijk en identiek verdeeld zijn voor elke klant.
- De service capaciteit.  
Wachtrij modellen kunnen één of meerdere serviceverleners hebben die klanten helpen.
- Het gedrag van klanten.  
Dit zijn voornamelijk de aannames rondom mogelijke acties die klanten kunnen uitvoeren. In eenvoudige modellen hebben klanten alleen de optie om de wachtrij in te stappen zonder keuze. Dit kan bijvoorbeeld uitgebreid worden naar een mogelijkheid om bij het moment van aankomst of op een later moment af te zien van de wachtrij. Ook kan er gekozen worden om klanten de optie te geven om smeergeld te betalen zodat zij voor kunnen dringen.

Een voorbeeld van een standaard notatie die gebruikt wordt voor een wachtrij model is  $M/G/1$ . De eerste letter duidt de verdeling van de aankomst proces intervallen aan. Hierin staat de  $M$  voor *Memoryless* en duidt op een aankomst proces dat Poisson verdeeld is. De tweede letter geeft de verdeling van de servicetijden. De  $G$  staat voor *General* en geeft aan

dat er geen specifieke service verdeling is. Het derde symbool staat voor het aantal service verleners. Verschillen in de aannames van wachtrij modellen kunnen leiden tot verschillen in de resultaten van wachtrijen.

## 2.2 Voorbeeld

Als voorbeeld nemen we nu een systeem waarbij we de volgende aannames maken:

1. De aankomst van nieuwe klanten in het systeem is een Poisson proces met een gemiddelde snelheid  $\mu$  klanten per tijdseenheid.
2. De service discipline die in het model gehandhaafd wordt is *FCFS* oftewel nieuwe klanten moeten achteraan in de wachtrij aansluiten.
3. De servicetijd is onafhankelijk en identiek verdeeld volgens een exponentiële verdeling met een gemiddelde servicetijd van  $\frac{1}{u}$
4. Er is één serviceverlener die klanten helpt.

Om te zorgen dat ons model stabiel is nemen we aan dat:

$$\rho = \frac{\mu}{u} < 1. \quad (2.1)$$

Omdat  $\rho$  de verhouding tussen de gemiddelde aankomsttijd en de servicetijd is kan de factor  $\rho$  geïnterpreteerd worden als de fractie van de tijd die de serviceverlener besteed aan het helpen van klanten. Als we deze aanname niet maken dan kan de lengte van de wachtrij te groot worden omdat de serviceverlener altijd klanten aan het helpen is en de rij dus blijft groeien.

## 2.3 Verwachte bezetting wachtrij

We zijn onder andere benieuwd naar het verwachte aantal klanten op een willekeurig moment. Hiervoor hebben we de kans dat er op een willekeurig tijdstip  $t$  er  $n$  klanten in de wachtrij staan nodig. Deze kans duiden we aan met  $p_n(t)$  waarbij  $n \geq 0$ . Omdat het aankomst proces Poisson is kunnen we voor kleine  $\Delta t$  de volgende twee vergelijkingen schrijven:

$$\begin{aligned} p_0(t + \Delta t) &= (1 - \mu\Delta t)p_0(t) + u\Delta t p_1(t) + o(\Delta t) \\ p_n(t + \Delta t) &= \mu\Delta t p_{n-1}(t) + (1 - (\mu + u)\Delta t)p_n(t) + u\Delta t p_{n+1}(t) + o(\Delta t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Hierbij geldt de tweede regel van 2.2 voor alle  $n \in \mathbf{N}$ . Als geldt dat  $\Delta t \rightarrow 0$ , dan kunnen we 2.2 als de volgende oneindige verzameling van differentiaalvergelijkingen voor de kansen  $p_n(t)$  schrijven:

$$\begin{aligned} p'_0(t) &= -\mu p_0(t) + u p_1(t) \\ p'_n(t) &= \mu p_{n-1}(t) - (\mu + u)p_n(t) + \mu p_{n+1}(t) \quad \text{als } n \in \mathbf{N} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Om onze analyse te versimpelen zullen we ons focussen op het limiet gedrag van dit stelsel. We nemen aan dat de rij naar een dynamisch evenwicht concentreert, dat wil zeggen een situatie



waarbij alle  $p_n(t)$  constant zijn en gelijk aan  $p_n$ . In zo een evenwicht zijn alle  $p'_n(t) = 0$ . Door deze aanname in te vullen in 2.3 vinden we vergelijkingen voor  $p_n$ :

$$0 = -\mu p_0 + \mu p_1 \quad (2.4)$$

$$0 = \mu p_{n-1} - (\mu + u)p_n + \mu p_{n+1} \quad \text{als } n \in \mathbf{N} \quad (2.5)$$

We kunnen 2.4 schrijven als

$$p_1 = \frac{\mu}{u} p_0 = \rho p_0.$$

Als we dit in 2.5 substitueren voor  $n = 1$  geeft dat

$$p_2 = \rho^2 p_0.$$

Bij herhaling van deze substitutie voor telkens hogere waarden van  $n$  krijgen we

$$p_n = \rho^n p_0 \quad \forall n \geq 0. \quad (2.6)$$

Omdat geldt dat de som van de kansen van alle mogelijke gebeurtenissen, wat in dit geval alle waarden van  $n$  zijn, gelijk moet zijn aan 1 geldt dat

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1.$$

Omdat  $\rho < 1$  geeft dit in combinatie met 2.6 dat

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n p_0 = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = p_0 \frac{1}{1-\rho} = 1$$

Dus geldt dat  $p_0 = 1 - \rho$  en dus dat de kans  $p_n$  dat er  $n$  klanten op een willekeurig tijdstip in de rij staan gegeven kan worden door:

$$p_n = (1 - \rho)\rho^n \quad \forall n \geq 0. \quad (2.7)$$

We merken op dat de verdeling van 2.7 de geometrische verdeling is.

Nu we de kans op  $n$  klanten op een willekeurig moment hebben kunnen we het verwachte aantal klanten in de wachtrij berekenen:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} n p_n &= \sum_{n=0}^{\infty} n(1 - \rho)\rho^n = (1 - \rho)\rho \sum_{n=0}^{\infty} n \rho^{n-1} \\ &= (1 - \rho)\rho \sum_{n=1}^{\infty} n \rho^{n-1} = (1 - \rho)\rho \frac{1}{(1 - \rho)^2} = \frac{\rho}{1 - \rho} \end{aligned} \quad (2.8)$$

## 2.4 Verwachte wachttijd

We zijn geïnteresseerd in de verwachte wachttijd op een willekeurig moment. Hiervoor kan gebruik gemaakt worden van de volgende Stelling:

**Stelling 2.4.1** (Little's law,[6]). *De relatie tussen het verwachte aantal klanten op een willekeurig moment  $L$  en de verwachte wachttijd  $W$  in een stabiel wachtrij model wordt gegeven door:*

$$L = \mu W \tag{2.9}$$

*Hierin is  $\mu$  het verwachte aantal klanten dat arriveert in een tijdseenheid.*

*Bewijs.* Het bewijs wordt gegeven in [6]. □

We kunnen Stelling 2.4.1 toepassen in ons voorbeeld om de verwachte wachttijd te vinden. In ons voorbeeld is  $\mu$  het verwachte aantal klanten dat arriveert in een tijdseenheid. Voor het de verwachte wachttijd volgt dan dat we deze kunnen berekenen door het verwachte aantal klanten in de wachtrij te delen door de snelheid waarmee klanten aankomen:

$$W = \frac{1}{\mu} L = \frac{1}{\mu} \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{\frac{1}{\mu}}{1 - \rho}. \tag{2.10}$$

### 3 Speltheorie binnen wachtrijen

Dit hoofdstuk is geschreven op basis van sectie 1.5 van [3]. We zullen door middel van een voorbeeld laten zien hoe een wachtrij model als een spel gezien kan worden. In dit spel zijn de klanten van de wachtrij de spelers en de opties van de klanten de strategieruimte. We zullen laten zien dat er binnen wachtrij modellen tot verschillende Nash evenwichten gekomen kan worden. Ook zullen we de interpretatie van deze evenwichten bespreken.

