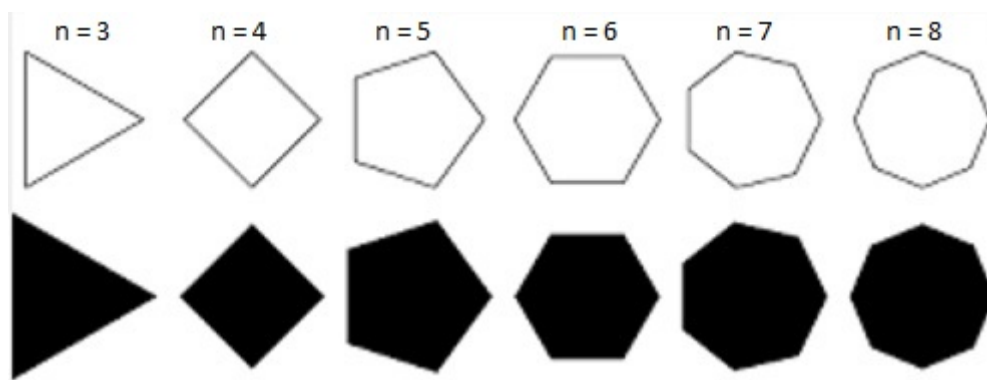


Het construeren van regelmatige veelhoeken

Kilian Bakker (4095073)

17 juni 2016



Inhoudsopgave

1	Inleiding	3
2	Klassieke constructies	3
3	Gauss' stelling over construeerbaarheid van regelmatige veelhoeken met passer en liniaal	5
4	3-hoekdeling	16
5	Construeerbaarheid van regelmatige veelhoeken met 3-hoekdeling	26
6	p -hoekdeling	34
7	Construeerbaarheid van regelmatige veelhoeken met p -hoekdeling	39
8	Conclusie	40
9	Bibliografie	41

1 Inleiding

Regelmatige veelhoeken zijn bekende wiskundige objecten. Het zijn 2-dimensionale figuren die bestaan uit een aantal hoekpunten met zijdes ertussen. Voor al deze zijdes geldt dat ze even lang zijn en elkaar niet snijden. Verder is er een punt in het midden van de regelmatige veelhoek waarvoor geldt dat de afstand tussen dit punt en een hoekpunt hetzelfde is voor elk hoekpunt. We zullen gaan kijken naar de construeerbaarheid van regelmatige veelhoeken, allereerst naar het klassieke geval met passer en (ongemarkeerde) liniaal. Dit klassieke geval houdt de mensheid al lang bezig. De oude Griekse wiskundigen hebben er veel onderzoek naar gedaan en later heeft Gauss de constructie van de regelmatige 17-hoek gevonden en een algemene stelling over regelmatige veelhoeken geformuleerd. Vervolgens heeft Wantzel deze stelling bewezen en later zijn de constructies van de regelmatige 257-hoek en 65537-hoek gevonden. Verder is er ook onderzoek gedaan naar de construeerbaarheid van regelmatige veelhoeken als we meer toestaan dan alleen passer en ongemarkeerde liniaal. We zullen ingaan op het klassieke geval en Gauss' stelling over regelmatige veelhoeken bewijzen. Hiervoor zullen we Galois theorie gebruiken, een vakgebied waar nog volop toepassingen van worden bedacht en ontwikkeld. Vervolgens zullen we meer hulpmiddelen toestaan, zoals een gemarkeerde liniaal of kegelsneden, en kijken welke regelmatige veelhoeken hierdoor construeerbaar worden. Hiervoor zullen we kijken naar hoekdelingen en construeerbare machtswortels en dit gebruiken om stellingen over regelmatige veelhoeken te formuleren en te bewijzen.

2 Klassieke constructies

We zullen ons onderzoek beginnen met de klassieke constructies, dat wil zeggen constructies met behulp van een passer en een ongemarkeerde liniaal. Het maakt hierbij niet uit of de passer wel of niet inklapt zodra die van het papier wordt gehaald. Voor een bewijs hiervan, zie [4], stelling 3.1. Voor het gemak zullen we er in het vervolg dan ook van uitgaan dat onze passer niet inklapt.

Met de klassieke constructies is het mogelijk om de volgende 3 dingen te construeren:

1. het construeren van een lijn door 2 gegeven punten.
2. het construeren van een cirkel met gegeven straal en middelpunt.
3. een bestaand lijnstuk willekeurig lang verlengen.

Hieruit volgt dat een punt α te construeren is als α aan één van de volgende gevallen voldoet:

1. α is het snijpunt van 2 lijnen.
2. α is het snijpunt van 2 cirkels.
3. α is het snijpunt tussen een lijn en een cirkel.

Dit zijn de elementaire constructies, maar om α te construeren kunnen we natuurlijk ook een combinatie nemen tussen de elementaire constructies, waardoor het logisch is om construeerbaarheid als volgt te definiëren.

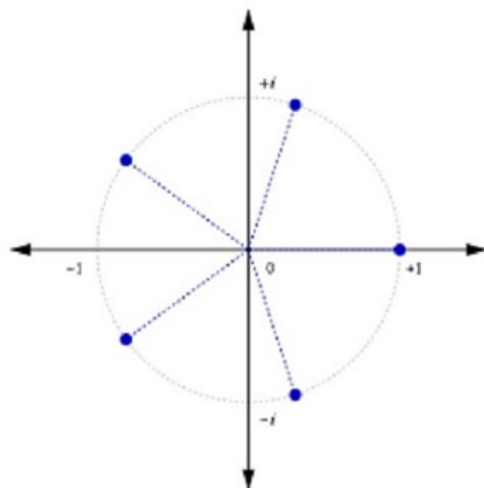
Definitie 2.1:

Een punt $\alpha \in \mathbb{R}^2$ is construeerbaar dan en slechts dan als α te bereiken is via een eindige combinatie van snijpunten tussen cirkels en/of lijnen.

Een getal $a \in \mathbb{R}$ heet construeerbaar dan en slechts dan als het punt $(a, 0)$ of het punt $(0, a)$ construeerbaar is.

Om een regelmatige n -hoek te construeren, zullen we rond een gegeven punt β , die we definiëren als de oorsprong, een cirkel c tekenen met een straal die we definiëren als de lengte 1. Nu tekenen we een willekeurige middellijn door de oorsprong en definiëren deze lijn vanaf dit moment als de x -as. De snijpunten tussen de x -as en de cirkel c zijn dan per definitie de punten $(1, 0)$ en $(-1, 0)$. In het vervolg nemen we het punt $(1, 0)$ als het eerste hoekpunt van de regelmatige n -hoek. Om het volgende punt van de veelhoek te construeren is het nodig om een hoek van $\frac{2\pi}{n}$ te construeren en dan is het volgende punt $(\cos(\frac{2\pi}{n}), \sin(\frac{2\pi}{n}))$. De lijn tussen $(1, 0)$ en $(\cos(\frac{2\pi}{n}), \sin(\frac{2\pi}{n}))$ is de eerste zijde van de veelhoek. Vervolgens kunnen we alle andere punten van de veelhoek construeren door met behulp van de passer het punt $(\cos(\frac{2\pi}{n}), \sin(\frac{2\pi}{n}))$ over de cirkel c te verschuiven. Door alle tussenliggende lijnstukken te tekenen, hebben we de regelmatige n -hoek geconstrueerd. Om een grotere of kleinere regelmatige n -hoek te krijgen, hoeven we alleen maar een cirkel met als middelpunt de oorsprong te tekenen met een straal die groter of kleiner is dan 1. Vervolgens tekenen we n lijnen vanuit de oorsprong door de n hoekpunten en de snijpunten tussen deze lijnen en de getekende cirkel zijn de hoekpunten van de nieuwe veelhoek.

Om een regelmatige n -hoek te construeren is het dus nodig om het punt $(\cos(\frac{2\pi}{n}), \sin(\frac{2\pi}{n}))$ te construeren en daaruit is vervolgens de gehele regelmatige veelhoek te construeren. Dit kunnen we echter ook op de volgende manier doen, een manier die handiger is bij het bewijs van Gauss' stelling, die we later zullen behandelen. We kunnen de regelmatige veelhoek in het complexe vlak bekijken en dan zijn de hoekpunten van de veelhoek precies de nulpunten van het polynoom $x^n - 1$ (zie figuur 1).



figuur 1: De hoekpunten van de regelmatige n -hoek weergegeven als de nulpunten van het polynoom $x^n - 1$, met $n = 5$.

We definiëren nu het volgende.

Definitie 2.2:

De nulpunten van de polynoom $x^n - 1$ heten de n -de machts eenheidswortels en zullen we hier aanduiden met $\gamma_{k,n}$, waarbij $k, n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ en waarbij $\gamma_{k,n}$ de k -de n -de machts eenheidswortel aangeeft.

Opmerking 2.3:

In het bijzonder geldt voor $\gamma_{k,n}$ dus $k \leq n$. Verder geldt voor de n -de machts eenheidswortels dat $\gamma_{k,n} = e^{2\pi i \frac{k}{n}} = \cos(\frac{2\pi k}{n}) + i \sin(\frac{2\pi k}{n})$.

We hebben hier te maken met complexe getallen en om te weten wanneer een complex getal construeerbaar is, definiëren we het volgende.

Definitie 2.4:

Een complex getal $a + bi$, met $a, b \in \mathbb{R}$ is construeerbaar dan en slechts dan als het punt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ construeerbaar is.

Doordat een punt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ook in het complexe vlak te zien is, wordt (a, b) geïdentificeerd met $a + bi \in \mathbb{C}$. Door dit feit heeft het zin om construeerbaarheid van complexe getallen te definiëren als in definitie 2.4. We zien een complex getal dus als een punt in \mathbb{R}^2 . We zullen in het vervolg gebruik maken van de equivalentie tussen construeerbare complexe getallen en construeerbare punten. Afhankelijk van de situatie waarin we ons bevinden, zal het de ene keer handiger zijn om naar construeerbare complexe getallen te kijken en de andere keer is het handiger om naar construeerbare punten te kijken. We zullen hierbij duidelijk vermelden waarom we voor het een of het ander kiezen.

We weten nu uit de voorgaande definities dat $\gamma_{k,n}$ construeren equivalent is aan het punt $(\cos(\frac{2\pi k}{n}), \sin(\frac{2\pi k}{n}))$ construeren.

Verder volgt uit de definities dat een regelmatige n -hoek construeerbaar is dan en slechts dan als $\gamma_{k,n}$ construeerbaar is voor alle $k \leq n$. Dit zullen we gaan gebruiken bij Gauss' stelling.

3 Gauss' stelling over construeerbaarheid van regelmatige veelhoeken met passer en liniaal

De stelling van Gauss over de construeerbaarheid van regelmatige veelhoeken met passer en (ongemarkeerde) liniaal luidt:

Stelling 3.1:

Een regelmatige n -hoek is construeerbaar met passer en ongemarkeerde liniaal dan en slechts dan als n van de vorm $n = 2^m \prod_{i=1}^I p_i$ is, met $m, I \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ en p_i verschillende Fermat priemgetallen (dat zijn priemgetallen van de vorm $2^{2^l} + 1$ voor $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$).

Opmerking 3.2:

Als $I = 0$, dan is het product leeg en is n een macht van 2. Als $I = 0$ en $m = 0$, dan $n = 1$ en een regelmatige 1-hoek definiëren we gewoon als een punt. Verder als $I = 0$ en $m = 1$, dan hebben we te maken met een regelmatige 2-hoek, wat we definiëren als een lijnstuk tussen 2 punten.

Om stelling 3.1 te bewijzen hebben we kennis nodig van de Galois theorie. Deze zullen we hier gedeeltelijk behandelen, maar er wordt wel voorkennis verondersteld van de theorie der lichamen. We zullen beginnen met te kijken naar construeerbare reële getallen. We weten uit [8] dat als a en b ($b \neq 0$) construeerbare reële getallen zijn, dan zijn $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, $\frac{a}{b}$ en \sqrt{a} (als $a \geq 0$) ook construeerbaar. Vervolgens kunnen we dan ook wortels construeren van construeerbare wortels. We kunnen dus 4-de machtswortels construeren en zo doorgaand elke q -de machtswortel construeren van een construeerbaar getal, waarbij q een macht van 2 is. Uit de definitie van een lichaam volgt dat de verzameling $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$ van construeerbare reële getallen een lichaam vormt dat gesloten is onder het nemen van 2e machtswortels. Verder geldt er, doordat alle getallen in \mathbb{Q} construeerbaar zijn, dat we een keten van lichaamsuitbreidingen hebben: $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$.

Nu gaan we kijken naar construeerbare complexe getallen $a = c + di$ en $b = e + fi$ ($b \neq 0$). Met definitie 2.1 en 2.4 betekent dit dat c, d, e en f construeerbare reële getallen zijn. Hierdoor is het complexe getal $a + b = (c + e) + (d + f)i$ ook construeerbaar, doordat $c + e$ en $d + f$ construeerbaar zijn. Op soortgelijke wijze zijn $a - b = (c - e) + (d - f)i$, $a \cdot b = (ce - df) + (cf + de)i$ en $\frac{a}{b} = \frac{ce+df}{e^2+f^2} + \frac{de-cf}{e^2+f^2}i$ construeerbare complexe getallen. Verder weten we ook dat de complexe getallen

$$\sqrt{a} = \sqrt{c + di} = \pm \left(\sqrt{\frac{c \pm \sqrt{c^2 + d^2}}{2}} + \frac{d}{\sqrt{2c \pm 2\sqrt{c^2 + d^2}}}i \right),$$

construeerbaar zijn op voorwaarde dat er aan de rechterkant van het laatste gelijkheidsteken alleen wortels worden genomen van positieve reële getallen (hierbij moeten onder de worteltekens beide \pm of allebei gelijk worden gekozen aan $+$ of allebei gelijk worden gekozen aan $-$).

Nu volgt weer uit de definitie van een lichaam dat de verzameling $\mathbb{K}_{\mathbb{C}} \subseteq \mathbb{C}$ van construeerbare complexe getallen een lichaam vormt dat gesloten is onder het nemen van 2e machtswortels. Door de equivalentie tussen construeerbare complexe getallen en construeerbare punten, vormt de verzameling $\mathbb{K}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ van construeerbare punten ook een lichaam dat gesloten is onder het nemen van 2e machtswortels. Door de equivalentie geldt voor deze lichamen dat $\mathbb{K}_{\mathbb{C}} \cong \mathbb{K}^2$.

Om meer te weten te komen over construeerbare punten, moeten we naar het lichaam \mathbb{K}^2 kijken. Maar bij lichamen is het handiger om naar complexe getallen te kijken en dus zullen we ons richten op het lichaam $\mathbb{K}_{\mathbb{C}}$. Dit kunnen we doen doordat de lichamen isomorf zijn aan elkaar. Laat nu $a \in \mathbb{K}_{\mathbb{C}}$ een construeerbaar complex getal zijn en stel dat $F \subseteq \mathbb{K}_{\mathbb{C}}$ een lichaam is bestaande uit construeerbare complexe getallen. Stel verder dat we a willen construeren. Als $a \in F$, dan is a al geconstrueerd. Als $a \notin F$, dan moeten we a gaan construeren door middel van de elementaire constructies. Als we a dan geconstrueerd hebben, ligt a in de lichaamsuitbreiding $F(a)$ van F , waarbij $F(a)$ het kleinste lichaam is dat a en alle elementen van F bevat. Voor de constructie van a zijn we dus op zoek naar het lichaam $F(a) \in \mathbb{K}_{\mathbb{C}}$, omdat als we $F(a)$ vinden, dan hebben we ook meteen

alle punten in $F(a)$ gevonden, oftewel geconstrueerd. Door middel van deze denkwijze is het nodig om meer te weten te komen over lichaamsuitbreidingen. Hiervoor gaan we een aantal definities formuleren. Als a een wortel is van een polynoom met coëfficiënten in F , dan kan a in F liggen, maar dat hoeft niet. Dit heeft te maken met de irreducibiliteit van een polynoom, wat we als volgt definiëren.

Definitie 3.3:

Een polynoom p van graad ≥ 2 met coëfficiënten in een lichaam F heet irreducibel over F als p niet te factoriseren is in niet-constante polynomen met een kleinere graad met coëfficiënten in F .

Als dit het geval is, dan liggen alle wortels van het irreducibele polynoom p niet in F , anders zou je namelijk de factor $(x - c)$ uit p kunnen delen, waarbij c een wortel is van p .

Definitie 3.4:

Een polynoom p met coëfficiënten in een lichaam F heet een minimaal polynoom van $a \in \mathbb{C}$ over F als a een wortel is van p , p irreducibel is over F en p leidende coëfficiënt 1 heeft.

Het blijkt dat het minimale polynoom uniek is (zie [8], gevolg 2 van stelling 4.2.1). Daarom noteren we: $p = \min(a/F)$.

Definitie 3.5:

De graad van een lichaamsuitbreiding G over F , genoteerd als $[G : F]$, is de dimensie van G , als een vectorruimte gezien, over F .

Met behulp van deze definities, kunnen we nu de volgende stelling formuleren.

Stelling 3.6:

Voor elke a geldt voor de graad van de lichaamsuitbreiding $F(a)$ over F dat $[F(a) : F] = \deg(\min(a/F))$.

Voor het bewijs hiervan, zie [8] (het gevolg van stelling 4.4.1).

Nog een belangrijke stelling die we nodig hebben voor het bewijs van stelling 3.1 is:

Stelling 3.7:

Laat $F \subseteq G \subseteq H$ een keten van lichaamsuitbreidingen zijn, dan geldt $[H : F] = [H : G][G : F]$.

Voor het bewijs verwijzen we naar [8], stelling 4.4.2.

