# Herontdekking van de afgeleide.

2019

Femke Kaatee
5949335
f.kaatee@students.uu.nl

Universiteit Utrecht

Scriptiebegeleider:
Dr. R.D. Bos
Betawetenschappen
r.d.bos@uu.nl

# Inhoudsopgave


**Inleiding** 2

**Het MERIA project** 3

**Theorie van Didactische Situaties** 4

**Realistisch Wiskunde Onderwijs** 6

**Nederlands MERIA lesplan** 7

**Validatiebenaderingen** 8

**Mogelijkheden in de institutionaliseringsfase** 9
- Traditionele benadering met limieten . . . 9
- Grenslijn benadering . . . 11
- Lokaal lineaire benadering . . . 13
- Overgangspunten benadering . . . 17

**De glijbaanles als experiment** 21
- Eerste glijbaanles . . . 22
- Tweede glijbaanles . . . 24
- Vragenlijst . . . 27
- Bevindingen . . . 29

**Bibliografie** 31

# Inleiding

Het begrijpen van de afgeleide als begrip is nog steeds een grote uitdaging binnen het middelbaar onderwijs, maar ook op universitair niveau. Daarbij komt dat ook de manier waarop de afgeleide onderwezen moet worden, een uitdaging is (Gravemeijer & Doorman, 1999).
Volgens Tall (1991), zoals Gravemeijer en Doorman (1999) aangeven, proberen wiskundigen moeilijke problemen te vereenvoudigen door een probleem op te delen in kleinere stukken. Voor de wiskundige zien al die stukken bij elkaar eruit als een geheel maar voor een leerling kan het overzicht totaal ontbreken. In sommige gevallen hebben leerlingen zelfs niet door dat er een groter geheel bestaat.
Ditzelfde zien we bij de klassieke uitleg van differentiëren. Om differentiëren te begrijpen, dient de leerling eerst te weten hoe limieten werken. Het concept limiet, specifiek de limiet van het differentiequotiënt komt in de meeste gevallen voor de leerlingen uit de lucht vallen.
Tall (1991) stelt voor om op zoek te gaan naar situaties die als informele start kunnen dienen, waaruit kennis en begrip rond een wiskundig concept kan groeien. Deze situaties dienen aan te sluiten bij de belevingswereld van de leerlingen. Dit is ook een doelstelling van Realistisch Wiskunde Onderwijs.

In deze scriptie wordt een lesmethode besproken waarbij de leerlingen niet werken aan de hand van een door de docent bedacht stappenplan, maar gebruik maken van hun bestaande kennis, intuïtie en interesses om vervolgens onder begeleiding van de docent de formele wiskunde achter het begrip afgeleide te herontdekken. Onderzocht wordt of deze methode van begeleide herontdekking van het begrip afgeleide toepasbaar is binnen het middelbaar onderwijs. Dit onderzoeken we door zelf de les te geven en daarbij observatoren aanwezig te laten zijn. Daarnaast verzamelen we het leerlingwerk uit de lessen. Hoe gaan de leerlingen om met deze manier van werken en kan de docent de resultaten van de leerlingen vertalen naar de formele wiskunde.
In het experiment, beschreven in deze scriptie, proberen we het volgende te onderzoeken:

- Welke strategieën gebruiken de leerlingen?
- Welke strategieën die de leerlingen gebruiken, passen bij welke institutionele benadering?

Met de resultaten proberen we gedeeltelijk antwoord te geven op de volgende vraag:
Is het principe van herontdekking, in dit geval van de afgeleide, bruikbaar en geschikt voor het middelbaar onderwijs?

Dit document is geschreven als onderdeel van de bachelor wiskunde aan de Universiteit van Utrecht. Buiten dat is het gerelateerd aan op werk van mijn begeleider Rogier Bos en het MERIA project. We schrijven over het MERIA project en theoriën uit het wiskunde onderwijs die in dat project worden gebruikt. Dit zijn Theorie van Didactische Situaties en Realistisch Wiskunde Onderwijs. Vervolgens vertellen we iets over de een Nederlands MERIA lesplan en mogelijkheden die daaruit voortkomen. Daarna komt het experiment en de bevindingen daarvan.

Onderzoekend leren zorgt voor "Greater improvements in students' science literacy and research skills" (Gormally, Brickman, Hallar, Armstrong, 2009, blz 1). Met dit idee gaan we kijken naar het Nederlandse MERIA lesplan.

# Het MERIA project

In september 2016 is het MERIA project van start gegaan (MERIA, z.d.). Het project is een samenwerking tussen verschillende onderwijs instellingen en scholen uit Kroatië, Denemarken, Slovenië en Nederland en zal in de zomer van 2019 worden afgesloten. MERIA is een afkorting en staat voor Mathematics Education, Relevant, Interesting, Applicable. Het doel van het project is om de kwaliteit van wiskunde onderwijs op de middelbare school te vergroten. Daarnaast wil het project leerlingen laten zien dat wiskunde belangrijk, leuk en nuttig is.

**M**athematics **E**ducation

**R**elevant

MERIA wil leerlingen laten ervaren dat wiskunde een menselijke activiteit is, een idee dat voortkomt uit de theorie van Realistisch Wiskunde Onderwijs, afgekort RWO, waar we het later nog over zullen hebben. De leerling moet centraal staan binnen het onderwijs. MERIA wil dat leerlingen hun eigen potentie voor wiskunde ontdekken, het belang van bewijzen en onderbouwen voelen en de rol van wiskunde binnen de technische evolutie leren waarderen.

**I**nteresting

Door realistische problemen te gebruiken en de leerlingen zelf te laten onderzoeken moet wiskunde interessant worden. Realistisch wordt binnen RWO op een speciale manier gebruikt. Ook daarover later meer. MERIA wil dat leerlingen plezier krijgen in wiskunde en zelfvertrouwen ontwikkelen door te leren van fouten en trots te zijn op opgeloste problemen. Daarnaast moet wiskunde niet iets zijn wat je in je eentje doet, maar is het juist goed als leerlingen samenewerken en hun ideeën delen met anderen.

**A**pplicable

Het gebruik van bovengenoemde ideeën zorgt ervoor dat leerlingen de geleerde wiskundevaardigheden kunnen toepassen in alledaagse situaties. Ze leren patronen herkennen, modellen gebruiken en begrijpen hoe wiskunde zich verhoudt tot en samenwerkt met andere wetenschappen.

MERIA probeert dit te bereiken door te focussen op de ontwikkeling van de docenten. Ze willen middelbare schooldocenten in Europa voorzien van nieuw lesmateriaal. Dit lesmateriaal moet ze vervolgens helpen om een omgeving voor hun leerlingen te creëren waar ze onderzoekend kunnen leren. Het lesmateriaal is ontwikkeld vanuit de gedachte van Onderzoekend Wiskunde Leren. Hierin gaat het om een benadering van het onderwijs op zo'n manier dat de leerling zelf aan de slag gaat met het oplossen van een probleem, los van een bepaalde methode of routine. Leren door te doen en te onderzoeken. Twee theoriën die een perspectief geven op onderzoekend leren, zijn Theorie van Didactische Situaties en Realistisch Wiskunde Onderwijs. Deze benaderingen zullen we in de volgende paragrafen nader toelichten.

# Theorie van Didactische Situaties

Theorie van Didactische Situaties, vanaf nu aangeduid met de afkorting TDS, is een theorie binnen het wiskundeonderwijs . Eind jaren 60 is het onderzoek en de ontwikkeling gestart door Guy Brousseau. TDS heeft verschillende ideeën opgeleverd die docenten kunnen helpen bij het ontwerpen, verbeteren en beoordelen van wiskundelessen (Winsløw, Bos, Doorman, & Jessen, 2017). MERIA gebruikt deze benadering voor zijn scenario's en modules. Ook voor het Nederlandse MERIA lesplan dat we later nog verder zullen bespreken, wordt gebruik gemaakt van TDS. Hierin zullen onder andere de fasen terugkomen waarop een les volgens TDS is gebaseerd.

Een belangrijk onderdeel van het ontwerpen van een onderzoekssituatie voor de leerlingen, is wat we het 'milieu' noemen (Brousseau, 2002). Het milieu is de omgeving waarin de leerlingen nieuwe stof leren, inclusief alle daarbij behorende hulpmiddelen. Als het milieu goed is ingericht door de docent, kan de leerling zelfstandig nieuwe kennis ontwikkelen. Deze situaties waarin de leerlingen zonder extra begeleiding van de docent aan de slag gaan, noemen we binnen TDS a-didachtische situaties. We onderscheiden didactische situaties en a-didactische situaties:

- *Didactische situaties* worden gekenmerkt door de expliciete intentie van de docent om te onderwijzen. De docent laat actief voorbeelden zien en geeft duidelijke instructies en aanwijzingen om ervoor te zorgen dat de leerling het beoogde niveau bereikt.
- *A-didactische situaties* kenmerken zich door leerlingen die zelfstandig werken. De leerlingen werken niet aan de hand van een door de docent bedacht stappenplan, maar maken gebruik van hun bestaande kennis, intuïtie en interesses om aan een opgegeven opdracht of probleem te werken.

De mogelijkheid om te leren ligt in een combinatie van didactische en a-didactische situaties. Om dat verder uit te leggen, is het belangrijk om te vertellen dat er bij TDS een onderscheid wordt gemaakt tussen twee verschillende soorten kennis:

- *Institutionele kennis* is kennis die we zien in boeken, op websites en in andere openbare bronnen. De wiskundige kennis wordt vaak kort en bondig opgeschreven. Daarbij wordt het onderzoeksproces vaak achterwege gelaten en wordt alleen het resultaat gepubliceerd.
- *Persoonlijke kennis* is de kennis die lerenden opdoen tijdens het werken aan een wiskundig probleem. Deze kennis komt vaak impliciet naar boven wanneer er over het probleem wordt gesproken. Persoonlijke kennis kan ontwikkeld en geformaliseerd worden tot het er gaat uitzien als dat wat we verstaan onder institutionele kennis.

Wanneer vanuit een didactische situatie een a-didactische situatie met goed ontworpen milieu in gang kan worden gezet, krijgen de leerlingen de kans om hun persoonlijke kennis uit te breiden. Vervolgens kan deze persoonlijke kennis door een docent of medeleerling gevalideerd worden. Vanuit een didactische situatie kan de opgedane kennis geformaliseerd worden tot institutionele kennis. Dit laatste behoeft in de meeste gevallen een goede organisatie en betrokkenheid van de docent bij de les. Leerlingen koppelen zelden zelf de twee verschillende soorten kennis aan elkaar. Een les of lessenserie gebaseerd op TDS-onderwijs bestaat uit vijf fasen:

1. *Overdrachtsfase* Deze fase is didactisch. De docent introduceert het probleem en stelt het milieu vast. De leerling luistert naar de instructies en probeert eigenaar van het probleem te worden.

2. *Actiefase* Deze fase is a-didactisch. De leerling verkent het probleem en zoekt naar een oplossing vanuit zijn persoonlijke kennis. De docent observeert en reflecteert.

3. *Formuleringsfase* Deze fase kan zowel didactisch als a-didactisch zijn. Nadat de leerlingen alleen of in kleine groepen hebben gewerkt, presenteren de leerlingen hun werkwijze en eventuele oplossingen aan de klas. De docent faciliteert een open discussie en probeert zonder in te grijpen een aantal leerlingen de kans te geven om zijn ideeën te presenteren.

4. *Valideringsfase* Deze fase is vaak didactisch. De leerlingen worden gevraagd om elkaars ideën te vergelijken en te testen. De docent kan de leerlingen helpen door te luisteren en vragen te stellen. Op die manier kunnen de leerlingen inzien wat er goed gaat en wat er fout gaat.

5. *Institutionaliseringsfase* Deze fase is didactisch. De docent gebruikt de ideeën van de leerlingen om vanuit de persoonlijke kennis, institutionele kennis op te bouwen. Het is belangrijk dat de ideeën van de leerlingen hierbij het uitgangspunt blijven voor de vertaling van de kennis. De leerlingen luisteren naar de uitleg en reflecteren op hun eigen werk in vergelijking met de gepresenteerde institutionele kennis.