#### 3.1 Introductie Shuttlebus model

Het voorbeeld is een wachtrij model dat vertaald kan worden naar een praktische situatie waarin reizigers vervoer willen en tussen twee verschillende manieren van vervoer kunnen kiezen. Voor het gemak zullen we veel termen direct naar de praktische situatie vertalen. In het model kunnen klanten van de wachtrij gezien worden als reizigers die tussen twee verschillende type serviceverleners kunnen kiezen:

1. Een shuttlebus die vertrekt als hij gevuld is met 7 reizigers. De capaciteit van de shuttlebus is ook gelijk aan 7. Als een shuttlebus vertrekt staat de volgende shuttlebus direct klaar.
2. Een normale bus waarvan bekend is dat de aankomsttijden een stochastisch proces zijn en de verwachte residuele tijden tussen aankomsten ook bekend zijn. Dit betekent dat een reiziger op elk willekeurig moment de verwachte tijd tot aankomst van de volgende normale bus weet. De normale bus heeft geen limiet op zijn capaciteit. De verwachte wachttijd voor een normale bus is 5 minuten.

Het aankomst proces van nieuwe reizigers is bekend bij reizigers. Dit aankomst proces is een Poisson proces met snelheid  $\lambda$ . Reizigers willen altijd vervoerd worden en baseren de keuze voor een van de twee transportatie opties puur op het minimaliseren van hun persoonlijke wachttijd. Zodra zij een van de twee opties gekozen hebben kunnen zij deze niet meer veranderen. In ons voorbeeld kunnen nieuwe reizigers niet observeren hoeveel wachtenden er in de shuttlebus zitten.

#### 3.2 Nash evenwichten

In het model kunnen nieuwe reizigers de keuze voor een van de twee opties niet laten afhangen van een observatie die zij maken van het aantal wachtenden in de shuttlebus. De keuze voor de shuttlebus wordt eerder genomen als reizigers weten dat er anderen ook voor de shuttlebus kiezen. Bij een te lage aankomst snelheid van nieuwe reizigers zal er nooit voor de shuttlebus gekozen worden omdat zelfs als alle reizigers voor de shuttlebus kiezen de normale bus toch vaker rijdt en dus gemiddeld voor minder wachttijd zorgt per reiziger. Dit betekent dat we een voorwaarde voor  $\lambda$  kunnen vinden zodat als  $\lambda$  kleiner of gelijk is aan een kritieke waarde alle reizigers voor de normale bus kiezen. Als  $\lambda$  groter is dan deze kritieke waarde dan kan bij voldoende reizigers die de shuttlebus kiezen de verwachte wachttijd van de shuttlebus kleiner zijn dan de verwachte wachttijd van de normale bus. Als dit gebeurt zullen alle reizigers deze

keuze voor de shuttlebus volgen. Volgens de aannames van ons voorbeeld is het echter niet noodzakelijk dat deze situatie optreedt; Als alle andere reizigers voor de normale bus kiezen dan is het slecht om hiervan als individu van af te wijken en deze situatie vormt dus ook een evenwicht.

Naast de twee pure strategieën voor reizigers waarin er voor een van de twee vervoersmiddelen gekozen wordt bestaan er ook gemengde strategieën. In deze gemengde strategieën wordt de keuze bepaald door een kansexperiment met een gegeven kansverdeling.

Samengevat verwachten we dus dat er een situatie optreedt waarin alle reizigers dezelfde pure strategie kiezen in het geval dat  $\lambda$  groter is dan de kritieke waarde. Deze twee mogelijke situaties zijn allebei een Nash evenwicht; in beide situaties zal een individuele reiziger nooit zijn keuze veranderen aangezien dit zijn wachttijd zal vergroten.

### 3.3 Evolutionaire stabiele strategieën

Om onderscheid te kunnen maken tussen Nash evenwichten kan gekeken worden of de evenwichten opgebouwd zijn uit evolutionair stabiele strategieën (ESS). Als een Nash evenwicht bestaat uit ESS dan zou dit een reden kunnen zijn om dat evenwicht te verkiezen boven eentje waarbij dat niet het geval is.

We willen nu laten zien dat de twee gevonden Nash evenwichten in 3.2 allebei gevormd worden door evolutionair stabiele strategieën (ESS). Daarna zullen we laten zien dat er ook een Nash evenwicht is dat gevormd wordt door gemengde strategieën maar niet ESS is. De pure Nash evenwichten kunnen op basis hiervan verkozen worden boven het gemengde evenwicht.

Laat  $W(p, q)$  de verwachte wachttijd voor een reiziger zijn als hij strategie  $p$  uitvoert terwijl de andere reizigers strategie  $q$  uitvoeren waarbij  $p, q \in [0, 1]$ . Hierbij is  $p$  de kans op het kiezen van de shuttle bus en  $1 - p$  is dus de kans op het kiezen van de normale bus. We willen laten zien dat de strategie waarmee een reiziger hetzelfde kiest als alle andere reizigers een evolutionair stabiele strategie is.

#### Definitie:

In het voorbeeld van de shuttlebus model is een strategie  $p$  een evolutionair stabiele strategie als geldt dat:

1.  $W(p, p) \leq W(q, p)$  voor elke strategie  $q$
2. als  $W(q, p) = W(p, p)$  voor  $q \neq p$ , dan geldt dat  $W(p, q) < W(q, q)$ .

We laten nu zien dat de strategieën in onze Nash evenwichten hieraan voldoen:

Voor  $p = 0$  hebben we dat  $W(0, 0) < W(q, 0)$ , als  $q \neq 1$ . Dus is  $p = 0$  een ESS. Evenzo hebben we dat voor  $p = 1$ ,  $W(1, 1) < W(q, 1)$ , als  $q \neq 1$ . Dus is  $p = 1$  een ESS.

Ook willen we onderzoeken of gemengde strategieën bestaan. Neem aan dat er reizigers zijn met strategie  $p$  zodat  $0 < p < 1$ . We kunnen het aankomst proces voor de shuttlebus dan zien als een Poisson proces met parameter  $p\lambda$ . Deze strategie vormt een evenwicht als de verwachte wachttijd van de shuttlebus en de normale bus gelijk is. In deze situatie is er

namelijk geen motief om af te wijken van de gemengde strategie  $p$ . Dit evenwicht is echter geen ESS: Als een deel van de nieuwe reizigers afwijkt van deze strategie dan kunnen spelers zich verbeteren door ook af te wijken.

### 3.4 Kritieke waarde voor $\lambda$

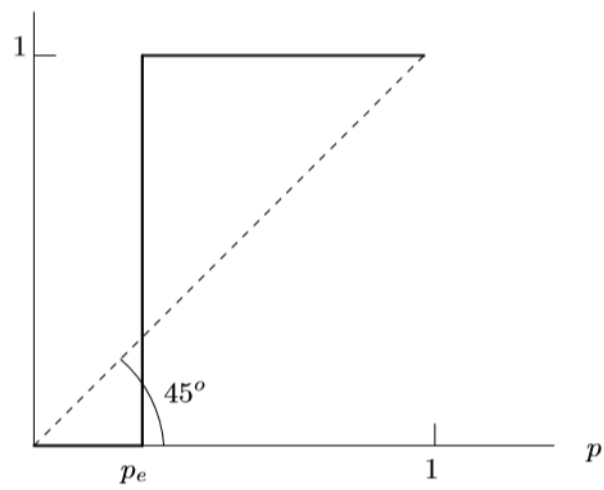
De eerder in 3.2 besproken kritieke waarde voor  $\lambda$  zullen we nu afleiden. Van onze aannames weten we dat de shuttlebus capaciteit 7 reizigers is en de verwachte wachttijd van de normale bus altijd 5 minuten is. We nemen aan dat er reizigers zijn die de gemengde strategie  $p$  volgen. Als een nieuwe reiziger de shuttlebus kiest dan is het aantal wachtende reizigers in de shuttlebus  $i$  met  $i \in \{0, 1, 2, \dots, 6\}$ . De kans op elke  $i$  is  $\frac{1}{7}$  en dus is de verwachte wachttijd waarbij  $i$  bekend is  $\frac{6-i}{\lambda p}$ . Als  $i$  onbekend is dan is de verwachte wachttijd  $\frac{3}{\lambda p}$ . Dus geldt dat als  $p < \frac{3}{5\lambda}$  dat de wachttijd van de normale bus kleiner is dan de shuttlebus en als  $p > \frac{3}{5\lambda}$  dan vice versa. Als  $p = p_e = \frac{3}{5\lambda}$  dan heeft de reiziger geen voorkeur en dit geeft de in 3.3 gevonden gemengde strategie die wel tot een Nash evenwicht leidt maar niet ESS is. We weten dus dat deze waarde alleen bestaat als  $\lambda > \frac{3}{5}$  aangezien dan geldt dat  $0 < p < 1$ .

