

Afsluitingen van banen van matrices

Bart van Hoek
4122232

Supervisor: Prof. Dr. C. Faber

13-06-2016



Universiteit Utrecht

Inhoudsopgave

1	Inleiding	1
2	Jordan-normaalvorm	2
2.1	Het minimumpolynoom	2
2.2	De structuurstelling voor eindig voortgebrachte modulen over een hoofdideaaldomein	3
2.3	Jordan-blokken en de Jordan-normaalvorm	4
3	Matrices en hun conjugatieklassen	6
3.1	2x2 matrices	7
3.2	3x3 matrices	8
4	Partities en de nilpotente matrices	11
4.1	Partities	11
4.2	Afsluitingen van banen van nilpotente matrices	12
4.2.1	Afsluitingen 4x4-matrices	15
4.2.2	Afsluitingen 5x5-en 6x6-matrices	16
4.2.3	Afsluitingen 7x7-matrices	18
4.2.4	Afsluitingen 8x8-matrices	20
5	Stelling van Gerstenhaber-Hesselink	22
5.1	Young tableau	22
5.2	Gerstenhaber-Hesselink	23

1 Inleiding

Ten eerste wil ik mijn supervisor Carel Faber bedanken voor het onderwerp en het helpen bij deze scriptie. Het onderwerp zelf was mij namelijk compleet onbekend en ik ben blij dat ik geïntroduceerd ben hiertoe. Ik had eerder natuurlijk al veel met matrices gewerkt en door groepentheorie waren conjugatieklassen en banen mij ook niet onbekend. Ik vond het echter leuk hoe dit allemaal samen kwam en ben dankbaar voor de nieuwe interessante informatie die ik daardoor heb geleerd.

Gerstenhaber publiceerde in 1961 een artikel [1], over onder andere banen van nilpotente matrices. Hij maakte hierin de connectie met partities en definieerde er zelfs een dominantie op. Zo bewees hij dat deze dominantie tussen twee matrices veel meer vertelde dan alleen de dominantie op zich. Het leidde namelijk tot een mooie stelling over de afsluitingen van banen van matrices. Welke matrices in elkaars afsluiting zaten en ook wanneer de dominantie dat uitsloot was duidelijk uit deze stelling. In 1976 schreef de Nederlander Wim Hesselink een artikel dat veel raakvlakken had met dat van Murray Gerstenhaber. Hij bewees de door Gerstenhaber bedachte stelling opnieuw en verbeterde naar eigen zeggen fouten in het bewijs. Deze stelling dus gaat over nilpotente banen. In hun artikelen gaat dit echter over veel verschillende nilpotente banen. Zo zijn er veel verschillende groepen die op een nilpotent element kunnen werken. In deze scriptie zal echter alleen naar de banen van nilpotente matrices door middel van de groep van inverteerbare matrices gekeken worden. In hoofdstuk 2 zal daartoe ten eerste de Jordan-normaalvorm uitvoerig worden besproken door middel van een algebraïsche aanpak. Deze aanpak is gebaseerd op die uit boek Algebra door Serge Lang [4]. Vervolgens zal in hoofdstuk 3 gedefinieerd worden wanneer twee matrices geconjugeerd zijn en wat precies een baan is. De Jordan-normaalvorm zal dan gebruikt worden om ieder van deze banen te identificeren. Wat leidt tot meer overzicht en ook een duidelijkere benadering. Na het definiëren van deze banen zal eerst naar de banen van de 2×2 en 3×3 -matrices gekeken worden. Sommige stukken zullen gebaseerd zijn op de aanpak van Hanspeter Kraft [3]. Er zal in dit hoofdstuk ook de eerste stap worden gezet als het gaat om de afsluitingen van de verschillende banen. Daarna zal in hoofdstuk 4 eerst partities worden gedefinieerd om vervolgens de connectie met nilpotente matrices te maken. Met behulp van deze notatie zal dan voor de kleinere n de nilpotente $n \times n$ -matrices beschouwd worden. Hiertoe zullen we veel verschillende afsluitingen van banen analyseren. Tenslotte zal in hoofdstuk 5 de stelling van Gerstenhaber-Hesselink behandeld worden. Deze vat de hele scriptie als het ware samen. Hij geeft uitsluitel en definitief bewijs van eerdere besproken inclusies tussen verschillende banen. Het bewijs van deze stelling gegeven in deze scriptie is gebaseerd op de aanpak van Gerstenhaber [1], Hesselink [2] en Le Bruyn [5].