In sommige milieus zal de scheiding tussen de verschillende fasen erg duidelijk zijn en de bovengenoemde volgorde aanhouden. In andere gevallen kan de docent ook best vooruit of achteruit gaan in de fasen. Zo kunnen sommige fasen vaker of minder vaak worden doorlopen binnen één les of lessenserie. Wanneer het milieu goed ontworpen is, zullen de formulerings- en de validatiefase meer a-didactisch kunnen zijn. Wat vooral opvalt, is dat de institutionalisering aan het einde van de les plaatsvindt. In veel gevallen plaatst de docent de uitleg van concepten en regels aan het begin van een les. Gevaar is dan dat de leerlingen een trucje leren en de antwoorden geven waarvan ze denken dat de docent ze zal verwachten. Wanneer de institutionalisering dan aan het einde van een les wordt geplaatst, kan dit weerstand opleveren van de leerlingen. Ze zijn immers gewend om van de docent meteen te horen of iet goed of fout is. Nu moeten ze zelf op onderzoek uit. Na het onderzoeken is het waarschijnlijk dat de institutionele kennis duidelijker en betekenisvoller is voor de leerling, dan wanneer eerst kennis wordt gedeeld en daarna opdrachten worden gemaakt.

# Realistisch Wiskunde Onderwijs

Realistisch Wiskunde Onderwijs is een theorie over wiskundeonderwijs die ontwikkeld is in Nederland. (Freudenthal, 2002). We zullen vanaf hier de afkorting RWO gebruiken. De Duitse wiskundige Hans Freudenthal (1905-1990) is de bedenker van RWO en heeft een belangrijke bijdrage geleverd aan de ontwikkeling ervan. Volgens Freudenthal is wiskunde een menselijke bezigheid. Bij RWO ligt de focus op het leren van wiskunde binnen realistische situaties. Realistisch betekent hier niet per se 'gebaseerd op de werkelijkheid'. Belangrijk is vooral dat de situaties betekenisvol zijn voor de leerlingen. Daarnaast moet een situatie rijk zijn. Hiermee bedoelen we bijvoorbeeld dat een situatie ruimte geeft aan meerdere benaderingen op verschillende niveaus, of dat de wiskundige oplossing verder gaat dan een enkele situatie. Zo'n situatie is ook het startpunt in het Nederlandse MERIA lesplan.

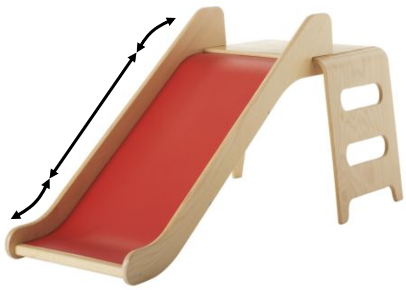
Mathematiseren is een belangrijk onderdeel van wiskunde als menselijke activiteit (Freudenthal, 2002). Onder mathematiseren verstaan we handelingen zoals: formaliseren, algorithmiseren, modelleren, axiomatiseren en schematiseren. We maken hierbij onderscheid tussen horizontaal en verticaal mathematiseren (Treffers, 1987). In het eerste geval wordt een situatie of een probleem vertaalt naar een wiskundige omgeving. Wanneer we het hebben over verticaal mathematiseren hebben we het over het ontwikkelen van een methode of theorie om een wiskundig probleem op te lossen. Beide zijn belangrijk in het leerproces. Eerst wordt een probleem met modellen en symbolen vertaald naar een wiskundige omgeving. Hierdoor blijft het verband tussen de wiskundige kennis en het probleem zichtbaar. Vervolgens kan de leerling met verticale mathematisering de modellen en symbolen generaliseren tot een algemener wiskundig idee. Op deze manier krijgt de leerling inzicht in, en begrip van wiskunde.
Je zou kunnen zeggen dat ze de formele wiskunde opnieuw ontdekken door zelf te onderzoeken met de kennis en ervaringen die ze hebben. Zo'n proces zal niet uit zichzelf plaatvinden; het proces moet worden begeleid.

Met behulp van de aspecten die belangrijk zijn voor RWO kunnen we een leertraject ontwerpen. In dat leertraject zal, wanneer het goed wordt begeleid, een 'begeleide herontdekking' plaatsvinden. Voor Freudenthal (2002) gaat het er bij een begeleide herontdekking om dat leerlingen zich verantwoordelijk voelen voor de beoogde kennis, en die kennis gaan beschouwen als hun eigen kennis. Er wordt niet van de leerlingen verwacht dat ze zelf de wiskunde helemaal opnieuw uitvinden.
Een les volgens de theorie van RWO kan bijvoorbeeld worden opgebouwd volgens de volgende structuur (Winsløw et al., 2017):

1. *Inleiding.* De context van een probleem wordt gegeven. Het probleem zal de basis vormen voor de les(sen),
2. *Horizontaal mathematiseren.* Het probleem wordt vertaald naar een wiskundige omgeving,
3. *Verticaal mathematiseren.* Het bij het probleem behorende model wordt abstracter, en zo algemener gemaakt,
4. *Conclusie en reflectie.* De leerlingen delen hun bevindingen waarna de docent dit kan koppelen aan de belangrijke leerpunten.

# Nederlands MERIA lesplan

Binnen het MERIA project is er een lesplan ontwikkeld door een groepje project-deelnemers, dat is gebaseerd op zowel TDS als RWO (Bos et al., 2017). In het bijzonder is gebruik gemaakt van de door Freudenthal (2002) genoemde begeleide herontdekking. Met de les kan de afgeleide worden geïntroduceerd aan middelbare scholieren. De les is bedoeld voor leerlingen die nog niet eerder uitleg hebben gehad over de afgeleide en differentiëren. Deze les zal vanaf hier de glijbaanles worden genoemd.
Tijdens de les krijgen de leerlingen een probleem voorgelegd. Ze krijgen een afbeelding van een glijbaan te zien die bestaat uit een gekromd deel, gevolgd door een recht deel en dan weer een gekromd deel. Vervolgens wordt aan de leerlingen gevraagd om in groepjes van drie zelf een glijbaan te ontwerpen door gebruik te maken van wiskunde. De glijbaan moet een gekromd en een recht deel bevatten die glad op elkaar aansluiten. Een glijbaan met hobbels is namelijk geen fijne glijbaan. Er kan aan de leerlingen worden gevraagd om gebruik te maken van een coördinatensysteem en een vergelijking te geven voor het kromme deel en eentje voor het rechte stuk. Wanneer er meer tijd is, kan ook er ook voor worden gekozen om dat niet direct aan de leerlingen te vragen.



Figuur 1: Glijbaan

De situatie van de glijbaan is een voor de leerlingen realistische situatie zoals genoemd in RWO. Daarnaast is er sprake van een begeleide herontdekking. Aan de hand van de glijbaan leren de leerlingen wat helling betekent. Dit is een eerste stap naar het begrip afgeleide. De les bestaat uit een aantal fasen, gebaseerd op de fasen van TDS-onderwijs. Allereerst zal de docent de instructie geven. Dan volgt het gedeelte waarbij de leerlingen aan de slag gaan met het probleem. Hier ligt de belangrijke taak voor de docent om de leerlingen te observeren maar verder geen tips te geven. Pas als de leerlingen na een aantal minuten nog niks zijn opgeschoten, kan de de docent vragen stellen waarmee de leerlingen op weg worden geholpen. De docent kan bijvoorbeeld vragen naar de voorkennis van de leerling. Na een tijdje vraagt de docent een aantal groepjes om hun oplossing aan de klas te presenteren. Hierbij kunnen door de klas en de docent vragen gesteld worden ter verduidelijking. Er wordt door de docent geen oordeel gegeven over de gepresenteerde oplossing. Hierna zal de docent het nog hebben over de validatie van de oplossingen en de institutionalisering van de door de leerlingen gebruikte methoden.

# Validatiebenaderingen

De glijbaanles is meerdere malen in verschillende aan MERIA deelnemende landen uitgevoerd. De data uit deze lessen is verder geen onderdeel van mijn scriptie. Door te kijken naar de manier waarop leerlingen wel of niet valideren, kunnen we een beeld vormen van hoe de leerlingen denken over helling en raaklijnen. Dit is belangrijk voor de institutionaliseringsfase. We bespreken in dit en het komende hoofdstuk verschillende validatie- en institutionaliseringsmethoden. Deze kunnen we later gebruiken om het leerlingwerk te analyseren. Tijdens de validatiefase zien we grofweg drie manieren waarop leerlingen controleren of hun oplossing klopt (Bos et al., 2017). Hieronder worden ze kort uitgelegd.

## Algebraïsch

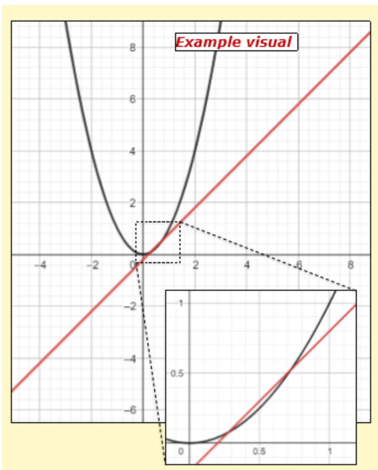
Leerlingen kunnen de oplossing controleren door het snijpunt te berekenen van de hun gevonden functies. Ze kijken dan of er slechts één snijpunt is in een gebied rondom het punt waar de twee functies elkaar zouden moeten snijden.

## Visueel

Sommige leerlingen controleren door te kijken. Als de oplossing er goed en glad uitziet, dan zal dat wel zo zijn. Als de leerlingen digitaal werken, met bijvoorbeeld GeoGebra, kunnen ze inzoomen om te kijken of de oplossing er dan nog steeds goed uitziet.

## Numeriek

Wanneer de functie van een kromme en het punt waar de lijn de kromme moet snijden, zijn gekozen, kan met deze methode gecontroleerd worden welke helling de lijn moet hebben. De leerlingen kiezen het punt en een punt daar vlak naast op de kromme. Vervolgens kan de helling van de lijn door die twee punten worden berekend. Het tweede punt kan daarna steeds dichter naar het eerste punt worden geschoven. Steeds kan dan weer de helling van de lijn door die twee punten worden bepaald.




Figuur 2: Voorbeeld van een visuele validatie (Bos et al., 2017).

# Mogelijkheden in de institutionaliseringsfase

Er zijn een aantal formele benaderingen van de afgeleide. Toch wordt er in ons onderwijs vaak maar op één manier naar de afgeleide gekeken. De leerlingen die een glijbaan ontwerpen, doen dat op verschillende manieren, gebruiken verschillende methoden. Bij elk van deze manieren past een formele aanpak die aansluit op de (informele) aanpak van de leerling. Door de juiste aanpak te kiezen in de institutionaliseringsfase, krijgen de oplossingen en ideeën van de leerlingen betekenis. De persoonlijke kennis wordt gekoppeld aan bijpassende institutionele kennis. Wanneer deze koppeling niet zou plaatsvinden, zou de actiefase voor niks zijn geweest. In dit hoofdstuk bespreken we een aantal aanpakken inclusief voorbeelden. We zullen nu eerst aangeven welke benadering bij welke mogelijke strategie past.

- Welke strategieën die de leerlingen gebruiken, passen bij welke institutionele benadering?

*Traditionele benadering met limieten*
Deze benadering past bij leerlingen die gebruik maken van snijlijnen door twee punten op een kromme. Daarbij kiezen ze een punt op de kromme en laten een ander punt daar steeds dichterbij komen door dat punt over de kromme richting het eerste te schuiven.
*Grenslijn benadering*
Deze benadering past bij leerlingen die de helling van de lijn vast kiezen en die lijn vervolgens naar de kromme toe bewegen tot er nog maar één snijpunt is. Ook past de benadering bij leerlingen die de juiste lijn kiezen door snijpunten met de kromme uit te rekenen.
*Lokaal lineaire benadering*
Deze benadering past bij leerlingen die een punt op de kromme tekenen, daar een liniaal tegen aan zetten en vervolgens de liniaal draaien om het punt op de kromme tot de lijn van de liniaal een geschikte lijn lijkt.
*Overgangspunten benadering*
Deze benadering past bij leerlingen die weer eerst een punt op de kromme kiezen. Vervolgens veranderen ze zowel helling als startgetal van de lijn door het gekozen punt.

## Traditionele benadering met limieten

In het hoger en universitair onderwijs wordt de afgeleide gedefinieerd met behulp van limieten. In sommige gevallen wordt ook op de middelbare school al een poging gedaan. In de wiskunde is de afgeleide bepalen met een limiet de standaard aanpak.

Om met limieten de afgeleide te bepalen, zullen we eerst zeggen wat een limiet is (Van den Ban, 2013).

**Definitie 1** *Laat $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ een functie en $a \in \mathbb{R}^n$ en $b \in \mathbb{R}^m$ punten. We zeggen dat $f$ in $a$ de limiet $b$ heeft als $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ geldt $\exists \delta \in \mathbb{R}_{>0}$ met de eigenschap dat als $x \in Dom(f)$ en*

*$d(x,a) < \delta$ dan $d(f(x),b) < \epsilon$.*
*We noteren de limiet $b$ van $f$ in $a$ als $\lim_{x\to a} f(x) = b$.*

Nu we weten wat een limiet is, kunnen we een definitie van de afgeleide geven.