### 3.5 Conclusies shuttlebus voorbeeld

Als  $\lambda \leq \frac{3}{5}$  dan kiezen alle reizigers voor de normale bus. Als  $\lambda > \frac{3}{5}$  dan zijn er drie strategieën die tot een Nash evenwicht leiden. De twee pure strategieën zijn ook beiden evolutionair stabiele strategieën. Als andere reizigers strategie  $q < \frac{3}{5\lambda}$  kiezen dan is  $p = 0$  het beste antwoord. Als andere reizigers strategie  $q > \frac{3}{5\lambda}$  kiezen dan is  $p = 1$  het beste antwoord. Als andere reizigers strategie  $q = \frac{3}{5\lambda}$  kiezen dan is  $p_e = \frac{3}{5\lambda}$  het beste antwoord. Deze situatie is geschetst in Figuur 1 waarin de beste antwoorden tegen strategieën van alle andere reizigers zijn geschetst. Horizontaal staat de strategie die gevolgd wordt door de andere reizigers, verticaal de strategie voor een individuele reiziger. Omdat spelers weten dat de gemengde strategie niet ESS is zullen zij waarschijnlijk voor een van de twee pure strategieën kiezen.

Het shuttlebus voorbeeld laat zien hoe er binnen wachtrij modellen speltheorie toegepast kan worden om het gedrag van klanten te analyseren. Dit concept is nodig om een sterk tegenvoorbeeld te ontwikkelen waarmee de hypothese van Myrdal weerlegd kan worden.

Figuur 1: Best response diagram shuttlebus voorbeeld ([3], 1.4)



## 4 Een wachtrij model met corruptie

Dit hoofdstuk is grotendeels gebaseerd op [7]. In dit hoofdstuk zal het wachtrij model dat gebruikt wordt om de hypothese van Myrdal te weerleggen geïntroduceerd worden. Dit wachtrij model kan geïnterpreteerd worden als een corrupt model; klanten in het model krijgen de optie om smeergeld te betalen om sneller geholpen te worden. De serviceverlener in dit wachtrij model kan gezien worden als de overheidsmedewerker in de hypothese van Myrdal. In dit hoofdstuk zullen we een uitdrukking afleiden voor de verwachte wachttijd van een klant in dit wachtrij model met corruptie. Dit wachtrij model kan wederom gezien worden als een spel waarin de klanten de spelers zijn. De strategieruimte bestaat uit het bepalen van de hoogte van de som smeergeld die zij betalen en de optie om af te zien van de wachtrij. Om een sterk tegenvoorbeeld voor de hypothese van Myrdal te krijgen zullen we een tegenvoorbeeld geven met reëel gedrag van klanten; we kijken welke strategieën van klanten tot een Nash evenwicht leiden en gebruiken deze situatie voor het tegenvoorbeeld.

### 4.1 Een wachtrij model met corruptie

Voor het wachtrij model met corruptie dat we zullen gebruiken om de hypothese van Myrdal te weerleggen maken we de volgende aannames:

1. Het aankomst proces van nieuwe klanten in het model is een Poisson proces met een gemiddelde snelheid van  $\mu$  klanten per tijdseenheid.
2. Er is één serviceverlener in het model die service verleent met een exponentieel verdeelde snelheid met gemiddelde service tijd  $\frac{1}{u}$ . De waarde van de verleende service voor een klant is  $P$ .
3. Het wachtrij model is een niet observeerbaar model voor nieuwe klanten; de acties van nieuwe klanten worden alleen bepaald door de algemene verwachte wachttijden  $W(x)$  en servicetijden en niet door een specifiek geobserveerde staat van het model.
4. Klanten kunnen verschillende waarderingen  $v$  van hun tijd hebben, waarbij  $v$  een kansvariabele is en  $v \geq 0$ . De cumulatieve kansverdelingsfunctie  $A(v)$  van  $v$  is bekend bij alle klanten en de afgeleide van  $A(v)$  is continu over zijn domein.
5. Als een nieuwe klant arriveert bij de wachtrij dan heeft hij twee mogelijkheden:
  - Hij kan besluiten af te zien van de wachtrij en de service.
  - Hij kan ervoor kiezen een som smeergeld  $x$  te betalen aan de serviceverlener. Hij wordt dan voor alle klanten die lagere sommen smeergeld hebben betaald in de wachtrij geplaatst, maar achter klanten die een even hoge of grotere som smeergeld hebben betaald geplaatst.

Als een actie door een klant gedaan is kan deze niet worden teruggedraaid. Een klant die plaats heeft genomen in de wachtrij kan hier dus niet meer van afzien.

6. Op het moment dat er een nieuwe klant een hogere som smeergeld betaalt dan de klant die op dat moment geholpen wordt door de serviceverlener krijgt de nieuwe klant voorrang op service. De andere klant wordt echter niet uit de rij verworpen en de reeds uitgedeelde service aan deze klant gaat niet verloren; als de klant weer aan de beurt komt dan start de service zonder verlies van tijd bij het punt waar deze gebleven was.

Voor het gemak zullen we ook enige notatie introduceren die we later zullen gebruiken:

- De maximale som smeergeld die ontvangen is door de serviceverlener noteren we met  $x^*$ .
- De *truncated distribution function* van  $x$  wordt aangeduid met  $B(x)$  en er geldt dat  $B(x^*)$  het gedeelte van de klanten is die ervoor kiezen om in de wachtrij plaats te nemen. We nemen aan dat  $B(x^*) \leq 1$  en  $B(x)$  is continu.

## 4.2 Verwachte wachttijd

Om het gedrag van klanten in ons wachtrij model te kunnen onderzoeken zijn we geïnteresseerd in de verwachte wachttijd voor een nieuwe klant. Deze wachttijd zal afhangen van de grootte van de som smeergeld  $x$  die deze klant betaalt; als hij een relatief hoge som smeergeld betaalt zal hij voor veel andere klanten geplaatst worden en een relatief minder lange wachttijd hebben dan wanneer hij een lage som smeergeld betaalt en in de achterste regionen van de wachtrij moet plaatsnemen.

**Stelling 4.2.1** ([7], propositie 1). *Gegeven de aannames van ons wachtrij model met corruptie geldt dat de verwachte wachttijd van een klant die  $x$  aan smeergeld betaalt, gegeven wordt door*

$$W(x) = \frac{\rho}{\mu(1 - \rho B(x^*) + \rho B(x))^2}. \quad (4.1)$$

Hierin is  $\rho$  gedefinieerd als  $\rho = \frac{\mu}{u}$ .