Gevolg 3.8:

Laat $F \subseteq F(a_1) \subseteq \dots \subseteq F(a_1, \dots, a_n)$ een eindige keten van lichaamsuitbreidingen zijn, dan geldt:

$$[F(a_1, \dots, a_n) : F] = [F(a_1, \dots, a_n) : F(a_1, \dots, a_{n-1})] \cdot \dots \cdot [F(a_1) : F] = \deg(\min(a_n/F(a_1, \dots, a_{n-1}))) \cdot \dots \cdot \deg(\min(a_1/F)).$$

Bewijs:

Dit volgt door stelling 3.7 herhaaldelijk toe te passen en vervolgens stelling 3.6 toe te passen. \square

We hebben meerdere definities behandeld voor algemene $a \in \mathbb{C}$, maar nu gaan we specifiek kijken naar $a = \gamma_{1,n}$, omdat dit in direct verband staat met de regelmatige n -hoek. Aangezien $\gamma_{1,n}$ een wortel is van $x^n - 1$ geldt $\gamma_{1,n}^{nk} = 1^k = 1$ voor alle $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Dit betekent dat alle machten van $\gamma_{1,n}$ ook wortels zijn van $x^n - 1$. Verder is $\gamma_{1,n}^k = e^{2\pi i \frac{k}{n}}$ en deze getallen zijn allemaal verschillend voor $k \in \{1, \dots, n\}$. Dit levert dus n verschillende wortels op voor $x^n - 1$ en aangezien dit polynoom graad n heeft, zijn de eerste n machten van $\gamma_{1,n}$ alle wortels van $x^n - 1$.

Hieruit volgt dat een lichaam dat $\gamma_{1,n}$ bevat, alle wortels van $x^n - 1$ bevat. Het is dus voldoende voor de constructie van een regelmatige n -hoek om $\gamma_{1,n}$ te construeren. Verder is $x^n - 1$ een polynoom in $\mathbb{Q}[x]$ en $\gamma_{1,n} \notin \mathbb{Q}$ als $n \geq 3$, oftewel $\deg(\min(\gamma_{1,n}/\mathbb{Q})) > 1$. Als gevolg geldt er nu ook $[\mathbb{Q}(\gamma_{1,n}) : \mathbb{Q}] > 1$ (voor $n \geq 3$).

Om $\gamma_{1,n}$ te construeren moet $\gamma_{1,n}$ per definitie een eindige combinatie van elementaire constructies zijn. Noem een elementaire constructie (in de constructie van $\gamma_{1,n}$) een tussenstap in de constructie van $\gamma_{1,n}$. De constructie van $\gamma_{1,n}$ is nu onderverdeeld in een eindig aantal tussenstappen, waarbij bij elke tussenstap een snijpunt wordt geconstrueerd tussen 2 cirkels, 2 lijnen of een cirkel en een lijn.

Van tussenstappen in de constructie van een willekeurig complex getal weten we nog meer.

Stelling 3.9:

Laat $F \subseteq \mathbb{K}_{\mathbb{C}}$ het lichaam zijn bestaande uit punten die construeerbaar waren in de vorige tussenstap. Dan geldt bij de huidige tussenstap voor het snijpunt $\lambda \in \mathbb{K}_{\mathbb{C}}$ dat wordt geconstrueerd, dat $[F(\lambda) : F] = 2^m$ met $m = 0$ of 1 .

Voor het bewijs van stelling 3.9 zullen we steeds wisselen tussen punten en complexe getallen, omdat het voor lichamen handiger is om naar complexe getallen te kijken en voor de elementaire constructies is het handiger om naar punten te kijken.

Bewijs van stelling 3.9:

Aangezien λ in \mathbb{C} is, hebben we $\lambda = \lambda_x + \lambda_y i$. Door dit als een punt in \mathbb{R}^2 te zien, hebben we $\lambda = (\lambda_x, \lambda_y)$, waarbij $\lambda_x, \lambda_y \in \mathbb{R}$ de coördinaten van λ zijn in het vlak. Verder is λ construeerbaar door middel van één elementaire constructie, dus met definitie 2.4 volgt dat (λ_x, λ_y) op dezelfde manier construeerbaar is en als gevolg zijn er 3 gevallen mogelijk voor (λ_x, λ_y) :

1. (λ_x, λ_y) is het snijpunt van 2 lijnen.
2. (λ_x, λ_y) is het snijpunt tussen een lijn en een cirkel.
3. (λ_x, λ_y) is het snijpunt van 2 cirkels.

We gaan al deze gevallen langs:

geval 1:

(λ_x, λ_y) is het snijpunt tussen 2 lijnen. Stel eerst dat het geen verticale lijnen zijn en laat de lijnen gegeven zijn door de vergelijkingen $y = ax + b$ en $y = cx + d$ voor a, b, c en d construeerbare reële getallen in F . Het snijpunt tussen deze 2 lijnen is $\lambda = (\lambda_x, \lambda_y) = (\frac{d-b}{a-c}, \frac{ad-bc}{a-c})$. Door nu λ weer als een complex getal te zien, hebben we $\lambda = \lambda_x + \lambda_y i = \frac{d-b}{a-c} + \frac{ad-bc}{a-c}i$. Doordat a, b, c en d in F liggen, ligt het complexe getal $\frac{d-b}{a-c} + \frac{ad-bc}{a-c}i$ ook in F en dus ligt λ in F . Hierdoor geldt $[F(\lambda) : F] = 1 = 2^0$. Als beide lijnen verticaal zijn, dan is er geen snijpunt of er is een snijlijn. In het eerste geval bestaat λ niet en in het tweede geval bestaat λ ook niet, omdat er geen punt geconstrueerd wordt.

Als één van de lijnen verticaal is, dan zijn de vergelijkingen van de 2 lijnen: $x = a$ en $y = bx + c$, met a, b en c construeerbare reële getallen in F . Dit geeft $y = ba + c$, dus het snijpunt is $(\lambda_x, \lambda_y) = (a, ba + c)$. Verder ligt $a + (ba + c)i$ in F en dus ligt λ (als complex getal gezien) in F en dit geeft weer $[F(\lambda) : F] = 1$.

geval 2:

Laat de cirkel en de (niet-verticale) lijn gegeven zijn door de vergelijkingen

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = c \text{ en } y = dx + e,$$

voor a, b, c, d en e construeerbare reële getallen in F . Door de vergelijking van de lijn in te vullen in de vergelijking van de cirkel krijgen we

$$(x - a)^2 + (dx + e - b)^2 = c.$$

Dit leidt tot de kwadratische vergelijking $Ax^2 + Bx + C = 0$, waarbij

$$A = 1 + d^2,$$

$$B = 2d(e - b) - 2a,$$

$$C = a^2 + (e - b)^2 - c.$$

Deze vergelijking heeft als oplossingen

$$x_{\pm} = \frac{-B \pm \sqrt{D}}{2A} \text{ met } D = B^2 - 4AC.$$

De y -oplossingen die hierbij horen, zijn $y_{\pm} = dx_{\pm} + e$. We hebben nu 2 oplossingen gekregen voor λ , namelijk $\lambda_1 = (\lambda_{1,x}, \lambda_{1,y}) = (x_+, y_+)$ en $\lambda_2 = (\lambda_{2,x}, \lambda_{2,y}) = (x_-, y_-)$. Dit komt doordat een cirkel en een lijn elkaar 2 keer kunnen snijden. Het kan hierbij niet gebeuren dat we een wortel nemen van een negatief getal. Dan zou namelijk gelden dat de cirkel en de lijn elkaar niet snijden en als gevolg bestaat λ niet. De wortels zijn daarom construeerbaar. Verder geldt $a, b, c, d, e \in F$, dus ook $A, B, C, D \in F$. Nu kan gelden dat $D = \alpha^2$ voor een $\alpha \in F$. Als dit zo is, dan is $x_{\pm} \in F$ en dus $y_{\pm} \in F$ en als gevolg $x_{\pm} + y_{\pm}i \in F$ en $\lambda_{1,2} \in F$, waarbij we $\lambda_{1,2}$ als complexe getallen bekijken. Er geldt vervolgens $[F(\lambda_i) : F] = 1$, met $i = 1$ of $i = 2$ (het maakt niet uit of $i = 1$ of $i = 2$, want $F(\lambda_i)$ bevat λ_1 en λ_2).

Als $D \neq \alpha^2$ voor alle $\alpha \in F$, dan $\sqrt{D} \notin F$ en dus $\lambda_{1,2} \notin F$. Nu geldt dat \sqrt{D} het polynoom $p(z) = z^2 - D$ als minimale polynoom heeft, want $D \in F$, p irreducibel over F en $p(\sqrt{D}) = 0$. Met stelling 3.6 volgt $[F(\sqrt{D}) : F] = 2$. Verder geldt ook $\lambda_{1,2} \in F(\sqrt{D})$,

oftewel $[F(\lambda_i) : F] = 2$, met $i = 1$ of $i = 2$.

Stel nu dat de lijn verticaal is, dan zijn de vergelijkingen

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = c \text{ en } x = d \text{ voor } a, b, c, d \in F \text{ en } a, b, c, d \text{ reëel.}$$

Door de vergelijking van de lijn in te vullen in die van de cirkel, krijgen we

$$(d - a)^2 + (y - b)^2 = c.$$

Dit omschrijven geeft 2 oplossingen voor y , namelijk $y_{\pm} = b \pm \sqrt{c - (d - a)^2}$.

De snijpunten zijn dus $\lambda_1 = (d, y_+)$ en $\lambda_2 = (d, y_-)$. Op soortgelijke manier als hiervoor geldt nu $[F(\lambda_i) : F] = 1$ als $c - (d - a)^2 = \alpha^2$ voor een $\alpha \in F$ en $[F(\lambda_i) : F] = 2$ als $c - (d - a)^2 \neq \alpha^2$ voor alle $\alpha \in F$ (met $i = 1$ of $i = 2$).

geval 3:

Laat de 2 cirkels voor $a, b, c, d, e, f \in F$ en allemaal reëel, gegeven zijn door de vergelijkingen

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = c \text{ en } (x - d)^2 + (y - e)^2 = f. \quad (1)$$

Anders opgeschreven wordt dit

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = c \text{ en } x^2 - 2dx + d^2 + y^2 - 2ey + e^2 = f.$$

Voor het snijpunt geldt dus in het bijzonder de vergelijking

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - c = x^2 - 2dx + d^2 + y^2 - 2ey + e^2 - f.$$

Aangezien alle kwadratische termen tegen elkaar wegvallen, krijgen we

$$y = \frac{(a-d)x}{e-b} + \frac{d^2+e^2-a^2-b^2+c-f}{2(e-b)}.$$

Dit is een vergelijking van een lijn, dus we gaan op dezelfde manier verder als in geval 2. Daarom vullen we de vergelijking van de lijn in, in één van de vergelijkingen bij (1). Dit levert de kwadratische vergelijking $A'x^2 + B'x + C' = 0$ op, met

$$\begin{aligned} A' &= \frac{(a-d)^2}{(e-b)^2} + 1, \\ B' &= \frac{2aeb+2deb-2db^2-2ae^2+(a-d)(d^2+e^2-a^2-b^2+c-f)}{(e-b)^2}, \\ C' &= \frac{\frac{1}{4}(d^2+e^2-a^2-b^2+c-f)^2+ce(b-e)+bf(e-b)+a^2e(e-b)+d^2b(b-e)-be(e-b)^2}{(e-b)^2}. \end{aligned}$$

Deze vergelijking heeft als oplossingen

$$x_{\pm} = \frac{-B' \pm \sqrt{D}}{2A'} \text{ met } D = B'^2 - 4A'C'.$$

Hierbij zijn de y -oplossingen

$$y_{\pm} = \frac{(a-d)x_{\pm}}{e-b} + \frac{d^2+e^2-a^2-b^2+c-f}{2(e-b)}.$$

We hebben dus 2 oplossingen gekregen, $\lambda_1 = (x_+, y_+)$ en $\lambda_2 = (x_-, y_-)$, wat komt doordat 2 cirkels elkaar 2 keer kunnen snijden. Het kan weer niet gebeuren dat $D < 0$, want dan geldt dat de cirkels elkaar niet snijden. Nu geldt weer dat als $D = \alpha^2$ voor een $\alpha \in F$, dan $[F(\lambda_i) : F] = 1$ en als $D \neq \alpha^2$ voor alle $\alpha \in F$, dan $[F(\lambda_i) : F] = 2$ (met $i = 1$ of $i = 2$). In deze laatste stap geldt weer dat we λ_i als een complex getal bekijken.

In alle gevallen geldt dus $[F(\lambda) : F] = 2^m$ met $m = 0$ of 1 . □

Uit stelling 3.9 weten we het volgende.

Gevolg 3.10:

Stel dat we beginnen met het lichaam \mathbb{Q} en dat we een complex getal μ construeren, dan geldt $[\mathbb{Q}(\mu) : \mathbb{Q}] = 2^m$ voor een $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Bewijs:

In elke tussenstap in de constructie van μ is de graad van de lichaamsuitbreiding gelijk aan 1 of 2 met stelling 3.9. Verder is μ te construeren door middel van een eindig aantal tussenstappen, dus met gevolg 3.8 geldt nu $[\mathbb{Q}(\mu) : \mathbb{Q}] = 2^m$ voor een $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. \square

In het bijzonder geldt hierdoor ook dat als $\gamma_{1,n}$ construeerbaar is, dan $[\mathbb{Q}(\gamma_{1,n}) : \mathbb{Q}] = 2^m$ ($m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$). Verder weten we het volgende over $\gamma_{1,n}$.

Stelling 3.11:

$[\mathbb{Q}(\gamma_{1,n}) : \mathbb{Q}] = \phi(n)$, waarbij $\phi(n)$ de Euler-phi functie is, gegeven door $\phi(n) =$ het aantal getallen $a \in \mathbb{N}$ met $a < n$ en met $\text{ggd}(a, n) = 1$.

Opmerking 3.12:

Merk op dat voor elk priemgetal p en elke $k \in \mathbb{N}$ geldt: $\phi(p^k) = p^k - p^{k-1}$. Aangezien elke $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ in priemfactoren is te schrijven en ϕ een multiplicatieve functie is voor priemgetallen (zie [7], stellingen 3.2.1 en 7.1.1), geldt nu het volgende voor n .

Laat $n = \prod_i p_i^{\alpha_i}$ de priemontbinding van n (voor $n > 1$) zijn (p_i verschillende priemgetallen, $\alpha_i \in \mathbb{N}$), dan $\phi(n) = \prod_i (p_i^{\alpha_i} - p_i^{\alpha_i-1})$.

Voor het bewijs van stelling 3.11 definiëren we eerst het volgende.

Definitie 3.13:

Een p -de n -de machts eenheidswortel $\gamma_{p,n}$ heet primitief als $\text{ggd}(p, n) = 1$.

Er zijn dus precies $\phi(n)$ primitieve n -de machts eenheidswortels en voor elke $\gamma_{p,n}$ geldt dat je alle wortels van $x^n - 1$ krijgt door machten van $\gamma_{p,n}$ te nemen.

Bewijs van stelling 3.11:

Laat $\gamma_{p_i,n}$ voor $i = 1, \dots, \phi(n)$ alle primitieve n -de machts eenheidswortels zijn en laat

$$q(x) = \prod_{i=1}^{\phi(n)} (x - \gamma_{p_i,n}).$$

Voor dit polynoom q geldt dat de leidende coëfficiënt 1 is en $q(\gamma_{1,n}) = 0$, want $\gamma_{1,n}$ is een primitieve n -de machts eenheidswortel. Verder heeft q coëfficiënten in \mathbb{Q} en is q irreducibel over \mathbb{Q} ; voor het bewijs van deze 2 gegevens, zie [8], stelling 4.11.2. Als gevolg hiervan is q het minimale polynoom van $\gamma_{1,n}$. Verder is $\deg q = \phi(n)$, dus met stelling 3.6 volgt $[\mathbb{Q}(\gamma_{1,n}) : \mathbb{Q}] = \phi(n)$. \square

In stelling 3.1 is kort gezegd wat een Fermat priemgetal is, maar hieronder geven we de uitgebreidere definitie.

Definitie 3.14:

Een Fermat priemgetal is een priemgetal van de vorm $F_{l+1} = 2^{2^l} + 1$ met $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Tot nu toe is bekend dat $F_1 = 3$, $F_2 = 5$, $F_3 = 17$, $F_4 = 257$ en $F_5 = 65537$ priem zijn, maar meer zijn er niet bekend. Van hogere Fermat getallen is bekend dat ze geen priemgetal zijn, doordat er een deler van is gevonden, of er is nog niets over bekend. Het vermoeden is dat F_1 t/m F_5 de enige Fermat priemgetallen zijn. Dit zou betekenen dat $I \leq 5$ in stelling 3.1. Hierdoor zijn er oneindig veel construeerbare n -hoeken met n even, maar het aantal bekende construeerbare n -hoeken met $n > 1$ oneven is maar 31. Dit komt doordat elk Fermat priemgetal maar 1 keer mag voorkomen in de priemontbinding van n . Uitgaande van de 5 bekende Fermat priemgetallen zijn er dus $\binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 31$ construeerbare regelmatige n -hoeken met $n > 1$ oneven.

We zijn nu in staat om stelling 3.1 te bewijzen.