**Definitie 2** *Zij $I \subset \mathbb{R}$ een interval dat meer dan één punt bevat. Laat $f : I \to \mathbb{R}^n$ en $a \in I$. De functie $f$ heet differentieerbaar in $a$ als er een vector $v \in \mathbb{R}^n$ bestaat met*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = v.$$

*De unieke limiet $v$ noemen we de afgeleide van $f$ in $a$.*

*Vanwege $\lim_{h\to 0}(a + h) = a$ en de substitutieregel voor limieten, kunnen we bovenstaande ook schrijven als*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = v.$$

Wanneer we het hebben over een functie $f$ met één variabele, is de afgeleide van $f$ in $a$ gelijk aan de helling van de raaklijn aan $f$ in $a$.

**Voorbeeld 1** *We bepalen de afgeleide van $f(x) = x^2$ in het punt $(a, a^2)$.*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x\to a} x + a = a + a = 2a$$

*De afgeleide van $f$ in $a$ is dus $2a$.*

**Voorbeeld 2** *We bepalen de afgeleide van $f(x) = \frac{1}{x^2}$ in het punt $(a, \frac{1}{a^2})$.*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^2}}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{a^2 - x^2}{a^2x^2(x - a)} = \lim_{x\to a} -\frac{x + a}{a^2x^2} = -\frac{a + a}{a^2a^2} = -\frac{2}{a^3}$$

*De afgeleide van $f$ in $a$ is dus $-\frac{2}{a^3}$.*

**Voorbeeld 3** *We bepalen de afgeleide van $f(x) = \sin x$ in het punt $(a, \sin a)$.*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos a \sin h + \sin a \cos h - \sin a}{h}$$
$$= \cos a \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} - \sin a \cdot \lim_{h\to 0} \frac{1 - \cos h}{h}$$

*Er geldt dat $\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ en $\lim_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h} = 0$. Daarmee volgt dat*

$$\cos a \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} - \sin a \cdot \lim_{h\to 0} \frac{1 - \cos h}{h} = \cos a \cdot 1 - \sin a \cdot 0 = \cos a.$$

*De afgeleide van $f$ in $a$ is dus $\cos a$.*

**Voorbeeld 4** *We bepalen de afgeleide van $f(x) = x^n$ in het punt $(a, a^n)$, waarbij $n$ een positief geheel getal is.*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x\to a} (x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + ... + a^{n-1})$$
$$= a^{n-1} + a \cdot a^{n-2} + a^2 \cdot a^{n-3} + ... + a^{n-1} = na^{n-1}$$

*De afgeleide van $f$ in $a$ is dus $na^{n-1}$.*

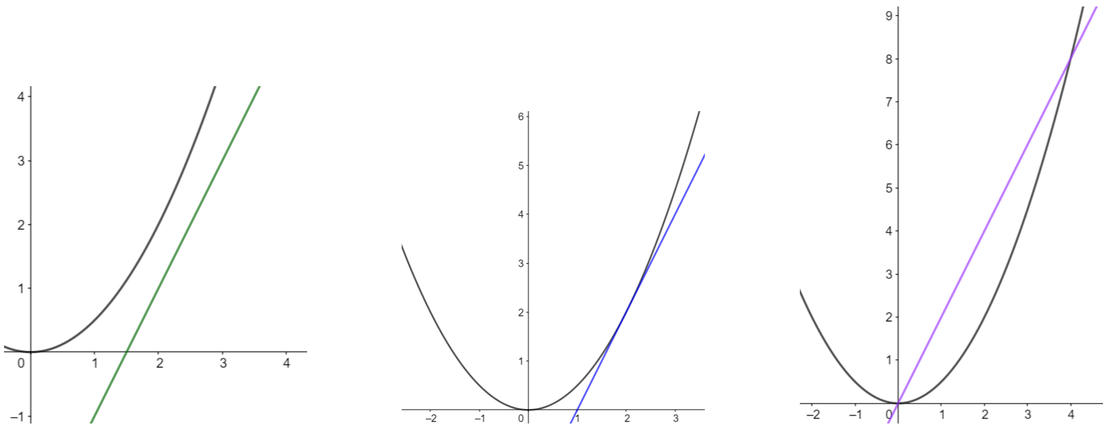
# Grenslijn benadering

We werpen een blik op de vergelijking $y = \frac{1}{2}x^2$. We kunnen op verschillende manieren een rechte lijn in hetzelfde assenstelsel plaatsen. Daarbij zijn er drie mogelijkheden: de parabool en de lijn hebben of nul of één of twee snijpunten met elkaar. Elke rechte lijn die we in het assenstelsel tekenen, behalve de lijn $x = 0$, kunnen we parallel verschuiven zodat er precies één snijpunt met de parabool is. Wanneer we de vergelijking van de lijn gelijkstellen aan die van de parabool, zien we dat de oplossing van deze nieuwe vergelijking in dit geval een multipliciteit van twee heeft. De grenslijn benadering kijkt naar de multipliciteit van de oplossing van de vergelijking die we krijgen wanneer we de vergelijking van een polynoom gelijkstellen aan die van lineaire vergelijking. Als de rechte lijn een raaklijn is aan een punt op de parabool, zal de multipliciteit van zo'n nulpunt groter of gelijk aan twee zijn (Michael Range, 2018).

**Definitie 3** *De raaklijn aan de grafiek van een polynoom $f$ in een punt $(a, f(a))$, is de unieke lijn die door $(a, f(a))$ gaat en de grafiek in dat punt snijdt met een multipliciteit groter of gelijk aan twee.*
*De helling van de raaklijn wordt gegeven door $g(a)$, waarbij $g$ de polynoom is in $f(x) - f(a) = g(x)(x - a)$. Deze helling noemen we de afgeleide van $f$ in $a$.*

Deze stelling geldt voor tweedegraadsvergelijkingen, maar ook hogeregraadsvergelijkingen voldoen aan deze theorie (Michael Range, 2011, blz 406).

Een voorbeeld is de vergelijking $y = x^3$ met de raaklijn $y = 0$ in het punt $(0, 0)$. Stellen we deze aan elkaar gelijk dan zien we $y = x^3 = 0$ oftewel $x = 0$ met multipliciteit drie.



Figuur 3: De parabool $y = \frac{1}{2}x^2$ en de lijnen $y = 2x - 3$, $y = 2x - 2$ en $y = 2x$ met respectievelijk nul, één en twee snijpunten.

Met deze theorie in ons achterhoofd kunnen we de raaklijn aan een polynoom bepalen.

**Voorbeeld 5** *We laten een voorbeeld zien, waarbij we de raaklijn bepalen in een willekeurig punt $(a, \frac{1}{2}a^2)$ op de parabool $y = \frac{1}{2}x^2$. De raaklijn die we zoeken is van de vorm $y = \frac{1}{2}a^2 + m(x - a)$ waarin $m$ de helling van de lijn is. Met behulp van $y = \frac{1}{2}x^2$ kunnen we dit herschrijven.*

$$\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}a^2 + m(x - a)$$

$$(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}a)(x - a) - m(x - a) = 0$$

$$(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}a - m)(x - a) = 0$$

$$\frac{1}{2}(x + a - 2m)(x - a) = 0$$

*We zijn opzoek naar een nulpunt met een multipliciteit van minimaal twee. We zien dat we een nulpunt met multipliciteit twee hebben, als geldt dat $x+a-2m = x-a$. In dat geval moet gelden dat $2m-a = a$ en daaruit volgt dan weer dat $m = a$. De raaklijn in het punt $(a, \frac{1}{2}a^2)$ wordt dus gegeven door $y = \frac{1}{2}a^2 + a(x-a)$. In het punt $(2,2)$ is de raaklijn dus $y = \frac{1}{2}2^2 + 2(x-2) = 2x-2$, zoals we ook al in de afbeelding hierboven zagen.*

**Voorbeeld 6** *We bepalen de raaklijn in een willekeurig punt $(a, \frac{1}{a^2})$ op de hyperbool $y = \frac{1}{x^2}$. De raaklijn die we zoeken is van de vorm $y = \frac{1}{a^2} + m(x-a)$ waarin $m$ de helling van de lijn is. Met behulp van $y = \frac{1}{x^2}$ kunnen we dit herschrijven als:*

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{a^2} + m(x-a)$$

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^2} = m(x-a)$$

$$x^2 - a^2 + x^2a^2m(x-a) = 0$$

$$(x-a)(x+a+x^2a^2m) = 0$$

*Om een nulpunt met een multipliciteit groter of gelijk aan twee te vinden, passen we een staartdeling toe op de tweede term.*

$$(x+a+x^2a^2m) = (x-a)(ma^2x + ma^3 + 1 + \frac{ma^4+2a}{x-a}).$$

*De 'rest' $\frac{ma^4+2a}{x-a}$ verdwijnt als $ma^4 + 2a = 0$. In dat geval geldt $m = -\frac{2}{a^3}$. De raaklijn in het punt $(a, \frac{1}{a^2})$ wordt dus gegeven door $y = \frac{1}{a^2} - \frac{2}{a^3}(x-a) = \frac{3}{a^2} - \frac{2x}{a^3}$.*

**Voorbeeld 7** *We bepalen de raaklijn in een willekeurig punt $(a, a^n)$ op de polynoom $y = x^n$, waarbij $n$ een positief geheel getal is. De raaklijn die we zoeken is van de vorm $y = a^n + m(x-a)$ waarin $m$ de helling van de lijn is. Met behulp van $y = x^n$ kunnen we dit herschrijven als:*

$$x^n = a^n + m(x-a)$$

$$(x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + ... + a^{n-1} - m) = 0$$

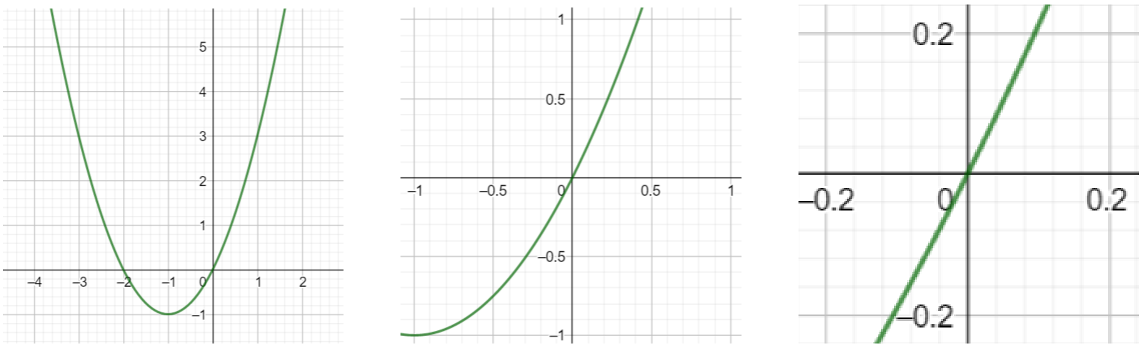
*Om een nulpunt met een multipliciteit groter of gelijk aan twee te vinden, passen we een staartdeling toe op de tweede term.*

$$(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+...+a^{n-1}-m) = (x-a)(a^0x^{n-2}+2ax^{n-3}+3a^2x^{n-3}+...+(n-1)a^{n-2}x^0+\frac{na^{n-1}-m}{x-a}).$$

*De 'rest' $\frac{na^{n-1}-m}{x-a}$ verdwijnt als $na^{n-1} - m = 0$. In dat geval geldt $m = na^{n-1}$. De raaklijn in het punt $(a, a^n)$ wordt dus gegeven door $y = a^n + na^{n-1}(x-a)$.*

## Lokaal lineaire benadering

We nemen een kromme, zeg $y = x^2 + 2x$. De lokaal lineaire benadering zegt nu dat als we maar zo veel mogelijk inzoomen op een punt op de kromme, dat de kromme dan bij benadering lineair is, als de kromme differentieerbaar is in dat punt. In de afbeeldingen hieronder zien we een voorbeeld.




Figuur 4: De parabool $y = x^2 + 2x$, ingezoomd rond het punt $(0, 0)$.

Bij deze lokaal lineaire benadering kunnen we de afgeleide definiëren en formeel introduceren aan de hand van de methode van Jerrold Marsden en Alan Weinstein (1981). Deze definitie is gebaseerd op snel verdwijnen in punten op de grafiek. We geven een definitie van verdwijnen.