2 Jordan-normaalvorm

De Jordan-normaalvorm is een veelvoorkomend begrip in de lineaire algebra met betrekking tot matrices en basistransformaties. Het is vernoemd naar Camille Jordan en is de simpelste manier waarop een matrix kan worden geschreven ten opzichte van een basis. Hoewel er veel belangrijke toepassingen van zijn zal in dit hoofdstuk een meer theoretische benadering worden gezocht. Vanuit een meer algebraïsche hoek zal de Jordan-normaalvorm worden afgeleid. Ik zal in dit hoofdstuk qua grote lijnen de aanpak van [4], hoofdstuk 14.2 volgen.

2.1 Het minimumpolynoom

Zij k een lichaam en E een eindigdimensionale vectorruimte over dit lichaam ongelijk aan nul. Neem vervolgens A een endomorfisme van V , een lineaire afbeelding van E naar zichzelf. Onder standaard optelling en vermenigvuldiging van afbeeldingen is $End_k(E)$ een ring. Bekijk nu de afbeelding $k[t] \mapsto k[A] \subset End_k(E)$, waarbij $k[t]$ de standaardpolynoomring over k is met t een transcendent element. De afbeelding wordt gegeven door het substitueren van A voor t en de constante term wordt dan gegeven door deze constante keer de identiteitsmatrix. Aangezien het optellen/vermenigvuldigen van twee polynomen commuteert met de substitutie is het duidelijk dat de afbeelding een (ring)homomorfisme is. $k[A]$ wordt dus voortgebracht door A en is bevat in $End_k(E)$.

De kern van een ringhomomorfisme is een ideaal. Aangezien k een lichaam is volgt dat $k[t]$ een hoofdideaaldomein is en dus dat de kern in dit geval zelfs een hoofdideaal is. Omdat $k[A]$ eindig is over k is het homomorfisme duidelijk niet injectief en hebben we dus te maken met een niet triviale kern. Aangezien de kern een hoofdideaal is betekent dit dat er een polynoom niet gelijk aan nul is wat de kern voortbrengt. Dit polynoom is uniek en monisch te kiezen. Unicité is duidelijk omdat het bestaan van een ander polynoom met deze eigenschappen zou betekenen dat ze elkaar delen en dus gelijk zijn. Hieruit stellen we de volgende definitie op.

Definitie 2.1. Het minimumpolynoom, $m_A(t) \in k[t]$, van een endomorfisme A over een lichaam k is het monisch polynoom dat de kern van het homomorfisme $f(t) \mapsto f(A)$ voortbrengt.

Stel nu dat onze vectorruimte E wordt voortgebracht door een eindig aantal vectoren die allemaal te schrijven zijn als $f(A)v$ voor een $v \in E$. Formeel genoteerd als $E = k[A]v$. Aangezien elk polynoom de som is van verschillende machten van A is het duidelijk dat v, Av, A^2v, A^3v, \dots de vectorruimte E voortbrengen. Dit resulteert in het volgende.

Stelling 2.2. *Neem aan dat het minimumpolynoom gegeven wordt door $m_A(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_1t + a_0$. Dan vormen de elementen $v, Av, A^2v, \dots, A^{n-2}v, A^{n-1}v$ een basis voor E over k . De matrix A ten opzichte van deze basis wordt dan gegeven door:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Bewijs. Het is duidelijk dat de elementen onafhankelijk zijn over k . Afhankelijkheid zou namelijk