Bewijs van stelling 3.1:

We bewijzen eerst de \implies implicatie van de stelling. Stel daarvoor dat een regelmatige n -hoek construeerbaar is met passer en ongemarkeerde liniaal. Dan is $\gamma_{1,n}$ construeerbaar. Met gevolg 3.10 weten we $[\mathbb{Q}(\gamma_{1,n}) : \mathbb{Q}] = 2^m$ voor een $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Verder weten we met stelling 3.11 dat $[\mathbb{Q}(\gamma_{1,n}) : \mathbb{Q}] = \phi(n)$. Dus $\phi(n) = 2^m$ voor een $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Met opmerking 3.12 geldt nu $2^m = \prod_i (p_i^{\alpha_i} - p_i^{\alpha_i-1})$, waarbij $\prod_i p_i^{\alpha_i}$ de priemontbinding van n is. Als 2 in de priemontbinding van n zit, dan geldt:

$$2^m = \prod_i p_i^{\alpha_i-1} (p_i - 1) = 2^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2-1} (p_2 - 1) p_3^{\alpha_3-1} (p_3 - 1) \cdot \dots$$

Hieruit volgt dat $\alpha_1 \in \mathbb{N}$ willekeurig mag worden gekozen, maar wel lager dan $m + 2$, en $\alpha_i = 1$ voor alle $i \geq 2$. Verder moet voor alle $i \geq 2$ gelden dat $p_i - 1 = 2^z$ voor een $z \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Dus $p_i = 2^z + 1$. Om dit laatste getal priem te laten zijn moet z ook een macht van 2 zijn. Stel namelijk van niet, dan heeft z een oneven priemgetal b in de priemontbinding. Aangezien b oneven is, kunnen we $(2^{\frac{z}{b}} + 1)$ eruit delen en dan houden we een som over met afwisselend $+$ en $-$ termen, waarbij de laatste term in de som $+1$ is,

$$2^z + 1 = (2^{\frac{z}{b}})^b + 1 = (2^{\frac{z}{b}} + 1)((2^{\frac{z}{b}})^{b-1} - (2^{\frac{z}{b}})^{b-2} + (2^{\frac{z}{b}})^{b-3} - \dots + (2^{\frac{z}{b}})^2 - (2^{\frac{z}{b}})^1 + 1). \quad (2)$$

Als b een even getal zou zijn, dan werkt de factorisatie bij (2) niet, omdat de laatste term in de som dan -1 wordt, wat duidelijk niet mogelijk is.

Verder volgt uit (2) dat $2^z + 1$ samengesteld is als b oneven is. Dit geeft tegenspraak met het feit dat $2^z + 1$ priem is en dus is z een macht van 2, oftewel p_i is een Fermat priemgetal.

Als 2 niet in de priemontbinding van n zit, dan geldt

$$2^m = 2^0 p_1^{\alpha_1-1} (p_1 - 1) p_2^{\alpha_2-1} (p_2 - 1) \cdot \dots$$

Nu volgt voor alle $i \in \mathbb{N}$ dat $\alpha_i = 1$ en $p_i - 1 = 2^z$ voor een $z \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ en z een macht van 2. Dus alle p_i 's zijn Fermat priemgetallen.

Samengevat geldt voor de priemontbinding van n dus $n = \prod_i p_i^{\alpha_i} = 2^{\alpha_1} \prod_j p_j$, waarbij $j = i - 1$, $\alpha_1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ en p_j verschillende Fermat priemgetallen. We hebben nu de \implies implicatie bewezen.

Om de \impliedby implicatie te bewijzen laten we n van de vorm $n = 2^m \prod_{i=1}^I p_i$ zijn, met $m, I \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ en p_i verschillende Fermat priemgetallen. Dan geldt

$$\phi(n) = 2^{m-1} \prod_{i=1}^I (p_i - 1) = 2^w \text{ voor een } w \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \text{ Nu geldt met stelling 3.11 dat}$$

$$[\mathbb{Q}(\gamma_{1,n}) : \mathbb{Q}] = \phi(n) = 2^w.$$

$\gamma_{1,n}$ is construeerbaar als bij elke tussenstap in de constructie van $\gamma_{1,n}$ de graad van de lichaamsuitbreiding gelijk is aan 1 of 2 en niet nog aan een hogere macht van 2. Anders zou namelijk met de contrapositie van stelling 3.9 gelden dat het snijpunt niet construeerbaar is in de tussenstap en dan is $\gamma_{1,n}$ ook niet meer construeerbaar. Het is echter niet meteen duidelijk waarom inderdaad geldt dat de graad van de lichaamsuitbreiding gelijk is aan 1 of 2 bij elke tussenstap. Om dit te bewijzen hebben we de Sylow stellingen en de fundamentele stelling van de Galois theorie nodig. Deze laatste stelling zegt dat er een 1-1 correspondentie is tussen een eindige Galois lichaamsuitbreiding en de bijbehorende Galois groep (zie ook [8], stelling 4.10.1, waar deze stelling wordt bewezen). We hebben hier inderdaad te maken met een eindige Galois lichaamsuitbreiding over \mathbb{Q} , want $\mathbb{Q}(\gamma_{1,n})$ bevat alle wortels van het polynoom $x^n - 1$, het minimale polynoom van $\gamma_{1,n}$ heeft geen wortels die meerdere keren voorkomen en de graad van de lichaamsuitbreiding is eindig, aangezien n eindig is en $\phi(n)$ daarom ook. Verder weten we $[\mathbb{Q}(\gamma_{1,n}) : \mathbb{Q}] = 2^w$, dus met de fundamentele stelling van de Galois theorie geldt voor $G = \text{Gal}(\mathbb{Q}(\gamma_{1,n})/\mathbb{Q})$, dat $|G| = |\text{Gal}(\mathbb{Q}(\gamma_{1,n})/\mathbb{Q})| = 2^w$. Nu geldt met de Sylow stellingen dat er een normaalreeks van w ondergroepen is tussen G en $\{e\}$,

$$G = G_w \triangleright G_{w-1} \triangleright \cdots \triangleright G_1 \triangleright G_0 = \{e\} \quad (3)$$

met $|G_i| = 2^i$ voor $i = 0, \dots, w$. Dit zullen we hier verder niet bewijzen (voor een bewijs zie [8], stelling 2.15.6). Hieruit volgt dat $\frac{|G_i|}{|G_{i-1}|} = 2$ voor $i = 1, \dots, w$. Door weer de fundamentele stelling van de Galois theorie te gebruiken, krijgen we een keten van lichaamsuitbreidingen,

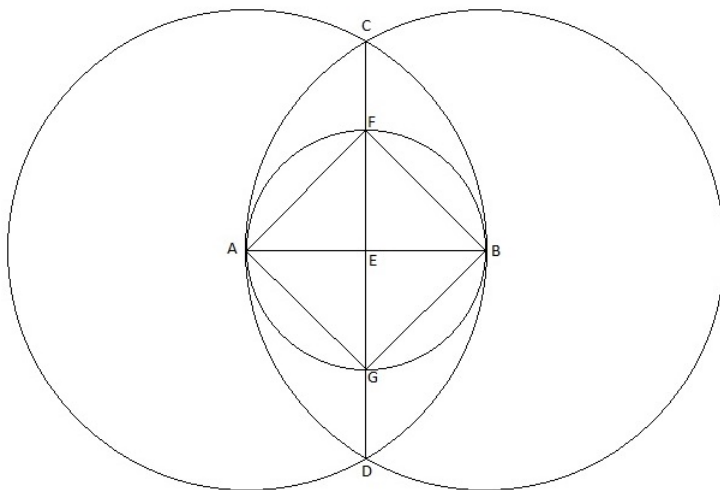
$$\mathbb{Q}(\gamma_{1,n}) = F_w \supset F_{w-1} \supset \cdots \supset F_1 \supset F_0 = \mathbb{Q} \text{ met } |F_i : F_{i-1}| = 2 \text{ voor } i = 1, \dots, w.$$

Dit zijn alle tussenstappen (met graad 2 in de lichaamsuitbreiding) in de constructie van $\gamma_{1,n}$, omdat $[\mathbb{Q}(\gamma_{1,n}) : \mathbb{Q}] = 2^w$ en de keten van lichaamsuitbreidingen hierboven heeft ook graad 2^w (met gevolg 3.8). Verder kunnen er nog tussenstappen zijn met graad 1 in de lichaamsuitbreiding, maar deze tussenstappen veranderen niets aan de construeerbaarheid van $\gamma_{1,n}$, omdat er in de lichaamsuitbreiding geen nieuwe elementen worden toegevoegd. Om vervolgens te bewijzen dat $\gamma_{1,n}$ construeerbaar is, moeten we het omgekeerde bewijzen van stelling 3.9, namelijk als in elke tussenstap van $\gamma_{1,n}$ de graad van de lichaamsuitbreiding gelijk is aan 1 of 2, dan is $\gamma_{1,n}$ construeerbaar. Bij een tussenstap met lichaamsuitbreiding van graad 1, worden er geen nieuwe elementen aan toegevoegd en dit zal dus geen invloed hebben op de construeerbaarheid van $\gamma_{1,n}$. Van tussenstappen met graad 2 in de lichaamsuitbreiding hebben we gezien dat het aantal ervan gelijk is aan w . Om te bewijzen dat bij deze tussenstappen geldt dat $\gamma_{1,n}$ construeerbaar is, gaan we inductie over w toepassen. We passen dus inductie toe over het aantal tussenstappen

met graad 2 in de lichaamsuitbreiding. Als $w = 0$, dan $\mathbb{Q}(\gamma_{1,n}) = \mathbb{Q}$ en dan $\gamma_{1,n} \in \mathbb{Q}$, oftewel $\gamma_{1,n}$ is construeerbaar. Stel nu dat voor $w = k - 1$ geldt dat $\gamma_{1,n}$ construeerbaar is over F_{k-1} , dan geldt voor $w = k$ dat $[\mathbb{Q}(\gamma_{1,n}) : F_{k-1}] = [F_k : F_{k-1}] = 2$. Als gevolg heeft $\gamma_{1,n}$ als minimaal polynoom over F_{k-1} een polynoom van graad 2. Het minimale polynoom is van de vorm $x^2 + ax + b$, dus voor de wortel $\gamma_{1,n}$ geldt $\gamma_{1,n} = \frac{-a+\sqrt{D}}{2}$ of $\gamma_{1,n} = \frac{-a-\sqrt{D}}{2}$, met $D = a^2 - 4b$. Aangezien $a, b \in F_{k-1}$, zijn a en b construeerbaar en vervolgens D en \sqrt{D} ook en als gevolg is $\gamma_{1,n}$ construeerbaar over F_k . Met inductie volgt nu dat voor elke $w \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, geldt dat $\gamma_{1,n}$ construeerbaar is over F_w , in het bijzonder is $\gamma_{1,n}$ dus construeerbaar over \mathbb{Q} en daarom construeerbaar met passer en ongemarkeerde liniaal. Vervolgens kan hiermee de regelmatige n -hoek geconstrueerd worden (met passer en ongemarkeerde liniaal). \square

Nu blijft de vraag hoe de regelmatige n -hoeken daadwerkelijk geconstrueerd kunnen worden voor de n 's gegeven in stelling 3.1. Als $I = 0$ en $m = 0$ of 1 in de formule $n = 2^m \prod_{i=1}^I p_i$, dan hoeven we alleen maar een punt of een lijnstuk te construeren (zie opmerking 3.2). Als $I = 0$ en $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ willekeurig en groter dan 1, dan is de regelmatige n -hoek te construeren door een lijnstuk te tekenen en hier $m - 1$ keer een 2-hoekdeling op toe te passen.

De eerste 2-hoekdeling gaat als volgt: Gegeven het lijnstuk met hoekpunten A en B , teken de 2 cirkels met straal $|AB|$ met middelpunten A en B . Noem de 2 snijpunten tussen de 2 cirkels C en D . Laat E het snijpunt zijn tussen het lijnstuk CD en het lijnstuk AB . Nu is CD het lijnstuk dat $\angle AEB$ in tweeën verdeelt. Teken vervolgens de cirkel met middelpunt E en straal $|AE| = |EB|$. Noem de snijpunten tussen deze cirkel en lijnstuk CD de punten F en G . Nu vormen de punten A, B, F en G samen de regelmatige 4-hoek, oftewel het vierkant.

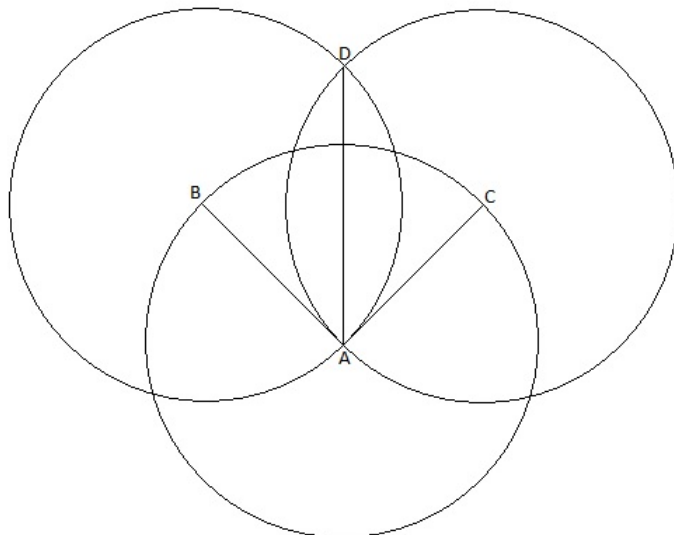


figuur 2: 2-hoekdeling op een lijnstuk toepassen.

Als $m > 2$, dan zijn er nog meer 2-hoekdelingen nodig. In dit geval passen we een 2-hoekdeling toe op een hoek kleiner dan 180° . Dit gaat op de volgende manier.

Laat $\angle BAC$ de hoek zijn waarop we 2-hoekdeling toepassen, waarbij B en C op de lijnen vanuit de hoek liggen zodanig dat $|AB| = |AC|$. Teken de cirkels met middelpunten B

en C en straal $|AB|$. Deze cirkels snijden elkaar in punt A en in nog een ander punt D . Nu wordt $\angle BAC$ in tweeën gedeeld door lijnstuk AD . Als we de regelmatige 2^m -hoek al hebben geconstrueerd met middelpunt A en B, C als hoekpunten, dan is het snijpunt tussen het lijnstuk AD en de cirkel met straal $|AB|$ en middelpunt A , een hoekpunt van de regelmatige 2^{m+1} -hoek. Met de passer is vervolgens de volledige 2^{m+1} -hoek te construeren.



figuur 3: 2-hoekdeling op een hoek kleiner dan 180° toepassen.

We kunnen nu door middel van deze 2-hoekdelingen de regelmatige n -hoek construeren voor elke $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ met $n = 2^m$.

Als $I = 1$ en $m = 0$, dan hebben we te maken met de regelmatige 3-hoek (gelijkzijdige driehoek) en verder de regelmatige 5, 17, 257 en 65537-hoeken. De constructies van deze veelhoeken zullen we hier niet verder behandelen, maar in [14] worden de constructies wel behandeld. Als $I = 1$ en $m > 0$, dan wordt er m keer een 2-hoekdeling gedaan bij de constructie. Als $I > 1$, dan hebben we de volgende stelling nodig.

Stelling 3.15:

Als de regelmatige m en n -hoeken construeerbaar zijn en $\text{ggd}(m, n) = 1$, dan is de regelmatige mn -hoek construeerbaar.

Bewijs:

Het Euclidische algoritme vertelt ons dat er $a, b \in \mathbb{Z}$ zijn met $am + bn = 1$. Verder zijn $\gamma_{1,m} = e^{\frac{2\pi i}{m}}$ en $\gamma_{1,n} = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ construeerbaar, dus ook $\gamma_{1,m}^b \cdot \gamma_{1,n}^a$. Er geldt

$$\gamma_{1,m}^b \cdot \gamma_{1,n}^a = e^{\frac{2\pi i b}{m} + \frac{2\pi i a}{n}} = e^{\frac{2\pi i (bn + am)}{mn}} = e^{\frac{2\pi i}{mn}}.$$

Oftewel $\gamma_{1,mn}$ is construeerbaar en dus de regelmatige mn -hoek. □

Alle priemgetallen (onder andere ook de Fermat priemgetallen) zijn copriem aan elkaar en dus zijn er a en b te vinden zoals in stelling 3.15. Als nu $I > 1$ en $m = 0$, dan is de regelmatige n -hoek te construeren door a en b te vinden en vervolgens $\gamma_{1,n}$ te construeren en daaruit de gehele regelmatige n -hoek te construeren.

Als laatste, als $I > 1$ en $m > 0$, dan gaat het hetzelfde als bij $m = 0$, er komen alleen nog m 2-hoekdelingen aan het eind bij.

We weten nu welke regelmatige n -hoeken construeerbaar zijn met passer en ongemarkeerde liniaal. In het bijzonder weten we ook dat met passer en ongemarkeerde liniaal p -hoekdelingen mogelijk zijn met p gelijk aan een macht van 2, door herhaaldelijk 2-hoekdelingen toe te passen. Zijn er nog meer hoekdelingen mogelijk met passer en (ongemarkeerde) liniaal? Hier zullen we verder op in gaan in het volgende hoofdstuk.

4 3-hoekdeling

We weten dat p -hoekdelingen mogelijk zijn met passer en ongemarkeerde liniaal voor p gelijk aan een macht van 2. Maar kunnen we ook 3-hoekdeling uitvoeren met passer en ongemarkeerde liniaal? Deze vraag heeft de oude Griekse wiskundigen lang bezig gehouden, samen met de 2 andere klassieke problemen (het construeren van een kubus met 2 keer zo grote inhoud als een gegeven kubus en het construeren van een vierkant met dezelfde oppervlakte als een gegeven cirkel). Uiteindelijk heeft Wantzel in 1837 bewezen dat het niet mogelijk is.

Stelling 4.1:

Het is niet mogelijk om een willekeurige hoek ϕ in 3 gelijke stukken te verdelen met alleen een passer en ongemarkeerde liniaal.