**Definitie 4** *We zeggen dat een functie $f$ verdwijnt in $x_0$ als $f(x_0) = 0$. Met andere woorden, $f$ verdwijnt in $x_0$, als $x_0$ een nulpunt is van $f$.*

Sommige functie verdwijnen 'sneller' dan andere. We werpen een blik op de functies $f(x) = x - 3$ en $g(x) = 2(x - 3)^2$. We zien dat in $x = 3$, $g$ sneller verdwijnt dan $f$:

| | |
|---|---|
| $f(4) = 1$ | g(4) = 5 |
| $f(2) = -1$ | g(2) = 5 |
| $f(3,1) = 0,1$ | g(3,1) = 0,02 |
| $f(2,9) = -0,1$ | g(2,9) = 0,02 |
| $f(3,01) = 0,01$ | g(3,01) = 0,0002 |
| $f(2,99) = -0,01$ | g(2,99) = 0,0002 |
| $f(3,001) = 0,001$ | g (3,001) = 0,000002 |
| $f(2,999) = -0,001$ | g(2,999) = 0,000002 |

We geven een definitie van snel verdwijnen.

**Definitie 5** *We zeggen dat een functie $r$ snel verdwijnt in $x_0$ als $r(x_0) = 0$ en $r'(x_0) = 0$.*

We kunnen ook het volgende zeggen over snel verdwijnen.

**Stelling 1** *Laat $r$ een functie zijn zodat $r(x_0) = 0$. We zeggen dat $r$ snel verdwijnt in $x = x_0$ dan en slechts dan als voor elke $\epsilon > 0$, een open interval $I$ rond $x_0$ bestaat zodat voor alle $x \neq x_0$ in $I$ geldt, $|r(x)| < \epsilon \cdot |x - x_0|$ (Marsden, & Weinstein, 1981, blz 32).*

We kunnen nu een definitie van de afgeleide geven, gebaseerd op snel verdwijnen.

**Stelling 2** *Een functie $f$ is differentieerbaar in het punt $x_0$, waarbij $m$ de afgeleide is van $f$ in het punt $x_0$, als de functie $r$ gedefinieerd door $r(x) = f(x) - (f(x_0)) + m(x - x_0))$, snel verdwijnt in $x_0$.(Marsden, & Weinstein, 1981, blz 33).*

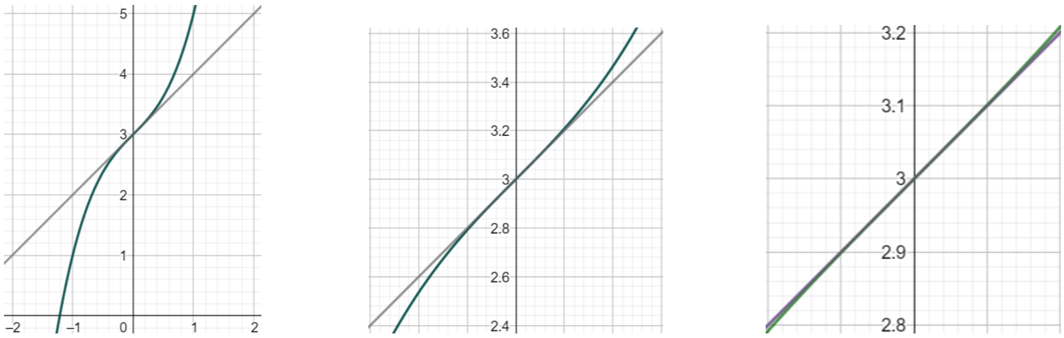
Als we de lineaire benadering in $x_0$ schrijven als $L(x)$, dan geldt $L(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$. (Kindt, 2015). Wanneer we herhaaldelijk inzoomen op de grafieken van $f$ en $L$, zullen de grafieken na een aantal keer inzoomen, niet meer van elkaar te onderscheiden zijn. Dat betekent dat $f$ en $L$ gelijk zijn voor $x = x_0$ en dus $f(x_0) = L(x_0)$. Daarnaast betekent het dat $f(x) - L(x)$ voor $x$ in de buurt van $x_0$ erg klein is, vergeleken met $x - x_0$.

We veranderen de volgorde van $y = x^2 + 2x$ en schrijven in plaats daarvan $y = 2x + x^2$. We bepalen de lineaire benadering in het punt $(0, 0)$ en zoomen daarvoor ver in op de grafiek waardoor de $x$-coördinaat richting 0 gaat. Hierdoor wordt $x^2$ erg klein ten opzichte van $2x$. We verwaarlozen $x^2$ en $2x$ blijft over als onze lineaire benadering. Met andere woorden:

$$y \approx 2x \; als \; x \approx 0$$

Dit komt overeen met het eerste deel van de formule van onze kromme y.

Laten we kijken naar de algemene formule van een derdegraadsvergelijking; $y = d + cx + bx^2 + ax^3$. Hierin is $d$ het snijpunt met de $y$-as en blijkt $c$ de helling in het punt $(0, d)$. We geven een voorbeeld bij $y = 3+x+x^3$. Als we flink inzoomen op het punt $(0, 3)$ wordt de $x$-coördinaat klein, bijna nul, waardoor we $x^3$ kunnen verwaarlozen. Dan blijft $y = 3+x$ over als onze lineaire benadering in het punt $(0, 3)$. Dit zien we ook mooi terug in de afbeeldingen.




Figuur 5: De parabool $y = 3 + x + x^3$ en de lijn $y = 3 + x$, ingezoomd rond hun snijpunt $(0, 3)$.

Tot nu toe hebben we alleen de lineaire benadering in een snijpunt met de $y$-as bepaald. We kunnen echter ook een lineaire benadering vinden voor elk ander punt binnen het assenstelsel.

**Voorbeeld 8** *We doen dit voor $y = x^2$ in het punt $(2, 4)$. Om de lineaire benadering te vinden, verschuiven we het punt $(2, 4)$ naar $(0, 0)$ waarbij de rest van de grafiek in zijn oorspronkelijke vorm meebeweegt. De formule die deze kromme omschrijft is als volgt;*

$$y = -4 + (x + 2)^2$$

$$y = 4x + x^2.$$

*De lineaire benadering in punt $(0, 0)$ is dus $y = 4x$. Schuiven we de grafiek nu twee naar rechts en vier omhoog dan krijgen we de lineaire benadering in het punt $(2, 4)$;*

$$y = 4(x - 2) + 4$$

$$y = 4x + 4.$$

**Voorbeeld 9** *We bepalen de lineaire benadering in een willekeurig punt $(a, \frac{1}{a^2})$ op de vergelijking $y = \frac{1}{x^2}$ Om de lineaire benadering te vinden, verschuiven we het punt $(a, \frac{1}{a^2})$ naar $(0, 0)$ waarbij de rest van de grafiek in zijn oorspronkelijke vorm meebeweegt. De formule die deze verschoven kromme omschrijft is als volgt;*

$$y = -\frac{1}{a^2} + \frac{1}{(x + a)^2}$$

$$y = \frac{-x^2 - 2ax}{a^2(x+a)^2}.$$

*Als $x \approx 0$, dan zien we dat $x^2 \approx 0$ en $(x+a)^2 \approx a^2$. Hieruit volgt dat $y \approx \frac{-2x}{a^3}$. De lineaire benadering in het punt $(0,0)$ is dus $y = \frac{-2x}{a^3}$. Schuiven we de grafiek nu a naar rechts en $\frac{1}{a^2}$ omhoog dan krijgen we de lineaire benadering in het punt $(a, \frac{1}{a^2})$;*

$$y = \frac{-2(x-a)}{a^3} + \frac{1}{a^2}$$
$$y = \frac{3}{a^2} - \frac{2x}{a^3}.$$

**Voorbeeld 10** *We bepalen de lineaire benadering in een willekeurig punt $(a, a^n)$ op de vergelijking $y = x^n$, waarbij $n$ een positief geheel getal is. Om de lineaire benadering te vinden, verschuiven we het punt $(a, a^n)$ naar $(0,0)$ waarbij de rest van de grafiek in zijn oorspronkelijke vorm meebeweegt. De formule die deze verschoven kromme omschrijft is als volgt;*

$$y = -a^n + (x+a)^n$$
$$y = -a^n + \binom{n}{n}x^0a^n + \binom{n}{n-1}x^1a^{n-1} + \binom{n}{n-2}x^2a^{n-2} + \ ... \ + \binom{n}{1}x^{n-1}a^1 + \binom{n}{0}x^na^0$$
$$= nxa^{n-1} + \binom{n}{n-2}x^2a^{n-2} + \ ... \ + \binom{n}{1}x^{n-1}a^1 + \binom{n}{0}x^na^0.$$

*De lineaire benadering in het punt $(0,0)$ is dus $y = nxa^{n-1}$. Schuiven we de grafiek nu a naar rechts en $a^n$ omhoog dan krijgen we de lineaire benadering in het punt $(a, a^n)$;*

$$y = n(x-a)a^{n-1} + a^n$$
$$y = a^n + na^{n-1}(x-a).$$

We kunnen ook nog op een andere manier naar de lokaal lineaire benadering kijken. Daarbij onderzoeken we of er bij benadering een evenredig verband is tussen $\Delta x$ en $\Delta y$ bij een vergelijking met de variabelen $x$ en $y$ (Bos, 2019). Als dat verband er is, noemen we de de bijbehorende grafiek lokaal lineair. Het verband impliceert de differentieerbaarheid van de gelijkheid, en andersom. We maken bij deze benadering informeel gebruik van het begrip limiet.

**Voorbeeld 11** *We laten zien hoe dit in zijn werk gaat aan de hand van een voorbeeld. We nemen de vergelijking $y = \sqrt{x}$. Nu gaat het als volgt;*

$$y + \Delta y = \sqrt{x + \Delta x}$$
$$y^2 + 2y\Delta y + \Delta y^2 = x + \Delta x$$
$$y^2 + 2y\Delta y \approx x + \Delta x$$

*Met behulp van $y^2 = x$ volgt dan;*

$$2y\Delta y \approx \Delta x.$$

*Indien gewenst, zou je hier nog uit kunnen afleiden dat $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.*

**Voorbeeld 12** *We bepalen de helling van de raaklijn in een willekeurig punt $(a, a^2)$ op de vergelijking $y = x^2$. Dat gaat als volgt;*

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$$
$$y + \Delta y = x^2 + (\Delta x)^2 + 2x\Delta x$$
$$y + \Delta y \approx x^2 + 2x\Delta x$$

*Met behulp van $y = x^2$ volgt dan;*

$$\Delta y \approx 2x\Delta x$$

*Hieruit kun je afleiden dat $\frac{dy}{dx} = 2x$. Dat wil zeggen dat de helling van de raaklijn aan het punt $(a, a^2)$ gelijk is aan $2a$.*

**Voorbeeld 13** *We bepalen de helling van de raaklijn in een willekeurig punt* $(a, \frac{1}{a^2})$ *op de vergelijking* $y = \frac{1}{x^2}$*. Dat gaat als volgt;*

$$y + \Delta y = \frac{1}{(x + \Delta x)^2}$$

$$y + \Delta y = \frac{1}{x^2 + (\Delta x)^2 + 2x\Delta x}$$

$$yx^2 + x^2\Delta y + y(\Delta x)^2 + \Delta y(\Delta x)^2 + 2xy\Delta x + 2x\Delta x\Delta y = 1$$

$$yx^2 + x^2\Delta y + 2xy\Delta x \approx 1$$

*Met behulp van* $y = \frac{1}{x^2}$ *volgt dan;*

$$x^2\Delta y \approx -\frac{2}{x}\Delta x.$$

*Hieruit kun je afleiden dat* $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x^3}$*. Dat wil zeggen dat de helling van de raaklijn aan het punt* $(a, \frac{1}{a^2})$ *gelijk is aan* $-\frac{2}{a^3}$*.*

**Voorbeeld 14** *We bepalen de helling van de raaklijn in een willekeurig punt* $(a, \sin a)$ *op de vergelijking* $y = \sin x$*. Dat gaat als volgt;*

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$$

$$y + \Delta y = \sin x \cos(\Delta x) + \cos x \sin(\Delta x)$$

*Door* $(\Delta x)^2$ *te verwaarlozen in de vorige voorbeelden, maken we al informeel gebruik van het begrip limiet. In dit voorbeeld moeten we nog een stap verder gaan. We maken gebruik van* $\cos(\Delta x) \approx 1$ *en* $\sin x \approx x$ *als* $x$ *naar* $0$ *nadert. We zien daardoor dat* $\sin(\Delta x) \approx \Delta x$ *als* $x$ *naar* $0$ *nadert. Met behulp van* $y = \sin x$ *volgt dan;*

$$\sin x + \Delta y \approx \sin x + \cos x\Delta x$$

$$\Delta y \approx \cos x\Delta x$$

*Hieruit kun je afleiden dat* $\frac{dy}{dx} = \cos x$*. Dat wil zeggen dat de helling van de raaklijn aan het punt* $(a, \sin a)$ *gelijk is aan* $\cos a$*.*