leiden tot een polynoom van lagere graad dan $m_A(t)$ in de kern wat in tegenspraak is met het feit dat $m_A(t)$ de kern voortbrengt. Ten tweede, stel dit is niet het maximale aantal onafhankelijke elementen is. Dan volgt dat er een $f(t)$ met graad hoger dan n is zodat $f(A)v$ onafhankelijk is. Nu geldt dat alle polynomen te schrijven zijn als $f(t) = g(t)m_A(t) + r(t)$ met $r(t)$ een polynoom van graad lager dan n . Dus $f(A) = r(A)$, en $f(A)v$ is niet onafhankelijk van de elementen $v, Av, A^2v, \dots, A^{n-2}v, A^{n-1}v$. Omdat dit geldt voor alle $f(t)$ is dit ook het maximale aantal onafhankelijke elementen. De elementen $v, Av, A^2v, \dots, A^{n-2}v, A^{n-1}v$ vormen dus een basis voor E over k . Vervolgens weten we dat de matrix A het eerste basiselement naar het tweede stuurt, het tweede naar het derde, enzovoort. Het is dan ook duidelijk dat de bijbehorende matrix de gegeven vorm heeft waarbij de laatste rij volgt uit het minimumpolynoom. \square

2.2 De structuurstelling voor eindig voortgebrachte modulen over een hoofdideaaldomein

Voor het volgende gedeelte hebben we een bekend resultaat uit de algebra nodig. Namelijk de structuurstelling voor eindig voortgebrachte modulen over een hoofdideaaldomein.

Stelling 2.3. *Voor elke eindig voortgebracht moduul M over een hoofdideaaldomein R bestaan er uniek gedefinieerde idealen met de eigenschap dat*

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_s$$

zodat M isomorf is met de directe som van cyclische deelmodulen

$$M \cong R/I_1 \oplus R/I_2 \oplus R/I_3 \oplus \dots \oplus R/I_s$$

En voor de, op eenheden na, uniek gedefinieerde voortbrengers van deze idealen geldt dat

$$i_1 \mid i_2 \mid \dots \mid i_s$$

Een variant hierop is de stelling voor eindige abelse groepen die stelt dat elke eindige abelse groep als het product van cyclische groepen geschreven kan worden met de eigenschap dat de orde van de eerste groep de orde van de volgende deelt, enzovoort.

Voorbeeld 2.4. $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{15} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{30}$

Dit is een manier om $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{15}$ te schrijven die aan de gewenste eigenschappen voldoet. De enige andere mogelijkheid waarbij de ordes van de opeenvolgende groepen elkaar delen zou $\mathbb{Z}_1 \times \mathbb{Z}_{90}$ zijn en het is duidelijk dat deze niet isomorf is met $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{15}$ dus de gevonden factorisatie is inderdaad uniek.

Het bewijs van Stelling 2.3 gaat buiten het onderwerp van deze scriptie en zal daarom niet worden gegeven. Het bewijs en meer achtergrondinformatie is terug te lezen in [4], hoofdstuk 3. Buiten het volgende resultaat wat hierop gebaseerd is zal deze stelling ook verder niet worden besproken.

Stelling 2.3 is op zichzelf niet zo interessant maar toch zeer belangrijk met betrekking tot onze vectorruimte. Aangezien een vectorruimte een moduul over een lichaam is, de eigenschappen die een moduul definiëren zijn over een lichaam equivalent aan die van een vectorruimte, hebben we in dit geval een eindig moduul over een lichaam, wat dus aan de eisen van de stelling voldoet. Een eindig moduul over $k[A]$ is nu equivalent met onze situatie van een k -vectorruimte E met een endomorfisme A die er op werkt. Zo krijgen we de volgende variant op de structuurstelling.

Stelling 2.5. *Zij E een eindig dimensionale vectorruimte ongelijk aan nul over het lichaam k en $A \in \text{End}_k(E)$, dan volgt dat E te schrijven is als de directe som van cyclische deelmodulen van $k[A]$:*

$$E = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_s \cong k[t]/(q_1(t)) \oplus k[t]/(q_2(t)) \oplus \dots \oplus k[t]/(q_s(t))$$

waarbij de $(q_i(t))$ de idealen zijn voortgebracht door minimumpolynomen van A over E_i , q_i zodat

$$q_1 \mid q_2 \mid \dots \mid q_s$$

Deze voortbrengers zijn uniek gedefinieerd afhankelijk van E en A en worden in het vervolg de invarianten van het paar genoemd.

