Spannender en eerlijker maken van sport

De wiskunde erachter

Mark Sterkenburg(5648831)

Bachelorscriptie

Begeleider: Dr. K. Dajani

9 januari 2020

Universiteit Utrecht

Inhoudsopgave

1 Introductie

Veel sporten zijn niet eerlijk. Dit komt doordat sommige regels van deze sporten ervoor zorgen dat spelers of teams die even goed zijn een ongelijke kans hebben om te winnen. Een heel belangrijk voorbeeld van zo'n regel komt voor bij de penaltyserie in het voetbal. In zo'n penaltyserie neemt elk team 5 penalty's en dat gebeurt in 5 rondes. Elke ronde nemen beide teams achtereenvolgens 1 penalty waarbij steeds hetzelfde team als eerste de penalty neemt. Het team dat steeds als eerste de penalty mag nemen wordt bepaald met het opwerpen van een muntje. Terwijl dit heel belangrijk is, want degene die steeds als eerste mag heeft een groot (psychologisch) voordeel. Dat zoiets belangrijks wordt bepaald met behulp van een kanselement is niet bepaald eerlijk. Bij meerdere sporten is er sprake van een kanselement in de regels wat dus zorgt voor een bepaalde oneerlijkheid. In bepaalde servicesporten(tafeltennis, volleybal, etc.) is er ook sprake van bepaalde oneerlijkheid in de volgorde van serveren. In dit document gaan we de oude regels en enkele nieuwe regels zoals de zogenoemde catch-up regel analyseren om te kijken of we bepaalde sporten eerlijker en daarmee ook spannender kunnen maken. Dit document is gebaseerd op twee artikelen, namelijk die van Brams en Ismail [1] en die van Brams, Ismail, Kilgour en Stromquist [2].

In veel sporten wordt gebruik gemaakt van handicaps om het spel eerlijker te maken. Handicaps zorgen ervoor dat zwakkere spelers een voordeel krijgen ten opzichte van sterkere spelers wat ervoor zorgt dat de winstkansen van de spelers dichter bij elkaar komen te liggen. Bijvoorbeeld bij de sport golf: als speler A een handicap heeft van 2 slagen en speler B een handicap van 5 slagen, dan kan speler B, met een score van 81, winnen van speler A, met een score van 80(degene met laagste score wint). Dit komt doordat:

$$81 - 5 = 76 < 80 - 2 = 78 \tag{1}$$

Dus de handicap zorgt ervoor dat B winnaar is in plaats van verliezer. Handicaps komen voor bij verschillende sporten in verschillende hoedanigheden. Bij paardenracen worden er bijvoorbeeld extra gewichten aan paarden gehangen. Het snelste paard krijgt dan het meeste gewicht aan zich gehangen en het sloomste paard krijgt het minste gewicht aan zich gehangen.

Er zijn echter ook sporten waar handicaps niet te gebruiken zijn of niet de voorkeur hebben. Bij deze sporten kan er tijdens een wedstrijd voordelen gegeven worden aan bepaalde spelers. Dit kan bijvoorbeeld met behulp van de catch-up regel. Deze regel houdt rekening met wat er gebeurt is in de vorige game/ronde/wedstrijd en geeft dan de spelers of teams die het de vorige game/ronde/wedstrijd slechter hebben gedaan een mogelijkheid om weer dichterbij te komen bij de betere teams/spelers. De regel die zegt dat een team of speler met twee punten verschil moet winnen zorgt ook voor een grotere eerlijkheid, omdat het uitsluit dat een team of spelers slechts met 1 punt verschil wint en daardoor de rol die kans speelt verkleint.

Dit document is als volgt ingericht: In hoofdstuk 2 zal er een uitleg worden gegeven over hoe de penaltyserie bij het voetbal nu in zijn werk gaat en welke regels daarbij horen. In hoofdstuk 3 zullen er verschillende regels besproken worden om deze serie eerlijker te maken. Hieronder vallen bijvoorbeeld de catch-up regel en ook de behind first, alternating order regel. In hoofdstuk 4 zullen we de wiskunde hierachter bespreken en zullen we dus gaan kijken naar de winstkansen van beide teams bij het gebruik van de verschillende regels. Ook zullen we in dit hoofdstuk de verlenging van deze penaltyserie grondig behandelen en ook kijken naar de verwachte lengte van deze verlenging van de penaltyserie bij gebruik van de verschillende regels. In hoofdstuk 5 zullen we de servicesporten introduceren. We leggen uit hoe verschillende van deze sporten nu in zijn werk gaan en de regels die daarbij horen. In hoofdstuk 6 zullen we een aantal nieuwe regels introduceren die gebruikt kunnen worden om bepaalde servicesporten eerlijker te maken(catch-up, behind first, alternating order, etc.). In hoofdstuk 7 wordt de wiskunde hierachter weer besproken op een soortgelijke manier als we in hoofdstuk 4 hebben gedaan bij de penaltyserie in het voetbal. In hoofdstuk 8 zullen er een aantal andere manieren om de servicesporten eerlijker te maken de revue passeren. In hoofdstuk 9 zullen we alle behaalde resultaten nog even samenvatten en uiteindelijk een conclusie trekken.

2 Uitleg Penaltyserie

Voetbal is een sport waarbij 2 teams van 11 spelers tegen elkaar spelen. Een voetbalwedstrijd duurt 2x 45 minuten met tussendoor een rustpauze van 15 minuten. Het kan voorkomen dat een wedstrijd nog steeds gelijk staat na 90 minuten. Als er gespeeld wordt in een knockout toernooi, dan kan de wedstrijd niet gestopt worden met een gelijkspel. Er is namelijk dan nog geen winnaar bekend die doorgaat naar de volgende ronde. Daarom wordt er bij een gelijke stand na 90 minuten vaak een verlenging gespeeld van 2x 15 minuten. Als het na het spelen van deze verlenging nog steeds gelijk staat, dan vindt er een penaltyserie plaats om de winnaar te bepalen. Het komt soms ook voor dat er geen verlenging gespeeld wordt, maar dat er gelijk een penaltyserie plaatsvindt om de winnaar te bepalen.

In een penaltyserie worden er door beide teams eerst 5 penalty's genomen. Een penalty is een vrij schot op doel vanaf 11 meter. De serie gaat in 5 rondes waarbij in elke ronde beide teams achtereenvolgens 1 penalty nemen. Elke keer wordt zo'n penalty genomen door een andere speler uit het team dus het kan niet voorkomen dat 1 speler meerdere penalty's neemt(tenzij het zo lang duurt voordat er een beslissing is gevallen waardoor alle spelers al een penalty hebben genomen en dus het weer van vooraf aan begint). Elke ronde neemt hetzelfde team als eerste de penalty. Wie als eerste mag beginnen elke ronde, wordt bepaald door het opgooien van een muntje('toss'). Dit is de standaard regel voor penaltyseries. Het team dat de 'toss' wint mag kiezen wie er begint en zal dus vrijwel altijd kiezen om zelf te beginnen aan de penaltyserie. Dit geeft namelijk een voordeel. Dit komt omdat er druk komt te liggen op het team dat als tweede trapt vooral als het het team dat als eerste trapt de penalty scoort.

De winnaar van de serie is het team dat na 5 rondes de meeste penalty's heeft gescoord. Als het na 5 rondes nog steeds gelijk is, dan wordt de penaltyserie verlengd. Dit gebeurt telkens met 1 ronde totdat er een winnaar is. Een winnaar is er als een van beide teams hun penalty mist. Als beide teams hun penalty scoren of beide teams hun penalty missen, dan wordt de penaltyserie weer verlengd met een nieuwe ronde.

Het kan ook voorkomen dat een penaltyserie al eerder stopt dan na 5 rondes. Dit gebeurt als een van beide teams al zo'n grote voorsprong heeft genomen zodat het andere team dit niet meer in kan halen of zelfs gelijk komen.

De reden dat er 5 rondes zijn in een penaltyserie, in plaats van dat er gelijk wordt overgegaan naar de verlenging van de penaltyserie met elke keer 1 ronde, is dat dit de kans vergroot dat het betere team wint. Als er gelijk over zou gegaan zijn naar de verlenging van de penaltyserie met elke keer 1 ronde zou dit de factor geluk vergroten. Dit komt omdat er slechts 1 ronde geschoten wordt. Hoe meer rondes er zijn des te kleiner wordt de factor geluk in het geheel.

Wanneer we spreken over het betere team, hebben we het echter over het team als geheel. Maar in een penaltyserie is die kwaliteit minder belangrijk, omdat het gaat om verschillende 2 mans wedstrijdjes die steeds gestreden worden tussen speler en keeper. Hier gaat het dus om de kwaliteit om een penalty te scoren of een penalty tegen te houden en niet om de kwaliteit van een team als geheel. Het kan namelijk voorkomen dat het betere team mindere penaltynemers in de ploeg heeft dan het mindere team. Of dat het betere team een keeper heeft die minder goed is in het tegenhouden van penalty's dan de keeper van het mindere team. Dat is de reden dat penaltyseries niet zo populair zijn in het voetbal.

Een gedeeltelijke oplossing van het probleem zou zijn om elke ronde opnieuw een muntje op te gooien zodat elke ronde opnieuw wordt bepaald welk team als eerste de penalty mag nemen. Echter is dit nog steeds niet zo'n goede oplossing, omdat het goed mogelijk zou zijn dat een team 2 of 3 'tosses' op rij wint en dus alsnog 2 of 3 rondes achter elkaar als eerste mag schieten. Daarom gaan wij in het volgende hoofdstuk een aantal andere regels bespreken, waaronder de catch-up regel, die dit zouden kunnen voorkomen.

3 Regels en hun betrekking tot de penaltyserie

In dit hoofdstuk gaan we een aantal regels bespreken die sport en dus ook de penaltyserie in het voetbal eerlijker zouden kunnen maken. We beginnen eerst met het bespreken van de zogenoemde catch-up regel. We zullen deze eerst algemeen formuleren voor alle sporten met meerdere rondes. Daarna gaan we deze regel toepassen op de penaltyserie in het voetbal.

3.1 Catch-up regel

We gaan er dus vanuit dat er meerdere rondes zijn en in elke ronde is er een bevoordeeld team of speler en een benadeeld team of speler. We noemen een gewonnen ronde door een team of speler een W en een verloren ronde een L. Een ronde zonder winnaar of verliezer noemen we een gelijkspel(G). Nu gaat de regel als volgt in zijn werk:

1. Er wordt eerst een muntje opgeworpen om te bepalen welk team of welke speler in de eerste ronde bevoordeeld wordt en welk team of speler benadeeld.

2. In elke ronde waar er een team of speler is die een W wordt en de ander een L geldt dat de speler of het team dat een L was de volgende ronde bevoordeeld wordt en degene die de W was benadeeld wordt in de volgende ronde.

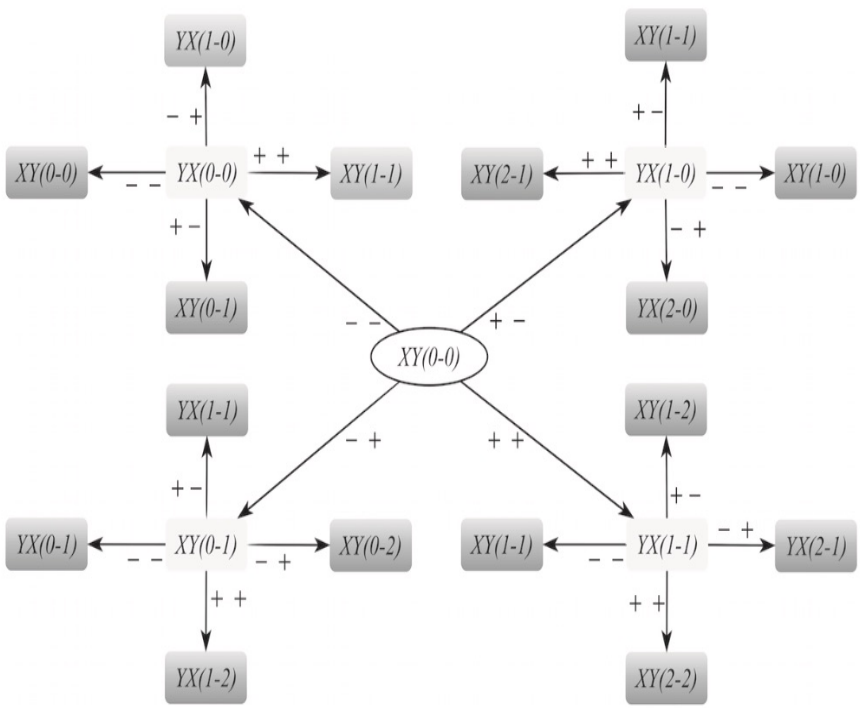
3. Een ronde waarin beide teams of spelers een W zijn of beiden een L zijn, is er sprake van een gelijkspel(G). Hiervoor geldt dat de volgende ronde het team of de speler die bevoordeeld werd nu benadeeld wordt en andersom.

Laten we dit nu vertalen naar de penaltyserie in het voetbal. In elke ronde van een penaltyserie in het voetbal nemen beide teams een penalty. Er zijn in totaal 5 rondes tenzij het dan nog gelijk staat, want dan gaan ze nog door totdat er een winnaar is. Voorafgaand aan de eerste ronde wordt er een muntje opgegooid om te bepalen welk team de eerste ronde als eerste mag schieten. Het team dat als eerste mag schieten heeft een voordeel ten opzichte van het team dat als tweede de penalty neemt. Stel dat het team dat in de eerste ronde als eerste de penalty neemt deze scoort en het team dat als tweede de penalty neemt deze mist. Dan is het team dat als eerste neemt dus een W in deze ronde en het team dat als tweede neemt een L in deze ronde. Hieruit volgt volgens punt 2 hierboven dat de volgende ronde de volgorde van nemen omdraait. Het team dat L was in ronde 1 mag in ronde 2 nu als eerste de penalty nemen. Als in een ronde beide teams de penalty scoren of beide teams de penalty missen, dan is deze ronde een gelijkspel(G). Volgens punt 3 hierboven neemt het team dat in ronde G als eerste de penalty nam in de volgende ronde als tweede de penalty.

Laten we dit nu iets algemener formuleren. We stellen nu dat de teams die tegen elkaar strijden in de penaltyserie team A en team B zijn. We stellen dat team A in de eerste ronde als eerste de penalty neemt en dus een voordeel heeft in deze ronde ten opzichte van team B. Als de eerste ronde een gelijkspel(G) wordt, dan mag team B in de volgende ronde als eerste de penalty nemen en is dus bevoordeeld in deze ronde ten opzichte van team A. Team B wordt ook bevoordeeld in de volgende ronde als team A ronde 1 wint. Alleen als team A ronde 1 verliest, dan wordt team A ook bevoordeeld in ronde 2.

We kunnen dit het beste illustreren in een penaltyserie met maar 2 rondes. In het volgende figuur zijn alle mogelijke situaties te zien in zo'n penaltyserie. De betekenis van XY is dat X als eerste de penalty neemt en Y als tweede en dus betekent YX dat Y als eerste de penalty neemt en X als tweede. De getallen tussen de haakjes geven de score aan van beide teams. De mogelijke situaties in de eerste ronde zijn wit en die van de tweede ronde zijn grijs. De penaltyserie begint in het midden van het figuur met een score van 0-0. In ronde 1 neemt X als eerste de penalty dus XY in het midden van het figuur. Er zijn nu 4 mogelijkheden, namelijk X scoort en Y niet($+-$), X scoort niet en Y scoort($-+$), X en Y scoren allebei($++$) en X en Y scoren allebei niet($--$). Als beide teams in beide rondes scoren, dan eindigt de serie bij XY(2-2). Als beide teams missen in beide rondes dan eindigt de serie bij XY(0-0).

Figuur 1: Mogelijke situaties in een penaltyserie met twee rondes



Bron: [1]

3.2 Behind first, Alternating order regel

Nu gaan we een andere regel bespreken die op zijn manier ook voor meer eerlijkheid zou kunnen zorgen in de sportwereld en dus ook bij de penaltyserie in het voetbal. Deze regel heet de behind first, alternating order regel. Deze regel houdt rekening met wat er plaats heeft gevonden in alle voorgaande rondes. Terwijl de catch-up regel alleen rekening houdt met wat er is gebeurd in de ronde die net heeft plaatsgevonden. De behind first, alternating order regel heeft deze naam gekregen vanwege hoe deze regel in zijn werk gaat. Het team of de speler die achter staat in de score wordt bevoordeeld in de volgende ronde. Dus in de penaltyserie mag dit team dan als eerste de penalty nemen. Als de score gelijk is, wordt het team dat in de vorige ronde bevoordeeld werd in de volgende ronde juist benadeeld. Dus in de penaltyserie draait de volgorde van penalty nemen nu dus om ten opzichte van de vorige ronde.

We zullen nu het verschil tussen beide regels uitlichten met een voorbeeld. Stel dat X voorstaat met 1 punt. Als we nu gebruik zouden maken van de behind first, alternating order regel, dan zou Y de volgende ronde bevoordeeld worden vanwege zijn achterstand op X. Maar als we gebruik zouden maken van de catch-up regel dan zou X ook in de volgende ronde bevoordeeld kunnen worden. Dit kan op de volgende manier: stel dat X twee punten voorstond op Y en Y verkleint deze achterstand tot 1 punt doordat X mist en Y scoort, dan wordt X bevoordeeld in de volgende ronde volgens de catch-up regel. Maar volgens de behind first, alternating order regel wordt Y bevoordeeld in de volgende ronde, omdat Y nog steeds achterstaat op X. Dus de catch-up regel kan een speler of team die voorstaat een voordeel geven ten opzichte van de ander terwijl de behind first, alternating order altijd de speler die achterstaat een voordeel geeft ten opzichte van de ander.

Wij gaan nu alleen uit van het voordeel van als eerste de penalty nemen, maar er zijn natuurlijk ook andere factoren die een rol spelen bij het scoren van een penalty. Namelijk de plaatsing van een penalty. Een penalty die in de hoek van de goal wordt geschoten is waarschijnlijk lastiger tegen te houden voor de keeper dan een penalty die dicht bij het midden van de goal wordt geschoten. Als we er natuurlijk vanuit gaan dat de keeper niet een hoek kiest waar hij naartoe gaat duiken. Wij gaan er vanuit dat elke penalty die genomen wordt optimaal geplaatst is zodat alleen het voordeel van als eerste schieten overblijft. In het volgende hoofdstuk zullen we de wiskunde van de regels onder de loep nemen en zo kijken of er echt wezenlijke verschillen zijn in de voordelen die de verschillende regels geven aan de spelers of teams.

4 Wiskunde achter de penaltyserie

In dit hoofdstuk zullen de wiskunde achter de penaltyserie bespreken. We gaan drie regels analyseren met behulp van kansberekening, namelijk de standaard regel die nu gebruikt wordt bij een penaltyserie en de catch-up regel en de behind first, alternating order regel. We zullen de winstkansen gaan berekenen van beide teams bij het gebruik van de verschillende regels en ook de kans op een gelijkspel. Daarna zullen we ook nog bekijken wat er gebeurt met de winstkansen als de penaltyserie na 5 rondes nog niet afgelopen is. We starten met het analyseren van de nu gebruikte regel ofwel de standaard regel van de penaltyserie.

4.1 Standaard Regel

De standaard regel van de penaltyserie is al hierboven besproken. Voor de penaltyserie begint wordt er een muntje opgegooid en daarmee wordt bepaald welk team als eerste mag beginnen aan de serie en dit team neemt dan ook elke ronde van de penaltyserie als eerste de penalty. We gaan nu deze regel analyseren met behulp van kansberekening.

We stellen nu dat $p_i^A \in [0,1]$ de kans is dat een team A de penalty scoort in ronde i als dit team als eerste de penalty neemt in deze ronde. We stellen ook dat $q_i^A \in [0,1]$ de kans is dat een team A de penalty scoort in ronde i als dit team als tweede de penalty neemt in deze ronde. We gaan er dus vanuit dat de penaltynemers van team X en team Y allemaal even goed zijn in het nemen van penalty's. Dus p en q hangen alleen af van of team X of team Y als eerste of als tweede de penalty neemt. We stellen nu ook dat $P^r(X)$ de kans is dat team X de penaltyserie van r rondes wint en dus is $P^r(Y)$ de kans dat team Y de penaltyserie van r rondes wint. Hieruit volgt dat $P^r(G)$ de kans is dat de penaltyserie van r rondes gelijk eindigt.

We stellen nu dat team X de 'toss' heeft gewonnen en dus elke ronde van de penaltyserie als eerste de penalty mag nemen. We nemen nu $r = 2$ dus het gaat hier om een penaltyserie met 2 rondes. Hieruit volgt dat er 3 mogelijkheden zijn om te winnen voor team X als deze penaltyserie altijd stopt na 2 rondes en niet doorgaat bij een gelijkspel na 2 rondes. Team X kan winnen met 2-0, met 2-1 of met 1-0. We stellen nu dat 2-0 mogelijkheid 1 is, 2-0 mogelijkheid 2 en 1-0 mogelijkheid 3.

Hieruit volgt dat:

$$P_1^2(X) = p_1^X(1-q_1^Y)p_2^X(1-q_2^Y) \tag{2}$$
$$P_2^2(X) = p_1^X(1-q_1^Y)p_2^X q_2^Y + p_1^X q_1^Y p_2^X(1-q_2^Y) \tag{3}$$
$$P_3^2(X) = p_1^X(1-q_1^Y)(1-p_2^X)(1-q_2^Y) + (1-p_1^X)(1-q_1^Y)p_2^X(1-q_2^Y) \tag{4}$$

Hieruit volgt dat de kans dat team X de penaltyserie van 2 rondes wint gelijk is aan:

$$\begin{aligned} P^2(X) = P_1^2(X) + P_2^2(X) + P_3^2(X) &= (p_1^X(1-q_1^Y)p_2^X(1-q_2^Y)) \\ &+ (p_1^X(1-q_1^Y)p_2^X q_2^Y + p_1^X q_1^Y p_2^X(1-q_2^Y)) \\ &+ (p_1^X(1-q_1^Y)(1-p_2^X)(1-q_2^Y) + (1-p_1^X)(1-q_1^Y)p_2^X(1-q_2^Y)) \end{aligned} \tag{5}$$

Hieruit volgt dus ook de kans dat team Y de penaltyserie van 2 rondes wint door het veranderen van p_1^X in q_1^Y en p_2^X in q_2^Y en andersom in de formule van $P^2(X)$ Dus deze kans is dan gelijk aan:

$$\begin{aligned} P^2(Y) &= (1-p_1^X)q_1^Y(1-p_2^X)q_2^Y) \\ &+ ((1-p_1^X)q_1^Y p_2^X q_2^Y + p_1^X q_1^Y(1-p_2^X)q_2^Y) \\ &+ ((1-p_1^X)q_1^Y(1-p_2^X)(1-q_2^Y) + (1-p_1^X)(1-q_1^Y)(1-p_2^X)q_2^Y) \end{aligned} \tag{6}$$

Er zijn ook 3 mogelijkheden op een gelijkspel bij een penaltyserie van 2 rondes. Namelijk 0-0, 1-1 en 2-2. We stellen nu dat 0-0 mogelijkheid 4 is, 1-1 mogelijkheid 5 en 2-2 mogelijkheid 6. Hieruit volgt dat:

$$P_4^2(G) = (1-p_1^X)(1-q_1^Y)(1-p_2^X)(1-q_2^Y) \tag{7}$$
$$\begin{aligned} P_5^2(G) &= p_1^X q_1^Y(1-p_2^X)(1-q_2^Y) + p_1^X(1-q_1^Y)(1-p_2^X)q_2^Y \\ &+ (1-p_1^X)q_1^Y p_2^X(1-q_2^Y) + (1-p_1^X)(1-q_1^Y)p_2^X q_2^Y \end{aligned} \tag{8}$$
$$P_6^2(G) = p_1^X q_1^Y p_2^X q_2^Y \tag{9}$$

Er geldt ook dat:

$$P^2(X) + P^2(Y) + P^2(G) = 1 \tag{10}$$

We stellen nu dat: $p_1^X = p_2^X = 4/5$ en $q_1^Y = q_2^Y = 7/10$. Dit geeft X een voordeel van $(4/5)/(7/10) = 40/35 = 8/7$ elke ronde. Oftewel de kans dat team X de ronde wint is $1/7$ groter dan dat team Y de ronde wint elke ronde van de penaltyserie. Deze kansen hebben we zelf gekozen op basis van de kansen dat team X en team Y een penalty scoren elke ronde van de penaltyserie. Deze kansen worden gepresenteerd door Apesteguia en Palacios-Huerta [3]. Deze kansen zijn gebaseerd op een dataset met 269 penaltyseries. Zij geven ons de volgende kansen:

$$[p_i, q_i]_{i=1}^5 = [(0.79, 0.72), (0.82, 0.77), (0.77, 0.64), (0.74, 0.68), (0.74, 0.67)].$$

Dit zijn de kansen dat team X en team Y de penalty scoren in elke ronde achtereenvolgens van ronde 1 tot en met ronde 5. Hiervan hebben we het gemiddelde genomen en dat afgerond op tiendes en dat geeft ons: $p_1^X = p_2^X = p_1^Y = p_2^Y = 4/5$ en $q_1^X = q_2^X = q_1^Y = q_2^Y = 7/10$.