*Bewijs.* De totale wachttijd  $W(x)$  die een klant spendeert in het wachtrij model bestaat uit de som van drie componenten  $W_1, W_2$  en  $W_3$ :

1. De eerste component is zijn eigen verwachte servicetijd die gegeven wordt door aanname (2) van ons model en dus gelijk is aan de gemiddelde servicetijd

$$W_1 = \frac{1}{u} \quad (4.2)$$

2. De tijd van alle klanten die op zijn moment van aankomst in de wachtrij staan en een minstens zo hoge som van smeergeld hebben betaald.

Zoals Little's law 2.4.1 stelt, geldt dat het verwachte aantal klanten in een wachtrijmodel gelijk is aan het product van de aankomstnelheid van de klanten en de verwachte tijd die zij in het model zullen spenderen. Als we naar het verwachte aantal klanten kijken



die een som smeergeld hebben betaald die ligt binnen het interval  $(y, y + dy)$  vinden we dat dit gelijk is aan

$$\mu y W(y) dy = \mu \frac{dB(y)}{dy} W(y) dy.$$

Hierbij nemen we aan dat het interval  $(y, y + dy)$  infinitesimaal klein is waardoor elke som smeergeld binnen dit interval als gelijk beschouwd wordt. Het totaal aantal klanten die een minstens zo hoge som smeergeld betaald als de nieuwe klant die  $x$  betaald is daarom

$$\int_x^{x^*} \mu \left( \frac{dB(y)}{dy} \right) W(y) dy.$$

Omdat al deze klanten hem gemiddeld een tijd van  $1/u$  laten wachten is de verwachte wachttijd die veroorzaakt wordt door deze klanten gelijk aan

$$W_2 = \int_x^{x^*} \frac{\mu}{u} \left( \frac{dB(y)}{dy} \right) W(y) dy = \int_x^{x^*} \frac{\mu}{u} W(y) dB(y). \quad (4.3)$$

3. De extra wachttijd die ontstaat door klanten die na hem aankomen en een hogere som smeergeld betalen dan hij. Het verwachte aantal van dit soort klanten dat aankomt per tijdseenheid wordt gegeven door

$$\mu \int_x^{x^*} dB(y).$$

Dus voor de verwachte wachttijd  $W(x)$  die hij in het wachtrij model verwacht te spenderen is het verwachte aantal van dit soort klanten gelijk aan

$$W(x) \mu \int_x^{x^*} dB(y).$$

Elk van deze klanten heeft een gemiddelde servicetijd van  $\frac{1}{u}$  en dus geldt dat

$$W_3 = W(x) \int_x^{x^*} \frac{\mu}{u} dB(y) = W(x) \rho(B(x^*) - B(x)). \quad (4.4)$$

Voor de totale verwachte wachttijd  $W(x)$  kunnen we dus 4.2, 4.3 en 4.4 bij elkaar optellen:

$$W_1 + W_2 + W_3 = \frac{1}{u} + \int_x^{x^*} \frac{\mu}{u} W(y) dB(y) + W(x) \rho(B(x^*) - B(x)) = \frac{\frac{1}{u} + \rho \int_x^{x^*} W(y) dB(y)}{1 - \rho B(x^*) + \rho B(x)}$$

En dus krijgen we de vergelijking

$$W(x) = \frac{\frac{1}{u} + \rho \int_x^{x^*} W(y) dB(y)}{1 - \rho(B(x^*) - B(x))}. \quad (4.5)$$

Als we in 4.5 de noemer van de rechterkant schrijven als  $f(x)$  dan kunnen we 4.5 als volgt schrijven:

$$f(x) W(x) = \frac{1}{u} + \rho \int_x^{x^*} W(y) dB(y).$$

Links en rechts differentiëren naar  $x$  geeft:

$$f'(x)W(x) + f(x)W'(x) = -f'(x)W(x).$$

Dit leidt tot:

$$f(x)W'(x) = -2f'(x)W(x).$$

Met het scheiden van variabelen kunnen we dit vervolgens oplossen:

$$\int \frac{W'(x)}{W(x)} dW(x) = -2 \int \frac{f'(x)}{f(x)} df(x)$$

$$\log(W(x)) = -2 \log(f(x)) + K$$

. Zodat we vervolgens de volgende uitdrukking voor  $W(x)$  vinden:

$$W(x) = f^{-2}(x) * C \tag{4.6}$$

Hierin zijn  $K$  en  $C$  constanten. Omdat geldt dat  $W(x^*) = \frac{1}{u}$  kunnen we 4.6 schrijven als:

$$W(x) = f^{-2}(x) * \frac{1}{u} = \frac{\rho}{\mu(1 - \rho B(x^*) + \rho B(x))^2}.$$

□

### 4.3 Zoektocht naar sociale optimale situaties

Om het tegenvoorbeeld waarmee we de hypothese van Myrdal willen weerleggen te versterken zijn we opzoek naar sociaal optimale situaties van ons wachtrij model met corruptie. We willen laten zien dat zelfs in een sociaal quasi-optimale situatie een verhoging van de servicesnelheid kan leiden tot een hogere opbrengst van de serviceverlener. Een criterium voor sociale quasi-optimaliteit van een wachtrij is het minimaliseren van de wachttijd van klanten. In ons model hebben klanten verschillende waarderingen van tijd die hierbij meegenomen dienen te worden. De gemiddelde kosten gemaakt door het wachten per klant kunnen geschreven worden als

$$\frac{\int_0^{v^*} vW(x(v))dA(v)}{\int_0^{v^*} dA(v)}.$$

Hierin is  $v^*$  de maximale waardering van de tijd van klanten die ervoor kiezen om in de wachtrij te gaan staan. Omdat klanten de hoogte van de som smeergeld  $x$  die zij betalen laten afhangen van hun tijdswaardering schrijven we deze som als  $x(v)$ .

**Definitie 4.3.1** ([7]). Een wachtrij is sociaal quasi-optimaal voor een gegeven gemiddelde servicetijd als er een volgorde van klanten in de wachtrij ontstaat waarbij voor een gegeven aantal klanten in de wachtrij, de gemiddelde kosten gemaakt door het wachten per klant geminimaliseerd worden.

Dit houdt in dat voor een sociaal quasi-optimale wachtrij klanten met een hoge tijdswaardering vooraan in de wachtrij geplaatst moeten worden en klanten met een lage tijdswaardering achteraan de wachtrij.

We willen nu onderzoeken hoe de sommen smeergeld die door klanten betaald worden gerelateerd zijn aan de tijdswaarderingen van klanten in sociale optima van ons wachtrij model. Hiervoor zoeken we naar restricties op onze smeergeld functie  $x(v)$  waardoor de juiste volgorde van klanten in de wachtrij ontstaat.

**Stelling 4.3.2** ([7], propositie 2). *In ons wachtrij model met corruptie geldt dat voor elke gegeven cumulatieve kansverdelingsfunctie  $A(v)$  de smeergeld functie  $x(v)$  leidt tot een sociaal quasi-optimale wachtrij als  $x(v)$  een strikt stijgende functie van  $v$  is.*

*Bewijs.* Zie [5]. □

De intuïtie achter deze stelling is dat voor een sociaal quasi-optimale wachtrij de klanten met een hoge tijdswaardering voor klanten met een lagere tijdswaardering geplaatst dienen te worden. Als de smeergeld functie  $x(v)$  die klanten gebruiken bij het bepalen van de som smeergeld strikt stijgend is, dan worden de klanten met een hoge tijdswaardering geplaatst voor klanten met een lagere tijdswaardering. Hierdoor ontstaat een volgorde van klanten op basis van tijdswaardering. De klanten met de hoogste tijdswaardering moeten het minst lang wachten en daardoor wordt de gemiddelde gewogen wachttijd geminimaliseerd en is de wachtrij sociaal quasi-optimaal.

Door het toevoegen van sociale quasi-optimaliteit wordt het tegenvoorbeeld waarmee uiteindelijk de stelling van Myrdal weerlegd wordt versterkt. Het tegenvoorbeeld toont dan namelijk aan dat, als klanten een strategie gebruiken die tot een gemiddelde minimale wachttijd leidt, er situaties bestaan waarin het voor de serviceverlener winstgevend is om zijn servicesnelheid te verhogen.