Bewijs. Dit is in feite een herformulering van stelling 2.3 in de door ons gebruikte notaties met het isomorfisme $f(t) \mapsto f(A)v$ tussen $k[t]/(q_i(t))$ en E_i . \square

Gevolg 2.6. $q_s(t)$ is het minimumpolynoom van A

Bewijs. $q_s(A) = 0$ want $q_s(t)$ wordt gedeeld door alle andere invarianten en zit dus in kern van alle $k[t]/(q_i(t))$. Voor een $q_s(t)$ van lagere graad die in de kern van alle deelmodulen zit zou gelden dat $k[t]/(q_s(t))$ niet isomorf is aan E_s . Want uit de stelling volgt dat $q_s(t)$ het polynoom is dat E_s "voortbrengt". \square

2.3 Jordan-blokken en de Jordan-normaalvorm

Voor we de Jordan-normaalvorm definiëren zullen we eerst naar de zogenaamde Jordan-blokken kijken.

Stelling 2.7. *Stel $E \cong k[t]/(q_A(t))$, waarbij $q_A(t) = (t - \lambda)^m$ voor een $\lambda \in k$ en $m \in \mathbb{N}$. Dan is er een basis van E over k zodat de matrix A ten opzichte van deze basis wordt gegeven door:*

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Een matrix van deze vorm noemen we een Jordan-blok.

Bewijs. E is isomorf aan $k[t]/(q_A(t))$ onder de afbeelding $f(t) \mapsto f(A)v$. Het is dus duidelijk dat E wordt voortgebracht door een enkel element, zeg v , en dat dit element het beeld is van de multiplicatieve identiteit.

Het is nu logisch om als basis voor E de volgende elementen te gokken.

$$v, (A - \lambda)v, (A - \lambda)^2v, \dots, (A - \lambda)^{m-1}v$$

Het is duidelijk dat deze elementen onafhankelijk zijn zoals in het bewijs van Stelling 2.2. Opnieuw zou afhankelijkheid leiden tot een minimumpolynoom van een lagere graad wat in tegenspraak is met de aanname in de stelling. Elk polynoom in $k[t]/(q_A(t))$ kan geschreven

worden in de vorm $a_{m-1}t^{m-1} + a_{m-2}t^{m-2} + \dots + a_1t + a_0$. Wat betekent dat er m onafhankelijke parameters zijn en dus dat de dimensie van zowel $k[t]/(q_A(t))$ als E gelijk is aan m . De m onafhankelijke elementen

$$v, (A - \lambda)v, (A - \lambda)^2v, \dots, (A - \lambda)^{m-1}v$$

vormen dus een basis van E over k . En het is duidelijk dat A ten opzichte van deze basis de gegeven matrix is. $A(A - \lambda)^i = (A - \lambda)^{i+1} + \lambda(A - \lambda)^i$ voor alle i . A stuurt een basiselement naar het volgende basiselement plus λ keer het basiselement zelf. Waarbij voor $i = m - 1$ de eerste factor $(A - \lambda)^{i+1}$ wegvalt. Dit geeft de verwachte matrix. \square

De Jordan-normaalvorm is dan een simpel gevolg van stelling 2.5 en 2.7. Waarbij een belangrijke extra eis is dat het lichaam k algebraïsch gesloten is zodat elk polynoom splijt over k .

Gevolg 2.8. *Zij E een eindigdimensionale vectorruimte over een algebraïsch gesloten lichaam k en A een endomorfisme van E . Dan is E te schrijven als de directe som van $k[A]$ -deelmodulen zodat voor elk van deze deelmodulen stelling 2.7 geldt en de matrix A te schrijven is als de directe som van Jordan-blokken.*

$$\begin{pmatrix} J_1 & & & & & \\ & J_2 & & & & \\ & & J_3 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & J_{l-1} & \\ & & & & & J_l \end{pmatrix}$$

Dit noemen we de Jordan-normaalvorm van een matrix.