**Voorbeeld 15** *We bepalen de helling van de raaklijn in een willekeurig punt* $(a, a^n)$ *op de vergelijking* $y = x^n$*, waarbij* $n$ *een positief geheel getal is. Dat gaat als volgt;*

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n$$

$$y+\Delta y = \binom{n}{0}x^n(\Delta x)^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}(\Delta x)^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}x^1(\Delta x)^{n-1} + \binom{n}{n}x^0(\Delta x)^n$$

$$y + \Delta y \approx x^n + nx^{n-1}\Delta x$$

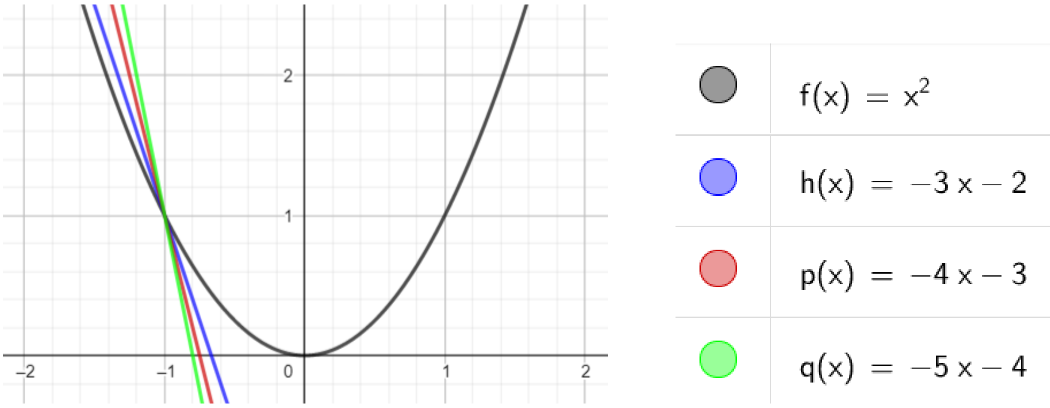
*Met behulp van* $y = x^n$ *volgt dan;*

$$\Delta y \approx nx^{n-1}\Delta x$$

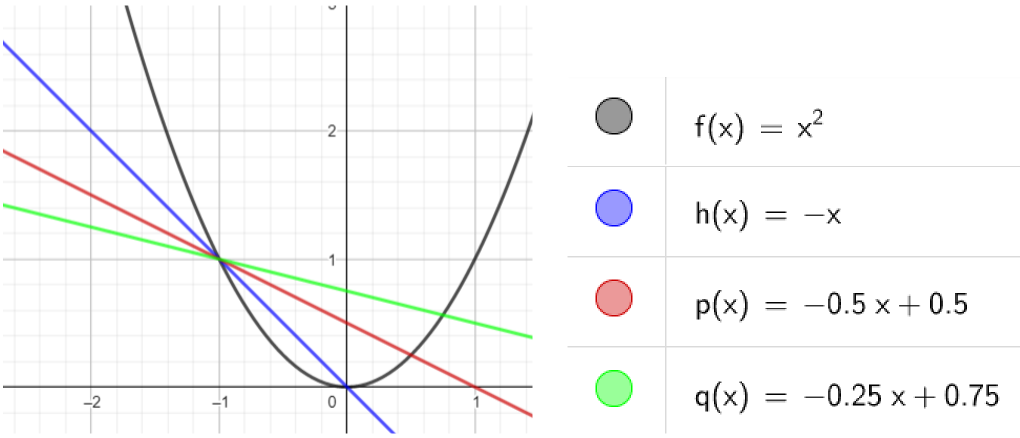
*Hieruit kun je afleiden dat* $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$*. Dat wil zeggen dat de helling van de raaklijn aan het punt* $(a, a^n)$ *gelijk is aan* $na^{n-1}$*.*

## Overgangspunten benadering

Wanneer we het over de overgangspunten benadering hebben, bepalen we de afgeleide aan de hand van de punten van een functie waar een overgang plaatsvindt. Deze benadering met bijbehorende definitie is equivalent aan de benadering met limieten. Om een idee te krijgen waar het over gaat, kijken we naar onderstaande figuren. In figuur 6 en 7 is de parabool met vergelijking $y = x^2$ te zien. Daarnaast zijn in beide figuren nog een aantal lijnen te zien die de parabool snijden in het punt $(-1, 1)$. In figuur 6 zijn dat lijnen die eerst boven de parabool liggen, en na het punt $(-1, 1)$ eronder. In figuur 7 merken we het omgekeerde op. Eerst zijn de lijnen onder de parabool, maar na het punt $(-1, 1)$ liggen de lijnen er een tijdje boven. Er bestaat een lijn door $(-1, 1)$ die niet zo is zoals de lijnen in deze figuren. Deze lijn nadert de parabool, gaat door $(-1, 1)$ en gaat vervolgens aan dezelfde kant van de parabool verder. Dit is de raaklijn aan de parabool in $(-1, 1)$. In dit geval hoort daar de vergelijking $y = -2x - 1$ bij. We zien dat de vergelijkingen in figuur 6 een kleiner hellingsgetal hebben dan die van de raaklijn, die in figuur 7 een grotere. Het hellingsgetal van de raaklijn ligt daar ergens tussenin. Om vanuit hier de afgeleide formeel te definiëren, gaan we gebruik maken van overgangspunten. In dit voorbeeld zien we op twee punten dat wat we een overgangspunt noemen. Het eerste overgangspunt, is het punt waar de raaklijn en de grafiek elkaar snijden. De verschilfunctie van de raaklijn en grafiek heeft dan een overgang van positief naar negatief of andersom. Het tweede overgangspunt vinden we in het domein van de richtingscoëfficiënt, daar waar de richtingscoëfficiënt precies gelijk is aan die van de raaklijn.




Figuur 6: De lijnen kruisen de parabool $y = x^2$ van boven naar beneden in het punt $(-1, 1)$.




Figuur 7: De lijnen kruisen de parabool $y = x^2$ van beneden naar boven in het punt $(-1, 1)$.

Om deze benadering uit te leggen en tot de definitie van de afgeleide te komen, introduceren we de formele definitie van een overgangspunt, opgesteld door Marsden en Weinstein (1981).

**Definitie 6** *Laat $A, B \subset \mathbb{R}$ verzamelingen zijn. Een punt $x_0$ noemen we een overgangspunt van $A$ naar $B$ als er een open interval $I \subset \mathbb{R}$ bestaat met $x_0 \in I$ zodat*

1. *Als $x \in I$ en $x < x_0$, dan is $x \in A$ maar $x \notin B$.*
2. *Als $x \in I$ en $x > x_0$, dan is $x \in B$ maar $x \notin A$.*

We specificeren met deze definitie niet tot welke verzameling het punt $x_0$ behoort. Hij kan tot $A$, $B$, beide of geen van beide behoren. Daarnaast hebben we het enkel over overgangspunten. Met zogenaamde overgangsperioden, waarbij meerdere punten naast elkaar overgangspunt zijn, houden we ons in deze definitie niet bezig.
Om de afgeleide van een functie $f$ in $x_0$ te kunnen bepalen, willen we iets kunnen zeggen over het verschil tussen $l_m(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$ en $f(x)$. Als we over verschil praten, kan dat positief en negatief zijn. Dit gegeven willen we koppelen aan de definitie van een overgangspunt. We introduceren daarom de definitie van een tekenwisseling van een functie.

**Definitie 7** *Laat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een functie zijn en $x_0 \in \mathbb{R}$. We zeggen dat het teken van $f$ wisselt van negatief naar positief in $x_0$ als er een interval $I = (a, b)$ bestaat met $x_0 \in I$ zodat $f$ gedefinieerd is op $I$, eventueel $x_0$ uitgezonderd, en*

$$f(x) < 0 \text{ als } a < x < x_0 \text{ en } f(x) > 0 \text{ als } x_0 < x < b.$$

*Op dezelfde manier zeggen we dat het teken van $f$ wisselt van positief naar negatief in $x_0$ als er een interval $J = (a, b)$ bestaat met $x_0 \in J$ zodat $f$ gedefinieerd is op $J$, eventueel $x_0$ uitgezonderd, en*

$$f(x) > 0 \text{ als } a < x < x_0 \text{ en } f(x) < 0 \text{ als } x_0 < x < b.$$

We zien nu een definitie voor tekenwisselingen en voor overgangspunten. We kunnen deze definities met elkaar combineren tot stelling 3. Voor de geïnteresseerde lezer voegen we ook het bewijs toe.

**Stelling 3** *Laat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een functie zijn. Zij $N := \{x \mid f(x) < 0\}$ en $P := \{x \mid f(x) > 0\}$.*

1. *$x_0$ is een overgangspunt van $N$ naar $P$ dan en slechts dan als het teken van $f$ wisselt van negatief naar positief in $x_0$.*
2. *$x_0$ is een overgangspunt van $P$ naar $N$ dan en slechts dan als het teken van $f$ wisselt van positief naar negatief in $x_0$.*

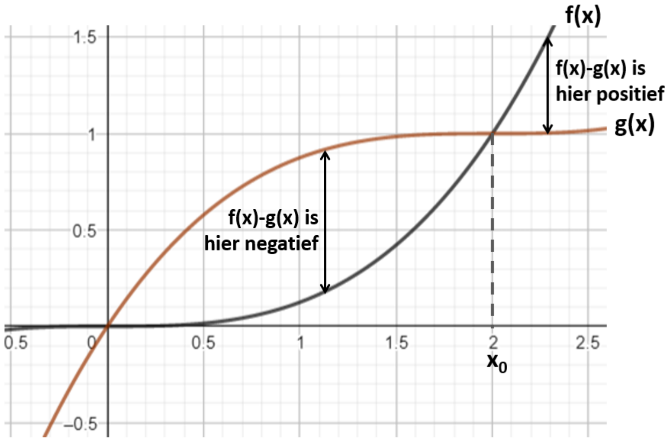
**Bewijs 1**
1. *Stel dat $x_0$ een overgangspunt is van $N$ naar $P$. Volgens de definitie is er dan een open interval $I \subset \mathbb{R}$ zodat $x_0 \in I$ zodat:*
   - *als $x_0 \in I$ en $x < x_0$, dan geldt $x \in N$ maar $x \notin P$,*
   - *als $x_0 \in I$ en $x > x_0$, dan geldt $x \in P$ maar $x \notin N$,*

   *Laat $I = (a, b)$. Merk op dat dan $x \in (a, b)$ en $x < x_0$ dus $a < x < x_0$. Het eerste punt zegt dus als $a < x < x_0$ dan is $x$ in het domein van $f$ en $f(x) < 0$. Het tweede punt zegt als $x_0 < x < b$ dan is $x$ in het domein van $f$ en $f(x) > 0$. Dus volgens definitie 7, wisselt $f$ van teken van negatief naar positief. Omgekeerd zien we dat wanneer $f$ van teken wisselt van negatief naar positief, dat $x_0$ dan een overgangspunt is van $P$ naar $N$.*
2. *Het bewijs volgt op dezelfde manier als voor* 1.

We hebben nu nog één definitie nodig voor we kunnen zeggen wat de afgeleide is. Hierin combineren we weer overgangspunten met dit keer de tekenwisselingen van de functie $f(x) - g(x)$.

**Definitie 8** *Laat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ functies zijn. Zij $A := \{x \mid f(x) < g(x)\}$ en $B := \{x \mid f(x) > g(x)\}$. Als $x_0$ een overgangspunt is van $A$ naar $B$ dan zeggen we dat $f$ $g$ voorbijgaat in $x_0$.*

Deze definitie 8 gebruiken we straks voor het verschil tussen $l_m$ en $f$. We kunnen daarmee iets zeggen over wanneer $l_m$, $f$ voorbijgaat en andersom. Voorbijgaan zegt iets over het teken en de wisseling van teken van de verschilfunctie van twee functies. In onderstaand figuur zie je hoe dat eruit ziet.