Bewijs:

Om deze stelling te bewijzen is het voldoende om te bewijzen dat voor één hoek ϕ het niet mogelijk is om deze hoek in 3 gelijke stukken te verdelen. We nemen daarvoor $\phi = 60^\circ$. Om deze hoek in drieën te verdelen, moeten we een hoek van 20° construeren. We weten dat een regelmatige 18-hoek een hoek van $\frac{360^\circ}{18} = 20^\circ$ heeft tussen 2 opeenvolgende hoekpunten. Een hoek van 20° construeren is dus equivalent aan de regelmatige 18-hoek construeren. Maar $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$, dus met stelling 3.1 volgt dat de regelmatige 18-hoek niet construeerbaar is. En daarom is een hoek van 20° niet construeerbaar en is een hoek van 60° niet in 3 gelijke stukken te verdelen met passer en ongemarkeerde liniaal. Dit voorbeeld bewijst de stelling. \square

Nu blijft de vraag hoe we dan wél 3-hoekdeling kunnen uitvoeren op een willekeurige hoek. Het blijkt dat er veel manieren zijn om dit op te lossen, waaronder de volgende oplossingen:

1. 3-hoekdeling dmv oneindig veel 2-hoekdelingen
2. 3-hoekdeling dmv een extra of ander instrument
3. 3-hoekdeling dmv een gegeven kromme
4. 3-hoekdeling dmv origami

Origami is een vakgebied op zichzelf en is te uitgebreid om hier te behandelen. In [3] wordt 3-hoekdeling met behulp van origami behandeld. We zullen hier alleen de eerste 3 nummers van hierboven behandelen.

3-hoekdeling dmv meerdere 2-hoekdelingen

Het is mogelijk om een 3-hoekdeling uit te voeren met een oneindig aantal 2-hoekdelingen. Dit komt door het volgende.

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^i = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^i = \frac{1}{4} \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

Een 3-hoekdeling is dus te bereiken door een combinatie van twee 2-hoekdelingen en vervolgens vier 2-hoekdelingen, enz. Aangezien het een oneindige combinatie is van 2-hoekdelingen, is het geen constructie door middel van een eindige combinatie van snijpunten tussen cirkels en/of lijnen. Het is dus niet mogelijk met passer en ongemarkeerde liniaal en daarom niet in strijd met stelling 4.1.

3-hoekdeling dmv een extra of ander instrument

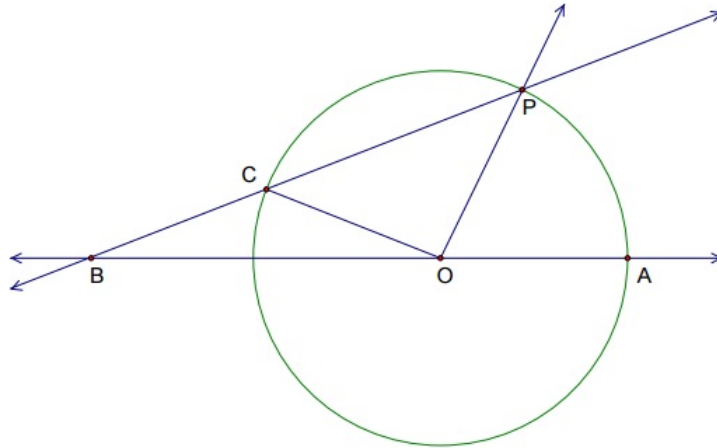
Dit geval is weer onder te verdelen in meerdere gevallen:

- 3-hoekdeling dmv een gemarkeerde liniaal en passer
- 3-hoekdeling dmv een uitgebreidere passer en liniaal
- 3-hoekdeling dmv een touw
- 3-hoekdeling dmv een tomahawk
- 3-hoekdeling dmv Ceva's pantograaf
- 3-hoekdeling dmv Sylvester's Isoklinostat

Dit zijn nog lang niet alle gevallen, maar wel de bekendste. Bij het eerste geval geldt dat een gemarkeerde liniaal een liniaal is met 2 markeringen erop die 1 eenheid uit elkaar liggen. Dit is ook voor elkaar te krijgen door een ongemarkeerde liniaal en passer tegen elkaar aan te houden (en tegen elkaar aan te blijven houden), waarbij de passer de markeringen aangeeft. Dit was echter niet toegestaan bij de klassieke constructies met passer en ongemarkeerde liniaal.

Met behulp van de gemarkeerde liniaal is 3-hoekdeling als volgt mogelijk (deze methode komt bij [6] vandaan).

Laat $\angle AOP$ de hoek zijn die we in 3 gelijke stukken willen verdelen. Teken met behulp van de passer en de markeringen op de liniaal een cirkel met straal 1 om O heen. Laat P op de cirkel liggen en verleng het lijnstuk OA in de andere richting. Trek vervolgens een lijn l door P en de cirkel en het verlengde lijnstuk, zodat lijnstuk BC lengte 1 heeft (hier is de gemarkeerde liniaal bij nodig), waarbij C het snijpunt is tussen l en de cirkel en B het snijpunt tussen l en het verlengde lijnstuk.



figuur 4: 3-hoekdeling met behulp van de gemarkeerde liniaal.

Aangezien $|BC| = |CO| = |OP|$, zijn $\triangle BCO$ en $\triangle COP$ gelijkbenig. Hierdoor geldt

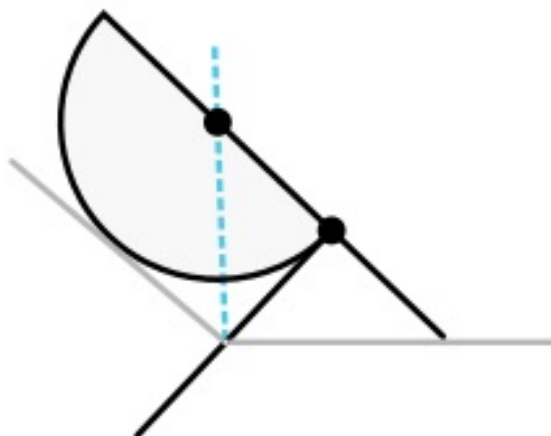
$$\begin{aligned} \angle AOP &= 180^\circ - \angle COP - \angle BOC = 180^\circ - (180^\circ - \angle CPO - \angle OCP) - \angle CBO = \\ &= 2\angle OCP - \angle CBO = 2(180^\circ - \angle BCO) - \angle CBO = \\ &= 2(\angle BCO + \angle BOC + \angle CBO - \angle BCO) - \angle CBO = 3\angle CBO. \end{aligned}$$

We hebben dus $\angle CBO = \frac{1}{3}\angle AOP$. Door nu de lijn te construeren parallel aan BC , door O , hebben we de hoek op de juiste plek gelegd. Door het resterende deel van $\angle AOP$ in tweeën te verdelen, hebben we $\angle AOP$ in 3 gelijke stukken verdeeld.

De andere gevallen gaan we niet zo uitgebreid behandelen. We zullen ze even kort langs gaan. Een uitgebreidere passer is een passer waarmee gelijke hoeken worden aangegeven. Hiermee is het mogelijk om een willekeurige hoek in 3 gelijke stukken te verdelen, op een manier die vergelijkbaar is met 3-hoekdeling met behulp van Sylvester's Isoklinostat (zie verderop voor 3-hoekdeling met behulp van Sylvester's Isoklinostat).

Als je een touw tot je beschikking hebt, dan heb je geen passer en liniaal meer nodig. Je kan namelijk lijnen trekken met een touw door het touw uitgestrekt te houden en een cirkel tekenen met het touw door de ene kant vast te houden en de andere kant rond te draaien. Maar er is nog meer mogelijk met een touw, bijvoorbeeld een ellips construeren. Dit kan door beide uiteindes van het touw vast te houden op 2 verschillende plekken en vervolgens een punt dat ergens tussen de uiteindes in ligt, rond te draaien. Het is mogelijk om 3-hoekdeling uit te voeren met behulp van een ellips, zie verderop bij de 3-hoekdeling met behulp van kegelsneden. Hierdoor is 3-hoekdeling dus ook mogelijk met een touw.

De tomahawk ziet er uit als in figuur 5:

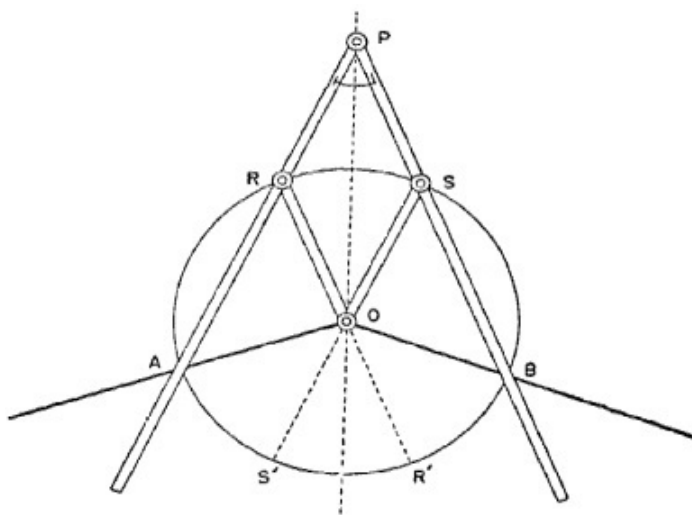


figuur 5: De tomahawk.

Het bestaat uit een halve cirkel en 2 lijnstukken. Het ene lijnstuk is het verlengde van de middellijn van de halve cirkel en heeft als lengte de straal van de halve cirkel. Het andere lijnstuk staat er loodrecht op en raakt de halve cirkel aan de kant waar het eerste lijnstuk is geplaatst. Hiermee kan een hoek in 3 gelijke stukken worden verdeeld door de hendel (het eerste lijnstuk) op een lijn vanuit de hoek te plaatsen en de halve cirkel op de andere lijn vanuit de hoek. Dit moet op zo'n manier dat het tweede lijnstuk door de hoek gaat, zie figuur 5. Nu wordt de hoek in drie gelijke stukken verdeeld door de lijn tussen de hoek en het middelpunt van de halve cirkel.

Hoewel het mogelijk is om de tomahawk te construeren met passer en ongemarkeerde liniaal, is het niet mogelijk om de tomahawk op de juiste plek te plaatsen met passer en ongemarkeerde liniaal.

Ceva's pantograaf ziet er uit als in figuur 6 en bestaat uit een ruit $PORS$, waarbij de zijdes PR en PS verlengd zijn.

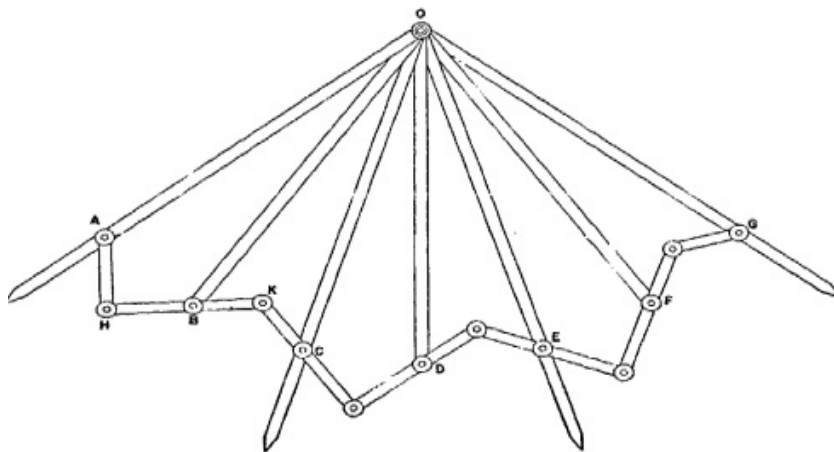


figuur 6: Ceva's pantograaf.

Laat $\angle AOB$ de hoek zijn waarop 3-hoekdeling wordt toegepast. Leg de pantograaf zo neer dat punt O in de ruit overeenkomt met punt O in de hoek en punt P op de bissectrice van $\angle AOB$ ligt. Construeer vervolgens een cirkel om O met straal $|OR| = |OS|$ en stel dat A en B op deze cirkel liggen, zoals in figuur 6. Verplaats de punten R en S van de

pantograaf nu op zo'n manier over de cirkel, dat de verlengde zijdes door A en B gaan. Verleng daarna de lijnstukken OR en OS tot de punten R' en S' op de cirkel. Er geldt $\angle ROS = \angle R'OS'$ en aangezien $AR \parallel OS$ en $BS \parallel OR$, geldt ook $|RS| = |AS'| = |BR'|$. Oftewel $\angle R'OS' = \angle ROS = \angle AOS' = \angle BOR'$, doordat het allemaal hoeken zijn, horende bij koorden van dezelfde cirkel met gelijke lengte. We hebben $\angle AOB$ dus in 3 gelijke stukken verdeeld.

Ook met Sylvester's isoklinostat is 3-hoekdeling mogelijk. Dit instrument bestaat uit 7 lijnstukken tussen O en A t/m G , die allemaal even lang zijn. Tussen A en B zit een punt H met $|AH| = |BH|$ en tussen B en C zit K met $|BK| = |CK|$ (zie figuur 7). Op soortgelijke wijze zitten er ook punten L, M, N en P tussen C, D, E, F en G met $|AH| = |BH| = |CL| = |DL| = |EN| = |FN|$ en $|BK| = |CK| = |DM| = |EM| = |FP| = |GP|$. Door de constructie geldt $\angle AOB = \angle COD = \angle EOF$ en $\angle BOC = \angle DOE = \angle FOG$. Oftewel $\angle AOC = \angle COE = \angle EOG$ en dus kan een willekeurige hoek in 3 gelijke stukken worden verdeeld met de isoklinostat door de zijden AO en GO op de zijden uit de hoek te leggen. De zijden OC en OE geven dan de 3-hoekdeling aan.



figuur 7: Sylvester's isoklinostat.

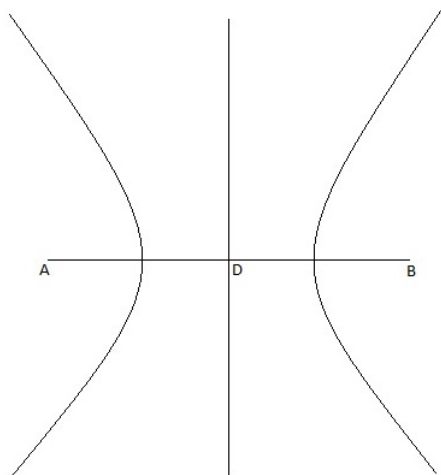
3-hoekdeling dmv een gegeven kromme

Het is ook mogelijk om 3-hoekdeling uit te voeren als er een bepaalde kromme geconstrueerd kan worden. Krommes waarmee 3-hoekdeling mogelijk is, worden ook wel trisectrices genoemd. Zo'n kromme is niet te construeren met passer en liniaal, maar er zijn wel instrumenten bedacht waarmee het wel mogelijk is. De manier om 3-hoekdeling uit te voeren, verschilt per kromme. Dit zijn een aantal krommes waarmee 3-hoekdeling mogelijk is:

- De sectrix van Maclaurin
- De spiraal van Archimedes
- De quadratrix van Hippias
- Kegelsneden

Op de sectrix van Maclaurin, de spiraal van Archimedes en de quadratrix van Hippias zullen we terugkomen in hoofdstuk 6, omdat hier meer mee mogelijk is dan alleen 3-hoekdeling.

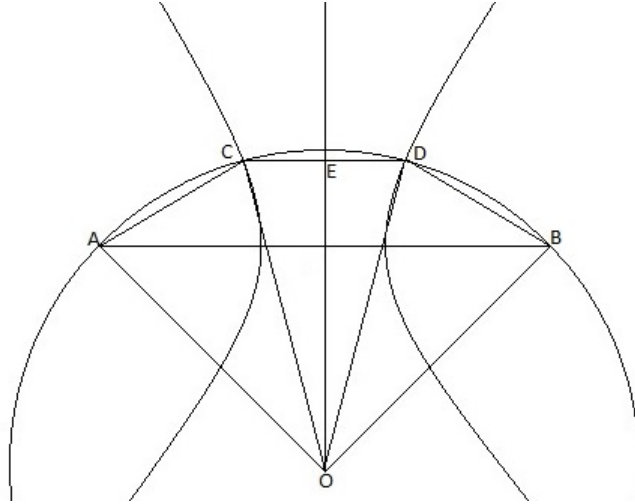
Kegelsneden zijn onder te verdelen in cirkels, ellipsen, parabolen en hyperbolen. Met een cirkel is 3-hoekdeling niet mogelijk, anders zou 3-hoekdeling mogelijk zijn met passer en ongemarkeerde liniaal. Maar met een ellips, parabool en hyperbool is het wel mogelijk. Als eerste bespreken we de methode met behulp van de hyperbool. Een hyperbool is een kromme waarbij het verschil tussen de afstanden tot 2 gekozen punten A en B (deze punten heten de brandpunten), gelijk blijft aan een constante c . Doordat het verschil op 2 verschillende manieren kan worden berekend, heeft een hyperbool twee takken, de ene dichter bij A en de andere dichter bij B . Figuur 8 verduidelijkt dit.



figuur 8: een hyperbool.

Een hyperbool kan ook gedefinieerd worden als de punten waarvoor de afstand tot A of B gelijk is aan een constante $e > 1$ vermenigvuldigd met de afstand tot de middelloodlijn van AB . Deze constante e heet de eccentriciteit. Met behulp van een hyperbool kunnen we een willekeurige hoek in 3 gelijke stukken verdelen op de volgende manier, die bij [10] vandaan komt.