Elke matrix A in Jordan-normaalvorm is nu te schrijven als $A = D + N$ waarbij D een diagonaalmatrix is en N een nilpotente bovendreiehoeksmatrix. Waarbij een matrix nilpotent wordt genoemd als er een natuurlijk getal m is waarvoor $N^m = 0$. Zo is het voor het nilpotente deel van bijvoorbeeld het $m \times m$ -Jordan-blok N_{J_1} duidelijk dat $N_{J_1}^m = 0$. En aangezien bij vermenigvuldiging de Jordan-blokken alleen op zichzelf werken en niet op elkaar is het duidelijk dat als J_1 het grootste Jordan-blok is, dat dan voor het nilpotente deel van de complete Jordan-normaalvorm ook geldt $N^m = 0$. Tenslotte valt het af te lezen dat de Jordan-normaalvorm een diagonaalmatrix is, $N = 0$, dan en slechts dan als alle Jordan-blokken een 1×1 -matrix zijn.

3 Matrices en hun conjugatieklassen

In dit hoofdstuk gaan we verder in op de vierkante matrices over een algebraïsch gesloten lichaam, in dit geval \mathbb{C} , en de banen door werking van GL_n op deze matrices. Zo bekijken we welke eigenschappen er behouden blijven binnen een baan en of een baan in de afsluiting van een andere baan kan zitten. Hiertoe beschouwen we eerst de 2×2 en 3×3 -matrices om vervolgens naar het algemene geval te kijken. Het eerste gedeelte van dit hoofdstuk is compleet eigen terwijl in de paragrafen over 2×2 -matrices en 3×3 -matrices de behandeling van [3], hoofdstuk 1.3, wordt gevolgd. De gedefinieerde afbeeldingen behoren daar ook toe aan [3].

We gebruiken de notatie $M_n(\mathbb{C})$ om de $n \times n$ -matrices over de complexe getallen aan te geven. Waarbij $GL_n(\mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid \text{Det}(A) \neq 0\}$ de deelverzameling van $M_n(\mathbb{C})$ is bestaande uit de inverteerbare matrices.

Definitie 3.1. Twee matrices $A, B \in M_n$ zijn geconjugueerd (gelijksoortig), $A \sim B$, als er een $S \in GL_n$ bestaat zodat $A = SBS^{-1}$.

Deze relatie is een equivalentierelatie aangezien hij reflexief, symmetrisch en transitief is.

1. Reflexief want A is altijd geconjugueerd is aan zichzelf, $A = IAI$.
2. Symmetrisch want als $A = SBS^{-1}$ dan volgt $B = RAR^{-1}$ met $R = S^{-1}$.
3. Transitief want als $A = SBS^{-1}$ en $B = TCT^{-1}$ dan $A = (ST)C(ST)^{-1}$.

Een equivalentieklasse bestaat dan uit een verzameling van matrices die alle aan elkaar geconjugueerd zijn. Zo wordt de conjugatieklasse van een willekeurige matrix A genoteerd als $C_A = \{SAS^{-1} \mid S \in GL_n\}$. Dit wordt ook wel de baan van A genoemd waarbij de matrixgroep GL_n op dit element werkt. In het bijzonder zit in elke conjugatieklasse een Jordan-normaalvorm. In het vorige hoofdstuk zagen we namelijk dat er voor elke matrix een basis bestaat zodat de matrix in Jordan-normaalvorm staat. Wat betekent dat er een basistransformatie bestaat van de vorm SAS^{-1} en dus dat elke matrix geconjugueerd is aan zijn Jordan-normaalvorm. In het vervolg zullen we daarom elke conjugatieklasse identificeren aan de hand van zijn Jordan-normaalvorm. Veel eigenschappen van een matrix blijven behouden onder conjugatie en kunnen belangrijk zijn om vast te stellen dat twee matrices niet geconjugueerd kunnen zijn.