Dit gaan we nu invullen in de winstkansen bij een penaltyserie van 2 rondes. Dit geeft ons het volgende:

$$\begin{aligned}
P^2(X) &= ((4/5)(3/10)(4/5)(3/10)) \\
&\quad + ((4/5)(3/10)(4/5)(7/10) + (4/5)(7/10)(4/5)(3/10)) \\
&\quad + ((4/5)(3/10)(1/5)(3/10) + (1/5)(3/10)(4/5)(3/10)) \\
&= 36/625 + 84/625 + 84/625 + 9/625 + 9/625 \\
&= 222/625
\end{aligned}$$

En dus ook:

$$\begin{aligned}
P^2(Y) &= ((1/5)(7/10)(1/5)(7/10)) \\
&\quad + ((1/5)(7/10)(4/5)(7/10) + (4/5)(7/10)(1/5)(7/10)) \\
&\quad + ((1/5)(7/10)(1/5)(3/10) + (1/5)(3/10)(1/5)(7/10)) \\
&= 49/2500 + 196/2500 + 196/2500 + 21/2500 + 21/2500 \\
&= 483/2500
\end{aligned}$$

Hieruit volgt weer:

$$P^2(X) + P^2(Y) + P^2(G) = 222/625 + 483/2500 + P^2(G) = 1$$

Oftewel:

$$P^2(G) = 1 - 222/625 - 483/2500 = 1 - 888/2500 - 483/2500 = 1129/2500$$

Dus:

$$P^2(X) = 222/625 \approx 0.3552 \tag{11}$$
$$P^2(Y) = 483/2500 \approx 0.1932 \tag{12}$$
$$P^2(G) = 1129/2500 \approx 0.4516 \tag{13}$$

Dus de standaard regel geeft team X een voordeel van 888/483 bij een penaltyserie van 2 rondes voor de ingevulde waardes van p en q. Dus team X heeft een winstkans die $405/483 \approx 84$ % groter is dan de winstkans van team Y. De kans op een gelijkspel is het grootste van de 3 kansen. Daarom zullen we later kijken naar wat een gelijkspel en dus een verder vervolg van de penaltyserie doet met de winstkansen van team X en team Y.

We kunnen dit algemeniseren voor r rondes waarbij we stellen dat de kans dat het team dat als eerste de penalty's neemt een kans heeft van p om de penalty's te scoren en het team dat als tweede de penalty's neemt een kans van q om de penalty's te scoren.

Stelling 4.1. *We stellen dat team X als eerste de penalty's neemt en dat geeft ons de volgende formules voor de winstkansen:*

$$P^r(X) = \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{r-i-1} \binom{r}{r-i} \binom{r}{j} p^{r-i}(1-p)^i q^j (1-q)^{r-j} \tag{14}$$
$$P^r(Y) = \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{r-i-1} \binom{r}{r-i} \binom{r}{j} q^{r-i}(1-q)^i p^j (1-p)^{r-j} \tag{15}$$
$$P^r(G) = \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} \binom{r}{j} p^j (1-p)^{r-j} q^j (1-q)^{r-j} \tag{16}$$

Bewijs: De dubbele sommatie aan de voorkant van $P^r(X)$ geeft alle mogelijkheden waarmee team X team Y kan verslaan in een penaltyserie met r rondes. Dit kan als team X $r-i$ penalty's maakt van de r penalty's en team Y j penalty's maakt van de r penalty's voor alle waardes van $0 \le i \le r-1$

en $0 \leq j \leq r-i-1$. Dit geeft ons de term $\binom{r}{r-i}\binom{r}{j}$ in de formule van $P^r(X)$. Dit wordt dan uiteindelijk vermenigvuldigd met de corresponderende kansen. Er geldt dat X $r-i$ penalty's maakt van de r penalty's met kans p^{r-i}. Dus X mist i van de r penalty's met kans $(1-p)^i$. Ook geldt er dat Y j penalty's maakt van de r penalty's met kans q^j. Dus mist Y $r-j$ penalty's van de r penalty's met kans $(1-q)^{r-j}$. Om de formule van $P^r(Y)$ te krijgen worden gewoon de p en de q omgewisseld in de formule van $P^r(X)$. $P^r(G)$ geeft ons de kans op een gelijkspel en dat wordt dus met behulp van een enkele sommatie aangegeven. Allebei de teams scoren dan j van de r penalty's met $0 \leq j \leq r$. □

4.2 Catch-up Regel

We zullen nu de catch-up regel gaan analyseren met behulp van kansberekening. We gaan kijken wat de winstkansen zijn van team X en team Y in een penaltyserie van 2 rondes en dit uiteindelijk vergelijken met de standaard regel. Qua scores zijn er dezelfde mogelijkheden waarmee X en Y kunnen winnen en ook waarmee het in een gelijkspel kan eindigen. Echter de manier waarop deze scores tot stand komen zijn anders bij de catch-up regel dan bij de standaard regel. Bij de catch-up regel hangt de volgorde van het penalty nemen elke ronde af van het resultaat van de vorige ronde. Bij de standaard regel ligt dit elke ronde vast. In een penaltyserie met 2 rondes kan team X dus winnen met 2-0, 2-1 en 1-0. We stellen nu dat 2-0 mogelijkheid 1 is, 2-1 mogelijkheid 2 en 1-0 mogelijkheid 3. We gaan ervan uit dat team X als eerste begint met de penaltyserie. We zullen eerst de winstkans van team X berekenen.

Mogelijkheid 1, 2-0: Dit kan op 1 manier, namelijk team X scoort in beide rondes en team Y mist in beide rondes. Team X scoort dus de penalty in de eerste ronde en team Y mist de penalty in de eerste ronde. Dit gebeurt met een kans van $p_1^X(1-q_1^Y)$. Hieruit volgt dat team Y in de tweede ronde als eerste de penalty nemen. Deze penalty mist team Y en team X scoort wel zijn penalty in de tweede ronde. Dit gebeurt met een kans van $(1-p_2^Y)q_2^X$. Dus de kans op 2-0 winst voor team X is gelijk aan:

$$p_1^X(1-q_1^Y)(1-p_2^Y)q_2^X.$$

Mogelijkheid 2, 2-1: Dit kan op 2 manieren. De eerste manier is dat team X de penalty in de eerste ronde scoort en team Y ook. Dit gebeurt met een kans van $p_1^X q_1^Y$. Daaruit volgt dat team Y in de tweede ronde als eerste de penalty mag nemen. Deze penalty mist team Y en team X scoort de penalty in de tweede ronde. Dit gebeurt met een kans van $(1-p_2^Y)q_2^X$. Dus de kans op de eerste manier is gelijk aan $p_1^X q_1^Y(1-p_2^Y)q_2^X$. De tweede manier is dat team X de penalty scoort in de eerste ronde en team Y de penalty mist in de eerste ronde. Dit gebeurt met een kans van $p_1^X(1-q_1^Y)$. Hieruit volgt dat de tweede ronde team Y als eerste de penalty mag nemen. Deze penalty scoort team Y en team X scoort de penalty in de tweede ronde ook. Dit gebeurt met een kans van $p_2^Y q_2^X$. Dus de kans op manier 2 is gelijk aan $p_1^X(1-q_1^Y)p_2^Y q_2^X$

Dus de kans op 2-1 winst voor team X is gelijk aan:

$$p_1^X q_1^Y(1-p_2^Y)q_2^X + p_1^X(1-q_1^Y)p_2^Y q_2^X.$$

Mogelijkheid 3, 1-0: Dit kan ook op 2 manieren. De eerste manier is dat team X de penalty in de eerste ronde scoort en team Y mist de penalty in de eerste ronde. Dit gebeurt met een kans van $p_1^X(1-q_1^Y)$. Daaruit volgt dat team Y in de tweede ronde als eerste de penalty mag nemen. Deze penalty mist team Y en team X mist ook. Dit gebeurt met een kans van $(1-p_2^Y)(1-q_2^X)$. Dus de kans op de eerste manier is gelijk aan $p_1^X(1-q_1^Y)(1-p_2^Y)(1-q_2^X)$. De tweede manier is dat team X de penalty mist in de eerste ronde en team Y ook de penalty mist in de eerste ronde. Dit gebeurt met een kans van $(1-p_1^X)(1-q_1^Y)$. Hieruit volgt dat de tweede ronde team Y als eerste de penalty mag nemen. Deze penalty mist team Y en team X scoort de penalty in de tweede ronde. Dit gebeurt met een kans van $(1-p_2^Y)q_2^X$. Dus de kans op manier 2 is gelijk aan $(1-p_1^X)(1-q_1^Y)(1-p_2^Y)q_2^X$

Dus de kans op 1-0 winst voor team X is gelijk aan:

$$p_1^X(1-q_1^Y)(1-p_2^Y)(1-q_2^X) + (1-p_1^X)(1-q_1^Y)(1-p_2^Y)q_2^X.$$

Hieruit volgt weer dat de winstkans van team X in een penaltyserie met 2 rondes gelijk is aan:

$$\begin{aligned}P^2(X) &= p_1^X(1-q_1^Y)(1-p_2^Y)q_2^X \\ &\quad + p_1^X q_1^Y(1-p_2^Y)q_2^X + p_1^X(1-q_1^Y)p_2^Y q_2^X \\ &\quad + p_1^X(1-q_1^Y)(1-p_2^Y)(1-q_2^X) + (1-p_1^X)(1-q_1^Y)(1-p_2^Y)q_2^X. \quad (17)\end{aligned}$$

Nu gaan we de winstkans van team Y berekenen aan de hand van dezelfde 3 mogelijkheden, maar nu dus winst voor team Y. Team X begint weer aan de penaltyserie.

Mogelijkheid 1, 2-0: Dit kan op 1 manier, namelijk team X mist in beide rondes en team Y scoort in beide rondes. Team X mist dus de penalty in de eerste ronde en team Y scoort de penalty in de eerste ronde. Dit gebeurt met een kans van $(1-p_1^X)q_1^Y$. Hieruit volgt dat team X in de tweede ronde weer als eerste de penalty mag nemen. Deze penalty mist team X en team Y scoort wel zijn penalty in de tweede ronde. Dit gebeurt met een kans van $(1-p_2^X)q_2^Y$. Dus de kans op 2-0 winst voor team Y is gelijk aan:

$$(1-p_1^X)q_1^Y(1-p_2^X)q_2^Y.$$

Mogelijkheid 2, 2-1: Dit kan op 2 manieren. De eerste manier is dat team X de penalty in de eerste ronde scoort en team Y ook. Dit gebeurt met een kans van $p_1^X q_1^Y$. Daaruit volgt dat team Y in de tweede ronde als eerste de penalty mag nemen. Deze penalty scoort team Y en team X mist de penalty in de tweede ronde. Dit gebeurt met een kans van $p_2^Y(1-q_2^X)$. Dus de kans op de eerste manier is gelijk aan $p_1^X q_1^Y p_2^Y(1-q_2^X)$. De tweede manier is dat team X de penalty mist in de eerste ronde en team Y de penalty scoort in de eerste ronde. Dit gebeurt met een kans van $(1-p_1^X)q_1^Y$. Hieruit volgt dat de tweede ronde team X weer als eerste de penalty mag nemen. Deze penalty scoort team X en team Y scoort de penalty in de tweede ronde ook. Dit gebeurt met een kans van $p_2^X q_2^Y$. Dus de kans op manier 2 is gelijk aan $(1-p_1^X)q_1^Y p_2^X q_2^Y$

Dus de kans op 2-1 winst voor team Y is gelijk aan:

$$p_1^X q_1^Y p_2^Y(1-q_2^X) + (1-p_1^X)q_1^Y p_2^X q_2^Y.$$

Mogelijkheid 3, 1-0: Dit kan ook op 2 manieren. De eerste manier is dat team X de penalty in de eerste ronde mist en team Y scoort de penalty in de eerste ronde. Dit gebeurt met een kans van $(1-p_1^X)q_1^Y$. Daaruit volgt dat team X in de tweede ronde weer als eerste de penalty mag nemen. Deze penalty mist team X en team Y mist ook. Dit gebeurt met een kans van $(1-p_2^X)(1-q_2^Y)$. Dus de kans op de eerste manier is gelijk aan $(1-p_1^X)q_1^Y(1-p_2^X)(1-q_2^Y)$. De tweede manier is dat team X de penalty mist in de eerste ronde en team Y ook de penalty mist in de eerste ronde. Dit gebeurt met een kans van $(1-p_1^X)(1-q_1^Y)$. Hieruit volgt dat de tweede ronde team Y als eerste de penalty mag nemen. Deze penalty scoort team Y en team X mist de penalty in de tweede ronde. Dit gebeurt met een kans van $p_2^Y(1-q_2^X)$. Dus de kans op manier 2 is gelijk aan $(1-p_1^X)(1-q_1^Y)p_2^Y(1-q_2^X)$.

Dus de kans op 1-0 winst voor team Y is gelijk aan:

$$(1-p_1^X)q_1^Y(1-p_2^X)(1-q_2^Y)+(1-p_1^X)(1-q_1^Y)p_2^Y(1-q_2^X).$$

Hieruit volgt weer dat de winstkans van team Y in een penaltyserie met 2 rondes gelijk is aan:

$$\begin{aligned}P^2(Y) &= (1-p_1^X)q_1^Y(1-p_2^X)q_2^Y \\ &\quad + p_1^X q_1^Y p_2^Y(1-q_2^X) + (1-p_1^X)q_1^Y p_2^X q_2^Y \\ &\quad + (1-p_1^X)q_1^Y(1-p_2^X)(1-q_2^Y) + (1-p_1^X)(1-q_1^Y)p_2^Y(1-q_2^X). \qquad (18)\end{aligned}$$

Hieruit volgt dan weer dat: $P^2(G) = 1 - P^2(X) - P^2(Y)$. We gaan nu weer $p = 4/5$ en $q = 7/10$ invullen in $P^2(X)$, $P^2(Y)$ en $P^2(G)$. Dit geeft ons de volgende winstkansen:

$$\begin{aligned}P^2(X) &= ((4/5)(3/10)(1/5)(7/10)) \\ &\quad + ((4/5)(7/10)(1/5)(7/10) + (4/5)(3/10)(4/5)(7/10)) \\ &\quad + ((4/5)(3/10)(1/5)(3/10) + (1/5)(3/10)(1/5)(7/10)) \\ &= 21/625 + 49/625 + 84/625 + 9/625 + 21/2500 \\ &= 673/2500\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P^2(Y) &= ((1/5)(7/10)(1/5)(7/10)) \\
&+ ((4/5)(7/10)(4/5)(3/10) + (1/5)(7/10)(4/5)(7/10)) \\
&+ ((1/5)(7/10)(1/5)(3/10) + (1/5)(3/10)(4/5)(3/10)) \\
&= 49/2500 + 336/2500 + 196/2500 + 21/2500 + 36/2500 \\
&= 638/2500
\end{aligned}$$

En dus:

$$P^2(X) + P^2(Y) + P^2(G) = 673/2500 + 638/2500 + P^2(G) = 1$$

Oftewel:

$$P^2(G) = 1 - 673/2500 - 638/2500 = 1189/2500$$

Dus:

$$P^2(X) = 673/2500 \approx 0.2692 \tag{19}$$

$$P^2(Y) = 638/2500 \approx 0.2552 \tag{20}$$

$$P^2(G) = 1189/2500 \approx 0.4756 \tag{21}$$

Dus de standaard regel geeft team X een voordeel van 673/638 bij een penaltyserie van 2 rondes voor de ingevulde waardes van p en q. Dus team X heeft een winstkans die $35/638 \approx 5$ % groter is dan de winstkans van team Y. De kans op een gelijkspel is het grootste van de 3 kansen. Daarom zullen we later kijken naar wat een gelijkspel en dus een verder vervolg van de penaltyserie doet met de winstkansen van team X en team Y. In een penaltyserie met 2 rondes is de behind first, alternating order regel hetzelfde als de catch-up regel. Dus bij gebruik van de behind first, alternating order regel in een penaltyserie met 2 rondes is de winstkans van team X ook 35/638 ≈ 5 % groter dan de winstkans van team Y. Bij gebruik van de standaard regel was dit ≈ 84 %. We zien dus dat in een penaltyserie met 2 rondes bij gebruik van de catch-up regel en de behind first, alternating order regel het verschil in winstkansen tussen beide teams veel kleiner is dan bij het gebruik van de standaard regel voor $p = 4/5$ en $q = 7/10$. Dus deze 2 regels zijn een stuk eerlijker dan de regel die nu gebruikt wordt binnen het voetbal voor bovenstaande gekozen waardes van p en q. We zullen dit later proberen te algemeniseren voor meerdere waardes van p en q.

4.3 Verlenging Penaltyserie

We hebben gezien dat de kans op een gelijkspel in een penaltyserie van r rondes nog heel groot is ten opzichte van de winstkansen van de beide teams. In een penaltyserie moet er echter een winnaar komen en daarom gaan we nu kijken wat er met de winstkansen van beide teams gebeurt als we een gelijkspel uitsluiten. Dus we gaan kijken wat de winstkansen van beide teams zijn in de zogenoemde verlenging van de penaltyserie en deze verwerken we dan in de winstkansen van de teams in de r rondes. Stel dat het dus na r rondes gelijk staat in score, dan komt er dus zo'n verlenging van de penaltyserie en deze gaat als volgt. De penaltyserie wordt dan verlengd met 1 ronde totdat een van beide teams heeft gemist en de ander heeft gescoord.

Dus als beide teams missen of beide teams scoren komt er weer een ronde bij. Dus de penaltyserie kan heel lang doorgaan. Wij zullen dit nu gaan analyseren met behulp van kansberekening.

We gaan eerst kijken wat er gebeurt als de standaard regel wordt toegepast bij de penaltyserie. Hiervoor geldt dat in de verlenging van de penaltyserie elke keer hetzelfde team als eerste de penalty neemt. Dit is in ons geval team X. Er geldt nu dat team X in ronde i van de verlenging de penaltyserie wint als het de penalty scoort en team Y de penalty mist in deze ronde. Dit gebeurt met kans:

$$p_i^X(1 - q_i^Y).$$

Als team X in ronde i de penalty mist, kan het nog steeds de serie winnen. Dan moet team Y deze ronde ook missen en dan gaat de penaltyserie dus nog verder door. Dit kan ook als beide spelers in ronde i de penalty scoren. De penaltyserie wordt dus weer verlengd met een extra ronde met de volgende kans:

$$p_i^X q_i^Y + (1 - p_i^X)(1 - q_i^Y).$$

We nemen nu aan dat $G(X)$ de kans is dat team X de penaltyserie in de verlenging wint en $G(Y)$ de kans dat team Y de serie in de verlenging wint. Er geldt nu ook dat $G(Y) = 1 - G(X)$. We voegen nu een superscript toe aan $G(X)$ om aan te geven om welke regel het gaat. Voor de standaard regel krijgen we nu het volgende:

$$G^S(X) = p(1 - q) + (pq + (1 - p)(1 - q))G^S(X).$$

Dit werken we nu uit:

$$G^S(X) = p(1-q) + (pq + (1-p)(1-q))G^S(X)$$
$$G^S(X) = p(1-q) + pqG^S(X) + G^S(X) - pG^S(X) - qG^S(X) + pqG^S(X)$$

Dus:

$$pG^S(X) + qG^S(X) + G^S(X) - G^S(X) - 2pqG^S(X) = p(1-q)$$
$$pG^S(X) + qG^S(X) - 2pqG^S(X) = p(1-q)$$
$$G^S(X)(p + q - 2pq) = p(1-q)$$

Dus de winstkans voor team X in de verlenging van een penaltyserie waarbij gebruik wordt gemaakt van de standaard regel is gelijk aan:

$$G^S(X) = \frac{p(1-q)}{p+q-2pq} \tag{22}$$

We gaan nu kijken naar de verlenging van de penaltyserie waarbij gebruik wordt gemaakt van de catch-up regel. Dit gaat iets anders dan bij gebruik van de standaard regel. Team X kan nu ook winnen in ronde i van de verlenging van de penaltyserie doordat het de penalty in deze ronde scoort en team Y de penalty mist in deze ronde. Echter als beide spelers scoren of beide spelers missen in deze ronde, dan wordt de penaltyserie dus verlengd met een extra ronde. In deze ronde mag team Y nu als eerste de penalty nemen in plaats van team X. Er geldt dan dat vanuit deze positie team Y wint met kans $G^C(X)$ en team X dan dus met kans $(1 - G^C(X))$. Dit geeft ons het volgende:

$$G^C(X) = p(1-q) + (pq + (1-p)(1-q))(1 - G^C(X)).$$

Dit werken we nu weer uit:

$$\begin{aligned}
G^C(X) &= p(1-q) + (pq + (1-p)(1-q))(1 - G^C(X)) \\
G^C(X) &= p(1-q) + pq + 1 - p - q + pq - pqG^C(X) - G^C(X) \\
&\quad + pG^C(X) + qG^C(X) - pqG^C(X) \\
G^C(X) &+ G^C(X) + 2pqG^C(X) - pG^C(X) - qG^C(X) = \\
&\quad p(1-q) + pq + 1 - p - q + pq \\
2G^C(X) &+ 2pqG^C(X) - pG^C(X) - qG^C(X) = \\
&\quad p - pq + pq + 1 - p - q + pq \\
G^C(X)&(2 + 2pq - p - q) = 1 - q + pq \\
G^C(X) &= \frac{1 - q + pq}{2 + 2pq - p - q}
\end{aligned}$$

Dus de winstkans voor team X in de verlenging van een penaltyserie waarbij gebruik wordt gemaakt van de catch-up regel is gelijk aan:

$$G^C(X) = \frac{1 - q + pq}{2 + 2pq - p - q} \tag{23}$$

We vullen nu weer $p = 4/5$ en $q = 7/10$ hierin in en dat geeft ons:

$$\begin{aligned}
G^S(X) &= \frac{p(1-q)}{p + q - 2pq} \\
&= \frac{(4/5)(3/10)}{(4/5) + (7/10) - 2(4/5)(7/10)} \\
&= \frac{12/50}{(75/50) - (56/50)} \\
&= \frac{12/50}{19/50} \\
&= 12/19 \\
&\approx 0.6316
\end{aligned} \tag{24}$$

En ook:

$$\begin{aligned}
G^C(X) &= \frac{1-(7/10)+(4/5)(7/10)}{2-(4/5)-(7/10)+2(4/5)(7/10)} \\
&= \frac{3/10)+(28/50)}{(1/2)+(56/50)} \\
&= \frac{15/50)+(28/50)}{(25/50)+(56/50)} \\
&= \frac{43/50}{(81/50} \\
&= 43/81 \\
&\approx 0.5309 \qquad (25)
\end{aligned}$$

De behind first, alternating order regel is in de verlenging van de penaltyserie precies hetzelfde als de catch-up regel dus daarvoor geldt dus dat:

$$G^B(X) = 43/81 \approx 0.5309.$$

Bij gebruik van de catch-up regel en de behind first, alternating order regel zitten de winstkansen van team X veel dichter bij 50 % (en dus automatisch die van team Y ook) dan bij gebruik van de standaard regel voor $p = 4/5$ en $q = 7/10$. Dus zorgen deze 2 regels voor meer eerlijkheid in de verlenging van de penaltyserie dan de standaard regel en dus ook automatisch voor meer spanning in deze verlenging. Deze resultaten gelden echter alleen als er sprake is van een verlenging van de penaltyserie. We hebben hiervoor de kans daarop berekend in een penaltyserie met 2 rondes. We zullen nu deze kansen samenvoegen wat ons uiteindelijk de winstkansen van team X en team Y geeft in een penaltyserie met 2 rondes met eventuele verlenging van deze penaltyserie. Dit alles bekijken we eerst weer voor $p = 4/5$ en $q = 7/10$. Dit geeft ons het volgende: Bij gebruik van de standaard regel (13) is de kans op een gelijkspel gelijk aan:

$$P^2(G) = 1129/2500 \approx 0.4516.$$

De winstkansen zijn bij gebruik van de standaard regel (11) en (12) gelijk aan:

$$P^2(X) = 222/625 \approx 0.3552$$
$$P^2(Y) = 483/2500 \approx 0.1932$$

Bij een gelijkspel en dus een verlenging van de penaltyserie zijn de winstkansen (24) in de verlenging voor van beide teams als volgt:

$$G^S(X) = 12/19 \approx 0.6316$$
$$G^S(Y) = 1 - 12/19 = 7/19 \approx 0.3684$$

We stellen nu dat $W^r(A)$ de winstkans van een team A is in een penaltyserie met r rondes waarbij de verlenging is inbegrepen. Hieruit volgt dat de winstkansen van team X en team Y in een penaltyserie met 2 rondes met eventuele verlenging van deze penaltyserie bij gebruik van de standaard regel gelijk zijn aan:

$$\begin{aligned} W^2(X) &= (12/19)(1129/2500) + P^2(X) \\ &= 3387/11875 + 222/625 \\ &= 3387/11875 + 4218/11875 \\ &= 7605/11875 \\ &\approx 0.6404 \\ W^2(Y) &= (7/19)(1129/2500) + P^2(Y) \\ &= 7903/47500 + 483/2500 \\ &= 7903/47500 + 9177/47500 \\ &= 17080/47500 \\ &\approx 0.3596 \end{aligned}$$