Laat $\angle AOB$ de hoek zijn om in 3 gelijke stukken te verdelen. Teken een cirkel om O met straal $|OA| = |OB|$. Teken de lijn AB en construeer de middelloodlijn van AB . Construeer vervolgens met een geschikt instrument de hyperbool met A en B als brandpunten en met eccentriciteit $e = 2$. Laat C en D de snijpunten zijn tussen de cirkel en de hyperbool, die het dichtst bij respectievelijk A en B liggen. Construeer de lijnstukken CO en CD . We hebben nu $\angle AOB$ in 3 gelijke stukken verdeeld. Er geldt namelijk $|AC| = |BD|$, door de symmetrie van de hyperbool. Laat verder E het snijpunt zijn tussen CD en de middelloodlijn van AB . Door de eccentriciteit van de hyperbool geldt $2|CE| = |AC|$ en $2|DE| = |BD|$. Hieruit volgt $|CE| = |DE|$ en $|CD| = |CE| + |DE| = |AC| = |BD|$. Verder geldt $|OA| = |OB| = |OC| = |OD|$, doordat het steeds de straal is van dezelfde cirkel. We hebben dus 3 congruente driehoeken: $\triangle ACO$, $\triangle CDO$ en $\triangle BDO$. Hieruit volgt $\angle AOC = \angle COD = \angle BOD$ en samen met $\angle AOC + \angle COD + \angle BOD = \angle AOB$ weten we nu dat $\angle AOB$ in 3 gelijke stukken is verdeeld.



figuur 9: 3-hoekdeling met behulp van de hyperbool.

We kunnen deze 3-hoekdeling ook op een algebraïsche manier bewijzen, door middel van vergelijkingen. Hiervoor voeren we eerst een assenstelsel in. Laat het snijpunt tussen OE en AB de oorsprong zijn en laat de verlengingen van AB en OE respectievelijk de x -as en de y -as zijn. Laat verder de afstanden tussen A en de oorsprong en O en de oorsprong gelijk zijn aan a respectievelijk b . Dan geldt $A = (-a, 0)$, $B = (a, 0)$ en $O = (0, -b)$. De cirkel met middelpunt $O = (0, -b)$ en straal $|AO| = \sqrt{a^2 + b^2}$ wordt beschreven door de vergelijking $x^2 + (y + b)^2 = a^2 + b^2$. Noem de snijpunten tussen de hyperbool en de x -as de punten $(d, 0)$ en $(-d, 0)$. Doordat de eccentriciteit van de hyperbool gelijk is aan 2, geldt $\frac{a-d}{d-b} = 2$, oftewel $a = 3d$. De hyperbool wordt nu beschreven door de vergelijking

$$\frac{x^2}{(\frac{1}{3}a)^2} - \frac{y^2}{(\frac{1}{3}a)^2} = 1.$$

Waarbij $\frac{1}{3}a = d$ de afstand is tussen de oorsprong en één van de snijpunten van de hyperbool met de x -as. Zie [15] voor meer informatie hierover.

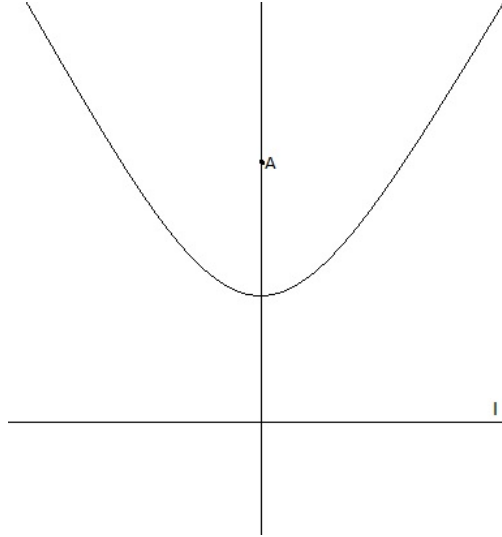
Voor de snijpunten tussen de hyperbool en de cirkel geldt in het bijzonder

$$y^2 + (\frac{1}{3}a)^2 + (y + b)^2 = a^2 + b^2.$$

Dit kan worden geschreven als $2y^2 + 2by + (\frac{1}{3}a)^2 - a^2 = 0$.

Aangezien a en b construeerbaar zijn, weten we dat de oplossingen van de kwadratische vergelijking $2y^2 + 2by + (\frac{1}{3}a)^2 - a^2 = 0$ construeerbaar zijn. Hiermee kunnen vervolgens de x -coördinaten van de snijpunten geconstrueerd worden en daarom weten we dat de snijpunten tussen de hyperbool en de cirkel construeerbaar zijn en dus kunnen we 3-hoekdeling uitvoeren met passer en ongemarkeerde liniaal, zodra de hyperbool geconstrueerd is met behulp van een ander instrument.

Deze algebraïsche manier van bewijzen gaan we ook gebruiken bij de 3-hoekdeling met behulp van de parabool. Een parabool wordt gedefinieerd door de punten die even ver van een gegeven lijn l liggen als van een gegeven punt A . Zie figuur 10 voor een voorbeeld van een parabool.



figuur 10: een parabool.

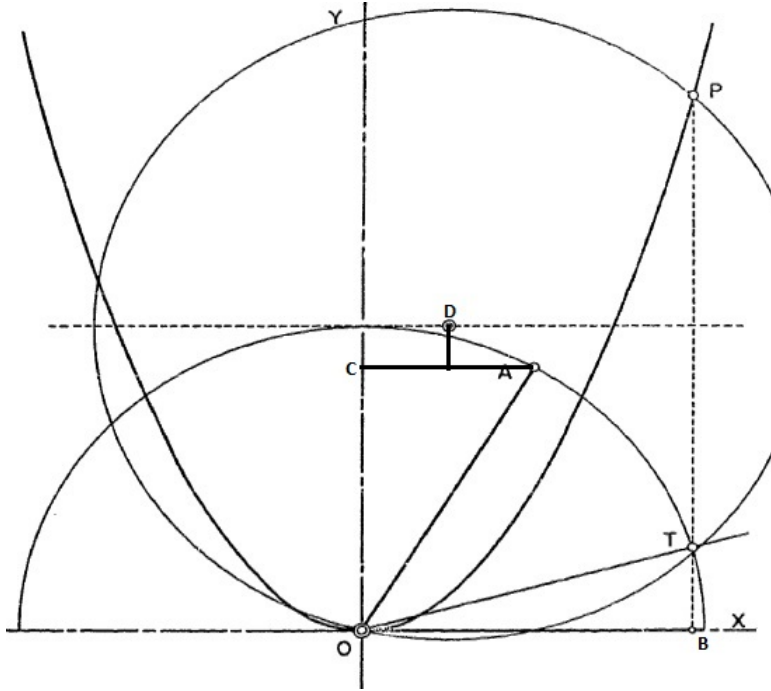
Met behulp van een parabool is 3-hoekdeling mogelijk op de volgende manier (zie [11]). Laat $\angle AOB$ de hoek zijn om in 3 gelijke stukken te verdelen, waarbij we O definiëren als de oorsprong en de punten A en B op de eenheidscirkel liggen (zie figuur 11) en B ook op de x -as. Laat punt A de coördinaten (a, b) hebben en construeer de lijn parallel aan de x -as door A . Noem het snijpunt tussen deze lijn en de y -as het punt C . Construeer vervolgens de lijn k loodrecht op AC door het midden van lijnstuk AC op de manier beschreven in hoofdstuk 3. Construeer ook de lijn parallel aan de x -as door het punt $(0, 1)$, oftewel de raaklijn aan de eenheidscirkel in het punt $(0, 1)$. Noem het snijpunt tussen deze raaklijn en de lijn k het punt D . Door de constructie heeft D als coördinaten $(\frac{a}{2}, 1)$. Construeer nu de cirkel c met middelpunt D door O . Deze cirkel heeft als straal $|DO| = \sqrt{(\frac{a}{2})^2 + 1}$ en wordt gegeven door de vergelijking $(x - \frac{a}{2})^2 + (y - 1)^2 = (\frac{a}{2})^2 + 1$. Construeer als volgende stap de parabool met punten die even ver van de lijn $y = -\frac{1}{8}$ liggen als van het punt $(0, \frac{1}{8})$, door middel van een geschikt instrument. Voor punten (x, y) op deze parabool geldt dat de afstand tot de lijn gelijk is aan de afstand tot het punt, oftewel

$$|y + \frac{1}{8}| = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - \frac{1}{8})^2}.$$

Door deze vergelijking te kwadrateren krijgen we

$$y^2 + \frac{y}{4} + \frac{1}{64} = x^2 + y^2 - \frac{y}{4} + \frac{1}{64}.$$

Dit leidt tot de vergelijking $y = 2x^2$. Om de 3-hoekdeling af te maken laten we P het snijpunt zijn tussen de parabool en de cirkel c , op de plek die aangegeven wordt in figuur 11.



figuur 11: 3-hoekdeling met behulp van de parabool.

Construeer als laatste de lijn loodrecht op de x -as door P en noem het snijpunt van deze lijn met de eenheidscirkel het punt T . Nu geldt $\angle BOT = \frac{1}{3}\angle AOB$ en door $\angle AOT$ in tweeën te verdelen, hebben we $\angle AOB$ in 3 gelijke stukken verdeeld. Waarom dit geldt is te bewijzen door middel van de vergelijkingen van de cirkel c en de parabool,

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 1 \text{ en } y = 2x^2.$$

De vergelijking van de cirkel c is ook nog wat te versimpelen, wat leidt tot

$$x^2 + y^2 - ax - 2y = 0 \text{ en } y = 2x^2.$$

Door de vergelijking van de parabool in te vullen in die van de cirkel, krijgen we

$$4x^4 - 3x^2 - ax = 0. \quad (4)$$

De oplossingen van deze vergelijking (met bijbehorende y -coördinaten) zijn de snijpunten tussen de parabool en de cirkel. De x -coördinaat van punt P is dus een oplossing van de vergelijking. Verder is ook $x = 0$ een oplossing, aangezien de parabool en cirkel allebei door de oorsprong gaan. Door deze oplossing uit vergelijking (4) weg te delen, houden we het volgende over,

$$4x^3 - 3x - a = 0. \quad (5)$$

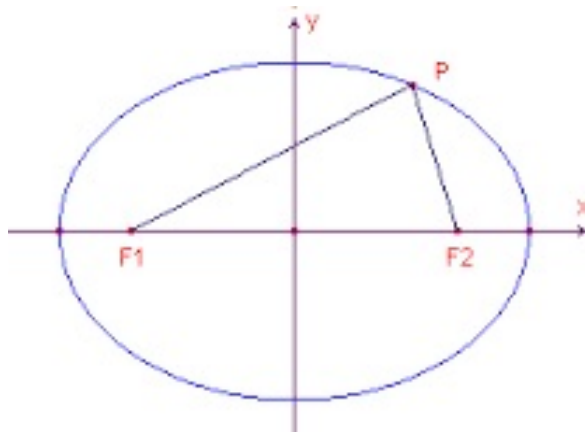
Deze laatste vergelijking staat in verband met de 3-hoekdeling. We weten namelijk dat als we een hoek 3ϕ in 3 gelijke stukken willen verdelen, dat we een hoek ϕ moeten construeren. Dit is hetzelfde als $\cos \phi$ construeren uit $\cos 3\phi$. Met behulp van de trigonometrische formule $\cos 3\phi = 4 \cos^3 \phi - 3 \cos \phi$, weten we dat $4x^3 - 3x - \cos 3\phi = 0$, waarbij $x = \cos \phi$. Verder liggen de punten A en B van $\angle AOB$ op de eenheidscirkel, dus $A = (a, b) = (\cos \angle AOB, \sin \angle AOB)$. Met $3\phi = \angle AOB$ krijgen we nu de vergelijking

$$4x^3 - 3x - a = 0, \text{ met } x = \cos \phi = \cos \frac{1}{3}\angle AOB.$$

Dit is precies de vergelijking (5), die de snijpunten aangeeft tussen de cirkel c en de parabool. De oplossing $x = \cos \frac{1}{3}\angle AOB$ van deze vergelijking is daarom de x -coördinaat

van punt P . Door de constructie heeft punt T dezelfde x -coördinaat en ligt T op de eenheidscirkel. We hebben dus $\cos \frac{1}{3}\angle AOB$ geconstrueerd uit $\cos \angle AOB$ en dus hebben we $\angle AOB$ in 3 gelijke stukken verdeeld. Hierdoor is 3-hoekdeling mogelijk met passer en ongemarkeerde liniaal op voorwaarde dat er nog een ander instrument beschikbaar is om de parabool mee te construeren.

Als laatste is 3-hoekdeling ook mogelijk met de ellips. Een ellips (figuur 12) wordt beschreven door de punten waarvoor geldt dat de som van de afstanden tot 2 gegeven punten F_1 en F_2 gelijk blijft (als $F_1 = F_2$, dan wordt de ellips een cirkel).



figuur 12: een ellips.

Een ellips wordt dus beschreven door een vergelijking $(\frac{x-a}{c})^2 + (\frac{y-b}{d})^2 = e$ voor bepaalde waarden van a , b , c , d en e . Deze vergelijking is ook te schrijven als $fx^2 + gy^2 + hx + ky + l = 0$ voor bepaalde waarden van f , g , h , k en l . Om 3-hoekdeling uit te voeren met behulp van de ellips (zie [1]) laten we net zoals bij de parabool $\angle AOB$ de hoek zijn om in 3 gelijke stukken te verdelen, waarbij O de oorsprong is en de punten A en B op de eenheidscirkel liggen. Verder ligt B ook op de x -as. Nu heeft punt A de coördinaten $(p, q) = (\cos \angle AOB, \sin \angle AOB)$. Construeer vervolgens de 2 ellipsen met de volgende vergelijkingen, waarbij $r = \sqrt{17 - 4p}$,

$$2x^2 + 4y^2 - px + 2ry + 2 = 0 \text{ en } 6x^2 + 4y^2 - (2 + p)x + (2r - 4)y - r - 1 = 0.$$

De snijpunten tussen deze ellipsen voldoen aan de vergelijking

$$2x^2 + 4y^2 - px + 2ry + 2 = 6x^2 + 4y^2 - (2 + p)x + (2r - 4)y - r - 1.$$

Dit is hetzelfde als

$$y = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{r+3}{4}.$$

Door dit in te vullen in één van de vergelijkingen van de ellipsen, krijgen we een vergelijking voor de x -coördinaten van de snijpunten,

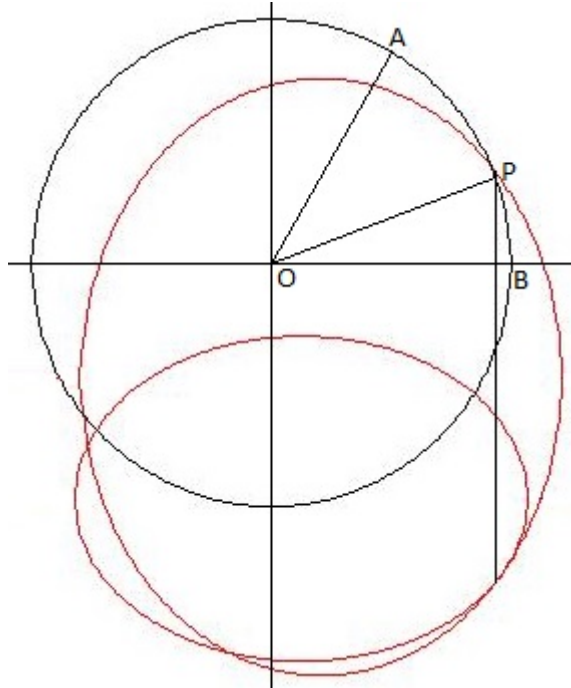
$$2x^2 + 4(x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{r+3}{4})^2 - px + 2r(x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{r+3}{4}) + 2 = 0.$$

Dit leidt tot de vergelijking

$$4x^4 - 4x^3 - 3x^2 + (3 - p)x + p = 0.$$

Oftewel $(x - 1)(4x^3 - 3x - p) = 0$. Deze vergelijking heeft als oplossingen $x = 1$ en de oplossingen van (5) (met $a = p$). Zoals we bij de parabool hebben gezien, is één van de oplossingen van (5) gelijk aan $x = \cos \frac{1}{3}\angle AOB$. Door een lijn te trekken door het

bijbehorende snijpunt evenwijdig aan de y -as, krijgen we een snijpunt P tussen deze lijn en de eenheidscirkel. Dit punt P heeft als coördinaten $(\cos \frac{1}{3}\angle AOB, \sin \frac{1}{3}\angle AOB)$ en de lijn door O en P is de lijn die $\angle AOB$ in 3 gelijke stukken verdeelt. Met behulp van ellipsen is 3-hoekdeling dus ook mogelijk.



figuur 13: 3-hoekdeling met behulp van 2 ellipsen.

We hebben een aantal manieren gezien waarmee we 3-hoekdeling kunnen uitvoeren op een willekeurige hoek. Deze manieren noemen we 3-hoekdelers. In het volgende hoofdstuk gaan we kijken naar het construeren van regelmatige veelhoeken met behulp van 3-hoekdeling.

5 Construeerbaarheid van regelmatige veelhoeken met 3-hoekdeling

Het hoofdresultaat van dit hoofdstuk zal de volgende uitbreiding van de stelling van Gauss zijn:

Stelling 5.1:

Een regelmatige n -hoek is construeerbaar met passer, ongemarkeerde liniaal en 3-hoekdeler dan en slechts dan als n van de vorm $n = 2^m 3^l \prod_{i=1}^I p_i$ is, met $m, l, I \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ en $p_i \geq 5$ verschillende Pierpont priemgetallen (priemgetallen van de vorm $2^a 3^b + 1$ voor $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$).

Om stelling 5.1 te bewijzen, hebben we nog wat meer informatie nodig, die we hieronder zullen geven in de vorm van stellingen. Om te beginnen weten we het volgende.

Stelling 5.2:

De 3 oplossingen van de 3e graads vergelijking $x^3 - 3x - 2 \cos 3\phi = 0$, met $2 \cos 3\phi$ construeerbaar, zijn construeerbaar met passer, ongemarkeerde liniaal en een 3-hoekdeler voor elke hoek ϕ .