Stelling 3.2. *De volgende eigenschappen blijven behouden binnen een baan.*

- (a) *Het karakteristieke polynoom.*
- (b) *De eigenwaarden en hun multipliciteit.*
- (c) *Determinant en spoor.*
- (d) *De rang van de matrix.*
- (e) *Het minimumpolynoom.*

Bewijs. (a) Het karakteristieke polynoom van een matrix A is gedefinieerd door $\text{Det}(A - tI_n)$. Dan volgt vrij direct uit $A = SBS^{-1}$ dat $\text{Det}(A - tI_n) = \text{Det}(SBS^{-1} - tI_n) = \text{Det}(SBS^{-1} - StI_nS^{-1}) = \text{Det}(S)\text{Det}(B - tI_n)\text{Det}(S^{-1}) = \text{Det}(B - tI_n)$. Dus twee geconjugueerde matrices hebben hetzelfde karakteristieke polynoom

- (b) De eigenwaarden en hun multipliciteit worden uniek gedefinieerd door het karakteristieke polynoom waardoor uit (a) direct volgt dat deze constant zijn binnen een baan.
- (c) Dit volgt direct uit (a) en (b) plus het feit dat de determinant het product van de eigenwaarden

is en het spoor de som.

(d) We weten uit de dimensiestelling dat $\text{rang}(A) + \dim(\ker(A)) = n$. Laten zien dat de dimensie van de kern behouden blijft onder conjugatie is dus equivalent. Stel de dimensie van de kern van A is k , oftewel $\ker(A) = \text{Span}(\{w_1, w_2, \dots, w_k\})$. Dan volgt $SB S^{-1}w_i = 0$ en dus $\{S^{-1}w_1, S^{-1}w_2, \dots, S^{-1}w_k\} \subset \ker(B)$. Deze vectoren zijn onafhankelijk want afhankelijkheid zou leiden tot afhankelijkheid van de w_i . Stel nu dat er een vector v in de kern van B zit onafhankelijk van de $S^{-1}w_i$, dan volgt dat $S^{-1}ASv = 0$ en dus $Sv \in \ker(A)$. Wat betekent dat $Sv = \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 + \dots + \mu_k w_k$ en na vermenigvuldiging met S^{-1} van links volgt dat v te schrijven is als een lineaire combinatie van $\{S^{-1}w_1, S^{-1}w_2, \dots, S^{-1}w_k\}$. De kern van B heeft dus ook dimensie k want hij wordt opgespannen door $\{S^{-1}w_1, S^{-1}w_2, \dots, S^{-1}w_k\}$.

(e) Stel $A = SBS^{-1}$ dan duidelijk $A^r = SB^r S^{-1}$. Voor een polynoom in A geldt dan, $f(A) = \sum_{i=0}^n a_i A^i = \sum_{i=0}^n a_i S B^i S^{-1} = S f(B) S^{-1}$. Dus $f(A) = 0$ dan en slechts dan als $f(B) = 0$. Dit betekent dat twee geconjugeerde matrices het zelfde minimumpolynoom hebben. \square

We weten dus dat geconjugeerde matrices hetzelfde minimumpolynoom hebben. De tegengestelde uitspraak geldt echter niet. Twee matrices met hetzelfde minimumpolynoom hoeven niet per se geconjugerd te zijn. Een leuk voorbeeld hiervan zijn de volgende twee matrices:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Beide matrices hebben t^2 als minimumpolynoom maar zijn duidelijk niet geconjugerd. Het zijn namelijk twee verschillende Jordan-normaalvormen met ongelijke rang. Stelling 3.2(d) geeft dus gelijk uitsluitel.

3.1 2x2 matrices

Voor 2x2 matrices zijn er maar 2 type conjugatieklasse. Namelijk:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ met } \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

Als $\lambda \neq \mu$ hebben we een conjugatieklasse met twee verschillende eigenwaarden. Voor $\lambda = \mu$ wordt het interessanter aangezien we dan twee mogelijkheden hebben. De conjugatieklasse van $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ en die van $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

We weten uit stelling 3.2(a) dat binnen een conjugatieklasse het determinant en spoor constant blijven. Het is daarom interessant om de volgende afbeelding te bekijken. Deze behoort toe aan [3].

$$\pi : M_2 \mapsto \mathbb{C}^2, A \mapsto (\text{Spoor } A, \text{Det } A) \quad \pi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a + d, ad - bc)$$

Nu definiëren we de volgende deelruimte van \mathbb{C}^2 , $W = \{(x, y) \mid x^2 - 4y = 0\}$. Samen met de afbeelding π geeft dit het volgende resultaat.