Bij gebruik van de catch-up regel is de kans op een gelijkspel gelijk aan:

$$P^2(G) = 1126/2500 \approx 0.4504 \text{ (21).}$$

De winstkansen zijn bij gebruik van de catch-up regel (19) en (20) gelijk aan:

$$P^2(X) = 673/2500 \approx 0.2692$$
$$P^2(Y) = 638/2500 \approx 0.2552$$

Bij een gelijkspel en dus een verlenging van de penaltyserie zijn de winstkansen (25) in de verlenging van beide teams als volgt:

$$G^C(X) = 43/81 \approx 0.5309$$
$$G^C(Y) = 1 - 43/81 = 38/81 \approx 0.4691$$

Hieruit volgt dat de winstkansen van team X en team Y in een penaltyserie met 2 rondes met eventuele verlenging van deze penaltyserie bij gebruik van de catch-up regel gelijk zijn aan:

$$
\begin{aligned}
W^2(X) &= (43/81)(1189/2500) + P^2(X) \\
&= 51127/202500 + 673/2500 \\
&= 51127/202500 + 54513/202500 \\
&= 105640/202500 \\
&\approx 0.5217 \\
W^2(Y) &= (38/81)(1189/2500) + P^2(Y) \\
&= 45182/202500 + 638/2500 \\
&= 45182/202500 + 51678/202500 \\
&= 96860/202500 \\
&\approx 0.4783
\end{aligned}
$$

Dus de standaard regel geeft team X een voordeel van 30420/17080 bij een penaltyserie van 2 rondes waar een gelijkspel uitgesloten is. Dus team X heeft een winstkans die $13340/17080 \approx 78$ % groter is dan de winstkans van team Y voor $p = 4/5$ en $q = 7/10$. De catch-up regel geeft team X een voordeel van 105640/96860 bij een penaltyserie van 2 rondes waar een gelijkspel uitgesloten is. Dus team X heeft een winstkans die $8780/96860 \approx 9$ % groter is dan de winstkans van team Y voor $p = 4/5$ en $q = 7/10$. In een penaltyserie met 2 rondes, waarbij gelijkspel uitgesloten is, is de behind first, alternating order regel nog steeds hetzelfde als de catch-up regel. Dus bij gebruik van de behind first, alternating order regel in een penaltyserie met 2 rondes is de winstkans van team X ook $8780/96860 \approx 9$ % groter dan de winstkans van team Y voor dezelfde waardes van p en q. Bij gebruik van de standaard regel was dit ≈ 78 %. We zien dus dat in een penaltyserie met 2 rondes, waarbij gelijkspel uitgesloten is, bij gebruik van de catch-up regel en de behind first, alternating order regel het verschil in winstkansen tussen beide teams veel kleiner is dan bij het gebruik van de standaard regel voor $p = 4/5$ en $q = 7/10$. Dus deze 2 regels zijn een stuk eerlijker dan de regel die nu gebruikt wordt binnen het voetbal voor de bovenstaande waardes van p en q. Dit komt omdat ze het voordeel dat team X heeft ten opzichte van team Y bij gebruik van de standaard regel drastisch verkleinen. We hebben nu de formules bepaald voor winstkansen van beide teams voor de gehele penaltyserie inclusief de verlenging. We willen dit nu gaan algemeniseren en dus gaan kijken wat er met de winstkansen gebeurt voor meerdere waardes van p en q.

We hebben de formules bepaald voor de winstkansen van beide teams in een penaltyserie met 2 rondes. We gaan ervanuit dat $p_1^X = p_2^X = p_1^Y = p_2^Y$ en $q_1^X = q_2^X = q_1^Y = q_2^Y$. Dus we kijken alleen naar het voordeel van als eerste de penalty nemen in een ronde en niet naar de plaatsing van de penalty of naar de kwaliteiten van de verschillende spelers qua het nemen van penalty's.

Dit geeft ons de volgende winstkansen bij gebruik van de standaard regel:

$$\begin{aligned} W^2(X) &= P^2(X) + G^S(X)P^2(G) \\ &= p^2(1-q)^2 + 2p^2(1-q)q + 2p(1-p)(1-q)^2 \\ &+ \frac{((1-p)^2(1-q)^2 + 4p(1-p)q(1-q) + p^2q^2)(p(1-q))}{p+q-2pq} \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} W^2(Y) &= P^2(Y) + G^S(Y)P^2(G) \\ &= (1-p)^2q^2 + 2(1-p)pq^2 + 2(1-p)^2(1-q)q \\ &+ \frac{((1-p)^2(1-q)^2 + 4p(1-p)q(1-q) + p^2q^2)(q(1-p))}{p+q-2pq} \end{aligned} \tag{27}$$

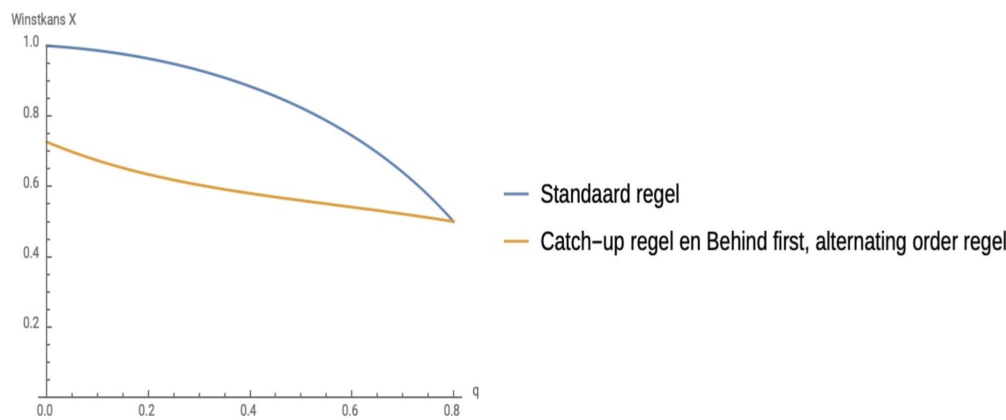
Bij gebruik van de catch-up regel en de behind first, alternating order regel krijgen we de volgende winstkansen:

$$\begin{aligned} W^2(X) &= P^2(X) + G^C(X)P^2(G) \\ &= p(1-p)q(1-q) + p(1-p)q^2 + p^2q(1-q) \\ &+ p(1-p)(1-q)^2 + (1-p)^2q(1-q) \\ &+ \frac{((1-p)^2(1-q)^2 + 3p(1-p)q(1-q) + p^2(1-q)^2 + p^2q^2)(1-q+pq)}{2+2pq-p-q} \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} W^2(Y) &= P^2(Y) + G^C(Y)P^2(G) \\ &= (1-p)^2q^2 + p^2q(1-q) + p(1-p)q^2 \\ &+ (1-p)^2q(1-q) + p(1-p)(1-q)^2 \\ &+ \frac{((1-p)^2(1-q)^2 + 3p(1-p)q(1-q) + p^2(1-q)^2 + p^2q^2)(1-p+pq)}{2+2pq-p-q} \end{aligned} \tag{29}$$

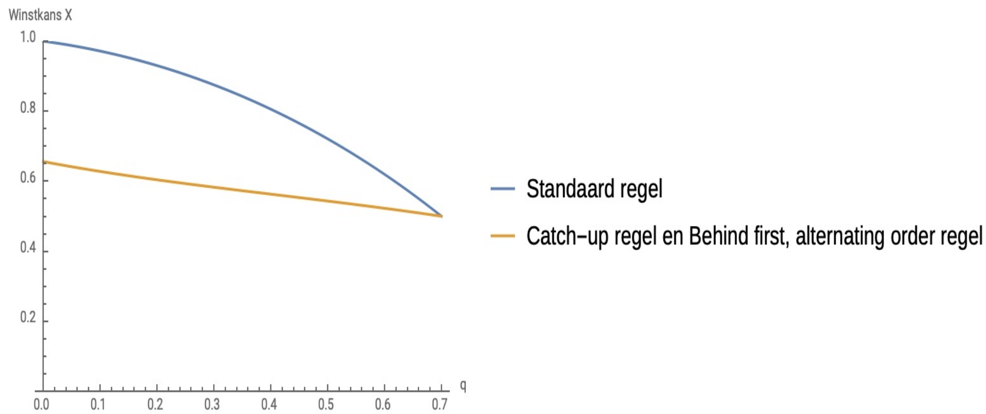
Het gaat hier dus om een penaltyserie met 2 rondes en daarvoor geldt dat de catch-up regel en de behind first, alternating order gelijk zijn aan elkaar. We hebben nu de winstkansen van team X geplot voor de drie regels voor $p = 4/5$, $p = 7/10$ en $p = 3/5$ en $0 < q < p$. Er geldt namelijk dat $p > q$, omdat degene die als eerste de penalty neemt in een ronde een voordeel heeft ten opzichte van degene die als tweede de penalty neemt in deze ronde. We kiezen voor 3 waardes van p om een goed breed beeld te krijgen van de winstkansen. Er geldt dat $p = 4/5$ de waarde van p is die we bij al onze berekeningen hierboven hebben gebruikt. Dus deze waarde betekent dus dat degene die als eerste de penalty neemt in een ronde deze met een kans van 80% scoort. We hebben ook gekeken naar 2 waardes van p die een iets kleinere scoringskans voor de eerste nemer van een penalty in een ronde geven. Dit leverde het volgende op:

We hebben eerst de winstkansen van team X geplot voor $p = 4/5$ voor de verschillende regels. Dit leverde de volgende grafiek op:



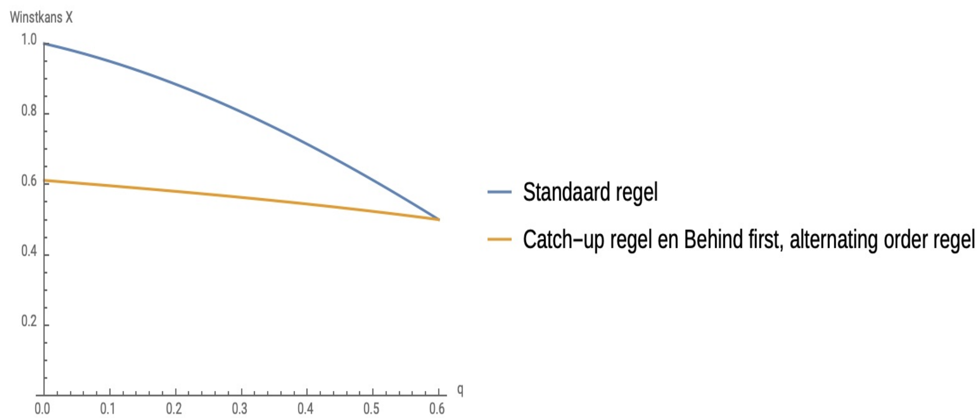
Figuur 2: Winstkans team X voor $p = 4/5$ en $0 < q < 4/5$

We hebben nu de winstkansen van team X geplot voor $p = 7/10$ voor de verschillende regels. Dit leverde de volgende grafiek op:



Figuur 3: Winstkans team X voor $p = 7/10$ en $0 < q < 7/10$

We hebben nu de winstkansen van team X geplot voor $p = 3/5$. Dit leverde de volgende grafiek op:



Figuur 4: Winstkans team X voor $p = 3/5$ en $0 < q < 3/5$

We zien in de grafieken dat de winstkans van team X in een penaltyserie met 2 rondes bij gebruik van de catch-up regel en de behind first, alternating order regel veel dichter bij de 50% blijft dan bij gebruik van de standaard regel. Bij gebruik van de standaard regel loopt de winstkans van team X al heel snel op richting de 100% bij een toenemend verschil tussen p en q. Team X begint steeds de penaltyserie dus de standaard regel geeft team X een groot voordeel ten opzichte van team Y en dit voordeel wordt alleen maar groter bij een toenemend verschil tussen p en q. Dit komt omdat bij gebruik van de standaard regel team X elke ronde de penalty als eerste mag nemen als team X de penaltyserie mag beginnen. Hoe groter het verschil tussen p en q des te groter is het voordeel om als eerste de penalty te nemen in een ronde dus dit levert dan een nog grotere winstkans op voor team X bij gebruik van de standaard regel. De catch-up regel en de behind first, alternating order regel geven geen groot voordeel aan team X, want de winstkans van team X blijft rond de 50% zoals te zien in de grafieken. Dit komt omdat bij gebruik van deze 2 regels de volgorde van penalty nemen varieert. Dus het grote voordeel van als eerste de penalty nemen ten opzichte van als tweede de penalty nemen in een ronde levert bij gebruik van deze 2 regels geen veel grotere winstkans op voor team X ten opzichte van de winstkans voor team Y. Dus dit komt overeen met onze verwachting dat deze 2 regels een stuk eerlijker zijn dan de regel die nu wordt gebruikt in het voetbal. Dit is het geval in een penaltyserie met 2 rondes met eventuele verlenging van de serie. In de praktijk is een penaltyserie echter 5 rondes met eventuele verlenging van de serie. Om de winstkansen voor zo'n serie uit te rekenen hebben we echter een computerprogramma nodig. Er zijn namelijk zoveel mogelijkheden qua score dat dit alleen numeriek berekend kan worden. Zo'n computerprogramma hebben we niet en daarom trekken we onze conclusie op basis van een penaltyserie met 2 rondes en eventuele verlenging. Dit is eigenlijk een penaltyserie in het klein en geeft ons al een aardig beeld van het geheel. Als het namelijk in het klein al zo is, dan zal het in een langere serie ook zeker zo zijn. Hoe langer een serie namelijk is, des te vaker zal team X als eerste de penalty mogen nemen bij gebruik van de standaard regel en dus zal de standaard regel nog meer voordeel geven aan team X ten opzichte van team Y. De catch-up regel en de behind first, alternating order regel zullen dit probleem oplossen en het eerlijker maken en dus ook spannender.

4.4 Verwachte lengte verlenging penaltyserie

We zullen nu gaan kijken naar de verwachte lengte(VL) van zo'n verlenging van de penaltyserie. We kijken eerst wat er gebeurt bij gebruik van de standaard regel. We hebben nu 2 mogelijkheden die kunnen gebeuren. De eerste is dat de verlenging van de penaltyserie eindigt in 1 ronde. Dit is het geval als team X de penalty scoort en team Y de penalty mist met kans $p(1-q)$ of andersom met kans $(1-p)q$. Dit geeft ons de volgende expressie:

$$(p(1-q)+(1-p)q)(1).$$

De verlenging kan ook verder gaan dan 1 ronde met verwachte lengte $(1+VL)$. De serie gaat verder naar de volgende ronde als beide spelers scoren in een ronde met kans pq of als beide spelers missen in een ronde met kans $(1-p)(1-q)$. Dit geeft ons de volgende expressie:

$$(pq+(1-p)(1-q))(1+VL).$$

Bij gebruik van de catch-up regel of de behind first, alternating order regel zijn er dezelfde 2 mogelijkheden. Alleen welk team er in een ronde als eerste de penalty neemt, kan verschillend zijn. Echter verandert dit niet de kansen op beide mogelijkheden. Dus de formule voor de verwachte lengte van de verlenging van de penaltyserie is voor alle drie de regels hetzelfde. Hieruit volgt dat de verwachte lengte van de verlenging van de penaltyserie bij gebruik van een van de drie regels als volgt gegeven is:

$$VL = (p(1-q)+(1-p)q)(1)+(pq+(1-p)(1-q))(1+VL) \tag{30}$$

Dit werken we nu uit en dat geeft ons het volgende:

$$\begin{aligned}
VL &= (p(1-q)+(1-p)q)(1)+(pq+(1-p)(1-q))(1+VL)\\
VL &= (p-pq+q-pq)+(pq+1-p-q+pq)(1+VL)\\
VL &= (p+q-2pq)+(2pq+1-p-q)(1+VL)\\
VL &= (p+q-2pq)+(2pq+1-p-q+2pqVL+VL-pVL-qVL)\\
VL+pVL+qVL-VL-2pqVL &= (p+q-2pq)+(2pq+1-p-q)\\
pVL+qVL-2pqVL &= 1\\
VL(p+q-2pq) &= 1\\
VL &= \frac{1}{p+q-2pq}
\end{aligned}$$

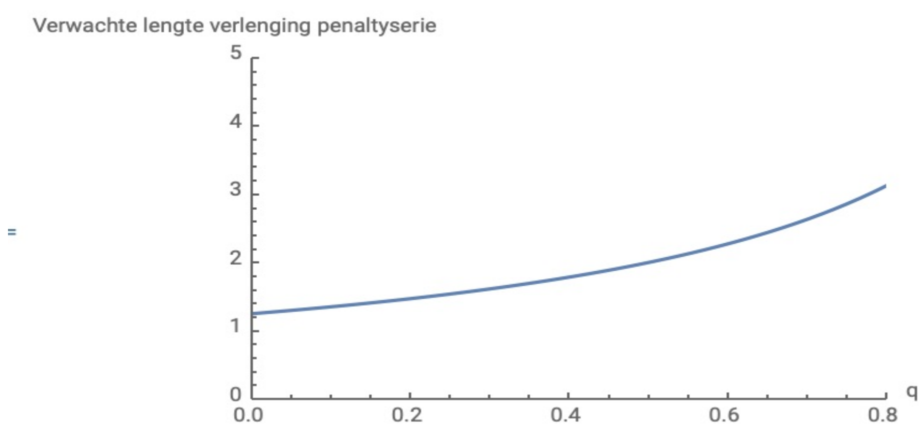
Oftewel:

$$VL = \frac{1}{p + q - 2pq} \tag{31}$$

We vullen hierin nu $p = 4/5$ en $q = 7/10$ in en dat geeft ons:

$$\begin{aligned} VL &= \frac{1}{p + q - 2pq} \\ &= \frac{1}{4/5 + 7/10 - 2(4/5)(7/10)} \\ &= \frac{1}{75/50 - 56/50} \\ &= \frac{1}{19/50} \\ &= \frac{50}{19} \\ &\approx 2.63 \end{aligned}$$

Dus voor $p = 4/5$ en $q = 7/10$ is de verwachting dat de penaltyserie mits deze verlengt wordt nog ongeveer 2.63 rondes langer zal duren. We hebben deze verwachte lengte ook geplot voor $p = 4/5$ en $0 < q < p$. Dit leverde de volgende grafiek op:



Figuur 5: Verwachte lengte verlenging penaltyserie voor $p = 4/5$ en $0 < q < 4/5$

We zien dus dat de lengte van de verlenging van de penaltyserie toeneemt bij een afnemend verschil tussen p en q. Dit is logisch te verklaren. Als beide teams met ongeveer dezelfde kans hun penalty scoren in een ronde zal het langer duren voor een van beide teams mist en de ander de penalty scoort in een ronde dan wanneer deze kansen ver uit elkaar liggen.

We willen ook weten of een team voordeel kan behalen door expres een penalty te missen of expres een penalty door te laten bij gebruik van een bepaalde regel. In dat geval is het niet verstandig om deze regel in de praktijk te gaan gebruiken. Een regel waarbij een team geen voordeel kan behalen door expres een penalty te missen of expres een penalty door te laten wordt 'strategyproof' genoemd. De standaard regel is 'strategyproof', want de volgorde van het nemen van de penalty's ligt vast en kan niet verandert worden. We gaan nu kijken of de catch-up regel en de behind first, alternating order regel ook 'strategyproof' zijn.

Het team dat als eerste de penalty neemt in een ronde i scoort deze penalty met een kans $p > q$ en heeft geen reden om deze penalty expres te missen. Het team dat als tweede de penalty neemt in een ronde i scoort deze penalty met een kans $q < p$ en kan dus misschien expres deze penalty missen om in de volgende ronde als eerste de penalty te mogen nemen. Zodat de kans op het scoren van deze penalty dan groter is. Stel nu dat team X in ronde i als eerste de penalty neemt en team Y neemt in ronde i als tweede de penalty. Als team X de penalty scoort in ronde i, zal team Y in ronde $i+1$ altijd als eerste de penalty nemen dus dan heeft team Y geen reden om expres de penalty te missen in ronde i. De enige manier waarop team Y in ronde $i+1$ weer als tweede de penalty moet nemen is als team Y de penalty scoort in ronde i nadat team X de penalty had gemist in ronde i. In dit geval scoort team Y in ronde i 1 penalty en kan het in ronde $i+1$ nog een penalty scoren met kans q. Dus als team Y probeert om de penalty te scoren in ronde i en deze ook scoort nadat team X de penalty had gemist in ronde i geeft dit team Y een gemiddelde opbrengst van $1+q$ gescoorde penalty's. Als team Y expres de penalty mist in ronde i nadat team X de penalty had gemist in ronde i geeft dit team Y een gemiddelde opbrengst van p gescoorde penalty's. Dus de netto opbrengst voor team Y, als team Y de penalty wel probeert te scoren en deze ook scoort nadat team X de penalty had gemist in ronde i, is gelijk aan $(1+q-p)$. Voor team X is dit gelijk aan $p-q$. Als team Y namelijk probeert te scoren en ook scoort in ronde i nadat team X had gemist in ronde i levert dit team X een gemiddelde van p gescoorde penalty's op in ronde $i+1$. Dit komt omdat team X dan in ronde $i+1$ als eerste de penalty mag nemen en deze dan scoort met kans p. Als team Y expres de penalty mist in ronde i nadat team X had gemist in ronde i levert dit team X een gemiddelde van q gescoorde penalty's op in ronde $i+1$. Dit komt omdat team X dan in ronde $i+1$ als tweede de penalty mag nemen en deze dan scoort met kans q. Dus een netto opbrengt van $p-q$ gescoorde penalty's voor team X. Dit geeft ons het verschil in netto opbrengsten tussen team X en team Y aan het einde van ronde $i+1$:

$$(1+q-p)-(p-q)=1-2(p-q).$$

Als er geldt dat: $(p-q) \leq 1/2$, dan geldt er dat het verschil positief is en dus geeft het wel proberen om de penalty te scoren team Y een voordeel ten opzichte van expres de penalty missen. Dus er is dus geen reden dan voor een team die als tweede de penalty mag nemen in ronde i om expres de penalty te missen. Tenzij de kans dat een team die als eerste de penalty neemt deze scoort veel groter is dan dat een team die als tweede de penalty neemt deze scoort. Dus dat p veel groter is dan q. In de praktijk is dat echter niet het geval. Dus de catch-up regel is 'strategyproof' voor $(p-q) \leq 1/2$ en in de praktijk dus vrijwel altijd. Stel dat de penaltyserie verlengd wordt, dan kan een team de volgorde van nemen niet veranderen door expres een penalty te missen. Dit komt omdat dit team dan de penaltyserie gelijk verliest. Dit alles is precies hetzelfde voor de behind first, alternating order regel. Dus ook deze regel is 'strategyproof' voor $(p-q) \leq 1/2$ en in de praktijk dus vrijwel altijd. Dus dit geeft ons:

Stelling 4.2. *De catch-up regel en de behind first, alternating order regel zijn 'strategyproof' als er geldt dat* $(p-q) \leq 1/2$.

5 Algemene uitleg servicesporten

Naast de penaltyserie in het voetbal zijn er ook andere sporten waarbij sommige regels verbeterd kunnen worden om het eerlijker te maken. We zullen nu gaan kijken hoe we de zogenoemde servicesporten eerlijker kunnen maken door aanpassing van bepaalde regels. Servicesporten zijn sporten met wedstrijden tussen 2 spelers of teams. Er is een object aanwezig bij deze sporten en dat object is meestal een bal. Dit object wordt door een speler of team het spel in geserveerd en de andere speler of het andere team probeert dan dit object te retourneren. Voorbeelden van servicesporten zijn: tennis, volleybal, tafeltennis, squash, badminton en racquetball. In de meeste sporten wint de retourneerder het punt als de serveerder het punt niet wint. Dit is echter niet bij elke sport het geval. Bij racquetball kan bijvoorbeeld alleen de serveerder punten maken. Serveren is in het algemeen voordelig ten opzichte van retourneren. Dat wil zeggen dat bij tegenstanders die evengoed zijn, de serveerder een grotere kans heeft om het punt te winnen dan de retourneerder. In sommige sporten ligt de volgorde van de service vast en bij sommige sporten is deze volgorde variabel. In veel sporten betekent dit dat degene die het vorige punt heeft gewonnen het volgende punt mag serveren. We noemen dit de standaard regel. We zullen gaan kijken naar de servicesporten in het algemeen en dus niet elke servicesport apart behandelen. De standaard regel is in veel gevallen niet heel eerlijk en daarom gaan we dus kijken of alternatieve regels eerlijker zijn. Dit zou ook voor meer spanning zorgen binnen deze sporten. Hoe dichter de spelers of teams bij elkaar zitten, des te langer zal het duren voordat een wedstrijd wordt beslist. We zullen ook kijken wat er verschil is tussen het winnen van een wedstrijd/game/set met 2 punten verschil en het winnen van een wedstrijd/game/set met 1 punt verschil. Bij de meeste servicesporten moet er een verschil van 2 punten zijn om te kunnen winnen. Dit zorgt voor meer spanning, omdat wedstrijden hierdoor langer worden. Echter verandert dit niet de winstkansen van beide spelers of teams. Dit gaan we laten zien. We zullen allebei deze regels behandelen.