#### 4.4 Afleiden smeergeld functie

We zullen nu een smeergeld functie  $x(v)$  opstellen waarvoor geldt dat deze zowel sociaal quasi-optimaal is als individueel optimaal. Hierbij gebruiken we Stelling 4.3.2 om te zorgen dat de functie sociaal quasi-optimaal is. Vervolgens zullen we laten zien dat bij het gebruik van onze smeergeld functie er geen motief voor individuen is om er van af te wijken. Als klanten als strategie individueel optimale functie gebruiken leidt dit tot een Nash evenwicht. Om een sociaal quasi-optimale situatie te garanderen gebruiken we Stelling 4.3.2 om de restrictie  $x'(v) > 0$  aan onze smeergeld functie  $x(v)$  te stellen. De afgeleide van de smeergeld functie over de tijdswaardering  $v$  moet dus groter dan nul zijn waardoor de functie altijd strikt stijgend is. Omdat de relatieve volgorde van  $x$  hierdoor hetzelfde gesorteerd is als die van  $v$  geldt dat

$$B(x(v)) = A(v). \tag{4.7}$$

Dit houdt in dat klanten met een hoge tijdswaardering voor klanten met een lagere tijdswaardering worden geplaatst in de wachtrij. Als we van deze vergelijking aan beide kanten de afgeleide over  $v$  nemen dan vinden we met behulp van de kettingregel dat

$$B'(x(v)) * x'(v) = A'(v). \tag{4.8}$$

Ook kunnen we de eigenschap  $x^* = x(v^*)$  schrijven in vergelijking 4.7 zodat

$$B(x^*) = A(v^*). \quad (4.9)$$

Elke individuele klant zal zijn eigen opbrengst willen maximaliseren bij het maken van een keuze. Zijn opties bestaan om af te zien van de rij of deel te nemen met een zelf bepaalde som smeergeld  $x$ . De mogelijke winst die door een individu behaald kan worden is de waarde  $P$  van het cadeau minus de kosten van de som smeergeld  $x$  en de kosten van het wachten  $\bar{v}W(x)$ . Het maximalisatie probleem wat elke klant met een gegeven tijdswaardering  $\bar{v}$  individueel probeert op te lossen is dus:

$$\max_x G = P - (x + \bar{v}W(x)). \quad (4.10)$$

Voor het gemak zullen we ervan uitgaan dat  $G \geq 0$ . Als dit niet het geval is dan zal de klant ervoor kiezen om af te zien van de rij aangezien de kosten die gemaakt worden tijdens het wachten en het betalen van de som smeergeld hoger zijn dan de waarde van het cadeau. We kunnen hier onze uitdrukking voor  $W(x)$  van Stelling 4.1 invullen. Dit geeft ons:

$$\max_x G = P - x - \frac{\bar{v}\rho}{\mu(1 - \rho B(x^*) + \rho B(x))^2}. \quad (4.11)$$

We willen nu dit maximalisatie probleem oplossen door eerst de optima te vinden en vervolgens aan te tonen dat het om een maximum gaat. Om de optima te bepalen vinden we de volgende eerste orde voorwaarde van:

$$\frac{dG}{dx} = -1 + \frac{2\rho^2 v B'(x)}{\mu(1 - \rho B(x^*) + \rho B(x))^3} = 0. \quad (4.12)$$

De parameter  $\bar{v}$  van het maximalisatie probleem schrijven we hier als  $v$ , dit doen we om aan te duiden dat na het maximaliseren het weer een variabele is voor de smeergeld functie. Als we in de vergelijking 4.12 de vergelijkingen 4.7, 4.8 en 4.9 substitueren kunnen we dit schrijven als

$$\frac{dx}{dv} = \frac{2\rho^2 v A'(v)}{\mu(1 - \rho A(v^*) + \rho A(v))^3}. \quad (4.13)$$

We merken op dat onze aanname inderdaad geeft dat 4.13 strikt positief is.

Om deze differentiaal vergelijking op te lossen moeten we beide kanten integreren over  $v$ :

$$x(v) = \int \frac{2\rho^2 v A'(v)}{\mu(1 - \rho A(v^*) + \rho A(v))^3} + K. \quad (4.14)$$

Hierin is  $K$  een constante die bepaald moet worden.

Om aan te tonen dat ons optimum een maximum definieert gebruiken we de tweede afgeleide van  $G$  over  $x$ :

$$\frac{d^2G}{dx^2} = \frac{2\rho^2 v}{\mu} * \frac{(1 - \rho B(x^*) + \rho B(x))B''(x) - 3\rho(B'(x))^2}{(1 - \rho B(x^*) + \rho B(x))^4}.$$

Als we vergelijking 4.12 gebruiken om uitdrukkingen voor  $B'(x)$  en  $B''(x)$  te vinden dan kunnen we dit schrijven als:

$$\frac{d^2G}{dx^2} = \frac{-1}{x'(v)v}.$$

Dit is strikt negatief als  $v > 0$ . Met de uitdrukking 4.11 zien we dat als  $v = 0$  we duidelijk een maximum hebben voor de laagst mogelijke waarde van  $x$ . De gevonden optima definiëren dus een maximum.

## 4.5 Voorbeeld verdeling tijdswaardering

Omdat we uiteindelijk Myrdal's hypothese willen weerleggen door middel van een tegenvoorbeeld maken we nu een extra aanname over de verdeling van de tijdswaardering van klanten. De extra aanname luidt als volgt:

Aanname 7:

De cumulatieve kansverdelingsfunctie  $A(v)$  is de functie van een uniforme kansverdeling van  $v = 0$  tot  $v = v_1$ :

$$A(v) = \frac{v}{v_1} \quad \text{voor } v \in [0, v_1].$$

Als we dit meenemen in de uitdrukking 4.14 die we voor  $x(v)$  hebben krijgen we:

$$x(v) = \int \frac{2\rho^2 \frac{v}{v_1} dv}{\mu(1 - \rho \frac{v^*}{v_1} + \rho \frac{v}{v_1})^3} + K.$$

Dit kan verder opgelost worden met behulp van breuksplitsen:

$$x(v) = \frac{-v\rho}{\mu(1 - \rho \frac{v^*}{v_1} + \rho \frac{v}{v_1})^2} - \frac{1}{\mu \frac{1}{v_1}(1 - \rho \frac{v^*}{v_1} + \rho \frac{v}{v_1})} + K. \quad (4.15)$$

We weten dat bij een Nash evenwicht de klanten met de laagste tijdswaardering geen som smeergeld betalen. Als ze dit wel zouden betalen zou het namelijk een betere strategie zijn om  $x$  te verlagen aangezien zijn wachttijd hierdoor niet verlengd wordt. Als  $v = 0$  hebben we dus  $x(0) = 0$ . Hiermee kunnen we een waarde voor  $K$  vinden en kunnen we vergelijking 4.15 schrijven als:

$$x(v) = \frac{-v\rho}{\mu(1 - \rho \frac{v^*}{v_1} + \rho \frac{v}{v_1})^2} - \frac{1}{\mu \frac{1}{v_1}(1 - \rho \frac{v^*}{v_1} + \rho \frac{v}{v_1})} + \frac{1}{\mu \frac{1}{v_1}(1 - \rho \frac{v^*}{v_1})}. \quad (4.16)$$

We hebben  $x^*$  gedefinieerd als de grootste som smeergeld die betaald wordt door een klant in de rij met bijhorende tijdswaardering  $v^*$ . Deze klant heeft dus een positieve opbrengst want anders had hij afgezien van de wachtrij. Als geldt dat  $v^* < v_1$  dan kan zijn opbrengst niet strikt positief zijn. Anders zouden er mensen met een hogere tijdswaardering ook de wachtrij ingaan omdat ze een minimaal zo grote opbrengst als hij zouden kunnen krijgen. Daarom geldt dat als  $v^* < v_1$  dan is opbrengst  $G(x^*) = P - x^* - v^*W(x^*) = 0$ . Als we dit combineren met de uitdrukking 4.1 voor  $W(x)$  vinden we:

$$x^* = P - \frac{v^*\rho}{\mu(1 - \rho B(x^*) + \rho B(x^*))^2} = P - \frac{v^*\rho}{\mu} \quad (4.17)$$