Stelling 3.3. *De afbeelding π is constant binnen een conjugatieklasse.*

(a) *Het teruggehaalde beeld $\pi^{-1}(P)$ van een punt $P \in \mathbb{C}^2 \setminus W$ is de conjugatieklasse $C \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$*

voor $\lambda \neq \mu$.

(b) *Het teruggehaalde beeld $\pi^{-1}(Q)$ voor een $Q \in W$ bestaat uit de twee conjugatieklassen $C \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ en $C \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ voor een $\lambda \in \mathbb{C}$*

Bewijs. Het is duidelijk dat π constant is binnen een conjugatieklasse want we weten dat de determinant en spoor onder conjugatie gelijk blijven. De afbeelding is ook duidelijk surjectief aangezien $a + d$ elke waarde kunnen aannemen en b en c onafhankelijk daarvan ook. Het teruggehaalde beeld van π is dus overal goed gedefinieerd.

Nu merken we op dat als een conjugatieklasse 2 gelijke eigenwaarde λ heeft dat het spoor gelijk is aan 2λ en de determinant aan λ^2 . Het beeld van z'n matrix zit altijd in W . Nu stel dat het beeld van een conjugatieklasse in W ligt. Dan geldt $(\lambda + \mu)^2 = 4\lambda\mu$ oftewel $(\lambda - \mu)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \mu$. Dus het beeld van een conjugatieklasse ligt in W dan en slechts dan als hij twee gelijke eigenwaarden heeft. Hieruit volgen (a) en (b) direct. \square

Als we nu specifiek naar de twee conjugatieklasse met dubbele eigenwaarden kijken dan valt op dat de matrix $\begin{pmatrix} \lambda & \epsilon \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ voor alle $\epsilon \neq 0$ in de conjugatieklasse van $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ zit. Ze hebben beide namelijk minimumpolynoom $(t - \lambda)^2$ en er is geen andere Jordan-normaalvorm met dat minimumpolynoom dus volgt uit stelling 3.2 dat ze geconjugueerd zijn. Aangezien in de limiet epsilon naar nul, we de matrix $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ krijgen volgt dat $C \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ in de afsluiting van $C \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ zit. Wat in dit geval en de rest van de scriptie als volgt genoteerd zal worden.

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \downarrow \\ \bullet \end{array} \begin{array}{c} C \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \\ \\ C \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \end{array}$$

3.2 3x3 matrices

In het geval van 3x3 matrices zijn er meer verschillende conjugatieklassen. Het is daarom eenvoudiger niet overal langs te gaan maar het iets anders te benaderen. We merken hiervoor eerst op dat voor elke matrix $A \in M_3$ het volgende geldt:

$$A = \frac{1}{3} \text{Spoor}(A) \times I_3 + A'$$

waarin I_3 de bekende identiteitsmatrix, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, is en A' een 3x3 matrix met spoor gelijk aan

nul. Conjugatie van de identiteit is triviaal want bij het conjugeren zal je hem altijd terugkrijgen. Het is daarom logisch om naar de conjugatieklasse van A' te kijken. In het algemeen houdt dit dus in dat we naar de matrices met spoor gelijk aan nul gaan kijken. De verschillende Jordan-normaalvormen die hier bij horen zijn in drie verschillende klassen onder te verdelen.