6 Regels en hun betrekking tot de servicesporten

In dit hoofdstuk zullen we alle regels die de servicesporten eerlijker en spannender zouden kunnen maken behandelen. We formuleren nu eerst de standaard regel.

Standaard regel: Degene die het vorige punt heeft gewonnen, mag het volgende punt serveren.

Echter er zijn nog een aantal andere regels die misschien beter gebruikt kunnen worden vanwege de eerlijkheid binnen deze sporten. Het gaat hier weer om de catch-up regel zoals ook al behandeld bij de penaltyserie binnen het voetbal. Binnen de servicesporten wordt de catch-up regel iets anders toegepast. We formuleren hem nu als volgt:

Catch-up regel: Degene die het vorige punt heeft verloren, mag het volgende punt serveren.

We gaan nog twee andere regels behandelen die de servicesporten eerlijker en spannender zouden kunnen maken. We noemen deze regels de achtervolgende regels. Volgens deze regels is degene die achterstaat in score degene die mag serveren. Echter er is een klein verschil tussen deze beide regels en dat is wanneer er sprake is van een gelijke stand. We formuleren beide regels bij een gelijke stand als volgt:

Behind first, alternating order regel: Degene die op voorsprong stond voordat de stand gelijk werd, mag het volgende punt serveren.

We zullen de winstkansen van de spelers of teams berekenen voor alle 3 de regels en deze met elkaar vergelijken. We verwachten dat de 2 nieuwe regels de wedstrijden eerlijker en spannender zullen maken. Dit komt omdat het spelers of teams die een punt verliezen of een achterstand hebben een voordeel geeft om weer dichterbij te komen qua score. De behind first, alternating order regel houdt rekening met het hele spelverloop terwijl de catch-up regel alleen rekening houdt met het laatst gespeelde punt. Onze verwachting is nu dus ook dat de behind first, alternating order regel een extra voordeel geven aan spelers of teams die minder goed zijn.

7 Wiskunde achter de servicesporten

In dit hoofdstuk zullen de wiskunde achter de servicesporten bespreken. We gaan dire regels analyseren met behulp van kansberekening, namelijk de standaard regel, de catch-up regel en de behind first, alternating order regel. We zullen de winstkansen gaan berekenen van beide spelers/teams bij het gebruik van de verschillende regels. We zullen dit eerst gaan doen als een wedstrijd/-game/set maar met 1 punt verschil gewonnen hoeft te worden. Vervolgens zullen we ook nog kijken naar 2 punten verschil.

7.1 Winst met 1 punt verschil

Bij de meeste servicesporten moet een wedstrijd/game/set gewonnen worden met 2 punten verschil. Echter bij sommige servicesporten is dit niet het geval. Bijvoorbeeld bij racquetball. Bij deze sporten kan een wedstrijd/game/set nog met 1 punt verschil gewonnen worden. We zullen daarom eerst gaan kijken naar de winstkansen van beide spelers/teams als er maar met 1 punt verschil gewonnen hoeft te worden.

We stellen eerst dat X een kans van p heeft om het punt te winnen als X zelf serveert en Y heeft een kans van q om het punt te winnen als Y zelf serveert en dus X retourneert. Er geldt hier dat X altijd als eerste serveert en dat $0 < p < 1$ en $0 < q < 1$. We stellen nu ook dat $P^r(X)$ de kans is dat team X de 'Best-of-r' wedstrijd wint en dus is $P^r(Y)$ de kans dat team Y de 'Best-of-r' wedstrijd wint. We starten nu met het analyseren van een 'Best-of-3' wedstrijd. Dit houdt in dat de speler die als eerste 2 punten wint de wedstrijd wint. We willen in de uitslag kunnen zien of een speler het punt won op zijn eigen service of op de service van de andere speler. Dit geven we als volgt aan: We gebruiken de letters X en Y als X en Y een punt winnen op hun eigen service en $\overline{X}$ en $\overline{Y}$ als X en Y een punt winnen op de service van de tegenstander. Dit geeft ons bijvoorbeeld een XX uitkomst in een 'Best-of-3' wedstrijd en dat betekent dus dat X de eerste 2 punten op zijn eigen service heeft gewonnen wat dus heeft geleid tot een 2-0 overwinning van X. Met deze gegevens kunnen we nu de winstkansen van de spelers bepalen. We kijken eerst naar de winstkansen van beide spelers bij gebruik van de standaard regel. We nemen elke keer aan dat X begint met serveren.

In een 'Best-of-3' wedstrijd kan X met 2-0 en 2-1 winnen. We stellen nu dat 2-0 mogelijkheid 1 is en 2-1 mogelijkheid 2. Dit geeft ons het volgende:

<u>Mogelijkheid 1, 2-0:</u> Dit kan op 1 manier, namelijk X wint beide punten op zijn eigen service. X wint dus het eerste punt op zijn eigen service en daaruit volgt dat X ook het tweede punt mag serveren. Dit punt wint X ook. Dit levert de uitkomst XX op. De kans hierop is gelijk aan p^2. Dus de kans op 2-0 winst voor X is gelijk aan:

$$p^2.$$

Mogelijkheid 2, 2-1: Dit kan op 2 manieren. De eerste manier is dat X het eerste punt op zijn eigen service wint en daaruit volgt dat X het tweede punt ook mag serveren. Dit punt verliest X en daaruit volgt dat Y het derde punt mag serveren. Dit punt wint X. Dit levert de uitkomst $X\overline{YX}$ op. De kans hierop is gelijk aan $p(1-p)(1-q)$. De tweede manier is dat X het eerste punt op zijn eigen service verliest en daaruit volgt dat Y het tweede punt mag serveren. Dit punt wint X en daaruit volgt dat X het derde punt mag serveren. Dit punt wint X ook. Dit levert de uitkomst $\overline{YX}X$ op. De kans hierop is gelijk aan $(1-p)(1-q)p$. Dus de kans op 2-1 winst voor X is gelijk aan:

$$p(1-p)(1-q) + (1-p)(1-q)p = 2p(1-p)(1-q).$$

Dus daaruit volgt dat de winstkans van X in een 'Best-of-3 wedstrijd bij gebruik van de standaard regel gelijk is aan:

$$\begin{aligned} P^3(X) &= p^2 + p(1-p)(1-q) + (1-p)(1-q)p \\ &= p^2 + 2p(1-p)(1-q) \\ &= p^2 + 2p(1-q-p+pq) \\ &= p^2 + 2p - 2pq - 2p^2 + 2p^2q \\ &= 2p - p^2 - 2pq + 2p^2q \end{aligned} \tag{32}$$

We gaan nu kijken naar de winstkans van Y in een 'Best-of-3' wedstrijd. In zo'n wedstrijd kan Y ook met 2-0 en 2-1 winnen net zoals X. We stellen nu dat 2-0 mogelijkheid 1 is en 2-1 mogelijkheid 2. Dit geeft ons het volgende:

Mogelijkheid 1, 2-0: Dit kan op 1 manier, namelijk Y wint beide punten. X verliest dus het eerste punt op zijn eigen service en daaruit volgt dat Y het tweede punt mag serveren. Dit punt wint Y ook. Dit levert de uitkomst $\overline{Y}Y$ op. De kans hierop is gelijk aan $(1-p)q$. Dus de kans op 2-0 winst voor Y is gelijk aan:

$$(1-p)q.$$

Mogelijkheid 2, 2-1: Dit kan op 2 manieren. De eerste manier is dat X het eerste punt op zijn eigen service wint en daaruit volgt dat X het tweede punt ook mag serveren. Dit punt verliest X en daaruit volgt dat Y het derde punt mag serveren. Dit punt wint Y. Dit levert de uitkomst $X\overline{Y}Y$ op. De kans hierop is gelijk aan $p(1-p)q$. De tweede manier is dat X het eerste punt op zijn eigen service verliest en daaruit volgt dat Y het tweede punt mag serveren. Dit punt wint X en daaruit volgt dat X het derde punt mag serveren. Dit punt wint Y. Dit levert de uitkomst $\overline{YXY}$ op. De kans hierop is gelijk aan $(1-p)(1-q)(1-p)$. Dus de kans op 2-1 winst voor Y is gelijk aan:

$$p(1-p)q + (1-p)(1-q)(1-p).$$

Dus daaruit volgt dat de winstkans van Y in een 'Best-of-3 wedstrijd bij gebruik van de standaard regel gelijk is aan:

$$\begin{aligned} P^3(Y) &= (1-p)q + p(1-p)q + (1-p)(1-q)(1-p) \\ &= q - pq + pq - p^2q + (1-p)(1-q-p+pq) \\ &= q - pq + pq - p^2q + 1 - q - p + pq - p + pq + p^2 - p^2q \\ &= 1 + 2pq - 2p^2q - 2p + p^2 = 1 - P^3(X) \end{aligned} \tag{33}$$

We gaan nu kijken naar de winstkansen van beide spelers bij gebruik van de catch-up regel.

In een 'Best-of-3' wedstrijd kan X met 2-0 en 2-1 winnen. We stellen nu dat 2-0 mogelijkheid 1 is en 2-1 mogelijkheid 2. Dit geeft ons het volgende:

Mogelijkheid 1, 2-0: Dit kan op 1 manier, namelijk X wint beide punten. X wint dus het eerste punt op zijn eigen service en daaruit volgt dat Y het tweede punt mag serveren. Dit punt wint X ook. Dit levert de uitkomst $X\overline{X}$ op. De kans hierop is gelijk aan $p(1-q)$. Dus de kans op 2-0 winst voor X is gelijk aan:

$$p(1-q).$$

Mogelijkheid 2, 2-1: Dit kan op 2 manieren. De eerste manier is dat X het eerste punt op zijn eigen service wint en daaruit volgt dat Y het tweede punt mag serveren. Dit punt verliest X en daaruit volgt dat X het derde punt mag serveren. Dit punt wint X. Dit levert de uitkomst XYX op. De kans hierop is gelijk aan pqp. De tweede manier is dat X het eerste punt op zijn eigen service verliest en daaruit volgt dat X het tweede punt ook mag serveren. Dit punt wint X en daaruit volgt dat Y het derde punt mag serveren. Dit punt wint X ook. Dit levert de uitkomst $\overline{Y}X\overline{X}$ op. De kans hierop is gelijk aan $(1-p)p(1-q)$. Dus de kans op 2-1 winst voor X is gelijk aan:

$$pqp + (1-p)p(1-q).$$

Dus daaruit volgt dat de winstkans van X in een 'Best-of-3 wedstrijd bij gebruik van de catch-up regel gelijk is aan:

$$\begin{aligned} P^3(X) &= p(1-q) + pqp + (1-p)p(1-q) \\ &= p - pq + p^2q + p(1-q-p+pq) \\ &= p - pq + p^2q + p - pq - p^2 + p^2q \\ &= 2p - p^2 - 2pq + 2p^2q \end{aligned} \tag{34}$$

We gaan nu kijken naar de winstkans van Y in een 'Best-of-3' wedstrijd. In zo'n wedstrijd kan Y ook met 2-0 en 2-1 winnen net zoals X. We stellen nu dat 2-0 mogelijkheid 1 is en 2-1 mogelijkheid 2. Dit geeft ons het volgende:

<u>Mogelijkheid 1, 2-0:</u> Dit kan op 1 manier, namelijk Y wint beide punten. X verliest dus het eerste punt op zijn eigen service en daaruit volgt dat X het tweede punt mag serveren. Dit punt wint Y ook. Dit levert de uitkomst $\overline{YY}$ op. De kans hierop is gelijk aan $(1-p)^2$. Dus de kans op 2-0 winst voor Y is gelijk aan:

$$(1-p)^2.$$

<u>Mogelijkheid 2, 2-1:</u> Dit kan op 2 manieren. De eerste manier is dat X het eerste punt op zijn eigen service wint en daaruit volgt dat Y het tweede punt mag serveren. Dit punt wint Y en daaruit volgt dat X het derde punt mag serveren. Dit punt wint Y. Dit levert de uitkomst $XY\overline{Y}$ op. De kans hierop is gelijk aan $pq(1-p)$. De tweede manier is dat X het eerste punt op zijn eigen service verliest en daaruit volgt dat X het tweede punt mag serveren. Dit punt wint X en daaruit volgt dat Y het derde punt mag serveren. Dit punt wint Y. Dit levert de uitkomst $\overline{Y}XY$ op. De kans hierop is gelijk aan $(1-p)pq$. Dus de kans op 2-1 winst voor Y is gelijk aan:

$$pq(1-p) + (1-p)pq.$$

Dus daaruit volgt dat de winstkans van Y in een 'Best-of-3 wedstrijd bij gebruik van de catch-up regel gelijk is aan:

$$\begin{aligned} P^3(Y) &= (1-p)^2 + pq(1-p) + (1-p)pq \\ &= 1 - 2p + p^2 + pq - p^2q + pq - p^2q \\ &= 1 + 2pq - 2p^2q - 2p + p^2 = 1 - P^3(X) \end{aligned} \tag{35}$$

We gaan nu kijken naar de winstkansen van beide spelers bij gebruik van de behind first, alternating order regel.

In een 'Best-of-3' wedstrijd kan X met 2-0 en 2-1 winnen. We stellen nu dat 2-0 mogelijkheid 1 is en 2-1 mogelijkheid 2. Dit geeft ons het volgende:

Mogelijkheid 1, 2-0: Dit kan op 1 manier, namelijk X wint beide punten. X wint dus het eerste punt op zijn eigen service en daaruit volgt dat Y het tweede punt mag serveren. Dit punt wint X ook. Dit levert de uitkomst $X\overline{X}$ op. De kans hierop is gelijk aan $p(1-q)$. Dus de kans op 2-0 winst voor X is gelijk aan:

$$p(1-q).$$

Mogelijkheid 2, 2-1: Dit kan op 2 manieren. De eerste manier is dat X het eerste punt op zijn eigen service wint en daaruit volgt dat Y het tweede punt mag serveren. Dit punt verliest X en daaruit volgt dat X het derde punt mag serveren. Dit punt wint X. Dit levert de uitkomst XYX op. De kans hierop is gelijk aan pqp. De tweede manier is dat X het eerste punt op zijn eigen service verliest en daaruit volgt dat X het tweede punt ook mag serveren. Dit punt wint X en daaruit volgt dat Y het derde punt mag serveren. Dit punt wint X ook. Dit levert de uitkomst $\overline{Y}X\overline{X}$ op. De kans hierop is gelijk aan $(1-p)p(1-q)$. Dus de kans op 2-1 winst voor X is gelijk aan:

$$pqp + (1-p)p(1-q).$$

Dus daaruit volgt dat de winstkans van X in een 'Best-of-3 wedstrijd bij gebruik van de behind first, alternating order regel gelijk is aan:

$$\begin{aligned} P^3(X) &= p(1-q) + pqp + (1-p)p(1-q) \\ &= p - pq + p^2q + p(1-q-p+pq) \\ &= p - pq + p^2q + p - pq - p^2 + p^2q \\ &= 2p - p^2 - 2pq + 2p^2q \end{aligned} \tag{36}$$

We gaan nu kijken naar de winstkans van Y in een 'Best-of-3' wedstrijd. In zo'n wedstrijd kan Y ook met 2-0 en 2-1 winnen net zoals X. We stellen nu dat 2-0 mogelijkheid 1 is en 2-1 mogelijkheid 2. Dit geeft ons het volgende:

<u>Mogelijkheid 1, 2-0:</u> Dit kan op 1 manier, namelijk Y wint beide punten. X verliest dus het eerste punt op zijn eigen service en daaruit volgt dat X het tweede punt mag serveren. Dit punt wint Y ook. Dit levert de uitkomst $\overline{YY}$ op. De kans hierop is gelijk aan $(1-p)^2$. Dus de kans op 2-0 winst voor Y is gelijk aan:

$$(1-p)^2.$$

<u>Mogelijkheid 2, 2-1:</u> Dit kan op 2 manieren. De eerste manier is dat X het eerste punt op zijn eigen service wint en daaruit volgt dat Y het tweede punt mag serveren. Dit punt wint Y en daaruit volgt dat X het derde punt mag serveren. Dit punt wint Y. Dit levert de uitkomst $XY\overline{Y}$ op. De kans hierop is gelijk aan $pq(1-p)$. De tweede manier is dat X het eerste punt op zijn eigen service verliest en daaruit volgt dat X het tweede punt mag serveren. Dit punt wint X en daaruit volgt dat Y het derde punt mag serveren. Dit punt wint Y. Dit levert de uitkomst $\overline{Y}XY$ op. De kans hierop is gelijk aan $(1-p)pq$. Dus de kans op 2-1 winst voor Y is gelijk aan:

$$pq(1-p) + (1-p)pq.$$

Dus daaruit volgt dat de winstkans van Y in een 'Best-of-3' wedstrijd bij gebruik van de behind first, alternating order regel gelijk is aan:

$$\begin{aligned} P^3(Y) &= (1-p)^2 + pq(1-p) + (1-p)pq \\ &= 1 - 2p + p^2 + pq - p^2q + pq - p^2q \\ &= 1 + 2pq - 2p^2q - 2p + p^2 = 1 - P^3(X) \end{aligned} \tag{37}$$

Deze resultaten kunnen we samenvatten in een tabel. Deze ziet er als volgt uit:

	X wint	Y wint
Standaard regel		
Uitkomst	XX of $X\overline{YX}$ of $\overline{YX}X$	$\overline{Y}Y$ of $X\overline{Y}Y$ of $\overline{YXY}$
Winstkans	$2p - p^2 - 2pq + 2p^2q$	$1 + 2pq - 2p^2q - 2p + p^2$
Catch-up regel		
Uitkomst	$X\overline{X}$ of XYX of $\overline{Y}X\overline{X}$	$\overline{YY}$ of $XY\overline{Y}$ of $\overline{Y}XY$
Winstkans	$2p - p^2 - 2pq + 2p^2q$	$1 + 2pq - 2p^2q - 2p + p^2$
Behind first, alternating order regel		
Uitkomst	$X\overline{X}$ of XYX of $\overline{Y}X\overline{X}$	$\overline{YY}$ of $XY\overline{Y}$ of $\overline{Y}XY$
Winstkans	$2p - p^2 - 2pq + 2p^2q$	$1 + 2pq - 2p^2q - 2p + p^2$

We zien nu dus dat in een 'Best-of-3' wedstrijd waarbij met 1 punt verschil gewonnen kan worden de winstkansen van beide spelers hetzelfde zijn voor de standaard regel, de catch-up regel en de behind first alternating order regel. De verschillende regels zorgen dus niet voor verschillende winstkansen van de spelers. Daarom gaan we nu kijken naar de verwachte lengte van een 'Best-of-3' wedstrijd waarbij met 1 punt verschil gewonnen kan worden. We gaan eerst de verwachte lengte van een 'Best-of-3' wedstrijd waarbij met 1 punt verschil gewonnen kan worden bepalen bij gebruik van de standaard regel. Het is duidelijk dat de wedstrijd 2 of 3 punten lang is. Dit geeft ons het volgende:

<u>Wedstrijd is 2 punten lang:</u> Er geldt dat X in dit geval wint met kans p^2 en Y wint in dit geval met kans $(1-p)q$. Dus de kans dat de wedstrijd 2 punten lang is, is gelijk aan:

$$p^2 + (1-p)q.$$

<u>Wedstrijd is 3 punten lang:</u> In dit geval wint X met 2-1 met kans $p(1-p)(1-q)+(1-p)(1-q)p$. Y wint met 2-1 met kans $p(1-p)q+(1-p)(1-q)(1-p)$. Dus de kans dat de wedstrijd 3 punten lang is, is gelijk aan

$$p(1-p)(1-q) + (1-p)(1-q)p + p(1-p)q + (1-p)(1-q)(1-p).$$

Dit geeft ons de volgende verwachte lengte van een 'Best-of-3' wedstrijd waarbij met 1 punt verschil gewonnen mag worden bij gebruik van de standaard regel:

$$\begin{aligned} VL^3_{SR} &= 2(p^2 + (1-p)q) + 3(p(1-p)(1-q) + (1-p)(1-q)p \\ &+ p(1-p)q + (1-p)(1-q)(1-p)) \\ &= 2p^2 + 2q - 2pq + 3(p(1-p-q+pq) + p(1-p-q+pq) \\ &+ pq - p^2q + (1-p)(1-q-p+pq)) \\ &= 2p^2 + 2q - 2pq + 3(p - p^2 - pq + p^2q + p - p^2 - pq \\ &+ p^2q + pq - p^2q + 1 - q - p + pq - p + pq + p^2 - p^2q) \\ &= 2p^2 + 2q - 2pq + 3(1 + pq - p^2 - q) \\ &= 2p^2 + 2q - 2pq + 3 + 3pq - 3p^2 - 3q \\ &= 3 + pq - q - p^2 \end{aligned} \tag{38}$$

We gaan nu de verwachte lengte van een 'Best-of-3' wedstrijd waarbij met 1 punt verschil gewonnen kan worden bepalen bij gebruik van de catch-up regel. Het is duidelijk dat de wedstrijd 2 of 3 punten lang is. Dit geeft ons het volgende:

Wedstrijd is 2 punten lang: Er geldt dat X in dit geval wint met kans $p(1-q)$ en Y wint in dit geval met kans $(1-p)^2$. Dus de kans dat de wedstrijd 2 punten lang is, is gelijk aan:

$$p(1-q) + (1-p)^2.$$

Wedstrijd is 3 punten lang: In dit geval wint X met 2-1 met kans $pqp + (1-p)p(1-q)$. Y wint met 2-1 met kans $pq(1-p) + (1-p)pq$. Dus de kans dat de wedstrijd 3 punten lang is, is gelijk aan

$$pqp + (1-p)p(1-q) + pq(1-p) + (1-p)pq.$$

Dit geeft ons de volgende verwachte lengte van een 'Best-of-3' wedstrijd waarbij met 1 punt verschil gewonnen mag worden bij gebruik van de catch-up regel:

$$\begin{aligned}
VL^3_{CR} &= 2(p(1-q) + (1-p)^2) + 3(pqp + (1-p)p(1-q) \\
&+ pq(1-p) + (1-p)pq) \\
&= 2(p - pq + 1 - 2p + p^2) + 3(p^2q + p(1-q-p+pq) \\
&+ pq - p^2q + pq - p^2q) \\
&= 2p - 2pq + 2 - 4p + 2p^2 + 3(p^2q + p - pq - p^2 \\
&+ p^2q + pq - p^2q + pq - p^2q) \\
&= -2p - 2pq + 2 + 2p^2 + 3(p - p^2 + pq) \\
&= -2p - 2pq + 2 + 2p^2 + 3p - 3p^2 + 3pq \\
&= 2 + p + pq - p^2 \qquad (39)
\end{aligned}$$

We gaan nu de verwachte lengte van een 'Best-of-3' wedstrijd waarbij met 1 punt verschil gewonnen kan worden bepalen bij gebruik van de behind first, alternating order regel. Het is duidelijk dat de wedstrijd 2 of 3 punten lang is. Dit geeft ons het volgende:

Wedstrijd is 2 punten lang: Er geldt dat X in dit geval wint met kans $p(1-q)$ en Y wint in dit geval met kans $(1-p)^2$. Dus de kans dat de wedstrijd 2 punten lang is, is gelijk aan:

$$p(1-q) + (1-p)^2.$$

Wedstrijd is 3 punten lang: In dit geval wint X met 2-1 met kans $pqp + (1-p)p(1-q)$. Y wint met 2-1 met kans $pq(1-p) + (1-p)pq$. Dus de kans dat de wedstrijd 3 punten lang is, is gelijk aan

$$pqp + (1-p)p(1-q) + pq(1-p) + (1-p)pq.$$

Dit geeft ons de volgende verwachte lengte van een 'Best-of-3' wedstrijd waarbij met 1 punt verschil gewonnen mag worden bij gebruik van de behind first, alternating order regel:

$$\begin{aligned}
VL^3_{BR} &= 2(p(1-q) + (1-p)^2) + 3(pqp + (1-p)p(1-q) \\
&+ pq(1-p) + (1-p)pq) \\
&= 2(p - pq + 1 - 2p + p^2) + 3(p^2q + p(1 - q - p + pq) \\
&+ pq - p^2q + pq - p^2q) \\
&= 2p - 2pq + 2 - 4p + 2p^2 + 3(p^2q + p - pq - p^2 \\
&+ p^2q + pq - p^2q + pq - p^2q) \\
&= -2p - 2pq + 2 + 2p^2 + 3(p - p^2 + pq) \\
&= -2p - 2pq + 2 + 2p^2 + 3p - 3p^2 + 3pq \\
&= 2 + p + pq - p^2 \qquad (40)
\end{aligned}$$