Ook kunnen we  $v = v^*$  substitueren in 4.16 om tot een uitdrukking voor  $x^*$  te komen. Als we deze twee uitdrukkingen voor  $x^*$  aan elkaar gelijk stellen krijgen we:

$$v^* = \frac{\mu P \frac{1}{v_1}}{\rho \frac{1}{v_1} (1 + \mu P \frac{1}{v_1})}.$$

Omdat geldt dat  $\frac{v_1}{v_1} = 1$  kunnen we dit schrijven als

$$v^* = \frac{\mu P}{\rho(1 + \mu P \frac{1}{v_1})} \quad (4.18)$$

En dus is de voorwaarde dat  $v^* < v_1$  gelijk aan

$$\rho > \frac{\mu P}{v_1 + \mu P}.$$

We hebben nu twee mogelijke situaties die we hieronder uitwerken. De resultaten hiervan zullen gebruikt worden in het bewijs van Stelling 4.5.1. De twee situaties zijn als volgt:

- Laten we aannemen dat  $\rho > \frac{\mu P}{v_1 + \mu P}$  geldt. Als we dan 4.18 combineren met 4.16 vinden we:

$$x(v) = \frac{v_1}{\mu} \left( 1 + \mu P \frac{1}{v_1} - \frac{\rho v}{v_1 \left( \frac{1}{(1 + \mu P \frac{1}{v_1})} + \rho \frac{v}{v_1} \right)^2} - \frac{1}{\frac{1}{(1 + \mu P \frac{1}{v_1})} + \rho \frac{v}{v_1}} \right). \quad (4.19)$$

De afgeleide hiervan naar  $v$  is

$$\frac{dx}{dv} = \frac{2\rho^2 v}{\mu v_1 \left( \frac{1}{(1 + \mu P \frac{1}{v_1})} + \rho \frac{v}{v_1} \right)^3} > 0. \quad (4.20)$$

- Laten we aannemen dat het tegenovergestelde geldt, namelijk  $\rho \leq \frac{\mu P}{v_1 + \mu P}$ . Het is direct duidelijk dat  $v^* = v_1$ . Dit leidt tot de situatie dat alle klanten plaatsnemen in de wachtrij. Ook weten we dat

$$\frac{v^*}{v_1} = \frac{v_1}{v_1} = 1$$

geldt. We kunnen dit combineren met 4.16 waardoor we dan de volgende uitdrukking voor onze smeergeld functie vinden:

$$x(v) = \frac{v_1}{\mu(1 - \rho)} - \frac{v\rho}{\mu(1 - \rho + \rho \frac{v}{v_1})^2} - \frac{v_1}{\mu(1 - \rho + \rho \frac{v}{v_1})}. \quad (4.21)$$

We zijn wederom geïnteresseerd in de afgeleide naar  $v$ :

$$\frac{dx}{dv} = \frac{2\rho^2 v}{\mu v_1 (1 - \rho + \rho \frac{v}{v_1})^3}. \quad (4.22)$$

Omdat we hebben aangenomen dat  $\rho < 1$  geldt dat  $\frac{dx}{dv} > 0$ .

**Stelling 4.5.1** ([7], propositie 3). *Ga uit van het wachtrij model met corruptie met aannames één tot en met zeven.*

1. *Neem aan dat  $\rho > \frac{\mu P}{v_1 + \mu P}$  geldt. Als klanten met  $v \leq v^*$  de smeergeld functie 4.19 volgen en klanten met  $v > v^*$  afzien van de wachtrij, dan vormen deze strategieën een Nash evenwicht dat sociaal quasi-optimaal is.*
2. *Neem aan dat  $\rho \leq \frac{\mu P}{v_1 + \mu P}$  geldt. Als de klanten ... volgen dan vormen deze strategieën een Nash evenwicht dat sociaal quasi-optimaal is.*

*Bewijs.* 1. Neem aan dat  $\rho > \frac{\mu P}{v_1 + \mu P}$  geldt. Met Stelling 4.3.2 weten we dat als iedereen met  $v \leq v^*$  strategie 4.19 volgt bij het bepalen van de som smeergeld, dat de oplossing sociaal quasi-optimaal is omdat  $x'(v) > 0$ .

Als alle klanten met  $v \leq v^*$  strategie 4.19 volgen en alle klanten met  $v > v^*$  afzien van de wachtrij dan is er een Nash evenwicht: Voor strategie 4.19 geldt dat deze zo is opgesteld is dat het de oplossing van het individuele maximalisatie probleem 4.11 is. Er is dus geen motief voor klanten met  $v \leq v^*$  om te veranderen van strategie. Ook is de opbrengst voor klanten met  $v > v^*$  lager dan nul als andere klanten strategie 4.19 volgen en zij zullen dus niet de rij ingaan. Daarom geldt dat deze strategieën een Nash evenwicht vormen.

2. Neem aan dat  $\rho \leq \frac{\mu P}{v_1 + \mu P}$  geldt. Omdat  $v^* = v_1$  waar is ziet geen enkele klant af van de wachtrij. Als elke klant strategie 4.21 volgt bij het kiezen van de hoogte van de som smeergeld, dan is er volgens 4.3.2 een sociaal quasi-optimale situatie aangezien  $x'(v) > 0$ .

Ook hebben de klanten geen motief om af te wijken van deze smeergeld functie aangezien deze zo opgesteld is dat hij het individuele maximalisatie probleem oplost. Daarom geldt dat deze strategieën een Nash evenwicht vormen.

□

## 4.6 Interpretatie Nash evenwichten

We hebben met stelling 4.5.1 laten zien welke strategieën van klanten bij het bepalen van de hoogte van hun som smeergeld leiden tot een Nash evenwicht. Voor het tegenvoorbeeld voor de hypothese van Myrdal zullen we kijken naar een Nash evenwicht. Dit levert een sterk tegenvoorbeeld op omdat deze strategieën van klanten reëel zijn; zij maximaliseren hun individuele opbrengst met deze strategieën en het is daarom waarschijnlijk dat zij deze strategieën zullen spelen. Het tegenvoorbeeld voor het weerleggen van de hypothese krijgt meer kracht doordat het de hypothese van Myrdal weerlegt in een situatie met reëel gedrag van klanten.

Het toevoegen van het criterium van sociale quasi-optimaliteit aan het tegenvoorbeeld door middel van een voorwaarde aan de smeergeld functie te stellen zorgt voor versterking van het tegenvoorbeeld. Het zal blijken dat zelfs in situaties waarin de gemiddelde wachttijd van klanten geminimaliseerd is er toch meer opbrengst voor de serviceverlener behaald kan worden door de servicesnelheid te verhogen.

## 5 Optimale snelheid van service

Dit hoofdstuk is grotendeels gebaseerd op [7]. In dit hoofdstuk zullen we een formule voor de opbrengst van de serviceverlener opstellen. Vervolgens zullen we kijken hoe de opbrengst van de serviceverlener verandert bij een verandering van de servicetijd. Hiermee zullen we een tegenvoorbeeld vinden waarmee de hypothese van Myrdal, die stelt dat overheidsmedewerkers in een corrupt systeem de servicesnelheid zullen vertragen om een hogere opbrengst te krijgen, te weerleggen. Ook laten we zien dat bij het toevoegen van kosten voor de serviceverlener de hypothese van Myrdal nogsteeds weerlegd kan worden.