Bewijs:

We kunnen 3-hoekdeling uitvoeren, wat betekent dat we $\cos \phi$ kunnen construeren uit $\cos 3\phi$ voor elke hoek ϕ . Met de trigonometrische formule $\cos 3\phi = 4 \cos^3 \phi - 3 \cos \phi$ weten we dat $x = 2 \cos \phi$ aan de volgende vergelijking voldoet,

$$x^3 - 3x - 2 \cos 3\phi = 0. \quad (6)$$

Verder is $2 \cos 3\phi = 2 \cos (3\phi + 2\pi) = 2 \cos 3(\phi + \frac{2\pi}{3})$, dus met behulp van de trigonometrische formule is $2 \cos (\phi + \frac{2\pi}{3})$ ook een oplossing van (6). Analoog is $2 \cos (\phi + \frac{4\pi}{3})$ de 3e oplossing van (6). Ook weten we uit de aannames dat $2 \cos 3\phi$ construeerbaar is, dus met de 3-hoekdeler is x construeerbaar. Met behulp van de bekende formules voor cosinus en sinus weten we het volgende,

$$\begin{aligned} 2 \cos (\phi + \frac{2\pi}{3}) &= 2 \cos \phi \cos \frac{2\pi}{3} - 2 \sin \phi \sin \frac{2\pi}{3} \\ &= -2 \frac{1}{2} \cos \phi - 2 \frac{1}{2} \sqrt{3} \sin \phi \\ &= -\cos \phi - \sqrt{3} \sqrt{1 - \cos^2 \phi}. \end{aligned}$$

Aangezien $\cos \phi$ construeerbaar is, is $-\cos \phi - \sqrt{3} \sqrt{1 - \cos^2 \phi}$ construeerbaar en dus $2 \cos (\phi + \frac{2\pi}{3})$ ook. Op dezelfde manier is $2 \cos (\phi + \frac{4\pi}{3})$ construeerbaar en als gevolg zijn alle oplossingen van de vergelijking $x^3 - 3x - 2 \cos 3\phi = 0$ construeerbaar zodra $2 \cos 3\phi$ construeerbaar is (met passer, ongemarkeerde liniaal en 3-hoekdeler). \square

Met behulp van stelling 5.2 weten we het volgende.

Stelling 5.3:

De 3 oplossingen van de 3e graads vergelijking

$$x^3 - px - q = 0, \quad (7)$$

met construeerbare coëfficiënten en $p > 0$, zijn construeerbaar met passer, ongemarkeerde liniaal en een 3-hoekdeler dan en slechts dan als alle oplossingen reëel zijn.

Bewijs:

Stel eerst dat de oplossingen van de vergelijking $x^3 - px - q = 0$ construeerbaar zijn met passer, ongemarkeerde liniaal en een 3-hoekdeler. Substitueer $y = w \sqrt{\frac{p}{3}}$ in (7). Dan krijgen we

$$(w \sqrt{\frac{p}{3}})^3 - p(w \sqrt{\frac{p}{3}}) - q = 0.$$

Dit is ook te schrijven als

$$w^3 - 3w - q \sqrt{\frac{3}{p}} = 0. \quad (8)$$

Verder zijn p en q construeerbaar en dus is $q \sqrt{\frac{3}{p}}$ construeerbaar (omdat $p > 0$). Als we $q \sqrt{\frac{3}{p}} = 2 \cos 3\phi$ stellen, dan is $2 \cos 3\phi$ construeerbaar en dus weten we met stelling 5.2

dat de oplossingen van $w^3 - 3w - 2 \cos 3\phi = 0$ construeerbaar zijn. Dit betekent dat de oplossingen van (8) construeerbaar zijn op voorwaarde dat $q\sqrt{\frac{3}{p}} = 2 \cos 3\phi$. Aangezien $|\cos 3\phi| \leq 1$, geldt $|q\sqrt{\frac{3}{p}}| \leq 2$. Door te kwadrateren wordt dit $q^2(\frac{3}{p})^3 \leq 4$, of anders geschreven $27q^2 \leq 4p^3$. Uit deze eigenschap en de resultaten uit [13] volgt dat (7) alleen maar reële oplossingen heeft. De implicatie \implies is nu bewezen.

Voor de andere implicatie stellen we dat de vergelijking $x^3 - px - q = 0$ alleen maar reële oplossingen heeft. Nu volgt met [13] dat $27q^2 \leq 4p^3$ en dus $|q\sqrt{\frac{3}{p}}| \leq 2$. Aangezien $x^3 - px - q = 0$ ook te schrijven is als (8), zien we dat we de vergelijking $w^3 - 3w - 2v = 0$ hebben met $|v| \leq 1$. We kunnen v dus als $\cos 3\phi$ schrijven voor een bepaalde hoek 3ϕ . Daarom weten we met stelling 5.2 dat de oplossingen van de vergelijking $w^3 - 3w - 2v = 0$ construeerbaar zijn met passer, liniaal en 3-hoekdeler. Met behulp van de substitutie $w = \frac{y}{\sqrt{\frac{p}{3}}}$, wordt $w^3 - 3w - 2v = 0$ weer de vergelijking $x^3 - px - q = 0$. Deze substitutie bestaat uit delen door $\sqrt{\frac{p}{3}}$ en dus blijven de oplossingen construeerbaar. We hebben de stelling nu bewezen. \square

Als gevolg weten we het volgende.

Gevolg 5.4:

De 3 oplossingen van de 3e graads vergelijking $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ met construeerbare coëfficiënten en $3ac > b^2$ (dit impliceert $a \neq 0$), zijn construeerbaar met passer, ongemarkeerde liniaal en een 3-hoekdeler dan en slechts dan als alle oplossingen reëel zijn.

Bewijs:

De vergelijking $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ gaat over in (7) door eerst door a te delen en daarna $x = y - \frac{b}{3a}$ te substitueren in de vergelijking. Dit levert dan $p = \frac{-b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}$ en $q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}$ op en dus is de voorwaarde $\frac{-b^2}{3a^2} + \frac{c}{a} > 0$ gelijk aan $p > 0$. Verder is de voorwaarde $\frac{-b^2}{3a^2} + \frac{c}{a} > 0$ weer gelijk aan $3ac > b^2$. Door deze substituties heeft $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ andere oplossingen dan (7), maar de substituties veranderen niets aan de construeerbaarheid van oplossingen en of de oplossingen wel of niet reëel zijn. Gevolg 5.4 volgt dus uit stelling 5.3. \square

In stelling 5.1 komen Pierpont priemgetallen voor. Net zoals bij de Fermat priemgetallen, zullen we ook Pierpont priemgetallen wat uitgebreider bekijken.

Definitie 5.5:

Een Pierpont priemgetal is een priemgetal van de vorm $2^u 3^v + 1$ met $u, v \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Uit deze definitie volgt dat elk Fermat priemgetal een Pierpont priemgetal is, door $v = 0$ en $u = 2^k$ ($k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) te nemen. Maar behalve de Fermat priemgetallen zijn er nog veel meer Pierpont priemgetallen bekend, zoals 7, 13, 19 en 37. Verder is bekend dat er 41 Pierpont priemgetallen zijn onder de 1.000.000 (zie [2]). Het is echter nog niet bekend of er oneindig veel Pierpont priemgetallen zijn.

Voor het bewijs van stelling 5.1 hebben we nog een stelling nodig, die een uitbreiding is van stelling 2.15.6 uit [8] (deze laatste stelling werd gebruikt bij (3) in het bewijs van stelling 3.1).

Stelling 5.6:

Laat F een lichaam zijn dat \mathbb{Q} als deellichaam bevat en $\rho \notin F$ een wortel van het polynoom $x^n - a$ voor een $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$. Stel verder dat $F(\rho)/F$ een eindige Galois uitbreiding is, dat wil zeggen dat het minimale polynoom van ρ over F eindige graad heeft en geen wortels heeft die vaker dan 1 keer voorkomen en verder dat alle wortels van het minimale polynoom in $F(\rho)$ liggen. Dan geldt voor de bijbehorende Galois groep G van $F(\rho)/F$ dat G een normaalreeks heeft van ondergroepen tussen G en $\{e\}$,

$$G \triangleright \cdots \triangleright G_{j+1} \triangleright G_j \triangleright \cdots \triangleright \{e\},$$

waarbij elke groep G_j/G_{j-1} cyclisch is en priemorder heeft (dus een priemgetal als orde).

Dit volgt direct uit [8] door combinatie van definitie 4.12.1, stelling 4.12.3 en lemma 1 op pagina 121.

Gevolg 5.7:

Laat F en ρ aan dezelfde voorwaarden voldoen als in stelling 5.6 en stel verder nog dat $[F(\rho) : F] = \prod_i p_i^{k_i}$ met p_i verschillende priemgetallen en $k_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Voor $G = \text{Gal}(F(\rho)/F)$ geldt met de fundamentele stelling van de Galois theorie $|G| = \prod_i p_i^{k_i}$. Met stelling 5.6 volgt nu dat G een normaalreeks van ondergroepen tussen G en $\{e\}$ heeft,

$$G \triangleright \cdots \triangleright G_{j+1} \triangleright G_j \triangleright \cdots \triangleright \{e\},$$

met elke groep G_j/G_{j-1} cyclisch en $|G_j/G_{j-1}| = p_i$ voor een priemgetal p_i die in $|G|$ voorkomt. Aangezien $|G/\{e\}| = |G| = \prod_i p_i^{k_i}$, komt elk priemgetal p_i precies k_i keer voor als orde van G_j/G_{j-1} voor een bepaalde $j \in \mathbb{N}$. Om dit voor elkaar te krijgen, moet dus gelden dat j van 0 tot $\sum_i k_i$ loopt.

We gaan nu stelling 5.1 bewijzen. Hierbij zal het bewijs overeenkomsten hebben met het bewijs van stelling 3.1, maar ook verschillen.

Bewijs van stelling 5.1:

Voor het bewijs van de \implies implicatie stellen we dat de regelmatige n -hoek construeerbaar is met passer, ongemarkeerde liniaal en 3-hoekdeler. Dan is $\gamma_{1,n}$ construeerbaar en uit gevolg 3.10 weten we dat $[\mathbb{Q}(\gamma_{1,n}) : \mathbb{Q}]$ een macht van 2 kan bevatten. Maar uit stelling 5.3 volgt dat de wortels van een polynoom van graad 3 ook construeerbaar zijn, op voorwaarde dat het polynoom reële wortels heeft. Dit betekent dat in een tussenstap in de constructie van $\gamma_{1,n}$, waarbij de snijpunten λ worden geconstrueerd, geldt dat λ ook de wortel kan zijn van een derde graads vergelijking. Het minimale polynoom van λ kan dus graad 3 hebben en als gevolg kan er een lichaamsuitbreiding komen van graad 3. Hierdoor kan $[\mathbb{Q}(\gamma_{1,n}) : \mathbb{Q}]$ ook een macht van 3 bevatten, oftewel $[\mathbb{Q}(\gamma_{1,n}) : \mathbb{Q}] = 2^m 3^l$ voor $m, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ($[\mathbb{Q}(\gamma_{1,n}) : \mathbb{Q}]$ kan geen andere priemgetallen dan 2 en 3 bevatten, omdat we met behulp van de trigonometrische formule $\cos 3\phi = 4 \cos^3 \phi - 3 \cos \phi$ alleen maar derde graads vergelijkingen kunnen oplossen die voldoen aan de vorm in stelling 5.4). Met stelling 3.11 geldt $\phi(n) = 2^m 3^l$ en vervolgens geldt met opmerking 3.12 dat

$2^m 3^l = \prod_i (p_i^{\alpha_i} - p_i^{\alpha_i-1}) = \prod_i p_i^{\alpha_i-1} (p_i - 1)$, waarbij $\prod_i p_i^{\alpha_i}$ de priemontbinding van n is. Dit kunnen we ook schrijven als $2^m 3^l = 2^a 3^b \prod_i p_i^{\alpha_i-1} (p_i - 1)$, waarbij a en b gelijk kunnen zijn aan 0 en $p_i \geq 5$. Hieruit volgt $a \leq m$ en $b \leq l$ en verder $\alpha_i = 1$ en $p_i = 2^c 3^d + 1$ voor alle i , met $c \leq m$ en $d \leq l$. De p_i 's zijn dus Pierpont priemgetallen. Voor n geldt vervolgens $n = 2^m 3^l \prod_{i=1}^I p_i$, waarbij $m, l, I \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ en $p_i \geq 5$ verschillende Pierpont priemgetallen. We hebben nu de \implies implicatie bewezen.

Voor de andere implicatie laten we n van de vorm $n = 2^m 3^l \prod_{i=1}^I p_i$ zijn, met $m, l, I \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ en $p_i \geq 5$ verschillende Pierpont priemgetallen. Dan geldt met opmerking 3.12 dat $\phi(n) = (2^m - 2^{m-1})(3^l - 3^{l-1}) \prod_{i=1}^I (p_i - 1) = 2^{m-1} \cdot 2 \cdot 3^{l-1} \prod_{i=1}^I (p_i - 1) = 2^w 3^z$ voor een $w, z \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Nu geldt met stelling 3.11 dat $[\mathbb{Q}(\gamma_{1,n}) : \mathbb{Q}] = \phi(n) = 2^w 3^z$. Verder kunnen we alleen maar punten β construeren die graad 1, 2 of 3 hebben in de lichaamsuitbreiding, anders krijgen we tegenspraak met stelling 3.9 of stelling 5.3. Verder zegt stelling 5.3 ook nog dat bij graad 3 een polynoom met β als wortel, alle wortels reëel moet hebben. Hieruit volgt als eerste dat $\gamma_{1,n}$ construeerbaar is als bij elke tussenstap de graad van de lichaamsuitbreiding gelijk is aan 1, 2 of 3 en niet nog aan een macht van 2 of 3. Hiervoor kunnen we gevolg 5.7 gebruiken. Aan de voorwaarden is voldaan, want \mathbb{Q} heeft inderdaad \mathbb{Q} als deellichaam en $\gamma_{1,n} \notin \mathbb{Q}$ is een wortel van $x^n - 1$. Ook hebben we in het bewijs van stelling 3.1 gezien dat $\mathbb{Q}(\gamma_{1,n}) : \mathbb{Q}$ een Galois uitbreiding is. Verder geldt met de fundamentele stelling van de Galois theorie voor $G = \text{Gal}(\mathbb{Q}(\gamma_{1,n})/\mathbb{Q})$, dat $|G| = [\mathbb{Q}(\gamma_{1,n}) : \mathbb{Q}] = 2^w 3^z$. Gevolg 5.7 zegt nu dat er een normaalreeks is van $w + z$ ondergroepen tussen G en $\{e\}$,

$$G = G_{w+z} \triangleright G_{w+z-1} \triangleright \cdots \triangleright G_1 \triangleright G_0 = \{e\},$$

met elke groep G_j/G_{j-1} cyclisch en $|G_j/G_{j-1}| = 2$ of 3 ($j \in \{1, 2, \dots, w + z\}$). Door vervolgens de fundamentele stelling van de Galois theorie te gebruiken, krijgen we een keten van lichaamsuitbreidingen,

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}(\gamma_{1,n}) &= F_{w+z} \supset F_{w+z-1} \supset \cdots \supset F_1 \supset F_0 = \mathbb{Q} \\ &\text{met } |F_j : F_{j-1}| = 2 \text{ of } 3 \text{ voor } i = 1, 2, \dots, w + z. \end{aligned}$$

Dit zijn alle tussenstappen in de constructie van $\gamma_{1,n}$, omdat $[\mathbb{Q}(\gamma_{1,n}) : \mathbb{Q}] = 2^w 3^z$ en de keten van lichaamsuitbreidingen hierboven heeft ook graad $2^w 3^z$ (met gevolg 3.8). Al deze tussenstappen hebben graad 2 of 3 in de lichaamsuitbreiding. Als de graad steeds 2 is, dan hebben we in het bewijs van stelling 3.1 gezien dat $\gamma_{1,n}$ construeerbaar is. Als er ook een tussenstap is van graad 3, laat dat dan als eerste voorkomen bij F_i voor een $i \in \{1, 2, \dots, w + z\}$. In deze tussenstap wordt een snijpunt geconstrueerd die een wortel is van een derde graads polynoom p met construeerbare coëfficiënten in F_{i-1} . Het is bekend dat een derde graads polynoom minstens één reële wortel heeft. Verder is bij de normaalreeks van ondergroepen elke ondergroep normaal, aangezien dat bij de definitie van een normaalreeks hoort. Maar nu vertelt de fundamentele stelling van de Galois theorie ons dat elk tussenlichaam normaal is in de keten van lichaamsuitbreidingen. Dit betekent dat voor elk polynoom met een wortel in het tussenlichaam geldt dat elke wortel in het tussenlichaam ligt. Dit specifiek toepassen op F_i geeft dat alle wortels van p in F_i liggen. Ook weten we dat alle lichaamsuitbreidingen F_k in de keten van lichaamsuitbreidingen

met $k < i$ graad 2 hebben en dus tot stand zijn gekomen door een reëel punt toe te voegen, zie stelling 3.9. Aangezien de keten begint met \mathbb{Q} , zijn alle F_k reële lichamen. Oftewel F_{i-1} is reëel en F_i ontstaat uit F_{i-1} door de reële wortel van p toe te voegen. Hierdoor is F_i ook een reëel lichaam. Verder hebben we gezien dat F_i alle wortels van p bevat, wat betekent dat alle wortels van p reëel zijn en dus zegt stelling 5.3 dat de wortels construeerbaar zijn met passer, ongemarkeerde liniaal en 3-hoekdeler. Als er meer tussenstappen zijn van graad 3, dan geldt voor elke tussenstap op dezelfde manier als hiervoor dat de punten die worden geconstrueerd, construeerbaar zijn met passer, ongemarkeerde liniaal en 3-hoekdeler. Aangezien er alleen maar tussenstappen zijn van graad 2 of 3 in de constructie van $\gamma_{1,n}$, volgt hieruit dat $\gamma_{1,n}$ construeerbaar is met passer, ongemarkeerde liniaal en 3-hoekdeler en als gevolg de regelmatige n -hoek ook. \square

Nu rijst weer de vraag hoe de regelmatige n -hoeken daadwerkelijk geconstrueerd kunnen worden voor de n 's gegeven in stelling 5.1. Het is allereerst nodig om alle regelmatige p -hoeken te construeren, waarbij p een Pierpont priemgetal is. Hiervoor is geen algemene methode bekend en dus moet bij elke regelmatige p -hoek afzonderlijk een constructie worden bedacht en bewezen. Aangezien er oneindig veel Pierpont priemgetallen zouden kunnen zijn, is het maar de vraag of alle constructies kunnen worden gevonden van de regelmatige p -hoeken. Als voorbeeld zullen we het geval $p = 7$ behandelen.