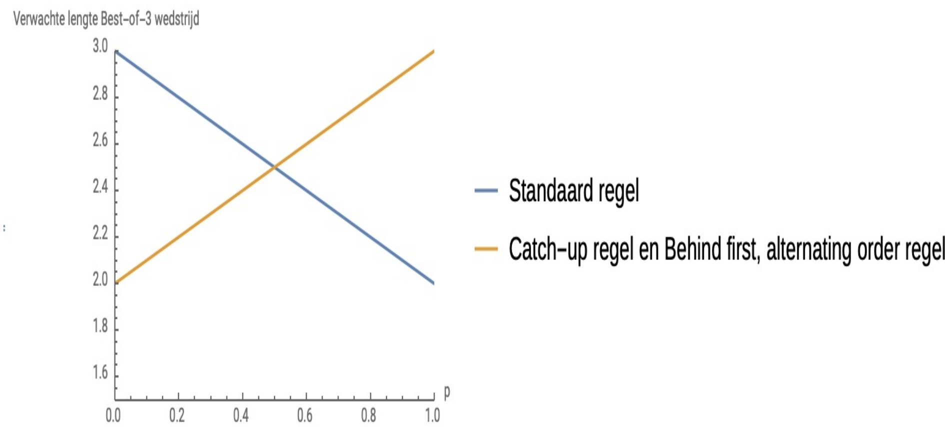
Dit kunnen we weer samenvatten in een tabel voor een 'Best-of-3' wedstrijd waarbij met 1 punt verschil gewonnen kan worden en dat ziet er dus als volgt uit:

Soort regel	Verwachte lengte
Standaard regel	$3 + pq - q - p^2$
Catch-up regel	$2 + p + pq - p^2$
Behind first, alternating order regel	$2 + p + pq - p^2$

We stellen nu dat beide spelers van een gelijk niveau zijn en dat geeft ons dus dat $p = q$. Dit geeft ons de volgende verwachte lengtes voor een 'Best-of-3' wedstrijd waarbij met 1 punt verschil gewonnen kan worden:

Soort regel	Verwachte lengte
Standaard regel	$3 - p$
Catch-up regel	$2 + p$
Behind first, alternating order regel	$2 + p$

Dit plotten we nu en dat geeft ons de volgende grafiek:



Figuur 6: Verwachte lengte 'Best-of-3' wedstrijd waarbij met 1 punt verschil gewonnen kan worden voor $p = q$ en $0 < p < 1$

We zien dat voor $p > 1/2$ dat de verwachte lengte van de 2 nieuwe regels groter is dan die van de standaard regel in een 'Best-of-3' wedstrijd waarbij met 1 punt verschil gewonnen kan worden. Er geldt dat $p = q$ en dit is de kans dat een speler een punt wint op zijn eigen service. Serveren is een groot voordeel ten opzichte van retourneren en daarom is de kans dat een speler een punt wint op zijn eigen service in de praktijk vrijwel altijd groter dan 1/2. Tenzij er een extreem verschil in niveau zit tussen beide spelers, maar wij hebben hier echter aangenomen dat beide spelers even goed zijn. Daarom zijn de catch-up regel en de behind first, alternating order interessante regels om in te voeren. De winstkansen van beide spelers veranderen namelijk niet ten opzichte van de standaard regel, maar de wedstrijden worden wel langer en dat zorgt dus voor meer spanning. Dit is een groot voordeel voor het publiek en de televisie, want deze willen namelijk graag lange spannende wedstrijden zien. Dit is echter het geval voor een 'Best-of-3' wedstrijd waarbij met 1 punt verschil gewonnen kan worden terwijl er in de praktijk ook langere wedstrijden zijn die met 2 punten verschil gewonnen moeten worden. Wij zullen daarom nu eerst gaan kijken naar de winstkansen van beide spelers bij gebruik van de verschillende regels in een 'Best-of-5' wedstrijd waarbij met 1 punt verschil gewonnen mag worden.

We nemen weer aan dat X begint. We gaan nu kijken naar de winstkans van X voor de 3 verschillende regels in een 'Best-of-5' wedstrijd waarbij met 1 punt verschil gewonnen mag worden. De winstkans van Y is namelijk gelijk aan $1 - P^5(X)$. Er geldt dat X als eerste 3 punten moet winnen om de 'Best-of-5' wedstrijd te winnen. Hieruit volgt dat X dus 3 punten wint en Y wint minder dan 3 punten. We gaan nu alle mogelijkheden in een tabel zetten. We stellen dat '1' = X wint het punt en '0' = X verliest het punt. We kijken eerst naar de winstkans van X bij gebruik van de standaard regel. Dit geeft ons het volgende:

Uitslag	Serveerder	Notatie Uitslag	Kans
111	XXX	XXX	p^3
1101	$XXXY$	$XX\overline{YX}$	$p^2(1-p)(1-q)$
11001	$XXXYY$	$XX\overline{Y}Y\overline{X}$	$p^2(1-p)q(1-q)$
1011	$XXYX$	$X\overline{YX}X$	$p(1-p)(1-q)p$
10101	$XXYXY$	$X\overline{YXYX}$	$p(1-p)(1-q)(1-p)(1-q)$
10011	$XXYYX$	$X\overline{Y}Y\overline{X}X$	$p(1-p)q(1-q)p$
0111	$XYXX$	$\overline{YX}XX$	$(1-p)(1-q)p^2$
01101	$XYXXY$	$\overline{YX}X\overline{YX}$	$(1-p)(1-q)p(1-p)(1-q)$
01011	$XYXYX$	$\overline{YXYX}X$	$(1-p)(1-q)(1-p)(1-q)p$
00111	$XYYXX$	$\overline{Y}Y\overline{X}XX$	$(1-p)q(1-q)p^2$

De som van alle kansen is de winstkans van X in een 'Best-of-5' wedstrijd waarbij met 1 punt verschil gewonnen mag worden bij gebruik van de standaard regel. We hebben het ingevuld bij WolframAlpha en dat geeft ons de volgende winstkans voor X in een 'Best-of-5 wedstrijd waarbij met 1 punt verschil gewonnen mag worden bij gebruik van de standaard regel:

$$P^5(X) = p^3 + 3(1-p)p^2(1-q) + 3(1-p)p^2(1-q)q + 3(1-p)^2p(1-q)^2 \quad (41)$$

We gaan nu kijken naar de winstkans van X in een 'Best-of-5' wedstrijd waarbij met 1 punt verschil gewonnen mag worden bij gebruik van de catch-up regel. Dit geeft ons het volgende:

Uitslag	Serveerder	Notatie Uitslag	Kans
111	XYY	$X\overline{X}\overline{X}$	$p(1-q)^2$
1101	$XYYX$	$X\overline{X}YX$	$p(1-q)qp$
11001	$XYYXX$	$X\overline{X}Y\overline{Y}X$	$p(1-q)q(1-p)p$
1011	$XYXY$	$XYX\overline{X}$	$pqp(1-q)$
10101	$XYXYX$	$XYXYX$	$pqpqp$
10011	$XYXXY$	$XY\overline{Y}X\overline{X}$	$pq(1-p)p(1-q)$
0111	$XXYY$	$\overline{Y}X\overline{X}\overline{X}$	$(1-p)p(1-q)^2$
01101	$XXYYX$	$\overline{Y}X\overline{X}YX$	$(1-p)p(1-q)qp$
01011	$XXYXY$	$\overline{Y}XYX\overline{X}$	$(1-p)pqp(1-q)$
00111	$XXXYY$	$\overline{Y}\overline{Y}X\overline{X}\overline{X}$	$(1-p)^2p(1-q)^2$

De som van alle kansen is de winstkans van X in een 'Best-of-5' wedstrijd waarbij met 1 punt verschil gewonnen mag worden bij gebruik van de catch-up regel. We hebben het ingevuld bij WolframAlpha en dat geeft ons de volgende winstkans voor X in een 'Best-of-5' wedstrijd waarbij met 1 punt verschil gewonnen mag worden bij gebruik van de catch-up regel:

$$P^5(X) = p^3 + 3(1-p)p^2(1-q) + 3(1-p)p^2(1-q)q + 3(1-p)^2p(1-q)^2 \quad (42)$$

We gaan nu kijken naar de winstkans van X in een 'Best-of-5' wedstrijd waarbij met 1 punt verschil gewonnen mag worden bij gebruik van de behind first, alternating order regel. Dit geeft ons het volgende:

Uitslag	Serveerder	Notatie Uitslag	Kans
111	XYY	$X\overline{X}\overline{X}$	$p(1-q)^2$
1101	$XYYY$	$X\overline{X}Y\overline{X}$	$p(1-q)q(1-q)$
11001	$XYYYX$	$X\overline{X}YYX$	$p(1-q)q^2p$
1011	$XYXY$	$XYX\overline{X}$	$pqp(1-q)$
10101	$XYXYX$	$XYXYX$	$pqpqp$
10011	$XYXXY$	$XY\overline{Y}X\overline{X}$	$pq(1-p)p(1-q)$
0111	$XXYY$	$\overline{Y}X\overline{X}\overline{X}$	$(1-p)p(1-q)^2$
01101	$XXYYX$	$\overline{Y}X\overline{X}YX$	$(1-p)p(1-q)qp$
01011	$XXYXY$	$\overline{Y}XYX\overline{X}$	$(1-p)pqp(1-q)$
00111	$XXXXY$	$\overline{Y}\overline{Y}XX\overline{X}$	$(1-p)^2p^2(1-q)$

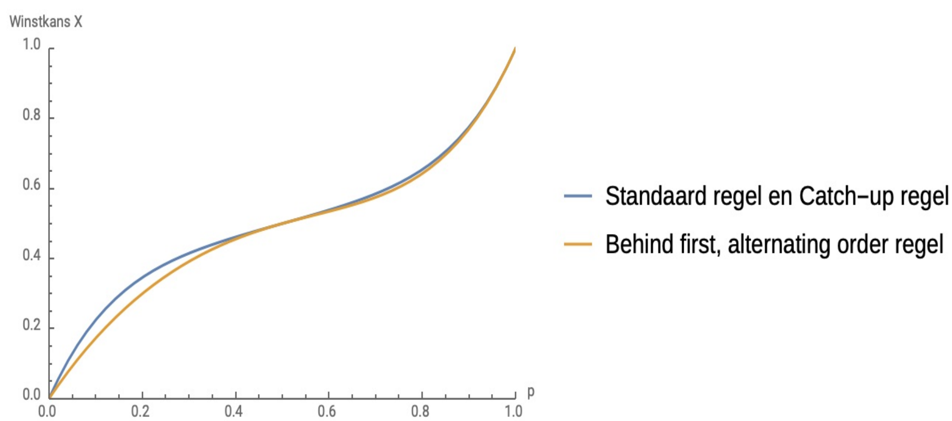
De som van alle kansen is de winstkans van X in een 'Best-of-5' wedstrijd waarbij met 1 punt verschil gewonnen mag worden bij gebruik van de catch-up regel. We hebben het ingevuld bij WolframAlpha en dat geeft ons de volgende winstkans voor X in een 'Best-of-5' wedstrijd waarbij met 1 punt verschil gewonnen mag worden bij gebruik van de catch-up regel:

$$P^5(X) = 2p - 2p^3 + p^4 - 3pq + 5p^2q - p^3q - p^4q - 4p^2q^2 + 4p^3q^2 + pq^3 - p^2q^3 \quad (43)$$

We stellen nu dat beide spelers van een gelijk niveau zijn en dat geeft ons dus dat $p = q$. Dit geeft ons de volgende winstkansen voor X in een 'Best-of-5' wedstrijd waarbij met 1 punt verschil gewonnen mag worden bij gebruik van de verschillende regels:

Soort regel	Winstkans X
Standaard regel	$p^3 + 3(1-p)^2p^2 + 3p^3(1-p)^2 + 3p(1-p)^4$
Catch-up regel	$p^3 + 3(1-p)^2p^2 + 3p^3(1-p)^2 + 3p(1-p)^4$
Behind first, alternating order regel	$2p^5 - 3p^4 + 3p^3 - 3p^2 + 2p$

Dit hebben we geplot en dat geeft ons de volgende grafiek:



Figuur 7: Winstkans X voor een 'Best-of-5' wedstrijd waarbij met 1 punt verschil gewonnen mag worden voor $p = q$ en $0 < p < 1$

We zien dus dat er voor een 'Best-of-5' wedstrijd waarbij met 1 punt verschil gewonnen kan worden geldt dat:

$$P^5_{SR}(X) = P^5_{CR}(X) \geq P^5_{BR}(X) \tag{44}$$

Er is alleen sprake van gelijkheid voor $p = 1/2$ en als $p \neq q$ voor $p + q = 1$.

In de praktijk zijn de wedstrijden langer dan 'Best-of-5' of 'Best-of-3'. Bijvoorbeeld 'Best-of-11', 'Best-of-15' of 'Best-of-21'. Voor deze langere wedstrijden geldt er ook dat $P_{SR}(X) = P_{CR}(X)$. Het bewijs hiervan is gebaseerd op het maken van een serviceschema wat lijkt op wat we hierboven hebben gedaan voor een 'Best-of-5' wedstrijd. Het is een lijst met resultaten van achtereenvolgens $k+1$ services van X en k services van Y. In een 'Best-of-$(2k+1)$' wedstrijd waarbij X begint met serveren mag X namelijk maximaal $k+1$ keer zelf serveren en Y mag maximaal k keer zelf serveren. Een voorbeeld van een serviceschema voor een 'Best-of-3' wedstrijd is als volgt: (W, W, W). In een 'Best-of-3' wedstrijd serveert X maximaal 2 keer en Y maximaal 1 keer. Dit betekent dus dat $X_1 = W$ dus wint X zijn eerste eigen service, $X_2 = W$ dus wint X zijn tweede eigen service ook en $Y_1 = W$ dus wint Y zijn eerste eigen service. Dit passen we nu toe op de standaard regel, de catch-up regel en een derde nieuwe regel. Dit is de auxiliary regel. We introduceren deze regel, omdat het ons helpt bij het bewijs van de stelling hieronder. De auxiliary regel is vrij simpel: in een 'Best-of-$(2k+1)$' wedstrijd serveert X eerst $k+1$ keer achter elkaar en vervolgens serveert Y k keer achter elkaar. Het toepassen van (W, W, W) op deze drie regels leverde het volgende op:

Standaard regel: X begint zoals altijd met serveren. Er geldt dus dat X zijn eerste eigen service wint$(X_1 = W)$ en dus het volgende punt weer mag serveren. Dit punt wint X ook$(X_2 = W)$. Hieruit volgt dat het derde punt niet meer gespeeld hoeft te worden en dus X de wedstrijd met 2-0 wint.

Catch-up regel: X begint zoals altijd met serveren. Er geldt dus dat X zijn eerste eigen service wint$(X_1 = W)$ en dus mag Y het volgende punt serveren. Dit punt wint $Y(Y_1 = W)$. Hieruit volgt dat X weer mag serveren en dit punt wint $X(X_2 = W)$. Dus X wint deze wedstrijd met 2-1.

Auxiliary regel: X begint zoals altijd met serveren. Er geldt dus dat X zijn eerste eigen service wint$(X_1 = W)$. Ook wint X zijn tweede eigen service$(X_2 = W)$. Hieruit volgt dat het derde punt niet meer gespeeld hoeft te worden en dus X de wedstrijd met 2-0 wint.

We zien nu dat de winnaar bij alle drie de regels hetzelfde is ondanks het verschil in score. Het idee achter het bewijs van de stelling hieronder is nu dat de standaard regel en de catch-up regel dezelfde winnaar opleveren als de auxiliary regel in een 'Best-of-$(2k+1)$' wedstrijd bij elk serviceschema. Daaruit volgt dan de stelling. De stelling en het bewijs zijn als volgt:

Stelling 7.1. *Stel dat $k \geq 1$. Dan geldt er in een 'Best-of-$(2k+1)$' wedstrijd dat $P_{SR}^{2k+1}(X) = P_{CR}^{2k+1}(X)$.*

Bewijs: We stellen nu dat we het volgende serviceschema hebben:

$$(X_1, \ldots, X_{k+1}, Y_1, \ldots, Y_k) \in \{W, L\}^{2k+1}.$$

We stellen ook dat x het aantal punten is dat X op zijn eigen service verliest en dat y het aantal punten is dat Y op zijn eigen service verliest. Bij gebruik van de auxiliary regel geldt er dat X in dit geval een puntentotaal heeft van $k+1+y-x$ punten en Y heeft een puntentotaal van $k-y+x$ punten. Daaruit volgt dat X alleen meer punten dan Y heeft en dus de wedstrijd wint als en dan slechts als $y \geq x$.

We gaan nu kijken wat er gebeurt bij gebruik van de standaard regel. Hiervoor geldt dat degene die serveert verandert als degene die serveert het punt verliest. We nemen nu aan dat $y \geq x$. Er geldt nu dat X blijft serveren totdat hij een punt verliest op zijn service. Vervolgens serveert Y weer totdat hij een punt verliest op zijn eigen service. Op het moment dat Y dus zijn service x keer heeft verloren, mag X het volgende punt serveren en heeft X ook x keer zijn eigen service verloren. Na service $k+1$ van X heeft X een puntentotaal van $k+1-x+y$ punten en we hebben aangenomen dat $y \geq x$. Hieruit volgt dat: $k+1-x+y \geq k+1$. Dus daaruit volgt dat X de wedstrijd heeft gewonnen nadat hij $k+1$ keer heeft geserveerd of al eerder. We stellen nu dat $x > y$ en we maken nog steeds gebruik van de standaard regel. Op het moment dat Y dus zijn service y keer heeft verloren, mag X het volgende punt serveren en heeft X ook y keer zijn eigen service verloren. We hebben aangenomen dat $x > y$ en daaruit volgt dat X nog een keer zijn service zal verliezen en op dat moment mag Y weer serveren. Vanaf dat moment blijft Y serveren zonder een punt op zijn service te verliezen totdat Y k keer heeft geserveerd. Hierna heeft Y een puntentotaal van $k-y+x$ punten en we hebben aangenomen dat $x > y$. Daaruit volgt dat: $k-y+x \geq k+1$ en dus heeft Y de wedstrijd gewonnen. Dus we kunnen nu concluderen dat in een 'Best-of-$(2k+1)$' wedstrijd bij gebruik van de standaard regel X alleen wint dan en slechts dan als $y \geq x$. Dit is ook het geval bij gebruik van de auxiliary regel.

We gaan tenslotte kijken naar wat er gebeurt bij gebruik van de catch-up regel. Voor deze regel geldt er dat X serveert totdat hij een punt op zijn eigen service wint en dan serveert Y totdat hij een punt op zijn eigen service wint. Er volgt hier dus uit dat Y alleen een punt op zijn eigen service kan winnen als X ook een punt op zijn eigen service heeft gewonnen. Dus nadat Y een punt op zijn eigen service heeft gewonnen, heeft X hetzelfde aantal punten gewonnen op zijn service. We nemen nu weer aan dat $y \geq x$. Volgens het serviceschema wint X $(k+1-x)$ services van zijn $k+1$ eigen services en Y wint $k-y$ services van zijn k services. Er geldt nu dat $k+1-x > k-y$ en daarom kijken we nu naar het moment dat Y $(k-y)$ keer zijn eigen service heeft gewonnen. Op dit moment heeft X dus ook $(k-y)$ keer zijn eigen service gewonnen. We stellen nu dat X op dit moment $x' \leq x$ keer zijn eigen service heeft verloren en dat Y op dit moment $y' \leq y$ keer zijn eigen service heeft verloren. Daaruit volgt dat X op dit moment een puntentotaal heeft van $k-y+y'$ punten en Y heeft op dit moment een puntentotaal van $k-y+x'$ punten. Na dit moment mag X het volgende punt serveren. Volgens het serviceschema zal X vanaf dit moment nog $(x-x')$ keer zijn eigen service verliezen en $(k+1-x-(k-y)) = k+1-x-k+y = y-x+1 > 0$ keer zijn eigen service winnen. We kijken nu naar het moment dat X $(k-y+1)$ zijn eigen service heeft gewonnen. Op dit moment heeft X een puntentotaal van $k-y+y'+1$ punten en Y heeft op dit moment een puntentotaal van maximaal $k-y+x'+(x-x') = k-y+x \leq k$ punten. Na dit moment mag Y weer serveren en Y zal al zijn $(y-y')$ resterende eigen services verliezen. Hieruit volgt dat nadat Y y keer heeft geserveerd, X een puntentotaal heeft van $k-y+y'+1+(y-y') = k+1$ punten. Daaruit volgt dat X de wedstrijd heeft gewonnen. We stellen nu dat $x > y$ en we maken nog steeds gebruik van de catch-up regel. Volgens het serviceschema wint X $(k+1-x)$ services van zijn $k+1$ eigen services en Y wint $k-y$ services van zijn k services. Er geldt nu dat $k+1-x < k-y$ en daarom kijken we nu naar het moment dat Y $(k+1-x)$ keer zijn eigen service heeft gewonnen. Op dit moment heeft X dus ook $(k+1-x)$ keer zijn eigen service gewonnen. We stellen nu dat X op dit moment $x' \leq x$ keer zijn eigen service heeft verloren en dat Y op dit moment $y' \leq y$ keer zijn eigen service heeft verloren. Daaruit volgt dat X op dit moment een puntentotaal heeft van $k+1-x+y'$ punten en Y heeft op dit moment een puntentotaal van $k+1-x+x'$ punten. Na dit moment mag X het volgende punt serveren. Volgens het serviceschema zal X vanaf dit moment zijn resterende $(x-x')$ services verliezen. Nadat X nu $k+1$ keer geserveerd heeft, heeft Y een puntentotaal van $k+1-x+x'+(x-x') = k+1$ punten. Dus wint Y de wedstrijd. Dus we kunnen nu concluderen dat in een 'Best-of-$(2k+1)$' wedstrijd bij gebruik van de catch-up regel X alleen wint dan en slechts dan als $y \geq x$. Dit is ook het geval bij gebruik van de auxiliary regel en de standaard regel. Dus voor elk serviceschema is de winnaar bij gebruik van alle drie de regels hetzelfde en daaruit volgt dus dat $P_{SR}^{2k+1}(X) = P_{CR}^{2k+1}(X)$ in een 'Best-of-$(2k+1)$' wedstrijd. □

Stelling 7.2. *Als we nu de winstkansen voor een 'Best-of-5' wedstrijd algemeniseren voor een 'Best-of-$(2k+1)$' dan volgt er dat:*

$$\begin{aligned} P_{SR}^{2k+1}(X) &= P_{CR}^{2k+1}(X) \\ &= \sum_{n=1}^{k+1}\sum_{m=0}^{n-1}\binom{k+1}{n}\binom{k}{m}p^n(1-p)^{k+1-n}q^m(1-q)^{k-m} \end{aligned} \tag{45}$$

Bewijs: Dit volgt uit het kiezen van een serviceschema waarbij X tenminste $k+1$ punten heeft gewonnen in totaal. We nemen aan dat X precies n punten heeft gewonnen op zijn $k+1$ eigen services volgens dit gekozen serviceschema. De kans hierop is p^n en het kan op $\binom{k+1}{n}$ manieren. Dus hieruit volgt de term $\binom{k+1}{n}p^n$. Logischerwijs heeft X volgens dit serviceschema dan $k+1-n$ van zijn $k+1$ eigen services verloren. Daaruit volgt de term $(1-p)^{k+1-n}$ We nemen ook aan dat Y m punten heeft gewonnen op zijn k services volgens dit gekozen serviceschema. De kans hierop is q^m en het kan op $\binom{k}{m}$ manieren. Dus hieruit volgt de term $\binom{k}{m}q^m$. Logischerwijs heeft Y volgens dit serviceschema dan $k-m$ van zijn k eigen services verloren. Daaruit volgt de term $(1-q)^{k-m}$. Dit geeft ons dus de formule hierboven. Er geldt dat X altijd verliest als $n=0$ en X wint dan en slechts dan als Y m punten wint op zijn eerste k eigen services met $m \leq n-1$. Stel dat $m \geq n$, dan geldt er ook dat $k-m > k+1-n$ en dus $n-m > 1$. Daaruit volgt dat $n \leq m < n-1$. Dit geeft ons een tegenspraak en daaruit volgt weer dat $m < n$ en dus $m \leq n-1$. □