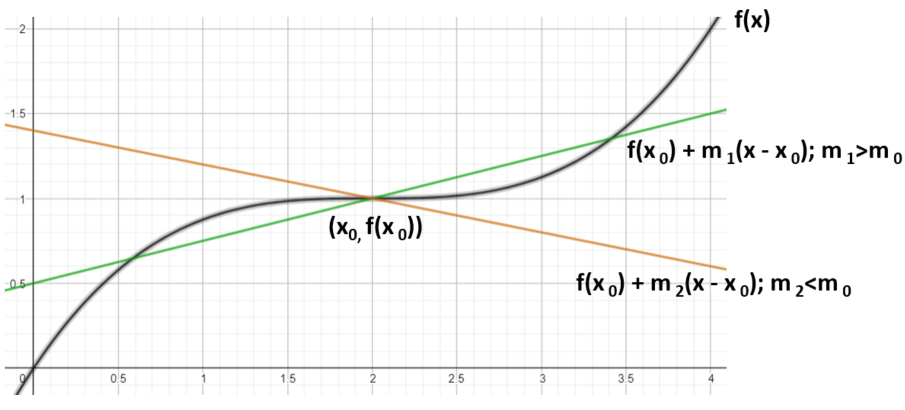

Figuur 8: $f(x)$ gaat $g(x)$ voorbij in $x_0 = 2$.

We hebben nu alles wat we nodig hebben. We kunnen de afgeleide definiëren aan de hand van overgangspunten.

**Definitie 9** *Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een functie waarbij het domein een open interval rond $x_0$ bevat. Laat $l_m(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$ zijn, en $A := \{m \mid f$ gaat $l_m$ voorbij in $x_0\}$ en $B := \{m \mid l_m$ gaat $f$ voorbij in $x_0\}$. Stel dat er een $m_0$ bestaat zodat,*

1. *Voor alle $m < m_0$, $m \in A$*
2. *Voor alle $m > m_0$, $m \in B$,*

*dan zeggen we dat $f$ differentieerbaar is. We noemen $m_0$ de afgeleide van $f$ in $x_0$ en schrijven dat als $m_0 = f'(x_0)$.*




Figuur 9: Lijnen met verschillende helling $m$ kruisen de kromme.

Meetkundig gezien, zegt deze definitie dat de lijnen door $(x_0, f(x_0))$ met helling kleiner dan $f'(x_0)$ de grafiek van $f$ kruisen van boven naar beneden en de lijnen met een helling groter dan $f'(x_0)$ van onder naar boven kruisen. Precies zoals we dus eerder al zagen. Om het helemaal af te maken, geven we nog de volgende stelling.

**Stelling 4** *Een punt $m_0$ zoals gedefinieerd in definitie 9, is een overgangspunt van A naar B dan en slechts dan als $m_0$ de afgeleide is van $f$ in $x_0$. (Marsden, & Weinstein, 1981, blz 27).*

Met deze definitie kunnen we aan de slag. Hieronder volgen enkele voorbeelden waarbij we werken vanuit de overgangsbenadering.

**Voorbeeld 16** *We bepalen de raaklijn in een willekeurig punt $(a, a^2)$ van de functie $f(x) = x^2$.*

$$l_m(x) = f(x) - (f(a) + m(x-a)) = x^2 - a^2 - m(x-a)$$

$$x^2 - a^2 - m(x-a) = (x-a)(x+a-m)$$

*De functie $l_m$ gaat van positief naar negatief in a als $a < -a + m$, dus als $m > 2a$.*
*De functie $l_m$ gaat van negatief naar positief in a als $-a + m < a$, dus als $m < 2a$.*
*Volgens definitie 9 geldt nu dat $m = 2a$ de afgeleide is van f in $(a, a^2)$.*
*De raaklijn in een willekeurig punt $(a, a^2)$ wordt dus gegeven door $a^2 + 2a(x-a) = -a^2 + 2ax$.*

**Voorbeeld 17** *We bepalen de raaklijn in een willekeurig punt $(a, \frac{1}{a^2})$ van de functie $f(x) = \frac{1}{x^2}$.*

$$l_m(x) = f(x) - (f(a) + m(x-a)) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^2} - m(x-a)$$

$$x^2 - a^2 + x^2a^2m(x-a) = (x-a)(x+a+x^2a^2m)$$

*De functie $l_m$ gaat van positief naar negatief in a als $a < -a - x^2a^2m$, dus als $a < -a - a^4m$ en dus $m > -\frac{2}{a^3}$. De functie $l_m$ gaat van negatief naar positief in a als $-a - x^2a^2m < a$, dus als $-a - a^4m < a$ en dus $m < -\frac{2}{a^3}$.*
*Volgens definitie 9 geldt nu dat $m = -\frac{2}{a^3}$ de afgeleide is van f in $(a, \frac{1}{a^2})$.*
*De raaklijn in een willekeurig punt $(a, \frac{1}{a^2})$ wordt dus gegeven door $\frac{1}{a^2} + \frac{2}{a^3}(x-a) = \frac{3}{a^2} - \frac{2x}{a^3}$.*

**Voorbeeld 18** *We bepalen de raaklijn in een willekeurig punt $(a, a^n)$ van de functie $f(x) = x^n$, waarbij n een positief geheel getal is.*

$$l_m(x) = f(x) - (f(a) + m(x-a)) = x^n - a^n - m(x-a)$$

$$x^n - a^n - m(x-a) = (x-a)(xa^{n-2} + x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + ... + a^{n-1} - xa^{n-2} - m)$$

*De functie $l_m$ gaat van positief naar negatief in a als*

$$xa^{n-2} < -x^{n-1} - ax^{n-2} - a^2x^{n-3} - ... - a^{n-1} + xa^{n-2} + m,$$

*dus als*

$$a \cdot a^{n-2} < -a^{n-1} - a \cdot a^{n-2} - a^2 \cdot a^{n-3} - ... - a^{n-1} + a \cdot a^{n-2} + m$$

*en dus*

$$a^{n-1} + a^{n-1} + ... + a^{n-1} < m$$

*en dus*

$$m > na^{n-1}.$$

*De functie $l_m$ gaat van negatief naar positief in a als*

$$-x^{n-1} - ax^{n-2} - a^2x^{n-3} - ... - a^{n-1} + xa^{n-2} + m < xa^{n-2},$$

*dus als*

$$-a^{n-1} - a \cdot a^{n-2} - a^2 \cdot a^{n-3} - ... - a^{n-1} + a \cdot a^{n-2} + m < a \cdot a^{n-2}$$

*en dus*

$$m < a^{n-1} + a^{n-1} + ... + a^{n-1}$$

*en dus*

$$m < na^{n-1}.$$

*Volgens definitie 9 geldt nu dat $m = na^{n-1}$ de afgeleide is van f in $(a, a^n)$.*
*De raaklijn in een willekeurig punt $(a, a^n)$ wordt dus gegeven door $a^n + na^{n-1}(x-a)$.*

# De glijbaanles als experiment

Zoals eerder aangegeven, is de glijbaanles meerdere malen in verschillende aan MERIA deelnemende landen uitgevoerd. Zelf heb ik de glijbaanles tweemaal mogen geven. Hierbij waren ook observatoren aanwezig die de leerlingen en hun werk hebben geobserveerd gedurende de les. Ik zal de resultaten en observaties uit mijn eigen lessen bespreken aan de hand van de datatabel van Piroi (2019).
De door mij gegeven lessen duurden elk vijftig minuten. De leerlingen werden gevraagd om in groepjes van drie of vier met het probleem aan de slag te gaan. Ze kregen een formulier waarop ze hun pogingen konden tekenen. Hierbij werd ook gevraagd naar de vergelijking van de lijn en de vergelijking van de kromme. In de tabellen met data zal ik verwijzen naar een mogelijke benadering voor validatie en institutionalisatie (Piroi, 2019).

In dit experiment proberen we het volgende te onderzoeken:

- Welke strategieën gebruiken de leerlingen?
- Welke strategieën die de leerlingen gebruiken, passen bij welke institutionele benadering?

Met de resultaten proberen we gedeeltelijk antwoord te geven op de volgende vraag:
Is het principe van herontdekking, in dit geval van de afgeleide, bruikbaar en geschikt voor het middelbaar onderwijs?

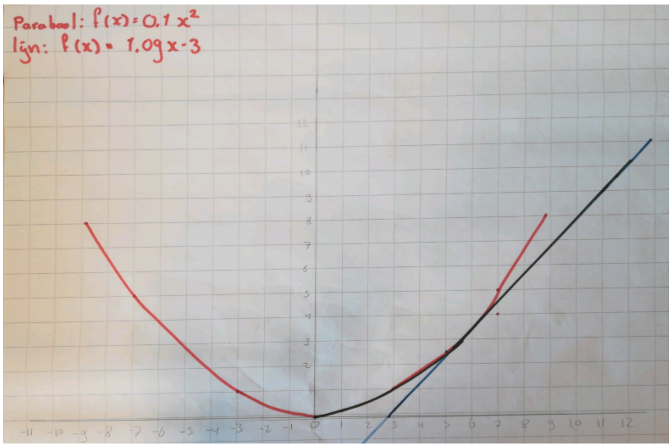
Dit onderzoeken we door zelf de les te geven en daarbij observatoren aanwezig te laten zijn. Daarnaast verzamelen we het leerlingwerk uit de lessen. De leerlingen moeten voor een oplossing twee vergelijkingen geven; die voor het rechte stuk en eentje voor het kromme stuk. De les gebruikt de stappen van TDS en het idee van begeleide herontdekking uit RWO. Dit doen ze door de glijbaan te gebruiken om te leren over de afgeleide. Uit eerdere onderzoeken is gebleken dat leerlingen zich de stof meer eigen maken wanneer er in de les een herontdekking plaatsvindt (Gormally, Brickman, Hallar, Armstrong, 2009.). We hopen dat dat ook in deze lesopzet het resultaat zal zijn.

# Eerste glijbaanles

- maandag 21-01-19 om 10.20 uur
- derde klas vwo
- Chromebookklas

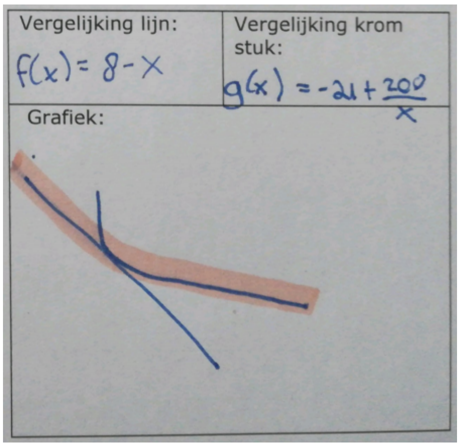
Docent: Femke Kaatee, met hulp van Rogier Bos.
Observatoren: de docent, Rogier Bos.
In deze les zijn 7 verschillende groepjes leerlingen aan de slag gegaan met het ontwerpen van een glijbaan. Elke leerling beschikt over een Chromebook. Tijdens de les hebben de leerlingen vooral gebruik gemaakt van GeoGebra. De vergelijkingen die hiervoor zijn gebruikt, zijn grotendeels niet opgeschreven en kunnen we niet terughalen. Een enkele groep heeft naast online uitproberen, wel iets op papier gezet.

**Groep 4** heeft eerst een parabool geplot in GeoGebra. Waarschijnlijk hebben ze voor $y = 0,1x^2$ gekozen om het kromme deel van de glijbaan voor hun gevoel zo krom te krijgen zodat het een goede glijbaan zou zijn. Daarna hebben ze er een lijn bij getekend. Daarbij hebben ze zowel het snijpunt van de lijn met de $y-as$ als de richtingscoefficiënt veranderd.



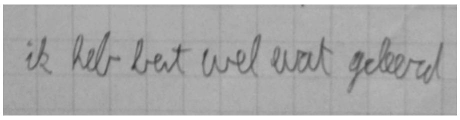

Figuur 10: Poster van groep 4, eerste glijbaanles.

**Groep 5** koos voor een hyperbool. Ze hebben met GeoGebra gewerkt, maar in dat programma is duidelijk te zien dat de lijn en kromme op twee plekken snijden, ook zonder inzoomen. Het lijkt er dus op dat de groep niet op zoek is geweest naar een lijn die slecht één snijpunt met de kromme zou opleveren.

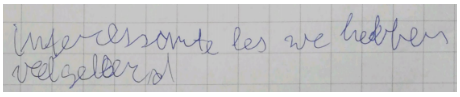



Figuur 11: Tekening van groep 5, eerste glijbaanles.

**2 leerlingen** lieten een boodschap achter op hun kladpapier. Hieronder de stukjes papier met de boodschap.




Figuur 12: Opmerking leerling, eerste glijbaanles.



Figuur 13: Opmerking leerling, eerste glijbaanles.