Voor de constructie van de regelmatige 7-hoek weten we dat $\phi(7) = 6 = 2^1 \cdot 3^1$. Er moet dus één keer een wortel van een derde graads polynoom worden geconstrueerd en dus is er één 3-hoekdeling nodig in de constructie van de regelmatige 7-hoek. Om de regelmatige 7-hoek te construeren, beginnen we met een punt O als de oorsprong. Teken een cirkel c_1 om O met een willekeurige straal die we vervolgens als lengte 1 nemen. Kies een punt A op de cirkel en laat de lijn door O en A de x -as zijn. Construeer de punten $Q = (-\frac{1}{2}, 0)$ en $R = (\frac{1}{2}, 0)$ en daarna de gelijkzijdige driehoeken KQR en LQR (we hebben in hoofdstuk 3 gezien dat dit mogelijk is met passer en ongemarkeerde liniaal). Construeer vervolgens het punt $P = (-\frac{1}{6}, 0)$ en teken de cirkel c_2 met middelpunt P en straal $|KP| = |LP|$. Gebruik daarna de 3-hoekdeler om $\angle KPL$ in 3 gelijke stukken te verdelen. Laat de zijdes vanuit de 3 gelijke stukken de cirkel c_2 in de punten S en T snijden. Trek een lijn door S en T en noem de snijpunten met c_1 de punten B en G . Dan geldt voor B en G dat het hoekpunten van de regelmatige 7-hoek zijn (zie hieronder voor het bewijs ervan). Met de passer is het lijnstuk AB nu over de gehele cirkel c_1 te leggen om de gehele regelmatige 7-hoek te krijgen.

$$\begin{aligned}
& (2|OU|)^3 + (2|OU|)^2 - 2(2|OU|) - 1 \\
&= \left(\frac{\sqrt{28}}{3} \cos \angle SPU - \frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{\sqrt{28}}{3} \cos \angle SPU - \frac{1}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{\sqrt{28}}{3} \cos \angle SPU - \frac{1}{3}\right) - 1 \\
&= \frac{28\sqrt{28}}{27} \cos^3 \angle SPU - \frac{28}{9} \cos^2 \angle SPU + \frac{\sqrt{28}}{9} \cos \angle SPU - \frac{1}{27} + \frac{28}{9} \cos^2 \angle SPU \\
&\quad - \frac{2\sqrt{28}}{9} \cos \angle SPU + \frac{1}{9} - \frac{2\sqrt{28}}{3} \cos \angle SPU + \frac{2}{3} - 1 \\
&= \frac{28\sqrt{28}}{27} \cos^3 \angle SPU - \frac{7\sqrt{28}}{9} \cos \angle SPU - \frac{7}{27} \\
&= \frac{7\sqrt{28}}{27} (\cos \angle KPU + 3 \cos \angle SPU) - \frac{7\sqrt{28}}{9} \cos \angle SPU - \frac{7}{27} \\
&= \frac{7}{27} + \frac{7\sqrt{28}}{9} \cos \angle SPU - \frac{7\sqrt{28}}{9} \cos \angle SPU - \frac{7}{27} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Hierbij hebben we bij de 4e gelijkheid de trigonometrische formule $4 \cos^3 \phi = \cos 3\phi + 3 \cos \phi$ en (10) gebruikt en bij de 5e gelijkheid hebben we (9) gebruikt.

Hieruit volgt dat $2|OU|$ een wortel is van $x^3 + x^2 - 2x - 1$. Hiervan weten we echter nog meer.

Stelling 5.8:

Het polynoom $x^3 + x^2 - 2x - 1$ heeft als wortels $2 \cos \frac{2\pi}{7}$, $2 \cos \frac{4\pi}{7}$ en $2 \cos \frac{6\pi}{7}$.

Bewijs:

Voor $\gamma_{1,7}$ geldt $\gamma_{1,7}^7 = 1$. Als gevolg geldt $0 = \gamma_{1,7}^7 - 1 = (\gamma_{1,7} - 1)(\gamma_{1,7}^6 + \gamma_{1,7}^5 + \gamma_{1,7}^4 + \gamma_{1,7}^3 + \gamma_{1,7}^2 + \gamma_{1,7} + 1)$. Aangezien $\gamma_{1,7} - 1 \neq 0$, moet wel gelden dat $\gamma_{1,7}^6 + \gamma_{1,7}^5 + \gamma_{1,7}^4 + \gamma_{1,7}^3 + \gamma_{1,7}^2 + \gamma_{1,7} + 1 = 0$.

Verder geldt $2 \cos \frac{2\pi}{7} = e^{\frac{2\pi i}{7}} + e^{-\frac{2\pi i}{7}} = \gamma_{1,7} + \gamma_{1,7}^{-1}$ en dus geldt

$$\begin{aligned}
& (2 \cos \frac{2\pi}{7})^3 + (2 \cos \frac{2\pi}{7})^2 - 2(2 \cos \frac{2\pi}{7}) - 1 \\
&= (\gamma_{1,7} + \gamma_{1,7}^{-1})^3 + (\gamma_{1,7} + \gamma_{1,7}^{-1})^2 - 2(\gamma_{1,7} + \gamma_{1,7}^{-1}) - 1 \\
&= \gamma_{1,7}^3 + 3\gamma_{1,7} + 3\gamma_{1,7}^{-1} + \gamma_{1,7}^{-3} + \gamma_{1,7}^2 + 2 + \gamma_{1,7}^{-2} - 2\gamma_{1,7} - 2\gamma_{1,7}^{-1} - 1 \\
&= \gamma_{1,7}^3 + \gamma_{1,7} + \gamma_{1,7}^{-1}\gamma_{1,7}^7 + \gamma_{1,7}^{-3}\gamma_{1,7}^7 + \gamma_{1,7}^2 + 1 + \gamma_{1,7}^{-2}\gamma_{1,7}^7 \\
&= \gamma_{1,7}^6 + \gamma_{1,7}^5 + \gamma_{1,7}^4 + \gamma_{1,7}^3 + \gamma_{1,7}^2 + \gamma_{1,7} + 1 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Dus $2 \cos \frac{2\pi}{7}$ is een wortel van $x^3 + x^2 - 2x - 1$. Verder zijn $2 \cos \frac{4\pi}{7} = \gamma_{1,7}^2 + \gamma_{1,7}^{-2}$ en $2 \cos \frac{6\pi}{7} = \gamma_{1,7}^3 + \gamma_{1,7}^{-3}$ op analoge manier ook wortels van $x^3 + x^2 - 2x - 1$. We weten dat een polynoom van graad 3 precies 3 wortels heeft, oftewel de 3 gevonden wortels zijn alle wortels van $x^3 + x^2 - 2x - 1$. \square

Doordat $2|OU|$ een wortel is van $x^3 + x^2 - 2x - 1$, weten we met stelling 5.8 dat $|OU| = \cos \frac{2\pi}{7}$ of $|OU| = \cos \frac{4\pi}{7}$ of $|OU| = \cos \frac{6\pi}{7}$. Gezien de positie van U in figuur 14, moet wel gelden dat $|OU| = \cos \frac{2\pi}{7}$ en dus hebben we inderdaad de regelmatige 7-hoek geconstrueerd met passer, ongemarkeerde liniaal en 3-hoekdeler. Hieruit blijkt dat de constructie van de regelmatige 7-hoek relatief kort is, maar het bewijs van de correctheid

van de constructie is lang. Dit verschil wordt alleen maar groter bij regelmatige veelhoeken met meer hoekpunten, op voorwaarde dat het aantal hoekpunten een Pierpont priemgetal is.

Als voor alle regelmatige p -hoeken met p een Pierpont priemgetal, de constructies bekend zijn, dan kunnen alle regelmatige n -hoeken met n als in stelling 5.1 geconstrueerd worden uit de p -hoeken en een eindig aantal 2-hoekdelingen en 3-hoekdelingen en met behulp van stelling 3.15 (de Pierpont priemgetallen zijn onderling allemaal copriem aan elkaar).

Verder weten we dat als $n = 2^m 3^l \prod_{i=1}^I p_i$, dan is het aantal 2-hoekdelingen dat uitgevoerd moet worden gelijk aan m en het aantal 3-hoekdelingen is gelijk aan l .

We weten nu welke regelmatige n -hoeken construeerbaar zijn met passer, ongemarkeerde liniaal en 3-hoekdeler. Maar nog steeds niet elke $n \in \mathbb{N}$ voldoet aan de vorm gegeven in stelling 5.1. Wat gebeurt er als we bijvoorbeeld ook 5-hoekdeling kunnen uitvoeren of p -hoekdeling voor een willekeurig priemgetal p ? Hier gaan we in het volgende hoofdstuk mee verder.

6 p -hoekdeling

We weten dat als we een p -hoekdeling en een q -hoekdeling kunnen uitvoeren, we ook p^k -hoekdelingen kunnen uitvoeren voor alle $k \in \mathbb{N}$ door de p -hoekdeling k keer uit te voeren. Ook kunnen we een pq -hoekdeling uitvoeren door eerst een p -hoekdeling uit te voeren en vervolgens een q -hoekdeling (of net andersom). Als we dus een n -hoekdeling willen uitvoeren en de priemontbinding van n is $\prod_i p_i^{\alpha_i}$, dan is een n -hoekdeling hetzelfde als een combinatie van α_i keer een p_i -hoekdeling voor alle i . Om alle n -hoekdelingen ($n \in \mathbb{N}$) uit te kunnen voeren is het dus voldoende om alle p -hoekdelingen uit te kunnen voeren, waarbij p een priemgetal is. Maar aangezien er oneindig veel priemgetallen zijn, moeten we nog steeds oneindig veel hoekdelingen kunnen uitvoeren om te bereiken dat een n -hoekdeling mogelijk is voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Als we nu kijken hoe we een specifieke p -hoekdeling kunnen uitvoeren, dan weten we als eerste dat een p -hoekdeling niet mogelijk is met passer en ongemarkeerde liniaal als $p > 2$. Het bewijs hiervoor is vergelijkbaar met het bewijs van stelling 4.1. Als namelijk een p -hoekdeling mogelijk zou zijn met passer en ongemarkeerde liniaal, dan is de constructie van een regelmatige p^2 -hoek mogelijk met passer en ongemarkeerde liniaal, wat in strijd is met stelling 3.1.

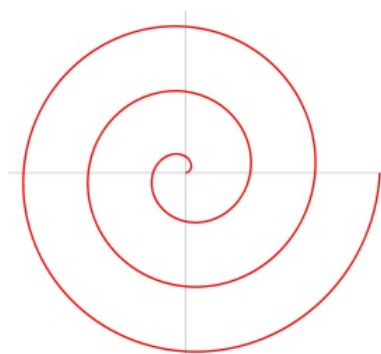
Bij de 3-hoekdeling hebben we gezien dat er veel alternatieven zijn om toch een 3-hoekdeling uit te kunnen voeren. Echter om een p -hoekdeling uit te voeren voor een willekeurig priemgetal p , zijn er veel minder manieren bekend.

De volgende manieren zijn nog wel bekend:

- p -hoekdeling dmv de spiraal van Archimedes
- p -hoekdeling dmv de sectrix van Maclaurin
- p -hoekdeling dmv de quadratrix van Hippias
- p -hoekdeling dmv de hyperbool
- p -hoekdeling dmv Sylvester's isoklinostat

De spiraal van Archimedes, de sectrix van Maclaurin, de quadratrix van Hippias en de hyperbool zijn krommes en Sylvester's isoklinostat is een instrument.

De spiraal van Archimedes wordt in poolcoördinaten gegeven door $r = a\theta$ met a een constante.



figuur 15: De spiraal van Archimedes.

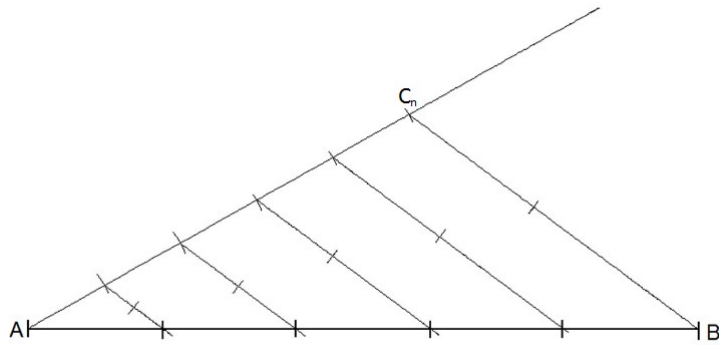
De spiraal bestaat dus uit de punten A die een lineair verband hebben tussen de afstand r tot de oorsprong en de hoek $\theta = \angle AOB$, waarbij O de oorsprong is en B een willekeurig punt op het positieve deel van de x -as. Voor de spiraal geldt voor elke $n \in \mathbb{N}$ dat $\frac{r}{n} = \frac{a\theta}{n}$. De hoek $a\theta$ in n gelijke stukken verdelen is dus hetzelfde als het lijnstuk AO met lengte r in n gelijke stukken verdelen. Dit laatste is als volgt mogelijk met passer en ongemarkeerde liniaal.

Stelling 6.1:

Elk lijnstuk AB is in n gelijke stukken te verdelen met passer en ongemarkeerde liniaal voor elke $n \in \mathbb{N}$.

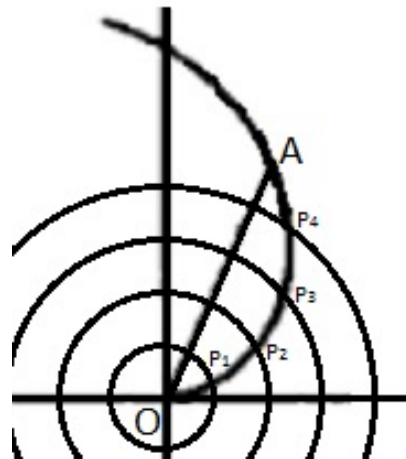
Bewijs:

Teken eerst een lijn l door A , die niet door B gaat. Kies vervolgens een willekeurige lengte r en leg deze lengte r met de passer n keer uit op l . Laat voor $j = 1, 2, \dots, n$ de punten C_j op l zijn met $|C_j A| = j \cdot r$. Trek nu het lijnstuk BC_n en daarna de lijnen vanuit C_1, \dots, C_{n-1} door lijnstuk AB evenwijdig aan BC_n . De snijpunten tussen deze lijnen en het lijnstuk AB verdelen AB in n gelijke stukken. Dit komt doordat er n gelijkvormige driehoeken zijn geconstrueerd. Hierdoor is lijnstuk AB net zoals AC_n in n gelijke stukken verdeeld. □



figuur 16: Een lijnstuk in 5 gelijke stukken verdelen.

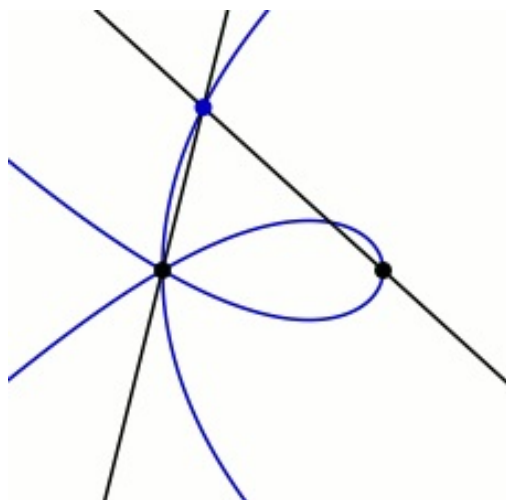
We kunnen nu een willekeurige hoek in p gelijke stukken verdelen met behulp van de spiraal van Archimedes op de volgende manier. Construeer eerst de spiraal van Archimedes met $a = 1$. Laat $\angle AOB$ de hoek zijn om in p gelijke stukken te verdelen, waarbij O de oorsprong is en B op de x -as ligt. Verder ligt A op de eerste ronde van de spiraal, dat wil zeggen op de spiraal zodanig dat $r = \theta < 2\pi$. Verdeel nu lijnstuk AO in p gelijke stukken op de manier beschreven in stelling 6.1. Laat C_i voor $i = 1, 2, \dots, p - 1$ de punten zijn op AO met $|C_i O| = \frac{i|AO|}{p}$. Construeer de cirkels met middelpunt O en stralen $|C_i O|$ voor alle $i \in \{1, 2, \dots, p - 1\}$. Laat P_i de snijpunten zijn tussen deze cirkels en de spiraal voor $i = 1, 2, \dots, p - 1$. De lijnen vanuit O door P_i verdelen $\angle AOB$ nu in p gelijke stukken. In de punten P_i geldt namelijk $|OP_i| = \frac{i|AO|}{p}$ en aangezien de punten P_i op de spiraal liggen, geldt er ook $\angle BOP_i = \frac{i}{p}\angle AOB$ en dus hebben we $\angle AOB$ in p gelijke stukken verdeeld met behulp van de spiraal van Archimedes.



figuur 17: Een hoek in 5 gelijke stukken verdelen met behulp van de spiraal van Archimedes.