We gaan nu ook de verwachte lengte van een 'Best-of-5' wedstrijd waarbij met 1 punt verschil gewonnen mag worden bepalen. We hebben ook voor de verschillende uitkomsten waarbij Y wint tabellen gemaakt met winstkansen om de verwachte lengte te kunnen bepalen. De verwachte lengte volgt uit de tabellen met winstkansen en uitkomsten die we gemaakt hebben voor de verschillende regels bij een 'Best-of-5' wedstrijd waarbij met 1 punt verschil gewonnen mag worden. Door de de kansen van de verschillende uitkomsten te vermenigvuldigen met de lengte van de uitkomst en dit allemaal bij elkaar op te tellen. Dit geeft ons de volgende verwachte lengte van een Best-of-5' wedstrijd waarbij met 1 punt verschil gewonnen mag worden bij gebruik van de standaard regel:

$$\begin{aligned}
VL^5_{SR} &= 3p^3 + 4p^2(1-p)(1-q) + 5p^2(1-p)q(1-q) + 4p^2(1-p)(1-q) \\
&+ 5p(1-p)^2(1-q)^2 + 5p^2(1-p)q(1-q) + 4(1-p)(1-q)p^2 \\
&+ 5p(1-p)^2(1-q)^2 + 5p(1-p)^2(1-q)^2 + 5(1-p)q(1-q)p^2 \\
&+ 3(1-p)q^2 + 4(1-p)^2(1-q)q + 5p(1-p)^2(1-q)q \\
&+ 4(1-p)^2(1-q)q + 5(1-p)^3(1-q)^2 + 5pq(1-p)^2(1-q) \\
&+ 4p(1-p)q^2 + 5p(1-p)^2(1-q)q + 5p(1-p)^2(1-q)q \\
&+ 5p^2(1-p)q^2 \\
&= 3p^3 + 12(1-p)p^2(1-q) + 15p(1-p)^2(1-q)^2 \\
&+ 15q(1-p)p^2(1-q) + 3(1-p)q^2 + 8(1-p)^2(1-q)q \\
&+ 5(1-p)^3(1-q)^2 + 4p(1-p)q^2 + 20p(1-p)^2(1-q)q \\
&+ 5p^2(1-p)q^2 \qquad (46)
\end{aligned}$$

De verwachte lengte van een Best-of-5' wedstrijd waarbij met 1 punt verschil gewonnen mag worden bij gebruik van de catch-up regel is gelijk aan:

$$\begin{aligned}
VL^5_{CR} &= 3p(1-q)^2 + 4p^2(1-q)q + 5p^2(1-q)q(1-p) + 4p^2q(1-q) \\
&+ 5p^3q^2 + 5p^2(1-p)q(1-q) + 4(1-p)p(1-q)^2 + 5p^2(1-p)q(1-q) \\
&+ 5p^2(1-p)q(1-q) + 5p(1-p)^2(1-q)^2 \\
&+ 3(1-p)^3 + 4pq(1-p)^2 + 5p(1-p)^2(1-q)q \\
&+ 4pq(1-p)^2 + 5p^2(1-p)q^2 + 5p(1-p)^2(1-q)q \\
&+ 4pq(1-p)^2 + 5p^2(1-p)q^2 + 5p^2(1-p)q^2 \\
&+ 5p(1-p)^2(1-q)q \\
&= 5p^3q^2 + 20(1-p)p^2(1-q)q + 8p^2(1-q)q + 5(1-p)^2p(1-q)^2 \\
&+ 4(1-p)p(1-q)^2 + 3p(1-q)^2 + 3(1-p)^3 \\
&+ 12pq(1-p)^2 + 15p(1-p)^2(1-q)q + 15p^2(1-p)q^2 \qquad (47)
\end{aligned}$$

De verwachte lengte van een Best-of-5' wedstrijd waarbij met 1 punt verschil gewonnen mag worden bij gebruik van de behind first, alternating order regel is gelijk aan:

$$\begin{aligned}
VL^5_{BR} &= 3p(1-q)^2 + 4pq(1-q)^2 + 5p^2(1-q)q^2 + 4p^2q(1-q) \\
&+ 5p^3q^2 + 5p^2(1-p)q(1-q) + 4(1-p)p(1-q)^2 + 5p^2(1-p)q(1-q) \\
&+ 5p^2(1-p)q(1-q) + 5p^2(1-p)^2(1-q) \\
&+ 3(1-p)^3 + 4p(1-p)^3 + 5p^2(1-p)^2q \\
&+ 4pq(1-p)^2 + 5p^2(1-p)q^2 + 5p(1-p)^2(1-q)q \\
&+ 4pq(1-p)^2 + 5p^2(1-p)q^2 + 5p^2(1-p)q^2 \\
&+ 5p(1-p)(1-q)q^2 \\
&= 5p^3q^2 + 15(1-p)p^2(1-q)q + 4p^2(1-q)q + 5(1-p)^2p^2(1-q) \\
&+ 4(1-p)p(1-q)^2 + 3p(1-q)^2 + 5p^2(1-q)q^2 + 4pq(1-q)^2 \\
&+ 3(1-p)^3 + 4p(1-p)^3 + 5p^2(1-p)^2q \\
&+ 8pq(1-p)^2 + 5p(1-p)^2(1-q)q + 15p^2(1-p)q^2 \\
&+ 5p(1-p)(1-q)q^2 \qquad (48)
\end{aligned}$$

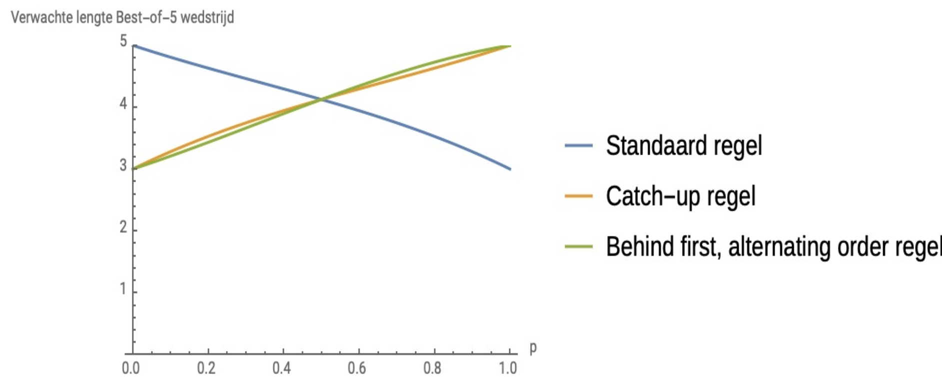
Dit kunnen we weer samenvatten in een tabel voor een 'Best-of-5' wedstrijd waarbij met 1 punt verschil gewonnen kan worden en dat ziet er dus als volgt uit:

Soort regel	Verwachte lengte
Standaard regel	$3p^3 + 12(1-p)p^2(1-q)$ $+15p(1-p)^2(1-q)^2 + 15q(1-p)p^2(1-q)$ $+3(1-p)q^2 + 8(1-p)^2(1-q)q$ $+5(1-p)^3(1-q)^2 + 4p(1-p)q^2$ $+20p(1-p)^2(1-q)q + 5p^2(1-p)q^2$
Catch-up regel	$5p^3q^2 + 20(1-p)p^2(1-q)q$ $+8p^2(1-q)q + 5(1-p)^2p(1-q)^2$ $+4(1-p)p(1-q)^2 + 3p(1-q)^2$ $+3(1-p)^3 + 12pq(1-p)^2$ $+15p(1-p)^2(1-q)q + 15p^2(1-p)q^2$
Behind first, alternating order regel	$5p^3q^2 + 15(1-p)p^2(1-q)q$ $+4p^2(1-q)q + 5(1-p)^2p^2(1-q)$ $+4(1-p)p(1-q)^2 + 3p(1-q)^2$ $+5p^2(1-q)q^2 + 4pq(1-q)^2$ $+3(1-p)^3 + 4p(1-p)^3$ $+5p^2(1-p)^2q + 8pq(1-p)^2$ $+5p(1-p)^2(1-q)q + 15p^2(1-p)q^2$ $+5p(1-p)(1-q)q^2$

We stellen nu dat beide spelers van een gelijk niveau zijn en dat geeft ons dus dat $p = q$. Dit geeft ons de volgende verwachte lengtes voor een 'Best-of-5' wedstrijd waarbij met 1 punt verschil gewonnen kan worden:

Soort regel	Verwachte lengte
Standaard regel	$3p^3 + 12p^2(1-p)^2$ $+15p(1-p)^4 + 15p^3(1-p)^2$ $+3p^2(1-p) + 5(1-p)^5$ $+4p^3(1-p) + 20p^2(1-p)^3$ $+5p^4(1-p) + 8p(1-p)^3$
Catch-up regel	$5p^5 + 20p^3(1-p)^2$ $+8p^3(1-p) + 5p(1-p)^4$ $+4p(1-p)^3 + 3p(1-p)^2$ $+3(1-p)^3 + 12p^2(1-p)^2$ $+15p^2(1-p)^3 + 15p^4(1-p)$
Behind first, alternating order regel	$5p^5 + 25p^3(1-p)^2$ $+4p^3(1-p) + 10p^2(1-p)^3$ $+4p(1-p)^3 + 3p(1-p)^2$ $+20p^4(1-p) + 12p^2(1-p)^2$ $+3(1-p)^3 + 4p(1-p)^3$

Dit plotten we nu en dat geeft ons de volgende grafiek:



Figuur 8: Verwachte lengte 'Best-of-5' wedstrijd waarbij met 1 punt verschil gewonnen kan worden voor $p = q$ en $0 < p < 1$

We zien dus dat er voor een 'Best-of-5' wedstrijd waarbij met 1 punt verschil gewonnen kan worden voor $p = q > 1/2$ geldt dat:

$$VL^5_{SR} < VL^5_{CR} < VL^5_{BR} \tag{49}$$

In de grafiek is het verschil tussen VL^5_{CR} en VL^5_{BR} niet goed te zien, maar als we inzoomen zien we wel dat $VL^5_{CR} < VL^5_{BR}$ voor $p = q > 1/2$.

In de praktijk zijn de wedstrijden langer dan 'Best-of-5' of 'Best-of-3'. Bijvoorbeeld 'Best-of-11', 'Best-of-15' of 'Best-of-21'. Voor deze langere wedstrijden geldt er ook dat $VL_{SR} < VL_{CR}$. Er geldt namelijk dat:

Stelling 7.3. *In een 'Best-of-$(2k+1)$' wedstrijd geldt er voor elke $k \geq 1$ en $0 < p < 1$, $0 < q < 1$ dat $VL^{2k+1}_{SR} < VL^{2k+1}_{CR}$ dan en slechts dan als $p + q > 1$.*

Bewijs: Het bewijs van deze stelling is uitgewerkt in [2]. Het is ook gebaseerd op het maken van serviceschema's zoals stelling 7.1. Het bewijs bevat veel lange sommen die niet korter geschreven konden worden en dat is de reden dat we ervoor gekozen hebben om het niet op te nemen in dit document.

We kijken nu naar de vergelijking tussen de standaard regel en de catch-up regel. Er geldt voor deze 2 regels het volgende:

1. Volgens Stelling 7.1 zijn de winstkansen van een speler of team gelijk voor beide regels in een 'Best-of-$(2k+1)$' wedstrijd.
2. Volgens Stelling 7.3 is de verwachte lengte van een 'Best-of-$(2k+1)$' wedstrijd groter bij gebruik van de catch-up regel dan bij gebruik van de standaard regel.

Dit zijn de redenen dat we ervoor pleiten om de standaard regel te vervangen door de catch-up regel bij de meeste servicesporten. De catch-up regel zorgt namelijk niet voor een hele grote verandering door winstkansen van spelers of teams te veranderen. Echter worden de wedstrijden bij gebruik van de catch-up regel wel langer en dus spannender dan bij gebruik van de standaard regel. Dit is een groot voordeel voor het publiek en dus commercieel ook een groot voordeel. Maar er is nog een derde regel, namelijk de behind first, alternating order regel. Deze regel verlaagt ook nog de winstkans van de speler of het team dat mag beginnen met serveren en maakt de wedstrijden dus eerlijker en deze regel maakt de wedstrijden nog langer dan de wedstrijden waarbij gebruik wordt gemaakt van de catch-up regel. Dus waarom dan niet deze regel invoeren in plaats van de standaard regel? In korte wedstrijden zoals 'Best-of-5' zorgt de behind first, alternating order regel voor significant meer eerlijkheid in de wedstrijden. Echter dit soort korte wedstrijden komen in de praktijk bijna niet voor en bij langere wedstrijden komen de winstkansen van de catch-up regel en dus ook de standaard regel vrij dicht in de buurt van de 50 %. Dus dan zorgt de behind first, alternating order regel niet voor significant meer eerlijkheid in de wedstrijden en het verschil in verwachte lengte van de wedstrijden is ook extreem klein ten opzichte van de catch-up regel. De catch-up regel zou dus de beste regel zijn om in te voeren in de meeste servicesporten in plaats van de standaard regel, omdat het niet radicaal veel verandert zoals de winstkansen van de spelers of teams. Maar wel de wedstrijden langer en dus spannender maakt.

7.2 Winst met 2 punten verschil

Bij veel servicesporten moet een game/set/wedstrijd met 2 punten verschil gewonnen worden in plaats van met 1 punt verschil. Daarom gaan we nu kijken naar de winstkansen van beide spelers of teams als er met 2 punten verschil gewonnen moet worden. Ook gaan we kijken naar de verwachte lengte van wedstrijden waarbij met 2 punten verschil gewonnen moet worden. We beginnen eerst weer met het analyseren van een 'Best-of-3' wedstrijd waarbij met 2 punten verschil gewonnen moet worden. We gaan dit eerst doen voor de standaard regel.

Standaard regel: We stellen weer dat X begint met serveren. In een 'Best-of-3' wedstrijd waarbij met 2 punten verschil gewonnen moet worden kan X nu alleen winnen met 2-0 met kans p^2. De uitslag 2-1 is namelijk niet genoeg om te winnen voor X, want er is geen sprake van 2 punten verschil. Dus als er een 1-1 stand op het bord komt, dan wordt de wedstrijd verlengd totdat een van beide spelers of teams een voorsprong heeft van 2 punten. Bij gebruik van de standaard regel zijn er 2 manieren waarop een 1-1 stand kan plaatsvinden, namelijk: $X\overline{Y}$ met kans $p(1-p)$ en $\overline{Y}X$ met kans $(1-p)(1-q)$. Dus de kans op een 1-1 gelijkspel in een 'Best-of-3' wedstrijd waarbij met 2 punten verschil gewonnen moet worden bij gebruik van de standaard regel is gelijk aan:

$$P^3_{SR}(G) = p(1-p)+(1-p)(1-q) = p-p^2+1-p-q+pq = 1+pq-p^2-q \quad (50)$$

We stellen nu dat beide spelers van een gelijk niveau zijn en dat geeft ons dus dat $p = q$(dit houden we hieronder aan). Dit geeft ons het volgende:

$$P^3_{SR}(G) = 1 + p^2 - p^2 - p = 1 - p \quad (51)$$

Er geldt in een verlenging van een 'Best-of-3' wedstrijd(dus als er sprake is van een 1-1 gelijkspel) bij gebruik van de standaard regel dat de kans dat X wint als X zelf begint met serveren gelijk is aan $P^3_{SR}(X)$ en dus is kans dat Y wint als X begint met serveren gelijk aan $(1 - P^3_{SR}(X))$ in een verlenging van een 'Best-of-3' wedstrijd. Er geldt dat $p = q$ en daaruit volgt weer dat in een verlenging van de 'Best-of-3' wedstrijd de kans dat X wint als Y begint met serveren ook gelijk is aan $(1 - P^3_{SR}(X))$. Daaruit volgt dat de winstkans van X in een 'Best-of-3' wedstrijd waarbij met 2 punten verschil gewonnen moet worden bij gebruik van de standaard regel gelijk is aan:

$$P^3_{SR}(X) = p^2 + (p(1-p)(1 - P^3_{SR}(X))) + ((1-p)^2(P^3_{SR}(X)))$$

De eerste term in dit geheel is de kans op 2-0 winst voor X. De tweede term is de kans op $X\overline{Y}$ vermenigvuldigd met de kans dat X wint als Y begint met serveren in een verlenging van een 'Best-of-3' wedstrijd waarbij met 2 punten verschil gewonnen moet worden bij gebruik van de standaard regel. We vermenigvuldigen hiermee, omdat bij $X\overline{Y}$ Y mag beginnen met serveren in deze verlenging. De derde term is de kans op $\overline{YX}$ vermenigvuldigd met de kans dat X wint als X begint met serveren in een verlenging van een 'Best-of-3' wedstrijd waarbij met 2 punten verschil gewonnen moet worden bij gebruik van de standaard regel. We vermenigvuldigen hiermee, omdat bij $\overline{YX}$ X mag beginnen met serveren in deze verlenging. Dit werken we nu verder uit en dat geeft ons:

$$
\begin{aligned}
P^3_{SR}(X) &= p^2 + ((p - p^2)(1 - P^3_{SR}(X))) + ((1 - 2p + p^2)P^3_{SR}(X)) \\
P^3_{SR}(X) &= p^2 + p - pP^3_{SR}(X) - p^2 + p^2P^3_{SR}(X) + P^3_{SR}(X) - 2pP^3_{SR}(X) + p^2P^3_{SR}(X) \\
P^3_{SR}(X) &= p - 3pP^3_{SR}(X) + 2p^2P^3_{SR}(X) + P^3_{SR}(X) \\
P^3_{SR}(X) &- P^3_{SR}(X) - 2p^2P^3_{SR}(X) + 3pP^3_{SR}(X) = p \\
3pP^3_{SR}(X) &- 2p^2P^3_{SR}(X) = p \\
P^3_{SR}(X)&(3p - 2p^2) = p \\
P^3_{SR}(X) &= \frac{p}{3p - 2p^2} \\
P^3_{SR}(X) &= \frac{1}{3 - 2p}
\end{aligned}
$$

Dus de winstkans van X in een 'Best-of-3' wedstrijd waarbij met 2 punten verschil gewonnen moet worden bij gebruik van de standaard regel gelijk is aan:

$$P^3_{SR}(X) = \frac{1}{3 - 2p} \tag{52}$$

We gaan nu kijken naar de winstkansen in een 'Best-of-3' wedstrijd waarbij met 2 punten verschil gewonnen moet worden bij gebruik van de catch-up regel.

Catch-up regel: We stellen weer dat X begint met serveren. In een 'Best-of-3' wedstrijd waarbij met 2 punten verschil gewonnen moet worden kan X nu alleen winnen met 2-0 met kans $p(1 - q)$. De uitslag 2-1 is namelijk niet genoeg om te winnen voor X, want er is geen sprake van 2 punten verschil. Dus als er een 1-1 stand op het bord komt, dan wordt de wedstrijd verlengd totdat een van beide spelers of teams een voorsprong heeft van 2 punten. Bij gebruik van de catch-up regel zijn er 2 manieren waarop een 1-1 stand kan plaatsvinden, namelijk: XY met kans pq en $\overline{Y}X$ met kans $(1-p)p$. Dus de kans op een 1-1 gelijkspel in een 'Best-of-3' wedstrijd waarbij met 2 punten verschil gewonnen moet worden bij gebruik van de catch-up regel is gelijk aan:

$$P^3_{CR}(G) = pq + (1-p)p = pq + p - p^2 \tag{53}$$

We stellen nu dat beide spelers van een gelijk niveau zijn en dat geeft ons dus dat $p = q$(dit houden we hieronder aan). Dit geeft ons het volgende:

$$P^3_{CR}(G) = p^2 + p - p^2 = p \tag{54}$$

Er geldt in een verlenging van een 'Best-of-3' wedstrijd(dus als er sprake is van een 1-1 gelijkspel) bij gebruik van de catch-up regel dat de kans dat X wint als X zelf begint met serveren gelijk is aan $P^3_{CR}(X)$ en dus is kans dat Y wint als X begint met serveren gelijk aan $(1 - P^3_{CR}(X))$ in een verlenging van een 'Best-of-3' wedstrijd. Er geldt dat $p = q$ en daaruit volgt weer dat in een verlenging van de 'Best-of-3' wedstrijd de kans dat X wint als Y begint met serveren ook gelijk is aan $(1 - P^3_{CR}(X))$. Daaruit volgt dat de winstkans van X in een 'Best-of-3' wedstrijd waarbij met 2 punten verschil gewonnen moet worden bij gebruik van de catch-up regel gelijk is aan:

$$P^3_{CR}(X) = p(1-p) + (p^2 P^3_{CR}(X)) + ((1-p)p(1 - P^3_{CR}(X)))$$

De eerste term in dit geheel is de kans op 2-0 winst voor X. De tweede term is de kans op XY vermenigvuldigd met de kans dat X wint als X begint met serveren in een verlenging van een 'Best-of-3' wedstrijd waarbij met 2 punten verschil gewonnen moet worden bij gebruik van de catch-up regel. We vermenigvuldigen hiermee, omdat bij XY X mag beginnen met serveren in deze verlenging. De derde term is de kans op $\overline{Y}X$ vermenigvuldigd met de kans dat X wint als Y begint met serveren in een verlenging van een 'Best-of-3' wedstrijd waarbij met 2 punten verschil gewonnen moet worden bij gebruik van de catch-up regel. We vermenigvuldigen hiermee, omdat bij $\overline{Y}X$ Y mag beginnen met serveren in deze verlenging.

Dit werken we nu verder uit en dat geeft ons:

$$
\begin{aligned}
&P^3_{CR}(X) = p(1-p) + (p^2 P^3_{CR}(X)) + ((1-p)p(1-P^3_{CR}(X)))\\
&P^3_{CR}(X) = p - p^2 + p^2 P^3_{CR}(X) + ((p-p^2)(1-P^3_{CR}(X)))\\
&P^3_{CR}(X) = p - p^2 + p^2 P^3_{CR}(X) + p - pP^3_{CR}(X) - p^2 + p^2 P^3_{CR}(X)\\
&P^3_{CR}(X) = 2p - 2p^2 + 2p^2 P^3_{CR}(X) - pP^3_{CR}(X)\\
&P^3_{CR}(X) + pP^3_{CR}(X) - 2p^2 P^3_{CR}(X) = 2p - 2p^2\\
&P^3_{CR}(X)(1+p-2p^2) = 2p - 2p^2\\
&P^3_{CR}(X) = \frac{2p-2p^2}{1+p-2p^2}\\
&P^3_{CR}(X) = \frac{2p(1-p)}{(1-p)(2p+1)}\\
&P^3_{CR}(X) = \frac{2p}{(2p+1)}
\end{aligned}
$$

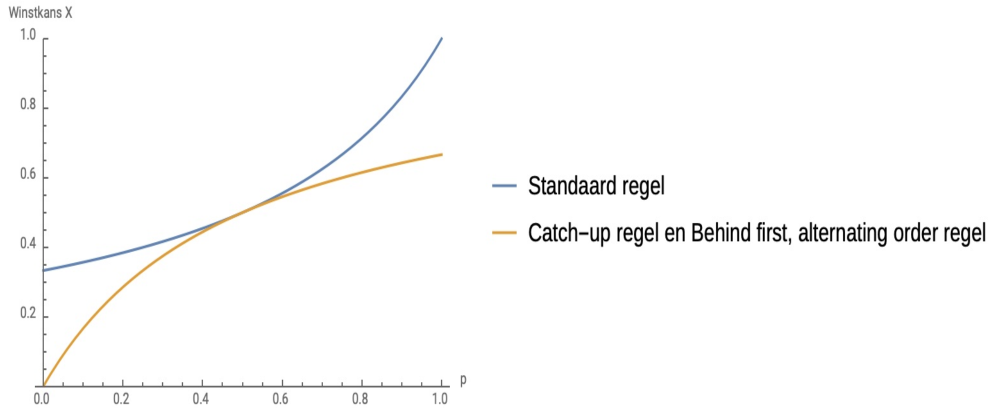
Dus de winstkans van X in een 'Best-of-3' wedstrijd waarbij met 2 punten verschil gewonnen moet worden bij gebruik van de catch-up regel gelijk is aan:

$$P^3_{CR}(X) = \frac{2p}{2p+1} \tag{55}$$

De behind first, alternating order regel is hetzelfde als de catch-up regel voor een 'Best-of-3' wedstrijd waarbij met 2 punten verschil gewonnen moet worden. Dus de winstkansen voor een 'Best-of-3' wedstrijd waarbij met 2 punten verschil gewonnen moet worden bij gebruik van de verschillende regels zijn gelijk aan:

Soort regel	Winstkans X
Standaard regel	$\frac{1}{3-2p}$
Catch-up regel	$\frac{2p}{2p+1}$
Behind first, alternating order regel	$\frac{2p}{2p+1}$

Dit plotten we nu en dat geeft ons de volgende grafiek:



Figuur 9: Winstkans X in een 'Best-of-3' wedstrijd waarbij met 2 punten verschil gewonnen moet worden voor $p = q$ en $0 < p < 1$

We zien dat de winstkansen voor de drie verschillende regels gelijk zijn aan 1/2 voor $p = q = 1/2$. Hoe dichter p bij de 1 in de buurt komt, des te meer stijgt $P^3_{SR}(X)$ richting de 1. Terwijl $P^3_{CR}(X)$ steeds minder stijgt richting 2/3. Dus als $p = q > 1/2$, wat heel normaal is in de praktijk vanwege het feit dat serveren een groot voordeel is, heeft X een groter voordeel bij gebruik van de standaard regel ten opzichte van de catch-up regel en de behind first, alternating order regel. Er geldt namelijk dat X begint met serveren en als X zijn eerste service wint, mag hij weer serveren bij gebruik van de standaard regel en dan is de kans groter om dit punt en dus de wedstrijd te winnen dan wanneer X niet het tweede punt zelf mag serveren. Dat is namelijk het geval bij gebruik van de 2 andere regels als X zijn eerste service wint. Daarom heeft X dus een groter voordeel bij gebruik van de standaard regel ten opzichte van de catch-up regel en de behind first, alternating order regel voor $p = q > 1/2$ in een 'Best-of-3' wedstrijd waarbij met 2 punten verschil gewonnen moet worden voor $p = q$.