### 5.1 Opbrengst van de serviceverlener

Voor het weerleggen van de hypothese van Myrdal zijn we opzoek naar de optimale snelheid van service in de gevonden Nash evenwichten van Stelling 4.5.1. We willen onderzoeken hoe de gemiddelde opbrengst van smeergeld van de serviceverlener verandert door veranderingen in de servicetijd  $\frac{1}{u}$ . De gemiddelde som smeergeld  $\bar{x}$  die betaald wordt aan de serviceverlener door een nieuwe klant wordt gegeven door:

$$\bar{x} = \int_0^{v^*} x(v) \frac{1}{v_1} dv. \quad (5.1)$$

Hierin is  $x(v)$  de smeergeld functie die gebruikt wordt door een nieuwe klant. Omdat we enkel geïnteresseerd zijn in Nash evenwichten voor ons tegenvoorbeeld zien de smeergeld functies er als volgt uit:

In het geval dat  $\rho > \frac{\mu P}{v_1 + \mu P}$  geldt dat deze gegeven wordt door uitdrukking 4.21. Als  $\rho \leq \frac{\mu P}{v_1 + \mu P}$  dan wordt deze gegeven door 4.19. Omdat er gemiddeld  $\mu$  nieuwe klanten bij de wachtrij komen geldt dat de gemiddelde som smeergeld per tijdseenheid gelijk is aan  $\mu \bar{x}$ .

### 5.2 Consequenties bij veranderingen van de servicetijd

**Stelling 5.2.1** ([7], propositie 4). *Ga uit van het wachtrij model met corruptie met aannames één tot en met zeven.*

*Als de aanname  $\rho < \frac{\mu P}{v_1 + \mu P}$  geldt, dan zal bij het verhogen van de gemiddelde servicetijd  $\frac{1}{u}$  per klant de gemiddelde smeergeld opbrengst van de serviceverlener per tijdseenheid omhoog gaan.*

*Als  $\rho \geq \frac{\mu P}{v_1 + \mu P}$  geldt, dan zal bij het verhogen van de gemiddelde servicetijd  $\frac{1}{u}$  per klant de gemiddelde smeergeld opbrengst van de serviceverlener per tijdseenheid omlaag gaan.*

*Bewijs.* Voor het bewijs onderscheiden we drie gevallen:  $\rho < \frac{\mu P}{v_1 + \mu P}$ ,  $\rho > \frac{\mu P}{v_1 + \mu P}$  en  $\rho = \frac{\mu P}{v_1 + \mu P}$ . We zullen per geval het teken van de afgeleide

$$\frac{d(\mu \bar{x})}{d(1/u)}$$

bekijken aangezien dit de verandering van gemiddelde smeergeld opbrengst van de serviceverlener per tijdseenheid is bij een verandering van de gemiddelde servicetijd. Omdat  $\rho = \frac{\mu}{u}$



geldt dat voor een vaste waarde  $\mu$  we ook kunnen kijken naar het teken van de afgeleide

$$\frac{d\bar{x}}{d\rho}.$$

1. Geval  $\rho < \frac{\mu P}{v_1 + \mu P}$ :

Neem aan dat  $\rho < \frac{\mu P}{v_1 + \mu P}$ , er geldt dan dat  $v^* = v_1$ . Dus alle klanten nemen plaats in de wachtrij. Met uitdrukking 5.1 in combinatie met 4.21 weten we dat in dit geval  $\bar{x}$  geschreven kan worden als

$$\bar{x} = \int_0^{v_1} \left( \frac{v_1}{\mu(1-\rho)} - \frac{v\rho}{\mu(1-\rho + \rho\frac{v}{v_1})^2} - \frac{v_1}{\mu(1-\rho + \rho\frac{v}{v_1})} \right) \frac{1}{v_1} dv = \frac{v_1}{\mu(1-\rho)} + \frac{v_1}{\mu} + \frac{2v_1 \ln(1-\rho)}{\rho m}.$$

Als we dit naar  $\rho$  differentiëren krijgen we

$$\frac{d\bar{x}}{d\rho} = \frac{v_1}{\mu\rho^2} \left( \frac{3\rho^2 - 2\rho}{(1-\rho)^2} - 2\ln(1-\rho) \right).$$

We bekijken het stuk binnen de haakjes en noemen dit  $J$ . Het is duidelijk dat als  $\rho = 0$  dat  $J = 0$ . Als we de afgeleide van  $J$  naar  $\rho$  nemen vinden we

$$\frac{dJ}{d\rho} = \frac{2\rho^2}{(1-\rho)^3}.$$

Met onze aanname dat  $\rho < \frac{\mu P}{v_1 + \mu P} < 1$  geldt dat deze afgeleide van  $J$  naar  $\rho$  strikt positief is en  $J(\rho)$  dus strikt stijgend is. Dus de kleinste waarde van  $J$  is bij  $\rho = 0$ . Dus voor alle  $\rho \in (0, \frac{\mu P}{v_1 + \mu P})$  geldt dat

$$\frac{d\bar{x}}{d\rho} > 0.$$

Dus als de gemiddelde servicetijd per klant toeneemt, dan zal in deze situatie de gemiddelde smeergeld opbrengst van de serviceverlener per tijdseenheid omhoog gaan.

2. Geval  $\rho > \frac{\mu P}{v_1 + \mu P}$ :

Neem aan dat  $\rho > \frac{\mu P}{v_1 + \mu P}$ . Omdat we naar het Nash evenwicht omschreven in Stelling 4.5.1 kijken geldt er dan dat klanten met  $v > v^*$  af zullen zien van de wachtrij. Met uitdrukking 5.1 in combinatie met 4.19 weten we dat in dit geval  $\bar{x}$  geschreven kan worden als

$$\bar{x} = \int_0^{v^*} \frac{v_1}{\mu} \left( 1 + \mu P \frac{1}{v_1} - \frac{\rho\frac{v}{v_1}}{\left(\frac{1}{(1+\mu P\frac{1}{v_1})} + \rho\frac{v}{v_1}\right)^2} - \frac{1}{\frac{1}{(1+\mu P\frac{1}{v_1})} + \rho\frac{v}{v_1}} \right) \frac{1}{v_1} dv.$$

Als we hierin de uitdrukking voor  $v^*$  van 4.18 substitueren kunnen we dit schrijven als

$$\bar{x} = \frac{v_1}{\rho\mu} \left( \mu P \frac{1}{v_1} + \frac{\mu P}{(v_1 + \mu P)} - 2\ln\left(1 + \mu P \frac{1}{v_1}\right) \right).$$

Dit differentiëren naar  $\rho$  geeft

$$\frac{d\bar{x}}{d\rho} = \frac{v_1}{\mu\rho^2} \left[ 2\ln\left(1 + \mu P \frac{1}{v_1}\right) - \left( \mu P \frac{1}{v_1} + \frac{\mu P}{(v_1 + \mu P)} \right) \right].$$

Aangezien het gedeelte tussen rechte haken altijd negatief is voor alle  $\mu P A > 0$ , geldt dat als  $\rho > \frac{\mu P}{v_1 + \mu P}$ , dan

$$\frac{d\bar{x}}{d\rho} < 0.$$

Dus als de gemiddelde servicetijd per klant toeneemt, dan zal in deze situatie de gemiddelde smeergeld opbrengst van de serviceverlener per tijdseenheid omlaag gaan.

3. Geval  $\rho = \frac{\mu P}{v_1 + \mu P}$ :

In dit geval zal bij een verhoging van  $\rho$  het groter worden dan  $\frac{\mu P}{v_1 + \mu P}$ . Daarom kunnen we de resultaten van geval 2 gebruiken. Dus als de gemiddelde servicetijd per klant toeneemt, dan zal in deze situatie de gemiddelde smeergeld opbrengst van de serviceverlener per tijdseenheid omlaag gaan.