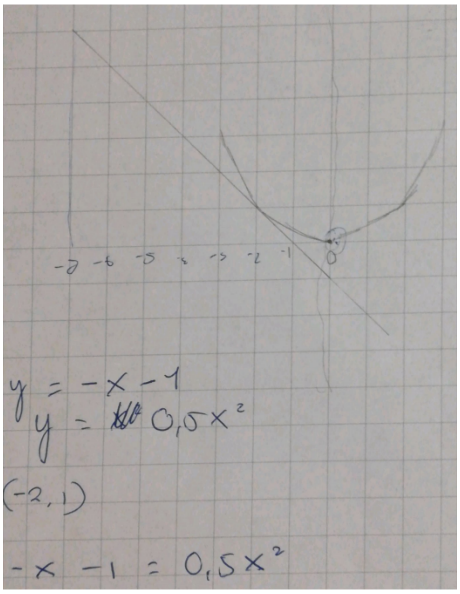
| ***Eerste glijbaanles*** **(Piroi, 2019).** | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ***Groep*** | ***Beschrijving van actie*** | ***Gevonden vergelijkingen*** | ***Mogelijke validatie*** | ***Mogelijke institutionalisatie*** |
| 1 | Geen berekeningen of schetsen | $y = 0,0006x^2$<br>$y = 0,5x - 100$<br>$y = 0,0002x^2$<br>$y = 0,5x - 312$ | Visueel, inzoomen op GeoGebra | grenslijn benadering |
| 2 | Geen berekeningen of schetsen | $y = -1 + 0.1x^2$<br>$y = x - 3.52$ | Visueel, inzoomen op GeoGebra | grenslijn benadering |
| 3 | Geen berekeningen of schetsen | $y = -\sqrt{-x} + 3.2$<br>$y = x + 3$ | Visueel, inzoomen op GeoGebra | grenslijn benadering |
| 4 | Geen berekeningen | $y = 0,1x^2$<br>$y = -2,5 + x$<br>$y = 0,1x^2$<br>$y = 1,09x - 3$ | Visueel, inzoomen op GeoGebra | grenslijn benadering |
| 5 | Geen berekeningen | $y = -21 + \frac{200}{x}$<br>$y = 8 - x$ | Visueel, inzoomen op GeoGebra | grenslijn benadering |
| 6 | Geen berekeningen | $y = x^2$<br>$y = 30x - 10$<br>$y = 3x^2$<br>$y = 10x - 8$<br>$y = 3x^2$<br>$y = 7x - 4$<br>$y = -30x$<br>$y = -10\sqrt{x}$<br>$y = -30x$<br>$y = -5\sqrt{x}$ | Visueel, inzoomen op GeoGebra | grenslijn benadering |
| 7 | Geen berekeningen | $y = 0.1x^2$<br>$y = -2.5 + x$ | Visueel, inzoomen op GeoGebra | grenslijn benadering |

# Tweede glijbaanles

- maandag 21-01-19 om 12.00 uur
- derde klas vwo
- gebruik van pen, potlood en papier

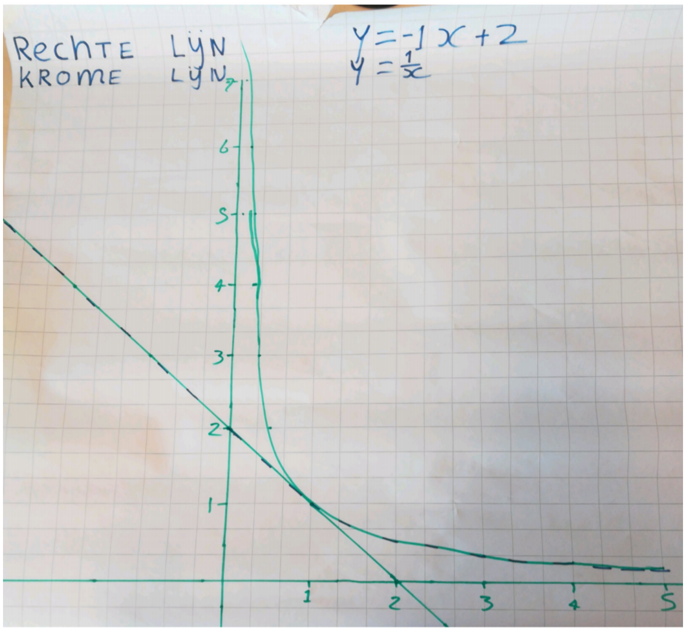
Docent: Femke Kaatee.
Observatoren: de docent, studiegenoot.
In deze les zijn 8 verschillende groepjes leerlingen aan de slag gegaan met het ontwerpen van een glijbaan.

**Groep 3** begint met een rechte lijn en plaatst daarnaast een grafiek van een parabool waarvan ze de vergelijking gokken. Dit klopt niet helemaal. Ze weten niet goed hoe ze de parabool horizontaal moeten verschuiven dus besluiten ze de rechte lijn te schuiven. Ze kiezen uiteindelijk $y = -x - 1$ voor het rechte stuk en $y = 0,5x^2$ voor het gekromde stuk. Ze stellen de vergelijkingen aan elkaar gelijk en hebben voor een aantal waarden van $x$ gekeken welke waarde van $y$ daarbij hoort. Dit is het laatste kladpapier van deze groep. Waarschijnlijk is op dit moment de actiefase gestopt.



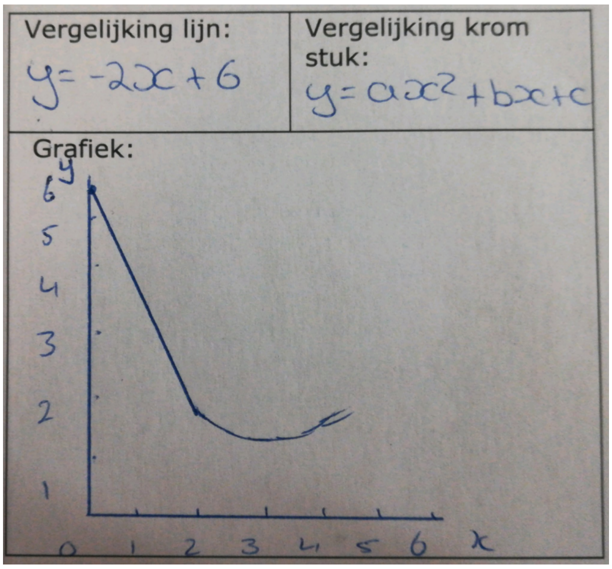

Figuur 14: Tekening van groep 3, tweede glijbaanles.

**Groep 5** begon met het tekenen van de grafiek van $y = \frac{1}{x}$ voor positieve waarden van $x$. Ze hadden een erg nauwkeurige tekening gemaakt waarin ze zagen dat $(1, 1)$ waarschijnlijk op een roosterpunt zo liggen. Dit hebben ze voor de zekerheid nagerekend door $x = 1$ in te vullen. Vervolgens hebben een lijn getekend die in het punt $(1, 1)$ leek te raken. Met behulp van de punten $(0, 2)$, $(1, 1)$ en $(2, 0)$ hebben ze de helling en het startgetal van hun rechte lijn bepaald.




Figuur 15: Poster van groep 5, tweede glijbaanles.

**Groep 7** begon met het tekenen van een lijn waarvan ze vonden dat hij steil genoeg zou zijn voor een glijbaan. Dit deden ze door gebruik te maken van de kennis die ze hebben van start- en hellingsgetal in de vergelijking $y = ax + b$. Tegen deze lijn aan hebben ze een parabool getekend. Om hierbij een vergelijking op te stellen, gaan ze op zoek naar de parameters in $y = ax^2 + bx + c$. Ze vullen de verschillende roosterpunten die de grafiek van de parabool kruist in, in een tabel. Vanuit daar een vergelijking vinden, lukt niet. In de tekening zien we dat de lijn te steil is (steiler dan de raaklijn zou moeten zijn in dat punt) voor de parabool die erbij is getekend.




Figuur 16: Tekening van groep 7, tweede glijbaanles.

| *Tweede glijbaanles* **(Piroi, 2019).** | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ***Groep*** | ***Beschrijving van actie*** | ***Gevonden vergelijkingen*** | ***Mogelijke validatie*** | ***Mogelijke institutionalisatie*** |
| 1 | Ze kiezen de lijn vast en proberen de vergelijking van de parabool zo aan te passen zodat de lijn en kromme glad op elkaar aansluiten. | $y = -2 - 0,5x^2$<br>$y = -x + 2$ | Visueel, inzoomen op GeoGebra | Lokaal lineaire benadering |
| 2 | In de eerste tekening hebben ze een parabool en een snijlijn. In de volgende tekening dezelfde lijn maar dit keer is het de raaklijn aan de parabool. | $y = x^2+0,125x+3$<br>$y = x - 1$ | Visueel, inzoomen op GeoGebra | Grenslijn benadering |
| 3 | Ze tekenen een lijn en proberen (visueel) een parabool te vinden zodat het snijpunt 'goed' is. Waarschijnlijk betekent dit dat ze op zoek zijn naar slechts één snijpunt. | $y = x^2 - 63$<br>$y = -x + 9$<br>$y = 0,5x^2$<br>$y = -x - 1$ | Algebrïsch | Grenslijn benadering |
| 4 | Ze schetsen een parabool, noteren geen vergelijking, en een lijn. Ze variëren het snijpunt van de lijn met de y-as en houden de helling gelijk. | $y = -x + 7$, geen vergelijking kromme | - | Lokaal Lineaire benadering |
| 5 | Ze tekenen een hyperbool, erg precies. Ze zien visueel wat de raaklijn moet zijn aan de kromme. Met het snijpunt van de lijn en kromme bepalen ze de vergelijking van de lijn. | $y = \frac{1}{x}$<br>$y = -x + 2$ | Algebrïsch | Grenslijn benadering / Overgangspunten benadering |
| 6 | niks | niks | - | - |
| 7 | Ze tekenen een parabool, zonder vergelijking, en een lijn. Ze fixeren het snijpunt en veranderen de helling van de lijn. De lijn is uiteindelijk te steil. | $y = ax^2 + bx + c$<br>$y = -2x + 6$ | - | Lokaal lineaire benadering |
| 8 | Niet duidelijk hoe er is gewerkt. Tekening komt niet overeen met de vergelijkingen. Geen berekeningen. | $y = x^2 + 5x$<br>$y = 0,47x - 2,59$ | Visueel, inzoomen op GeoGebra | - |

## Vragenlijst

In de eerstvolgende les na de glijbaanles, hebben we de leerlingen gevraagd een aantal vragen te beantwoorden over de experimentele les. De formulieren van de twee klassen zijn bij het innemen door elkaar geraakt. We kunnen dus enkel iets zeggen over de twee klassen als geheel. Hieronder de gestelde vragen en een aantal bijbehorende antwoorden.

### Welke strategieën heeft jouw groepje tijdens het zelfstandig werken gebruikt om de glijbaan te ontwerpen; om tot vergelijkingen voor het rechte en kromme stuk te komen?

1. Een deel van de leerlingen heeft eerst de kromme getekend of de vergelijking ervan bepaald.
    - "eerst de formule van een parabool bedacht die steil genoeg was en daarna een rechte lijn die precies op de goede plek van de parabool uitkwam"
    - "Eerst bepaalden we hoe krom de kromme lijn zou gaan door ongeveer in te vullen wat we dachten nodig te hebben. Hiervoor gebruikten we een kwadratische formule. Daarna probeerden we de steilheid te bepalen en hem de boog te laten raken."
    - "wij hebben eerst een parabool gekozen en dan de bijpassende lijn met een liniaal getekend en de vergelijking uitgezocht"
2. Een ander deel van de leerlingen heeft eerst de lijn getekend of de vergelijking ervan bepaald.
    - "eerst de rechte lijn maken en daarna verschillende kwadratische formules toevoegen tot het paste."
    - "We hebben de lijn getekend in een grafiek en zo hebben we geprobeerd het startgetal en hellingsgetal van beide formules uit te rekenen."
    - "We hebben een vergelijking opgesteld voor het rechte stuk (makkelijk) en het kromme stuk was moeilijk."
3. Nog enkele andere reacties van de leerlingen, die verschillen van de voorgaande:
    - "Op gevoel tekenen en daarbij een vergelijking maken."
    - "We kwamen niet op een antwoord maar we wisten wel dat we een parabool moesten gebruiken voor het kromme stuk."
    - "Een lijn gemaakt met een boog en daarna de vergelijking ervan gezocht. Het is niet gelukt."

Naast bovenstaande antwoorden kwam ik nog twee opmerkelijke reacties tegen die onderling vergelijkbaar zijn. Ik zal er hieronder één toevoegen.