We gaan nu nog kijken naar de verwachte lengte van een 'Best-of-3' wedstrijd waarbij met 2 punten verschil gewonnen moet worden. We gaan dit eerst bepalen voor de standaard regel. Het is duidelijk dat de wedstrijd na 2 punten afgelopen kan zijn bij een 2-0 uitslag voor een van beiden of dat er een 1-1 gelijkspel plaatsvindt en dat de wedstrijd dan wordt verlengd totdat een van beiden 2 punten voorsprong heeft. Dit geeft ons het volgende:

Wedstrijd is 2 punten lang: Er geldt dat X in dit geval wint met kans p^2 en Y wint in dit geval met kans $(1-p)q$. Dus de kans dat de wedstrijd 2 punten lang is, is gelijk aan:

$$p^2 + (1-p)q.$$

1-1 gelijkspel: Dit kan op 2 manieren, namelijk: $X\overline{Y}$ met kans $p(1-p)$ en $\overline{Y}\overline{X}$ met kans $(1-p)(1-q)$. Dus de kans op een 1-1 gelijkspel is gelijk aan:

$$p(1-p) + (1-p)(1-q).$$

Hieruit volgt dat de verwachte lengte van een 'Best-of-3' wedstrijd waarbij met 2 punten verschil gewonnen moet worden bij gebruik van de standaard regel gelijk is aan:

$$VL^3_{SR} = (p^2 + (1-p)q)(2) + ((p(1-p) + (1-p)(1-q))(VL^3_{SR} + 2))$$

De eerste term in dit geheel is de kans dat een wedstrijd 2 punten lang is vermenigvuldigd met de lengte van de wedstrijd. De tweede term in dit geheel is de kans op een 1-1 gelijkspel vermenigvuldigd met $(VL^3_{SR} + 2)$. Bij een 1-1 gelijkspel wordt de wedstrijd verlengd. Dit betekent dat de wedstrijd eigenlijk weer opnieuw begint, maar er zijn wel al 2 punten gespeeld. Dus de lengte is gelijk $(VL^3_{SR} + 2)$. Dit werken we nu verder uit en dat geeft ons:

$$\begin{aligned}
&VL^3_{SR} = (p^2 + (1-p)q)(2) + ((p(1-p) + (1-p)(1-q))(VL^3_{SR} + 2)) \\
&VL^3_{SR} = (p^2 + q - pq)(2) + (p - p^2 + 1 - p - q + pq)(VL^3_{SR} + 2) \\
&VL^3_{SR} = 2p^2 + 2q - 2pq + (1 + pq - q - p^2)(VL^3_{SR} + 2) \\
&VL^3_{SR} = 2p^2 + 2q - 2pq + 2 + 2pq - 2q - 2p^2 + VL^3_{SR} + pqVL^3_{SR} - qVL^3_{SR} - p^2VL^3_{SR} \\
&VL^3_{SR} - VL^3_{SR} + qVL^3_{SR} + p^2VL^3_{SR} - pqVL^3_{SR} = 2 \\
&qVL^3_{SR} + p^2VL^3_{SR} - pqVL^3_{SR} = 2 \\
&VL^3_{SR}(q + p^2 - pq) = 2 \\
&VL^3_{SR} = \frac{2}{q + p^2 - pq}
\end{aligned}$$

Dus de verwachte lengte van een 'Best-of-3' wedstrijd waarbij met 2 punten verschil gewonnen moet worden bij gebruik van de standaard regel is gelijk aan:

$$VL^3_{SR} = \frac{2}{q + p^2 - pq} \tag{56}$$

We stellen nu dat beide spelers van een gelijk niveau zijn en dat geeft ons dus dat $p = q$. Dit geeft ons het volgende:

$$VL^3_{SR} = \frac{2}{p + p^2 - p^2} = \frac{2}{p} \tag{57}$$

We gaan nu de verwachte lengte bepalen van een 'Best-of-3' wedstrijd waarbij met 2 punten verschil gewonnen moet worden bij gebruik van de catch-up regel. Het is duidelijk dat de wedstrijd na 2 punten afgelopen kan zijn bij een 2-0 uitslag voor een van beiden of dat er een 1-1 gelijkspel plaatsvindt en dat de wedstrijd dan wordt verlengd totdat een van beiden 2 punten voorsprong heeft. Dit geeft ons het volgende:

<u>Wedstrijd is 2 punten lang:</u> Er geldt dat X in dit geval wint met kans $p(1-q)$ en Y wint in dit geval met kans $(1-p)^2$. Dus de kans dat de wedstrijd 2 punten lang is, is gelijk aan:

$$p(1-q) + (1-p)^2.$$

<u>1-1 gelijkspel:</u> Dit kan op 2 manieren, namelijk: XY met kans pq en $\overline{Y}X$ met kans $(1-p)p$. Dus de kans op een 1-1 gelijkspel is gelijk aan:

$$pq + (1-p)p.$$

Hieruit volgt dat de verwachte lengte van een 'Best-of-3' wedstrijd waarbij met 2 punten verschil gewonnen moet worden bij gebruik van de catch-up regel gelijk is aan:

$$VL^3_{CR} = (p(1-q) + (1-p)^2)(2) + ((pq + (1-p)p)(VL^3_{CR} + 2))$$

De eerste term in dit geheel is de kans dat een wedstrijd 2 punten lang is vermenigvuldigd met de lengte van de wedstrijd. De tweede term in dit geheel is de kans op een 1-1 gelijkspel vermenigvuldigd met $(VL^3_{CR}+2)$. Bij een 1-1 gelijkspel wordt de wedstrijd verlengd. Dit betekent dat de wedstrijd eigenlijk weer opnieuw begint, maar er zijn wel al 2 punten gespeeld. Dus de lengte is gelijk $(VL^3_{CR}+2)$. Dit werken we nu verder uit en dat geeft ons:

$$
\begin{aligned}
&VL^3_{CR} = (p(1-q)+(1-p)^2)(2)+((pq+(1-p)p)(VL^3_{CR}+2))\\
&VL^3_{CR} = (p-pq+1-2p+p^2)(2)+(pq+p-p^2)(VL^3_{CR}+2)\\
&VL^3_{CR} = (1+p^2-pq-p)(2)+2pq+2p-2p^2+pqL^3_{CR}+pL^3_{CR}-p^2L^3_{CR}\\
&VL^3_{CR}+p^2VL^3_{CR}-pqVL^3_{CR}-pVL^3_{CR}=2\\
&VL^3_{CR}(1+p^2-pq-p)=2\\
&VL^3_{CR}=\frac{2}{1+p^2-pq-p}
\end{aligned}
$$

Dus de verwachte lengte van een 'Best-of-3' wedstrijd waarbij met 2 punten verschil gewonnen moet worden bij gebruik van de catch-up regel is gelijk aan:

$$VL^3_{CR}=\frac{2}{1+p^2-pq-p} \tag{58}$$

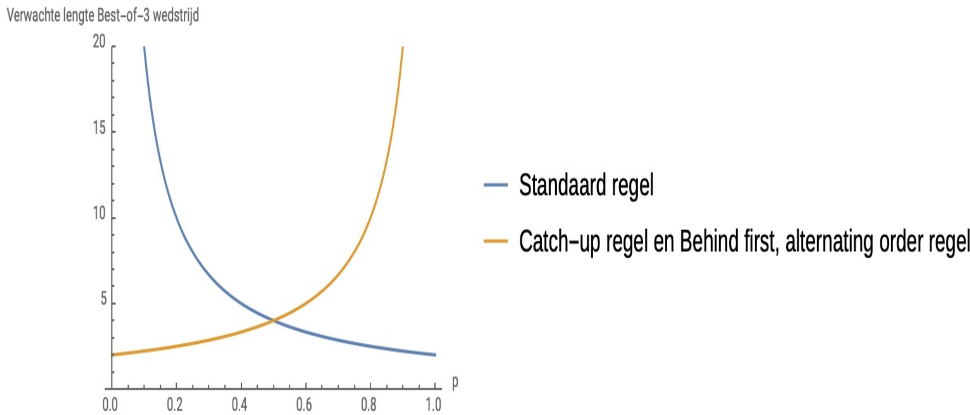
We stellen nu dat beide spelers van een gelijk niveau zijn en dat geeft ons dus dat $p=q$. Dit geeft ons het volgende:

$$VL^3_{CR}=\frac{2}{1+p^2-p^2-p}=\frac{2}{1-p} \tag{59}$$

De behind first, alternating order regel is hetzelfde als de catch-up regel voor een 'Best-of-3' wedstrijd waarbij met 2 punten verschil gewonnen moet worden. Dus de verwachte lengte van een 'Best-of-3' wedstrijd waarbij met 2 punten verschil gewonnen moet worden bij gebruik van de verschillende regels voor $p=q$ is gelijk aan:

Soort regel	Verwachte lengte
Standaard regel	$\frac{2}{p}$
Catch-up regel	$\frac{2}{1-p}$
Behind first, alternating order regel	$\frac{2}{1-p}$

Dit plotten we nu en dat geeft ons de volgende grafiek:



Figuur 10: Verwachte lengte van een 'Best-of-3' wedstrijd waarbij met 2 punten verschil gewonnen moet worden voor $p = q$ en $0 < p < 1$

We zien dus dat de verwachte lengte van een 'Best-of-3' wedstrijd waarbij met 2 punten verschil gewonnen moet worden voor $p = q = 1/2$ gelijk is aan 4 voor alle drie de regels. Voor $p = q > 1/2$ is de verwachte lengte van een 'Best-of-3' wedstrijd waarbij met 2 punten verschil gewonnen moet worden voor de catch-up regel en de behind first, alternating order regel groter dan voor de standaard regel. In de praktijk zijn p en q vrijwel altijd groter dan 1/2 en dus zijn de wedstrijden waarbij gebruik wordt gemaakt van de catch-up regel en de behind first, alternating order regel altijd langer dan de wedstrijden waarbij gebruik wordt gemaakt van de standaard regel. Net zoals bij de wedstrijden waarbij met 1 punt verschil gewonnen mag worden. Dus zijn deze regels commercieel en voor het publiek erg aantrekkelijk. Ook maken deze 2 regels de wedstrijden waarbij met 2 punten verschil gewonnen moet worden iets eerlijker ten opzichte van de standaard regel. Dit komt, omdat de winstkans van X, die als eerste mag serveren, voor p en q groter dan 1/2 dichter bij 1/2 zit dan bij gebruik van de catch-up regel. Hoe groter het verschil tussen p en q, des te verder zal de winstkans van X van de 50% afliggen en dat is zeer logisch. Echter de standaard regel zorgt voor uitvergroting van dit verschil en de catch-up regel en de behind first, alternating order regel doen dat niet. Daarom eerlijker en spannender. De catch-up regel heeft nog steeds de voorkeur vanwege het feit dat het de winstkans van X

niet verandert ten opzichte van de standaard regel bij wedstrijden waarbij met 1 punt verschil gewonnen mag worden.

In de praktijk zijn wedstrijden vaak langer dan 'Best-of-3' of 'Best-of-5' en daarom is er in artikel [2] ook gekeken naar langere wedstrijden. Namelijk 'Best-of-11' en 'Best-of-21'. De reden dat wij hier niet zelf nog naar gekeken hebben is dat er bij zulke lange wedstrijden heel veel verschillende mogelijkheden zijn qua scoreverloop. Om voor deze wedstrijden dan de winstkansen van de spelers of teams en verwachte lengte van de wedstrijden te berekenen hebben we een computerprogramma nodig en die hebben we niet. Echter onze berekeningen voor 'Best-of-3' en 'Best-of-5' wedstrijden geven al een goed beeld van het geheel. De winstkansen van de spelers of teams zijn voor langere wedstrijden waarbij met 1 punt verschil gewonnen moet worden gelijk voor de standaard regel en de catch-up regel en de verwachte lengte van deze wedstrijden is altijd langer bij gebruik van de catch-up regel dan bij gebruik van de standaard regel. Dit zijn de resultaten van stellingen 7.1 en 7.3. Echter als er met 2 punten verschil gewonnen moet worden verwachten we bij langere wedstrijden ook dat gebruik van de catch-up regel voor een grotere verwachte lengte van deze wedstrijden zal zorgen dan gebruik van de standaard regel. Daarnaast zullen de winstkansen van beide teams of spelers in langere wedstrijden bij gebruik van de catch-up regel iets dichter bij de 50% liggen dan bij gebruik van de standaard regel, maar dit verschil tussen de winstkansen is minimaal. Dit verwachten we op basis van onze berekeningen voor 'Best-of-3' wedstrijden. We kijken nu naar de tabel uit [2] om onze verwachtingen te toetsen:

Figuur 11: Kans dat A en B wint in een 'Best-of-m' wedstrijd waarbij met 1 punt verschil gewonnen mag worden(Pr), kans dat A en B wint in een 'Best-of-m' wedstrijd waarbij met 2 punten verschil gewonnen moet worden(Qr), kans op een gelijkspel in een 'Best-of-m' wedstrijd waarbij met 2 punten verschil gewonnen moet worden(Pr(T)) en verwachte lengte van een 'Best-of-m' wedstrijd voor 1 en 2 punten verschil, voor $p = 2/3$ en $p = 3/4$

$p = \frac{2}{3}$	Best-of-m	$Pr(A)$	$Pr(B)$	$Qr(A)$	$Qr(B)$	$Pr(T)$	$EL(WB1)$	$EL(WB2)$
	$m = 3$	0.593	0.407	0.600	0.400	0.333	2.333	3.000
SR	$m = 11$	0.544	0.456	0.544	0.456	0.173	8.650	8.995
	$m = 21$	0.531	0.469	0.531	0.469	0.124	17.251	17.500
	$m = 3$	0.593	0.407	0.571	0.429	0.667	2.667	6.000
CR	$m = 11$	0.544	0.456	0.542	0.458	0.346	9.825	11.553
	$m = 21$	0.531	0.469	0.531	0.469	0.248	19.126	20.368
$p = \frac{3}{4}$	Best-of-m	$Pr(A)$	$Pr(B)$	$Qr(A)$	$Qr(B)$	$Pr(T)$	$EL(WB1)$	$EL(WB2)$
	$m = 3$	0.656	0.344	0.667	0.333	0.250	2.250	2.667
SR	$m = 11$	0.573	0.427	0.574	0.426	0.139	8.240	8.472
	$m = 21$	0.551	0.449	0.552	0.448	0.101	16.540	16.708
	$m = 3$	0.656	0.344	0.600	0.400	0.750	2.750	8.000
CR	$m = 11$	0.573	0.427	0.567	0.433	0.418	10.080	13.006
	$m = 21$	0.551	0.449	0.550	0.450	0.303	19.513	21.631

Bron: [2]

We kunnen na het zien en bestuderen van deze tabel de volgende conclusies trekken. We zien dat de resultaten overeenkomen met de stellingen 7.1 en 7.3. We zien ook dat de winstkansen van beide teams of spelers bij gebruik van de catch-up regel in wedstrijden waarbij met 2 punten verschil gewonnen moet worden iets dichter bij 50% liggen dan bij gebruik van de catch-up regel, maar dit verschil in winstkansen is te verwaarlozen. Ook zien we dat wedstrijden waarbij met 2 punten verschil gewonnen moet worden altijd een grotere verwachte lengte hebben dan wedstrijden waarbij met 1 punt verschil gewonnen mag worden. Daarnaast zien we ook dat de catch-up regel altijd voor langere wedstrijden zorgt dat de standaard regel. Dus onze verwachtingen, die we op basis van onze berekeningen voor een 'Best-of-3' wedstrijd waarbij met 2 punten verschil gewonnen moet worden hebben gevormd, zijn waar.

Bijna alle servicesporten maken van gebruik van de standaard regel in combinatie met het winnen met 2 punten verschil. Behalve raquetball, want bij deze servicesport mag er gewonnen worden met 1 punt verschil. Wij pleiten voor het afschaffen van deze standaard regel in al deze servicesporten en het invoeren van de catch-up regel. Wedstrijden zullen daardoor namelijk langer en dus spannender worden zonder de winstkansen van beide spelers of teams drastisch te veranderen. Bij wedstrijden waarbij gewonnen mag worden met 1 punt verschil zijn de winstkansen van beide spelers of teams namelijk bij gebruik van beide regels gelijk aan elkaar en bij wedstrijden waarbij met 2 punten verschil gewonnen moet worden zijn deze winstkansen vrijwel gelijk aan elkaar.

8 Andere manieren om de sporten eerlijker te maken

We hebben nu gekeken naar verschillende sporten. We hebben eerst gekeken naar de penaltyserie in het voetbal en daarna hebben we nog verschillende servicesporten behandeld. We hebben gekeken naar de regels die nu gebruikt worden binnen de verschillende sporten en dan in het bijzonder naar hoe eerlijk deze regels zijn en of deze regels voor veel spanning binnen wedstrijden zorgen. De regels die nu gebruikt worden binnen de penaltyserie in het voetbal en die in vele servicesporten worden gebruikt zijn vaak niet eerlijk of zorgen voor niet genoeg spanning binnen wedstrijden. Daarom hebben we nieuwe regels behandeld zoals de catch-up regel en de behind first, alternating order regel die hiervoor wel zouden kunnen zorgen. Echter willen we nu nog even terugkomen op de penaltyserie binnen het voetbal en nog een extra regel behandelen waarvan wij verwachten dat deze regel ook eerlijker zou zijn dan de regel die nu gebruikt wordt bij de penaltyserie in het voetbal. Het gaat om de zogenoemde ABBA-regel. Wij zullen deze regel hieronder iets uitgebreider uitleggen.

We stellen nu dat onze teams A en B zijn in plaats van X en Y zoals we ze de hele tijd hebben genoemd en dan wordt de ABBA-regel al vrij duidelijk. De regel werkt namelijk precies zoals zijn naam ons vertelt. Team A begint aan de penaltyserie met het nemen van 1 penalty, vervolgens neemt team B 2 penalty's achter elkaar en daarna team A weer 2 penalty's achter elkaar. De teams blijven afwisselend 2 penalty's achter elkaar nemen totdat de serie is afgelopen.

Als we dit nu opdelen in rondes zoals we steeds hebben gedaan bij het bespreken van de penaltyserie, krijgen we het volgende voor een standaard penaltyserie van 5 rondes:

AB BA AB BA AB

Dus de teams nemen afwisselend als eerste de penalty in een ronde. Elke ronde verandert weer het team dat als eerste de penalty mag nemen in deze ronde ten opzichte van de vorige ronde. Een standaard penaltyserie met 5 rondes waarbij gebruik wordt gemaakt van de standaard regel, ziet er als volgt uit:

AB AB AB AB AB

We zien dus dat hier de druk de hele tijd ligt op team B, omdat dit team elke keer als tweede de penalty neemt in een ronde. Deze druk wordt nog hoger als team A elke keer zijn penalty gewoon scoort. Onze verwachting is dat de ABBA-regel deze druk op team B zal verlichten doordat de druk beter wordt verdeeld over beide teams. De ABBA-regel zorgt er namelijk voor dat elke ronde het team dat als eerste de penalty mag nemen verandert ten opzichte van de vorige ronde. Dit zorgt voor een gespreide druk op beide teams. We willen dit nu toetsen met behulp van wiskunde dus daarom gaan we nu weer kijken naar een penaltyserie met 2 rondes. We gaan nu de winstkansen hiervoor berekenen bij gebruik van de ABBA-regel. In een penaltyserie met 2 rondes kan team A dus winnen met 2-0, 2-1 en 1-0. We stellen nu dat 2-0 mogelijkheid 1 is, 2-1 mogelijkheid 2 en 1-0 mogelijkheid 3. We gaan ervan uit dat team A als eerste begint met de penaltyserie. We zullen eerst de winstkans van team A berekenen. We hadden gesteld dat de kans dat een team een penalty scoort in een ronde gelijk is aan p als een team de penalty in deze ronde als eerste neemt. Ook hadden we gesteld dat de kans dat een team een penalty scoort gelijk is aan q als een team de penalty in deze ronde als tweede neemt. Hieruit volgt dat:

Hieruit volgt dat:

$$P_1^2(A) = p(1-q)(1-p)q \tag{60}$$

$$P_2^2(A) = p(1-q)pq + pq(1-p)q = p^2(1-q)q + pq^2(1-p) \tag{61}$$

$$\begin{aligned} P_3^2(A) &= p(1-q)(1-p)(1-q) + (1-p)(1-q)(1-p)q \\ &= p(1-p)(1-q)^2 + (1-p)^2(1-q)q \end{aligned} \tag{62}$$

Hieruit volgt dat de kans dat team A de penaltyserie van 2 rondes wint gelijk is aan:

$$\begin{aligned} P^2(A) = & \, p(1-q)(1-p)q \\ & + p^2(1-q)q + pq^2(1-p) \\ & + p(1-p)(1-q)^2 + (1-p)^2(1-q)q \end{aligned} \tag{63}$$

Hieruit volgt dus ook de kans dat team B de penaltyserie van 2 rondes wint door het veranderen van p in q en andersom in de formule van $P^2(A)$ Dus deze kans is dan gelijk aan:

$$\begin{aligned} P^2(B) = & \, q(1-p)(1-q)p \\ & + q^2(1-p)p + qp^2(1-q) \\ & + q(1-q)(1-p)^2 + (1-q)^2(1-p)p \end{aligned} \tag{64}$$

Er zijn ook 3 mogelijkheden op een gelijkspel bij een penaltyserie van 2 rondes. Namelijk 0-0, 1-1 en 2-2. We stellen nu dat 0-0 mogelijkheid 4 is, 1-1 mogelijkheid 5 en 2-2 mogelijkheid 6. Hieruit volgt dat:

$$P_4^2(G) = (1-p)(1-q)(1-p)(1-q) = (1-p)^2(1-q)^2 \tag{65}$$

$$\begin{aligned} P_5^2(G) &= pq(1-p)(1-q) + (1-p)(1-q)pq \\ &\quad + p(1-q)p(1-q) + (1-p)q(1-p)q \\ &= 2pq(1-p)(1-q) + p^2(1-q)^2 + (1-p)^2q^2 \end{aligned} \tag{66}$$

$$P_6^2(G) = pqpq = p^2q^2 \tag{67}$$

Hieruit volgt dus dat:

$$\begin{aligned} P^2(G) = & \, (1-p)^2(1-q)^2 + 2pq(1-p)(1-q) + p^2(1-q)^2 \\ & + (1-p)^2q^2 + p^2q^2 \end{aligned} \tag{68}$$