□

### 5.3 Opzoek naar de maximale opbrengst

Met behulp van Stelling 5.2.1 zien we dat de serviceverlener zijn gemiddelde opbrengst aan smeergeld kan veranderen door de gemiddelde servicetijd te veranderen. Bij een lage servicetijd zullen er weinig klanten plaatsnemen in de wachtrij en dit zal minder smeergeld opleveren. Bij een hoge servicetijd zullen de wachttijden voor klanten erg laag zijn. Hierdoor hebben zij geen motief om hoge sommen smeergeld te betalen en dit zal de opbrengst voor de serviceverlener drukken. Als de serviceverlener zijn opbrengst wil maximaliseren dan zal hij de optimale servicetijd  $\rho^*$  precies zo kiezen dat  $\rho^* = \frac{\mu P}{v_1 + \mu P}$ .

### 5.4 Weerlegging van de hypothese van Myrdal

We kunnen dus de hypothese van Myrdal die stelt dat in een corrupt systeem de serviceverlener nooit een motief heeft om de servicetijd te verhogen aangezien dat zijn eigen opbrengst drukt weerleggen met het volgende tegenvoorbeeld:

Ga uit van het wachtrij model met corruptie met aannames één tot en met zeven. Neem aan dat de initiële servicetijd die door de serviceverlener gekozen wordt  $\rho_1$  is waarbij  $\rho_1 > \rho^*$ . Met behulp van Stelling 5.2.1 zien we dat bij het kiezen van een nieuwe servicetijd  $\rho_2$  zodat  $\rho^* \leq \rho_2 < \rho_1$  dat de de gemiddelde smeergeld opbrengst van de serviceverlener per tijdseenheid omhoog gaat. Oftewel, er bestaan situaties waarin het verhogen van de servicesnelheid door de serviceverlener tot een hogere smeergeld opbrengst leidt. Het verlagen van de servicesnelheid leidt in deze situaties tot een lagere smeergeld opbrengst.

Dit tegenvoorbeeld schetst een situatie waarmee de ontkenning van de hypothese van Myrdal waar is.

### 5.5 Uitbreiding: Kosten voor de serviceverlener

Stel nu dat we ons wachtrij model met corruptie uitbreiden. We doen nu de extra aanname dat er kosten hangen aan het verlenen van service voor de serviceverlener. We zullen laten

zien dat deze kosten ook kunnen leiden tot een situatie waarin de ontkenning van de hypothese van Myrdal waar is. Deze kosten duiden we aan met  $y(\rho)$ . Hij zal in dit geval in plaats van de gemiddelde smeergeld opbrengst per tijdseenheid proberen om de gemiddelde netto opbrengst  $\mu\bar{x} - y(\rho)$  te maximaliseren.

We bekijken de situatie waarin  $\frac{d(y(\rho))}{d\rho} < 0$ . Dit is de situatie waarin het verhogen van de servicesnelheid leidt tot hogere marginale kosten per klant. We zien direct dat in deze situatie in een model zonder corruptie, dat wil zeggen zonder de mogelijkheid om voor te dringen door middel van sommen smeergeld, de optimale strategie voor de serviceverlener is om de servicesnelheid gelijk aan nul te stellen. Omdat hij geen smeergeld opbrengst ontvangt kan hij zijn netto opbrengst alleen maximaliseren door de kosten te minimaliseren. Dit kan door een oneindig lange servicetijd te kiezen.

Als er wel smeergeld betaald mag worden dan kan er nogsteeds de situatie ontstaan die in 5.4 is gebruikt om de hypothese te weerleggen. Nu wordt in plaats van het maximaliseren van de gemiddelde som smeergeld de netto opbrengst gemaximaliseerd. Dit is zelfs met een  $\frac{d(y(\rho))}{d\rho} < 0$  geen restrictie op de weerlegging van de hypothese van Myrdal.

## 6 Conclusie

Het doel van deze scriptie was de hypothese van Myrdal, die stelt het vertragen van service door overheidsmedewerkers in een corrupt systeem leidt tot een hogere opbrengst, te weerleggen door middel van een tegenvoorbeeld. We hebben een corrupt systeem gemodelleerd met behulp van een wachtrij model waarin corruptie mogelijk is. Klanten in het wachtrij model met corruptie kunnen bij aankomst een som smeergeld betalen waardoor zij mogen voordringen op klanten die een lagere som smeergeld betaald hebben. De serviceverlener in dit wachtrij model met corruptie kan gezien worden als een overheidsmedewerker in een corrupt systeem. Door het wachtrij model met corruptie als een spel te beschouwen waarin de klanten de spelers zijn en de strategieruimte het bepalen van de hoogte van de som smeergeld is, hebben we laten zien wat voor strategie klanten waarschijnlijk zullen kiezen. Dit hebben we gedaan om de betekenis van het tegenvoorbeeld voor de stelling van Myrdal te versterken; we willen vanuit reële situaties kijken naar de verandering van de opbrengst van de serviceverlener. Om het tegenvoorbeeld nog sterker te maken hebben we het criterium van sociale quasi-optimaliteit van de wachtrij toegevoegd. Een sociale quasi-optimale wachtrij is een wachtrij waarin de gemiddelde wachttijd per klant geminimaliseerd is. Het tegenvoorbeeld toont aan dat zelfs in deze situaties een verhoging van de servicesnelheid kan leiden tot een verhoging van de opbrengst voor de serviceverlener.

Met stelling 5.2.1 weten we dat het tegenvoorbeeld van de hypothese alleen ontstaat voor bepaalde waarden van de parameters. Met andere waarden van de parameters geeft een versnelling van de service wel een hogere opbrengst voor de serviceverlener in een wachtrij met corruptie. Ook hebben we in sectie 5.3 laten zien dat als de serviceverlener zijn servicetijd zo kiest dat  $\rho = \frac{\mu P}{v_1 + \mu P}$ , zijn opbrengst aan smeergeld optimaal is.

In [2] wordt gesteld dat in acht genomen moet worden dat het wachtrij model met corruptie dat we gebruikt hebben om een corrupt systeem te modelleren verschillende aspecten van een corrupt systeem niet weerspiegelt. De aanname dat elke klant na zijn initiële keuze bij aankomst bij de wachtrij deze niet meer kan aanpassen is niet reëel. Zoals we in sectie 1.1 noemden geldt dat door de definitie van corruptie juist dit soort type regels doorbroken worden in corrupte systemen. Ook is de aanname rondom de gelijke informatie die elke klant bezit waarop hij zijn strategie bepaald niet reëel. Verschillen in deze twee aannames zouden de resultaten van het wachtrij model met corruptie die we gevonden hebben in hoofdstuk 4 en 5 geheel kunnen veranderen.

Het wachtrij model met corruptie uit deze scriptie laat zien dat het per situatie kan verschillen of verhoging of verlaging van de servicesnelheid tot een verhoging in de opbrengsten van de serviceverlener leidt.

## Referenties

- [1] Ivo Adan en Jacques Resing. *College dictaat, Queueing Systems*. Department of Mathematics en Computing Science, Eindhoven University of Technology, 2015.
- [2] Pranab Bardhan. „Corruption and development: a review of issues”. In: *Journal of economic literature* 35.3 (1997), p. 1320–1346.
- [3] Refael Hassin en Moshe Haviv. *To queue or not to queue: Equilibrium behavior in queueing systems*. Deel 59. Springer Science & Business Media, 2003.
- [4] Arvind K Jain. „Corruption: A review”. In: *Journal of economic surveys* 15.1 (2001), p. 71–121.
- [5] Leonard Kleinrock. „Optimum bribing for queue position”. In: *Operations Research* 15.2 (1967), p. 304–318.
- [6] John DC Little. „A proof for the queueing formula:  $L = \lambda W$ ”. In: *Operations research* 9.3 (1961), p. 383–387.
- [7] Francis T Lui. „An equilibrium queueing model of bribery”. In: *Journal of political economy* 93.4 (1985), p. 760–781.
- [8] Gunnar Myrdal. *Asian Drama: An Inquiry into the Poverty of Nations*. New York: Pantheon, 1968.