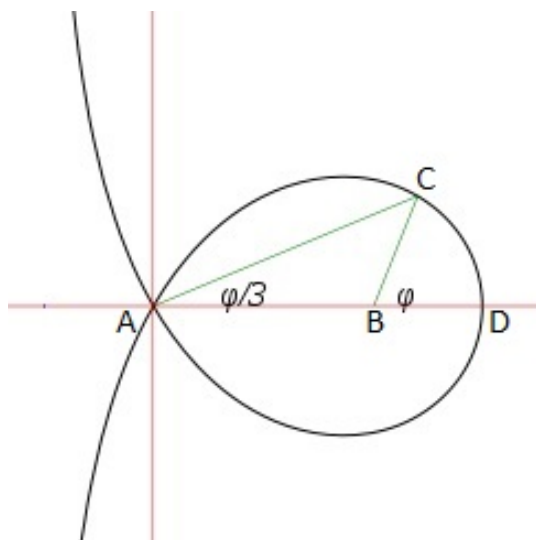
De sectrix van Maclaurin wordt beschreven door de punten die het snijpunt zijn tussen 2 lijnen, die allebei ronddraaien om 2 verschillende punten A en B met 2 verschillende constante hoeksnelheden v en w . Door eventueel te transleren en te roteren, kunnen we ervoor zorgen dat $A = (0, 0)$ en $B = (a, 0)$ voor een constante a . Laat de lijn door A roteren met een hoek van ϕ ten opzichte van de x -as en de lijn om B met een hoek van θ . Dan geldt voor punten op de sectrix na tijd t dat $vt\phi = wt\theta$, oftewel $v\phi = w\theta$. De sectrix wordt nu in poolcoördinaten gegeven door $r = a \frac{\sin \theta}{\sin(\theta - \phi)}$.

Hierbij is r de afstand tussen de oorsprong en de sectrix, oftewel de afstand tussen A en het snijpunt van de 2 lijnen. Zie [17] voor de afleiding van deze formule.



figuur 18: De constructie van de sectrix van Maclaurin.

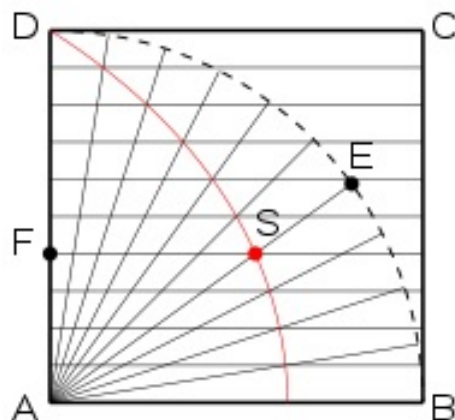
Met behulp van de sectrix van Maclaurin is p -hoekdeling op de volgende manier mogelijk. Construeer allereerst met een geschikt instrument de sectrix van Maclaurin met $A = (0, 0)$ en $B = (a, 0)$ en met hoeksnelheden $v = pq$ en $w = q$, waarbij a en q willekeurige constantes zijn. Laat $\angle CBD$ de hoek zijn om in p gelijke stukken te verdelen, met D op de x -as en C op de sectrix zodanig dat C op de gesloten lus ligt. Voor punten op de sectrix geldt $v\phi = w\theta$, oftewel $p\phi = \theta$. Voor C geldt dit ook en verder geldt dan $\phi = \angle CAD$ en $\theta = \angle CBD$. We hebben dus $\angle CAD = \frac{1}{p}\angle CBD$ en hiermee kunnen we $\angle CBD$ in p gelijke stukken verdelen. Als gevolg hiervan kunnen we een willekeurige hoek in p gelijke stukken verdelen met behulp van de sectrix van Maclaurin.



figuur 19: Een hoek in p gelijke stukken verdelen met behulp van de sectrix van Maclaurin, met $p = 3$.

De quadratrix van Hippias, ook wel trisectrix van Hippias genoemd, is een kromme die ontstaat door de beweging van 2 punten. Dit is te vergelijken met de sectrix van Maclaurin, die ontstaat door de beweging van 2 lijnen. Om de quadratrix van Hippias te vormen, is er een vierkant $ABCD$ aanwezig met een kwart van een cirkel erin met middelpunt A en straal $|AD|$. Laat 2 punten E en F met constante snelheden bewegen vanuit D , met F

over lijnstuk AD en E over de kwart van de cirkel, zodat E en F tegelijk beginnen in D en eindigen in B respectievelijk A . De quadratrix wordt nu gevormd door de snijpunten S tussen het lijnstuk AE en de lijn door F , evenwijdig aan AB .



figuur 20: De constructie van de quadratrix van Hippias.

Door de constructie van de quadratrix is het verdelen van de kwart van de cirkel in p gelijke stukken equivalent aan lijnstuk AD in p gelijke stukken verdelen. Met behulp van de quadratrix kunnen we dus een hoek van 90° in p gelijke stukken verdelen door lijnstuk AD in p gelijke stukken te verdelen. Dit gaat op een soortgelijke manier als bij de spiraal van Archimedes. Vervolgens gaat het in p gelijke stukken verdelen van de hoek kleiner dan 90° met behulp van de quadratrix op soortgelijke manier als bij de spiraal van Archimedes. Hierdoor is p -hoekdeling ook mogelijk met behulp van de quadratrix van Hippias.

We kunnen p -hoekdeling ook uitvoeren met behulp van een hyperbool met eccentriciteit $e = p - 1$. Dit staat natuurlijk in verband met de 3-hoekdeling, waarbij we $e = 2 = 3 - 1$ hadden als eccentriciteit. Bij de 3-hoekdeling kregen we met behulp van de hyperbool een verhouding van $1 : 1 : 1$ tussen de zijden (zie figuur 9) en dus is elk stuk precies $\frac{1}{3}$ deel van het totaal. Bij p -hoekdeling krijgen we hetzelfde, alleen verandert de verhouding in $p - 1 : 2 : p - 1$ tussen de zijden. Dit betekent dat het middelste stuk precies $\frac{2}{2p} = \frac{1}{p}$ deel is van het totaal. Hiermee kunnen we vervolgens p -hoekdeling uitvoeren en dus kunnen we met een hyperbool met eccentriciteit $e = p - 1$ een hoek in p gelijke stukken verdelen.

Verder is p -hoekdeling mogelijk met Sylvester's isoklinostat. De versie van de isoklinostat om 3-hoekdeling uit te voeren is beschreven in hoofdstuk 4. Door een uitgebreidere versie te gebruiken is p -hoekdeling ook mogelijk. Bij 3-hoekdeling zijn er 7 lijnstukken vanuit O van gelijke lengte, met verbindingen ertussenin. Voor p -hoekdeling zijn er $2p + 1$ lijnstukken vanuit O nodig van gelijke lengte, met verbindingen tussen alle lijnstukken in die voldoen aan dezelfde voorwaarden als bij het geval van 3-hoekdeling. Met dit uitgebreidere instrument is p -hoekdeling mogelijk (voor vaste p) voor een willekeurige hoek op soortgelijke manier als beschreven in hoofdstuk 4.

Om een p -hoekdeling uit te voeren voor een willekeurige hoek en voor een willekeurig priemgetal p , zijn er minder manieren bekend dan bij het geval $p = 3$, maar er zijn nog steeds een aantal manieren bekend, waaronder de 5 manieren die we gezien hebben. Er is nog wel een verschil op te merken tussen deze manieren. Bij de spiraal van Archimedes en de quadratrix van Hippias is met één kromme een p -hoekdeling mogelijk voor elk priem-

getal p voor een willekeurige hoek. Maar bij de sectrix van Maclaurin en de hyperbool is voor elke p een andere kromme nodig om een p -hoekdeling uit te voeren. En ook bij Sylvester's isoklinostat is er bij elke p een ander instrument nodig. Bij de laatste 3 is het als gevolg niet mogelijk om een p -hoekdeling uit te voeren voor elke p , omdat er dan oneindig veel krommes/instrumenten nodig zijn.

We gaan in het volgende hoofdstuk kijken welke regelmatige veelhoeken construeerbaar zijn met behulp van p -hoekdelingen voor willekeurige priemgetallen p .

7 Construeerbaarheid van regelmatige veelhoeken met p -hoekdeling

Allereerst weten we dat we elke regelmatige n -hoek kunnen construeren als we elke p -hoekdeling kunnen uitvoeren (voor p een priemgetal). Als namelijk $n = \prod_i p_i^{\alpha_i}$ de priemontbinding van n is met p_i verschillende priemgetallen en $\alpha_i \in \mathbb{N}$, dan is de regelmatige n -hoek te construeren door eerst een 1-hoek te construeren (dus een punt te tekenen) en daarna α_i keer een p_i -hoekdeling uit te voeren voor elke i (hierbij gaat de eerste hoekdeling over een hoek van 360°).

Maar stel nu dat we p -hoekdeling kunnen uitvoeren voor m gegeven priemgetallen p_1, \dots, p_m , bijvoorbeeld omdat we Sylvester's isoklinostat tot onze beschikking hebben voor deze m priemgetallen. Het zou leuk zijn als we een soortgelijke stelling kunnen formuleren als stelling 5.1, maar dan uitgebreider. Dit zou echter ook betekenen dat we uitbreidingen nodig hebben van stellingen 5.3 en 5.4. Het is echter nog onbekend of er uitbreidingen van zijn die geschikt zijn voor een uitgebreidere stelling dan stelling 5.1. We kunnen nog wel op een andere manier een bewijs geven van de volgende belangrijke stelling, die een uitbreiding is van stelling 5.1.

Stelling 7.1:

Als n van de vorm $n = \prod_{k=1}^m p_k^{\alpha_k} \prod_{i=1}^I p_i$ is, met $m, \alpha_k, I \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ voor alle $k \in \{1, \dots, m\}$ en p_i verschillende priemgetallen van de vorm $\prod_{k=1}^m p_k^{\beta_k} + 1$ (met $\beta_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ voor alle $k \in \{1, \dots, m\}$), dan is een regelmatige n -hoek construeerbaar met passer, ongemarkeerde liniaal en p_k -hoekdeler voor $k = 1, \dots, m$

Het volledige bewijs van stelling 7.1 valt buiten het bereik van deze scriptie, maar we zullen stelling 7.1 wel bewijzen door gebruik te maken van het volgende resultaat van Gauss.

Stelling 7.2:

Laat p een priemgetal zijn en stel dat de regelmatige $(p-1)$ -hoek construeerbaar is en dat $(p-1)$ -hoekdeling mogelijk is en dat \sqrt{p} construeerbaar is, dan is de regelmatige p -hoek construeerbaar.

Deze stelling wordt bewezen door Gauss in hoofdstuk 7 van [9] in artikel 360.

Bewijs van stelling 7.1:

Stel dat n van de vorm $n = \prod_{k=1}^m p_k^{\alpha_k} \prod_{i=1}^I p_i$ is. Met behulp van de 1-hoek en de p_k -hoekdelingen kunnen we de regelmatige $(p_k^{\alpha_k})$ -hoeken construeren voor alle $\alpha_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Met behulp van stelling 3.15 kunnen we dan de regelmatige $(\prod_{k=1}^m p_k^{\alpha_k})$ -hoeken construeren. Verder kunnen we wortels van priemgetallen construeren met passer en ongemarkeerde liniaal. Nu geldt met stelling 7.2 dat de regelmatige $(\prod_{k=1}^m p_k^{\alpha_k} + 1)$ -hoeken construeerbaar zijn voor alle $\alpha_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, waarbij $\prod_{k=1}^m p_k^{\alpha_k} + 1$ een priemgetal moet zijn. Door weer stelling 3.15 toe te passen weten we dat alle regelmatige n -hoeken van de gegeven vorm construeerbaar zijn met passer, ongemarkeerde liniaal en p_k -hoekdeler voor $k = 1, \dots, m$. □

Het is nog onbekend of de omgekeerde richting in stelling 7.1 ook geldt.

De n 's van de gegeven vorm in stelling 7.1 zijn nu daadwerkelijk te construeren door eerst constructies te vinden voor alle regelmatige p_i -hoeken met p_i van de vorm $\prod_{k=1}^m p_k^{\beta_k} + 1$ en vervolgens stelling 3.15 te gebruiken en p_k -hoekdelingen toe te passen met $k \in \{1, \dots, m\}$. De constructies van de regelmatige p_i -hoeken worden steeds lastiger naarmate er meer hoekdelingen bij nodig zijn.

Als voorbeeld weten we met stelling 7.1 dat een regelmatige 11-hoek construeerbaar is met behulp van 5-hoekdeling ($11 = 2 \cdot 5 + 1$), een regelmatige 23-hoek met behulp van 11-hoekdeling ($23 = 2 \cdot 11 + 1$) en een regelmatige 29-hoek met behulp van 7-hoekdeling ($29 = 2 \cdot 2 \cdot 7 + 1$). De daadwerkelijke constructies van deze veelhoeken vallen buiten het bereik van deze scriptie en daarom zullen we deze constructies hier niet behandelen.

8 Conclusie

We hebben gezien dat de stellingen over regelmatige n -hoeken specifieke formules geven voor n . Deze stellingen zien er vrij simpel uit, maar er is veel kennis nodig om ze te bewijzen. Wel zien we verbanden tussen de stellingen. Bijvoorbeeld als er meer hoekdelingen worden toegestaan, dan worden er ook meer regelmatige veelhoeken construeerbaar. Deze verbanden zijn ook terug te zien in de bewijzen, doordat bij de bewijzen eerdere stellingen worden gebruikt. Verder hebben we in hoofdstuk 7 gezien dat het algemenere geval met een willekeurig aantal verschillende hoekdelingen nog niet is opgelost door wiskundigen. Dit is dus nog een openstaand probleem in de wiskunde (net zoals bij de Fermat en Pierpont priemgetallen). Daarnaast hebben we ook gezien dat 2-hoekdeling met passer en ongemarkeerde liniaal mogelijk is, maar voor p -hoekdelingen met $p > 2$ is er meer nodig om de hoekdeling uit te voeren. Bij $p = 3$ hebben we veel manieren gezien om de hoekdeling uit te voeren, maar voor hogere priemgetallen p blijkt het aantal manieren een stuk beperkter te zijn. Ook bij dit onderwerp is de wiskunde nog bezig. Er wordt gezocht naar nieuwe manieren om hoekdelingen uit te voeren. Bovendien is het zoeken naar de daadwerkelijke constructies van regelmatige veelhoeken met veel hoekpunten ook een onderwerp in de wiskunde waar wiskundigen nog mee bezig zijn. Er kan dus wel

gezegd worden dat de wiskunde nog volop in ontwikkeling is. Dat geldt niet alleen bij veelhoeken en hoekdelingen, maar overal in de wiskunde.

9 Bibliografie

- [1] Aliska Gibbins en Lawrence Smolinsky, Geometric constructions with ellipses, Mathematical Interlligencer 31 number 1 (2009)57-62, https://www.math.lsu.edu/~smolinsk/GeometricConstructions_5_2.pdf, 2009
- [2] Andrew M. Gleason, Angle trisection, the heptagon and the triskaidecagon, The American Mathematical Monthly, Vol. 95, No. 3 (Mar., 1988), pp. 185-194, <http://apollonius.math.nthu.edu.tw/d1/disk5/js/geometry/reg-polygon/gleason.pdf>, 1988
- [3] Dave Richeson, Angle trisection using origami, <https://divisbyzero.com/2012/06/01/angle-trisection-using-origami/>, 2012
- [4] David C. Royster, Euclidean Constructions, <http://www.ms.uky.edu/~droyster/courses/spring02/classnotes/chapter03.pdf>, 2002
- [5] Devin Kuh, Constructible Regular n-gons, <https://www.whitman.edu/Documents/Academics/Mathematics/Kuh.pdf>, 2013
- [6] Eric T.Eekhoff, Constructibility of Regular Polygons, <http://www.math.iastate.edu/thesisarchive/MSM/EekhoffMSMSS07.pdf>
- [7] Frits Beukers, Getaltheorie, een inleiding, Epsilon uitgaven, 2015
- [8] Gertrude Ehrlich, Fundamental concepts of abstract algebra, Dover, 2011
- [9] J.C.F. Gauss, Disquisitiones Arithmeticae, engelse editie door Arthur A. Clarke, Springer Verlag, 1986
- [10] Nicholas Molbert, Tia Burden, Julie Fink, SECTIONING ANGLES USING HYPERBOLIC CURVES, <https://www.math.lsu.edu/system/files/SmolinskyGroup2%20-%20Paper.pdf>, 2012
- [11] Robert C. Yates, The trisection problem, <http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED058058.pdf>, 1971
- [12] Wikipedia, Angle trisection, https://en.wikipedia.org/wiki/Angle_trisection, 2016
- [13] Wikipedia, Cubic function , https://en.wikipedia.org/wiki/Cubic_function#The_nature_of_the_roots, 2016
- [14] Wikipedia, Constructible polygons, https://en.wikipedia.org/wiki/Constructible_polygon, 2015
- [15] Wikipedia, Hyperbola , <https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperbola>, 2016
- [16] Wikipedia, quadratrix of Hippias, https://en.wikipedia.org/wiki/Quadratrix_of_Hippias, 2016
- [17] Wikipedia, sectrix of Maclaurin, https://en.wikipedia.org/wiki/Sectrix_of_Maclaurin, 2014