- "We wouden een wortelfunctie doen maar onze glijbaan werd niet eens beoordeeld!!!"

Blijkbaar gingen de leerlingen ervan uit dat hun oplossing beoordeeld zou worden. Ik denk dat ze er in dit geval van uitgingen dat de docent ze zou vertellen of hun oplossing voor het glijbaanprobleem juist was. Dit laat wat mij betreft zien dat leerlingen veelal gewend zijn om van hun docent te horen wanneer iets goed dan wel fout is. Deze les is juist ontwikkeld om de leerlingen zelf te laten ontdekken en het begrip differentiëren een plek te geven vanuit hun eigen onderzoek. Daarnaast lijken de leerlingen niet goed naar de opdracht te hebben geluisterd. Ook het opdrachtformulier lijkt niet goed te zijn bekeken. Deze leerlingen denken met één vergelijking een oplossing te hebben gevonden terwijl de opdracht om twee vergelijkingen vraagt.

### Welke manieren zijn aan de orde gekomen om te bepalen of het rechte en kromme stuk goed aansluiten?

1. Een groot deel van de leerlingen benoemt dat dit kan worden bepaald door in te zoomen of door de snijpunten van de vergelijkingen uit te rekenen.
   - “De formules oplossen en kijken of ze maar één snijpunt hadden.”
   - “heel goed inzoomen op GeoGebra”
   - “tekenen en berekenen”
2. Voor een aantal groepjes duurde de actiefase niet lang genoeg. Hierdoor hebben ze onder andere niet de tijd gehad om hun eigen oplossingen zelfstandig te controleren. Dit zien we ook terug in een aantal reacties.
   - “eerst hebben we gekeken wat voor soort formules we nodig hadden en toen zijn we gaan tekenen, helaas was toen de tijd om”
   - “op dit punt waren wij nog niet aangekomen”
3. Daarnaast waren er nog een aantal leerlingen die geen manier hebben gevonden om te bepalen of het rechte en kromme stuk goed aansloten. Het is niet altijd duidelijk waar dit door komt. Ook hier zou het kunnen dat de tijd een rol heeft gespeeld.
   - “we kwamen hier niet echt uit”
   - “geen idee snapte ik niet”
   - “dit was ons niet gelukt”

### De docent(e) besprak aan het einde van de les hoe de wiskunde die je gebruikt hebt die les te maken had met de stof voor de wiskundelessen (in de toekomst). Wat kun je je daarvan herinneren?

1. Een groot deel van de leerlingen is het vooral bijgebleven dat deze les wiskundestof bevat die pas in de vierde klas verder wordt behandeld.
   - “Dat we die wiskunde nog niet hebben gehad, maar pas in de 4e krijgen.”
   - “dat we een deel al gehad hadden en een deel nog niet”
   - “dat het wiskunde B is en dat ga ik niet doen”
2. Een ander deel gaf aan zich niks meer te herinneren of liet deze vraag onbeantwoord.
   - “Eigenlijk niks :(”
   - “vrij weinig tot niks”
3. Een klein aantal heeft min of meer onthouden dat de les een introductie was tot differentiëren. Er zijn een paar reacties die vervolgens ook iets zeggen over wat dat differentiëren dan ongeveer is.
   - “Iets met difrencieren ofzo”
   - “Dat er een manier is om uit te rekenen hoe steil de grafiek moet zijn en waar het exacte snijpunt dan ligt.”
   - “Je gebruikt het om de precieze aansluiting te vinden van 2 lijnen.”

## Bevindingen

Hieronder bespreek ik mijn bevindingen met betrekking tot de gegeven lessen en de problemen die leerlingen en docent daarin kunnen tegenkomen.

- Welke strategieën gebruiken de leerlingen?

De strategieën hebben we al teruggezien in de vorige paragrafen, voornamelijk in paragraaf 'Vragenlijst'. Zo waren er bijvoorbeeld groepjes die eerst met het rechte gedeelte begonnen en andere groepjes die juist eerst met het gekromde gedeelte begonnen.

De eerste groep maakte gebruik van GeoGebra. Op deze manier konden de leerlingen snel veel verschillende vergelijkingen uitproberen. Wat we ook merken, is dat de groep met GeoGebra veel meer decimale getallen in hun vergelijkingen hebben staan. Op deze manier lijken de oplossingen op het scherm van de computer vaak redelijk te kloppen. Een exacte oplossing vinden, lijkt op deze manier wel lastiger. Wanneer GeoGebra wordt gebruikt, kan het ook gebeuren dat leerlingen de knop vinden waarmee direct de raaklijn aan de grafiek wordt getekend. Dit had het ontwerpen van een glijbaan waarschijnlijk vereenvoudigd, maar dit is in mijn lessen niet gebeurd.

In mijn lessen heeft er geen enkele groep leerlingen aan de glijbaan gewerkt met behulp van snijlijnen door twee punten op een kromme. Geen enkele groep koos een punt op de kromme en liet een ander punt daar steeds dichterbij komen door dat punt over de kromme richting het eerste te schuiven. Die 'standaard' manier waarop de afgeleide momenteel nog veel wordt geïntroduceerd, sluit dus in ieder geval niet aan bij de leerlingen die ik heb lesgegeven. Het zou kunnen dat ze niet voor deze methode kiezen omdat ze dan in eerste instantie met een 'foute' oplossing beginnen. Kiezen we eerst een lijn die de kromme op twee punten snijdt, dan weten we al dat het geen goede oplossing is.

De lessen die ik gaf, waren aan de derde klas van het vwo. Dit was te vroeg. De leerlingen hebben nog te weinig kennis van verschillende vergelijkingen en bijbehorende grafieken. In de tweede les stelden we de vergelijking van een hyperbool gelijk aan die van een lijn. Bij het oplossen bleek de $x$ onder de deelstreep een probleem. Veel leerlingen hadden geen idee hoe dit op te lossen. De leerlingen hebben op dit moment eigenlijk nog te weinig kennis om echt goed zelfstandig met dit glijbaanprobleem aan de slag te gaan.

- Andere bevindingen

Tijdens de les was ik zowel docent als observator van een groepje. Dit was erg lastig, zo niet onmogelijk. Als docent wil je tijdens de actiefase graag een overzicht krijgen van de werkwijze van de verschillende groepjes. Daarnaast ook nog bij één groepje observaties opschrijven, lukt dan niet. Ook vond ik het als docent lastig een een plek in te nemen binnen de actiefase. Ik wilde de leerlingen zelf laten onderzoeken. Maar als een groepje inactief blijft, wanneer grijp je dan in, en hoe doe je dat dan? Dit is niet makkelijk en heeft zeker meer oefening nodig, ook voor ervaren docenten. De docent is vaak gewend om het voortouw te nemen in de lessen. Eerst de uitleg van de lesstof en daarna kunnen de leerlingen aan de slag met de opdrachten en wat er net is uitgelegd. Dat is in de glijbaanles anders. Dit is dus iets om goed over na te denken voor je de les gaat geven.

Zoals ik in de vorige paragraaf al aangaf, hebben leerlingen ook vaak een bepaalde houding. Ze verwachten dat de docent aangeeft wat goed is en wat fout. De docent is er om de stappenplannen aan te leveren; de leerlingen voeren dat uit. In de glijbaanles kan het gebrek hieraan weerstand oproepen bij de leerlingen. Steven Wepster (persoonlijke communicatie, 7 juni 2019) vertelde mij dat studenten die op de middelbare school goed waren in wiskunde, vaak op de universiteit voor de eerste keer vastlopen tijdens een opgave. Hij probeert er in zijn colleges nu voor te zorgen dat de studenten leren omgaan met vastlopen, en verder te kijken. Ik denk dat dit al op de middelbare school zou moeten gebeuren. De glijbaanles is daar uitermate geschikt voor zijn maar om echt verandering te weeg te brengen, moeten lessen veel vaker op deze manier worden ingericht.

De lessen duurden elk 50 minuten. Binnen deze tijd moest de les worden gegeven maar viel daarnaast ook de tijd voor het binnenkomen en gaan klaarzitten van de leerlingen. 50 minuten is veel te kort gebleken. Vooral in de klas zonder GeoGebra waren de leerlingen in de actiefase net een beetje opgestart toen die fase alweer werd beëindigd. Daarnaast zijn de validatie- en institutionaliseringsfase door tijdgebrek niet goed uit de verf gekomen. In de validatiefase hebben we van één oplossing de snijpunten berekend maar hebben we daarna weinig kunnen bespreken. In de institutionaliseringsfase is niet veel meer aan bod gekomen dan aangeven dat het onderwerp toewerkt naar de afgeleide, die in het volgende schooljaar zal worden behandeld. Een langere lesduur is dus gewenst. Daarnaast zou de glijbaanles in twee delen gegeven kunnen worden. De eerste les stopt dan na de actiefase. De docent kan de aantekeningen en oplossingen van de leerlingen meenemen. Op basis daarvan kan hij bepalen welke methode hij zal gebruiken in de institutionaliseringsfase, die in de tweede les zal plaatsvinden.

- Is het principe van herontdekking, in dit geval van de afgeleide, bruikbaar en geschikt voor het middelbaar onderwijs?

Met dit onderzoek kan ik zeggen dat de glijbaanles niet geschikt is voor de derde klas van het vwo. Ze hebben nog te weinig kennis en zijn te onzeker. Dat maakt het principe van de herontdekking voor het begrip de afgeleide ongeschikt in deze klas. Piroi (2019) geeft een uitgebreidere analyse van de resultaten uit verschillende Nederlandse klassen waarin een succesvoller resultaat is behaald. Hierin worden bijvoorbeeld klassen besproken die een jaar langer wiskunde-ervaring hebben dan de klassen die ik heb lesgegeven. Daarnaast is er een artikel in de maak dat verder ingaat op de mogelijkheden en resultaten. Houd daarvoor MERIA in de gaten.

# Bibliografie


Bos, R. (2019). Onconventioneel Differentiëren. *Euclides, 94*(4), 26-28.

Bos, R., Doorman, M., Kafuta, C., Praprotnik, S., Antoliš, S., & Bašić, M. (2017). *Supporting the reinvention of the slope of a curve in a point.* Utrecht: Freudenthal Instituut Universiteit Utrecht.

Bos, R., Doorman, M., Kafuta, C., Praprotnik, S., Antoliš, S., & Bašić, M. (2017).*Module Slide, Introduction to derivative.* MERIA.

Brousseau, G. (2002). *Theory of Didactical Situations in Mathematics.* (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield, Eds.), *Mathematics Education Library* (19th ed., Vol. 19). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47211-2

Freudenthal, H. (2002). *Revisiting mathematics education, China Lectures.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47202-3

Gravemeijer, K., Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: a calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics, 39*(1), 111-129. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1023/A:1003749919816

Gormally, C., Brickman, P., Hallar, B., Armstrong, N. (2009). Effects of Inquiry-based Learning on Students? Science Literacy Skills and Confidence *International Journal for the Scholarship of Teaching and Learning, 3*(2), Article 16. https://doi.org/10.20429/ijsotl.2009.030216

Kindt, M. (2015). *Een Variabele Constante.* Amsterdam: Epsilon Uitgaven.

Marsden, J., & Weinstein, A. (1981). *Calculus unlimited.* Menlo Park, California: The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc.

Michael Range, R. (2011). Where Are Limits Needed in Calculus?. *The American Mathematical Monthly, 118*(5), 404-417. https://doi.org/10.4169/amer.math.monthly.118.05.404

Michael Range, R. (2018). Using high school algebra for a natural approach to derivatives and continuity. *The Mathematical Gazette, 102*(555), 435-446. https://doi.org/10.1017/mag.2018.110

MERIA. (z.d.). *What is Meria?.* Geraadpleegd op 15 mei 2019, van https://meria-project.eu/about-meria

Piroi, M. (2019). *Emerging models for the slope of a curve: a reinvention activity for upper secondary school.* Bologna: Auteur.

Tall, D. (1991). *Advanced Mathematical Thinking.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions: A model of goal and theory description in mathematics education: The Wiskobas Project.* Dordrecht: Reidel.

Van den Ban, E.P. (2013). *Inleiding Analyse, Dictaat.* Utrecht: Mathematisch Instituut Universiteit Utrecht.

Winsløw, C., Bos, R., Doorman, M., Jessen, B. (2017). *Meria practical guide to inquiry based mathematics teaching.* Geraadpleegd op 15 mei 2019, van https://meria-project.eu/sites/default/files/2017-10/MERIA%20Practical%20Guide%20to%20IBMT.pdf