Er geldt ook dat:

$$P^2(A) + P^2(B) + P^2(G) = 1 \tag{69}$$

We hebben nu de winstkansen van beide teams in een penaltyserie met 2 rondes zonder eventuele verlenging van de penaltyserie. Bij een gelijkspel na 2 rondes wordt de serie verlengd met 1 ronde totdat er een winnaar is. We gaan nu kijken naar de winstkansen van de beide teams in zo'n verlenging van de penaltyserie waarbij gebruik wordt gemaakt van de ABBA-regel. Er geldt dat in de eerste ronde van de verlenging van de penaltyserie bij gebruik van de ABBA-regel team A als eerste de penalty mag nemen. Er geldt nu dat team A in deze eerste ronde van de verlenging de penaltyserie wint als het de penalty scoort en team B de penalty mist in deze ronde. Dit gebeurt met kans:

$$p(1-q).$$

Als team A in deze ronde de penalty mist, kan het nog steeds de serie winnen. Dan moet team B deze ronde ook missen en dan gaat de penaltyserie dus nog verder door. Dit kan ook als beide spelers in deze ronde de penalty scoren. De penaltyserie wordt dus weer verlengd met een extra ronde met de volgende kans:

$$pq + (1-p)(1-q).$$

In deze ronde mag team B nu als eerste de penalty nemen in plaats van team A. Er geldt dan dat vanuit deze positie team B wint met kans $G^A(A)$ en team A dan dus met kans $(1-G^A(A))$. We voegen nu een superscript toe aan $G(A)$ om aan te geven om welke regel het gaat. Dit geeft ons het volgende:

$$G^A(A) = p(1-q) + (pq + (1-p)(1-q))(1 - G^A(A)).$$

Dit werken we nu weer uit:

$$\begin{aligned}
G^A(A) &= p(1-q) + (pq + (1-p)(1-q))(1 - G^A(A)) \\
G^A(A) &= p(1-q) + pq + 1 - p - q + pq - pqG^A(A) - G^A(A) \\
&\quad + pG^A(A) + qG^A(A) - pqG^A(A) \\
G^A(A) + G^A(A) + 2pqG^A(A) - pG^A(A) - qG^A(A) &= \\
p(1-q) + pq + 1 - p - q + pq & \\
2G^A(A) + 2pqG^A(A) - pG^A(A) - qG^A(A) &= \\
p - pq + pq + 1 - p - q + pq & \\
G^A(A)(2 + 2pq - p - q) &= 1 - q + pq \\
G^A(A) &= \frac{1 - q + pq}{2 + 2pq - p - q}
\end{aligned}$$

Dus de winstkans voor team A in de verlenging van een penaltyserie waarbij gebruik wordt gemaakt van de ABBA-regel is gelijk aan:

$$G^A(A) = \frac{1-q+pq}{2+2pq-p-q} \tag{70}$$

Er geldt nu ook dat:

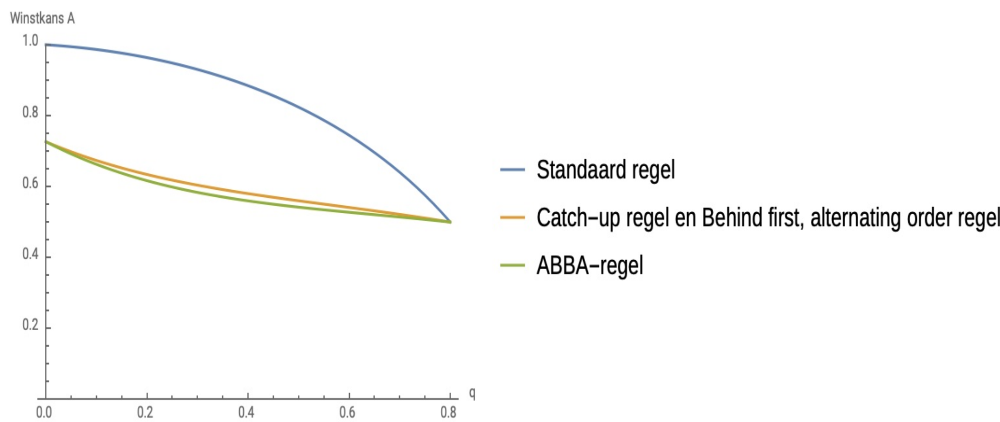
$$G^A(B) = 1 - G^A(A) = 1 - \frac{1-q+pq}{2+2pq-p-q} = \frac{1-p+pq}{2+2pq-p-q} \tag{71}$$

Als we dit samenvoegen, krijgen we de winstkansen van beide teams in een penaltyserie met 2 rondes met eventuele verlenging bij gebruik van de ABBA-regel. We hebben gesteld dat $W^r(A)$ de winstkans van een team A is in een penaltyserie met r rondes waarbij de verlenging is inbegrepen. Daaruit volgt dat:

$$\begin{aligned} W^2(A) &= P^2(A) + G^A(A)P^2(G) \\ &= p(1-q)(1-p)q + p^2(1-q)q + pq^2(1-p) \\ &+ p(1-p)(1-q)^2 + (1-p)^2(1-q)q \\ &+ \frac{((1-p)^2(1-q)^2 + 2pq(1-p)(1-q) + p^2(1-q)^2 + (1-p)^2q^2 + p^2q^2)(1-q+pq)}{2+2pq-p-q} \end{aligned} \tag{72}$$

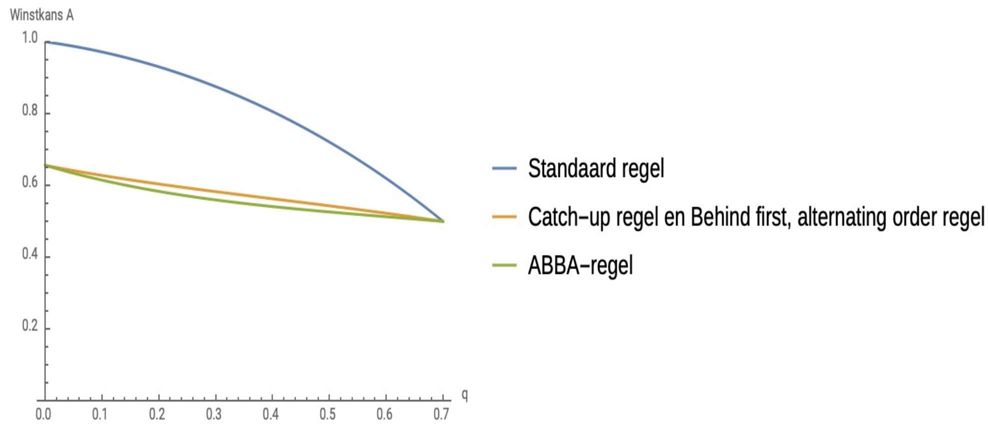
$$\begin{aligned} W^2(B) &= P^2(B) + G^A(B)P^2(G) \\ &= q(1-p)(1-q)p + q^2(1-p)p + qp^2(1-q) \\ &+ q(1-q)(1-p)^2 + (1-q)^2(1-p)p \\ &+ \frac{((1-p)^2(1-q)^2 + 2pq(1-p)(1-q) + p^2(1-q)^2 + (1-p)^2q^2 + p^2q^2)(1-p+pq)}{2+2pq-p-q} \end{aligned} \tag{73}$$

We hebben nu de winstkansen van team A geplot voor de ABBA-regel voor $p = 4/5$, $p = 7/10$ en $p = 3/5$ en $0 < q < p$ en dit vergeleken met de drie andere regels die we hebben behandeld. Er geldt namelijk dat $p > q$, omdat degene die als eerste de penalty neemt in een ronde een voordeel heeft ten opzichte van degene die als tweede de penalty neemt in deze ronde. We kiezen voor 3 waardes van p om een goed breed beeld te krijgen van de winstkansen. Er geldt dat $p = 4/5$ de waarde van p is die we bij al onze berekeningen hierboven hebben gebruikt. Dus deze waarde betekent dus dat degene die als eerste de penalty neemt in een ronde deze met een kans van 80% scoort. We hebben ook gekeken naar 2 waardes van p die een iets kleinere scoringskans voor de eerste nemer van een penalty in een ronde geven. Dit leverde het volgende op: We hebben eerst de winstkansen van team A geplot voor $p = 4/5$ voor de verschillende regels. Dit leverde de volgende grafiek op:



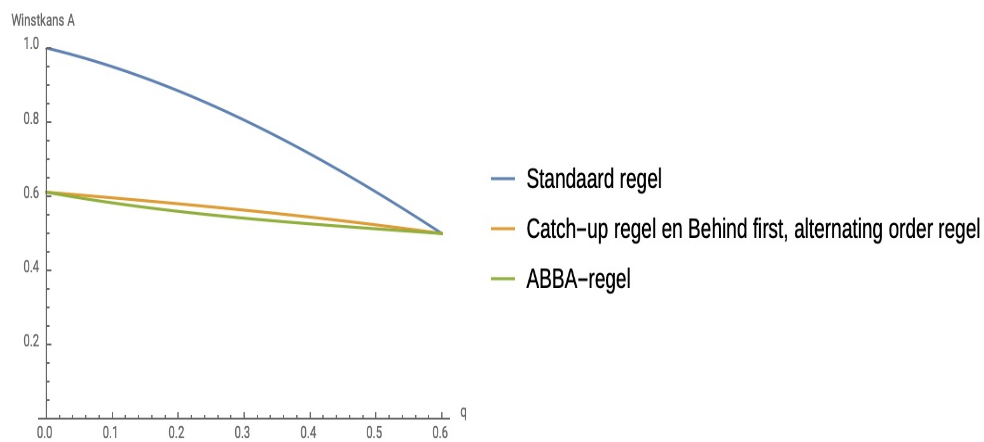
Figuur 12: Winstkans team A voor $p = 4/5$ en $0 < q < 4/5$

We hebben nu de winstkansen van team A geplot voor $p = 7/10$ voor de verschillende regels. Dit leverde de volgende grafiek op:



Figuur 13: Winstkans team A voor $p = 7/10$ en $0 < q < 7/10$

We hebben nu de winstkansen van team A geplot voor $p = 3/5$. Dit leverde de volgende grafiek op:



Figuur 14: Winstkans team A voor $p = 3/5$ en $0 < q < 3/5$

We zien in de grafieken dat de winstkans van team A bij gebruik van de ABBA-regel veel dichter bij 50% ligt dan bij gebruik van de standaard regel. Dit is het ook het geval bij gebruik van de catch-up regel en de behind first, alternating order regel. De grafieken van de ABBA-regel en die van de catch-up regel en behind first, alternating order regel lijken extreem veel op elkaar. Enige verschil is dat de winstkansen bij gebruik van de ABBA-regel nog iets dichter bij de 50% liggen dan bij gebruik van de catch-up regel en de behind first, alternating order regel. De catch-up regel en de behind first, alternating order regel zijn een stuk eerlijker dan de standaard regel hebben we eerder geconcludeerd. We kunnen dus nadat we de grafieken hebben gezien concluderen dat de ABBA-regel zeker een goede regel zou kunnen zijn om in te voeren net zoals de catch-up regel en de behind first, alternating order regel.

Dit is de reden dat wij denken dat deze regel goed zou kunnen werken in de praktijk. Zo dacht de internationale spelregelcommissie, de IFAB, er ook over. Deze regel is namelijk geïntroduceerd binnen het voetbal. De regel is een aantal keer getest en dus gebruikt in de praktijk. Echter wordt deze regel sinds 23 november 2018 niet meer gebruikt en de reden hiervoor is dat de spelers het een te ingewikkeld systeem vonden. Echter is het een zeer simpel systeem wat met wat meer uitleg heel makkelijk ingevoerd zou kunnen worden. Echter is de voetbalwereld een zeer conservatief wereldje en daarom is het ook heel moeilijk om vernieuwingen erdoorheen te krijgen in deze wereld.

Als we deze regel nu gaan vertalen naar de servicesporten zien we een duidelijke overeenkomst in de sport tennis. In deze sport is er namelijk een zogenoemde tiebreak, deze wordt gespeeld bij een stand van 6-6 in een set om een beslissing te brengen in deze set, waarbij op dezelfde manier als de ABBA-regel vastgesteld is wie er welk punt mag serveren in deze tiebreak.

Het serviceschema ziet er in zo'n tiebreak namelijk als volgt uit:

AB BA AB BA....

Dus A begint met serveren en daarna serveert B 2 keer achter elkaar en daarna A weer 2 achter elkaar. De spelers blijven afwisselend 2 keer achter elkaar serveren totdat de tiebreak afgelopen is. De tiebreak is afgelopen als een van beide speler 7 punten heeft gescoord met verschil van 2 punten ten opzichte van de andere speler. Dus stel het staat 6-6 in de tiebreak, dan is een 7-6 score niet genoeg om de tiebreak te winnen. Dit komt omdat er dan geen verschil is van 2 punten tussen beide spelers. Bij een 6-6 score zijn er dus een een even aantal punten gespeeld en er kan alleen een verschil van 2 punten ontstaan tussen beide spelers als een van beide spelers beide punten in een AB of BA blok wint. Dit betekent dat deze speler dan een punt op zijn eigen service wint en een punt op de service van de tegenstander. Stel dat er na de 6-6 stand eindelijk een verschil van 2 punten is tussen beide spelers en dus de tiebreak afgelopen is, dan betekent dat dus dat beide spelers even vaak geserveerd hebben. Dus een speler heeft niet verloren doordat hij minder vaak geserveerd heeft dan de andere speler. Dus de ABBA-regel is eerlijk bij gebruik in de tiebreak van het tennis. Voor andere servicesporten die wij hierboven hebben behandeld geldt er altijd dat beide spelers even vaak hebben geserveerd in een wedstrijd. Ook bij gebruik van de catch-up regel en de behind first, alternating order regel hoeft dit niet zo te zijn bij deze sporten. Maar de ABBA-regel voor de tiebreak in het tennis verzekert ons wel dat de winnaar niet is bevoordeeld door vaker te mogen serveren dan zijn tegenstander.

9 Conclusie

We hebben nu verschillende sporten onder de loep genomen. We hebben eerst gekeken naar voetbal en dan naar de penaltyserie binnen deze sport. In een knockout toernooi kan een wedstrijd nooit in een gelijkspel eindigen, want er moet altijd een van beide teams doorgaan naar de volgende ronde. Een penaltyserie is in het leven geroepen om een beslissing te brengen als er sprake is van een gelijkspel. Een penaltyserie vindt plaats als een wedstrijd na 90 minuten en ook nog 30 minuten verlenging nog steeds niet beslist is in het voordeel van een van beide teams. Soms wordt de verlenging achterwege gelaten en worden er gelijk penalty's genomen als er sprake is van een gelijke stand na 90 minuten. In de praktijk bestaat zo'n penaltyserie uit 5 rondes met eventuele verlenging van deze serie waarbij beide teams in elke ronde allebei 1 penalty nemen Nu wordt er vantevoren een muntje opgegooid om te bepalen welk team als eerste een penalty mag nemen. De standaard regel die nu gehanteerd wordt, zorgt ervoor dat het team dat deze 'toss' wint elke ronde als eerste de penalty mag nemen gedurende de serie. Dit zorgt voor een groot voordeel voor dit team, want degene die als eerst de penalty neemt in een ronde heeft een voordeel ten opzichte van degene die als tweede de penalty neemt in een ronde. Dit komt omdat er (psychologische) druk komt te liggen op degene die als tweede de penalty neemt in een ronde. Deze druk is nog hoger als het team dat als eerste de penalty neemt in een ronde deze penalty scoort. Deze regel is dus niet heel eerlijk, want het team dat mag beginnen heeft dus een heel groot voordeel ten opzichte van het andere team. Daarom hebben wij gekeken of twee andere regels, de catch-up regel en de behind first, alternating order regel, dit zouden kunnen veranderen. Deze regels houden rekening met wat er plaats heeft gevonden in de voorgaande rondes. Dus er ligt bij gebruik van deze regels niet vantevoren vast welke ronde welk team als eerste de penalty mag nemen zoals bij gebruik van de standaard regel. We hebben deze 3 regels met elkaar vergeleken door te kijken naar de winstkansen van beide teams bij gebruik van de verschillende regels. We hebben eerst gekeken naar een penaltyserie met 2 rondes en dan de winstkansen van beide teams voor de verschillende regels berekend. We hebben eerst de winstkansen van beide teams berekend als de serie na 2 rondes al afgelopen is voor de verschillende regels. De serie kan ook na 2 rondes gelijk staan en dan moet de serie verlengd worden met een ronde per keer totdat er een winnaar is. Vervolgens hebben we dus de winstkansen van beide teams berekend in de verlenging van de penaltyserie voor de verschillende regels.

Uiteindelijke hebben we de winstkansen samengevoegd en dat gaf ons de winstkansen van beide teams in een penaltyserie met 2 rondes met eventuele verlenging van deze penaltyserie. Hieruit volgde dat de winstkansen van beide teams veel dichter bij 50% lagen bij gebruik van de catch-up regel en de behind first, alternating order regel dan bij gebruik van de standaard regel. Dus deze 2 regels zijn een stuk eerlijker dan de standaard regel en dat zorgt dus automatisch voor meer spanning. Dit is het geval in een penaltyserie met 2 rondes en dat geeft ons al een goed beeld van het geheel. Als dit namelijk al het geval is voor een penaltyserie met 2 rondes, dan zal dit voor een penaltyserie met 5 rondes nog veel meer het geval zijn. Hoe langer de serie namelijk is, des te vaker zal het team dat de serie mocht beginnen als eerste de penalty mogen nemen en dus zal het voordeel dat dit team heeft ten opzichte van het andere team alleen maar groter worden bij gebruik van de standaard regel. De catch-up regel en de behind first, alternating order regel zullen dit probleem verhelpen. We hebben ook gekeken naar de verwachte lengte van de verlenging van de penaltyserie en daaruit volgde dat die even groot is voor alle drie de regels. Dus de spanning waar de standaard regel voor zorgt blijft hetzelfde bij gebruik van de catch-up regel of de behind first, alternating order regel. We hebben vervolgens nog gekeken of een van beide teams zou kunnen profiteren door expres een penalty te missen. Als dit het geval zou zijn, dan zou deze regel niet 'strategyproof' zijn en dus ook niet geschikt om in te voeren. De standaard regel is logischerwijs 'strategyproof'. De catch-up regel en de behind first, alternating order' regel zijn 'strategyproof' voor $(p - q) \leq 1/2$. We hebben aangenomen dat p de kans is dat het team dat als eerste de penalty neemt in een ronde deze scoort en dat q de kans is dat het team dat als tweede de penalty neemt in een ronde deze scoort. In de praktijk zal het verschil tussen p en q vrijwel nooit groter zijn dan 1/2, omdat de kans dat iemand een penalty scoort vrij groot is. Dus de catch-up regel en de behind first, alternating order regel zijn in de praktijk dus vrijwel altijd 'strategyproof' en dus zeer geschikt om in te voeren in plaats van de standaard regel van de penaltyserie in het voetbal.

We hebben nadat we de penaltyserie in het voetbal hadden behandeld ook nog gekeken naar verschillende servicesporten. Dit zijn sporten met een object wat meestal een bal is en dit object wordt door een van beide spelers of teams het spel in geserveerd. De andere speler of het andere team probeert dan de bal te retourneren. Binnen deze sporten wordt er nu ook gebruik gemaakt van een zogenoemde standaard regel en die zorgt ervoor dat de speler of het team dat het vorige punt heeft gewonnen het volgende punt weer mag serveren. Serveren is een groot voordeel ten opzichte van retourneren en daarom geeft deze regel een groot voordeel aan de speler of het team dat mag beginnen met serveren. Dat is niet heel eerlijk ten opzichte van het andere team of de andere speler. Daarom hebben we weer gekeken of twee andere regels, de catch-up regel en de behind first, alternating order regel, dit probleem zouden kunnen verhelpen. De catch-up regel zorgt ervoor dat het team of de speler dat het vorige punt heeft verloren het volgende punt mag serveren en de behind first, alternating order regel zorgt ervoor dat de speler of het team die achter staat in de score het volgende punt mag serveren. Als de stand gelijk is, mag het team of de speler die voor de gelijke stand op voorsprong stond het volgende punt serveren bij gebruik van de behind first, alternating order regel. Deze regels geven dus de kans aan teams of spelers die op achterstand staan om weer dichterbij te komen. Binnen de servicesporten zijn er twee manieren waarop een wedstrijd gewonnen mag worden, namelijk met 1 punt verschil of met 2 punten verschil. Het meest voorkomend is 2 punten verschil. We hebben eerst gekeken naar winst met 1 punt verschil. Dit hebben we gedaan door eerst te kijken naar een 'Best-of-3' wedstrijd en hiervoor hebben we de winstkansen van beide spelers/teams berekend voor de verschillende regels. Vervolgens hebben we dit ook gedaan voor een 'Best-of-5' wedstrijd met behulp van een serviceschema. Uiteindelijk volgde hieruit dat de winstkansen in een 'Best-of-$(2k+1)$' wedstrijd voor $k > 1$ gelijk zijn bij gebruik van de standaard regel en de catch-up regel volgens stelling 7.1. De winstkansen van beide spelers/teams liggen bij gebruik van de behind first, alternating order regel iets dichter bij de 50% dan bij gebruik van de andere 2 regels, maar dit verschil is verwaarloosbaar klein. We hebben vervolgens gekeken naar de verwachte lengte van wedstrijden waarbij met 1 punt verschil gewonnen mag worden bij gebruik van de verschillende regels. We hebben dit weer eerst gedaan voor een 'Best-of-3' wedstrijd en een 'Best-of-5 wedstrijd. Uiteindelijk volgde hieruit dat de verwachte lengte van een 'Best-of-$(2k+1)$' wedstrijd groter is bij gebruik van de catch-up regel dan bij gebruik van de standaard regel voor $p+q > 1$, wat in de praktijk vrijwel altijd zo is, volgens stelling 7.3. Bij gebruik van de behind first, alternating order regel is deze verwachte lengte nog iets groter dan bij gebruik van de catch-up regel, maar dit verschil is verwaarloosbaar klein. Vervolgens hebben we nog gekeken naar wedstrijden waarbij met 2 punten verschil gewonnen moet worden. We hebben eerst de winstkansen van beide teams/spelers berekend voor een 'Best-of-3' wedstrijd. Vervolgens hebben we gekeken naar de verwachte lengte hiervan. Uiteindelijk hebben we met behulp van deze resultaten al een aardig beeld kunnen vormen van wat er zou gebeuren in een langere wedstrijden. Met behulp van onze resultaten voor een 'Best-of-3' wedstrijd en de tabel uit [2] hebben we kunnen concluderen dat de winstkansen bij gebruik van de catch-up regel in wedstrijden waarbij met 2 punten verschil gewonnen moet worden iets dichter bij de 50% liggen dan bij gebruik van de standaard regel. Echter is dit verschil minimaal bij langere wedstrijden. Daarnaast zorgt de catch-up regel in deze wedstrijden ook voor langere en dus spannendere wedstrijden. Als we al deze resultaten combineren, kunnen we concluderen dat de catch-up regel de beste regel is om de standaard regel te vervangen. Deze regel zorgt voor een iets minder drastische verandering als de behind first, alternating order regel doordat de winstkansen niet veranderen bij wedstrijden waarbij met 1 punt verschil gewonnen mag worden. Echter zorgt deze regel voor veel langere wedstrijden dan de standaard regel en dat is commercieel gezien een groot voordeel.

We hebben tenslotte nog gekeken naar andere manieren om de sporten eerlijker te maken. We hebben voor de penaltyserie in het voetbal gekeken naar de zogenoemde ABBA-regel. Deze regel gaat precies in zijn werk zoals zijn naam ons vertelt. Team A begint in de eerste ronde met als eerste de penalty nemen en vervolgens wordt elke ronde afgewisseld welk team als eerste de penalty neemt. Dit zou voor een betere verdeling van de druk moeten zorgen ten opzichte van de standaard regel. We hebben ook gekeken naar de winstkansen van beide teams in een penaltyserie met 2 rondes waarbij gebruik wordt gemaakt van deze ABBA-regel. Hieruit volgde dat ook de winstkansen van beide teams bij gebruik van de ABBA-regel veel dichter bij de 50% liggen dan bij gebruik van de standaard regel. Dus deze regel zou zeker een goede regel zijn om in te voeren in het voetbal. We zien deze regel ook terug in de tiebreak in het tennis en daar werkt deze regel precies zoals we verwachten. De druk wordt goed verdeeld tussen beide spelers en een speler kan nooit verliezen doordat hij minder services heeft gehad dan de andere speler. Onze eindconclusie is dat er binnen de sportwereld nog veel te doen is om de wedstrijden eerlijker en ook spannender te maken. Dit zou dus kunnen dus bijvoorbeeld de catch-up regel in te voeren wat onze voorkeur heeft bij de servicesporten. De behind first, alternating regel zou ook al een verbetering opleveren ten opzichte van de standaard regel bij de servicesporten. Bij de penaltyserie binnen het voetbal zijn alle drie de regels veel beter dan de standaard regel qua eerlijkheid en dus ook spanning. Dus een van deze drie regels invoeren in plaats van de standaard regel zou ons advies zijn. Echter is de sportwereld vaak vrij conservatief en dus zal het lastig worden om spelregels te laten veranderen. Dit zou wel het allerbeste zijn voor de sport en in het algemeen voor de sporten die wij behandeld hebben.

Referenties

[1] Steven J. Brams en Mehmet S. Ismail, *Making the Rules of Sports Fairer*, SIAM, 2018, Vol. 60, No.1, pp. 181-202.

[2] Steven J. Brams en Mehmet S. Ismail, D. Marc KIlgour en Walter Stromquist *Catch-Up: A Rule That Makes Service Sports More Competitive*, The American Mathematical Monthly, 2018, Vol. 125, No.9, pp. 771-796.

[3] J. Apesteguia en I. Palacios-Huerta *Psychological pressure in competitive environments: Evidence from a randomized natural experiment*, American Economic Review, 2010, Vol. 100, No.5, pp. 2548-2564.