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda - \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Met $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ mogelijk dezelfde waarde. Net als in het geval van de 2x2 matrices bekijken we weer een afbeelding die constant is binnen een baan. De afbeelding η hangt alleen van de eigenwaarden af en is onafhankelijk van de volgorde waarin deze staan, dus wegens stelling 3.2 constant binnen een conjugatieklasse.

$$\eta : V \mapsto \mathbb{C}^2 \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \mapsto (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3, \lambda_1\lambda_2\lambda_3)$$

Met V de deelruimte van matrices met spoor nul en $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de eigenwaarden van een matrix $A \in V$. Als we dan kijken naar het geval waar een matrix A twee gelijke eigenwaarden λ heeft en een derde eigenwaarden -2λ , dan volgt dat $\eta(A) = (-3\lambda^2, -2\lambda^3)$. Het is duidelijk dat in dit geval het beeld van η in $K = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid 4x^3 + 27y^2 = 0\}$ ligt. Interessanter is of het beeld van een matrix met drie verschillende eigenwaarden, λ, μ en $(-\lambda - \mu)$ ook in K kan liggen. Dit blijkt niet zo te zijn. Het simpel invullen van het beeld van η voor deze drie eigenwaarden in de vergelijking voor K geeft namelijk als nulpunten $\lambda = \mu$, $\lambda = -\lambda - \mu$ of $\mu = -\lambda - \mu$. Dit betekent dat voor een $P \in K$, $\eta^{-1}(P)$ altijd een matrix met minstens twee gelijke eigenwaarden is. Drie gelijke eigenwaarden worden alleen naar $0 \in \mathbb{C}^2$ gestuurd. Andersom volgt voor $\eta^{-1}(0)$ duidelijk dat alle drie de eigenwaarden nul moeten zijn. Twee eigenwaarden zou hier ook al genoeg zijn maar het feit dat het spoor gelijk aan nul is verplicht de derde eigenwaarde om ook gelijk aan nul te zijn. Voor een willekeurig punt $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ vallen de vergelijkingen op te lossen voor de drie eigenwaarden. Zo is duidelijk dat voor een $(x, y) \in K$ de eigenwaarden twee keer $\frac{3x}{2y}$ en één keer $\frac{3x}{y}$ zijn. De afbeelding η is dus surjectief en η^{-1} goed gedefinieerd. Deze informatie is mooi te weergeven in de volgende stelling.

Stelling 3.4. *De afbeelding η is constant binnen een conjugatieklasse. Elk paar geconjugeerden matrices wordt naar hetzelfde punt gestuurd.*

(a) *Het teruggehaalde beeld $\eta^{-1}(P)$ van een punt $P \in \mathbb{C}^2 \setminus W$ bestaat alleen uit de conjugatieklasse $C \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda - \mu \end{pmatrix}$ voor $\lambda \neq \mu \neq -\lambda - \mu$.*

(b) *Het teruggehaalde beeld $\eta^{-1}(Q)$ voor een $Q \in W \setminus 0$ bestaat uit de twee conjugatieklassen $C \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda \end{pmatrix}$ en $C \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda \end{pmatrix}$ voor een $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$*

(c) *Het teruggehaalde beeld $\eta^{-1}(0)$ bestaat uit de drie conjugatieklassen $C \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$*
en $C \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Kijken we nu naar de afsluitingen van de verschillende conjugatieklassen dan is duidelijk dat de vorm in (a) afgesloten is aangezien er geen andere Jordan-normaalvorm met die eigenwaarden bestaat. Voor (b) geldt dat $C \begin{pmatrix} \lambda & \epsilon & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda \end{pmatrix}$ geconjugueerd is aan $C \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda \end{pmatrix}$ voor alle ϵ want

er is geen andere Jordan-normaalvorm met minimumpolynoom $(t - \lambda)^2(t + 2\lambda)$. In de limiet ϵ naar nul zien we dan dat $C \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda \end{pmatrix}$ in afsluiting van $C \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda \end{pmatrix}$ zit. Op exact gelijke

wijze volgt nagenoeg hetzelfde resultaat voor geval (c). Samenvattend zien de afsluitingsinclusies er dan als volgt uit.

$$\begin{array}{c}
 \bullet \\
 | \\
 C \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda \end{pmatrix} \\
 | \\
 \bullet \\
 C \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda \end{pmatrix}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \bullet \\
 | \\
 C \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 | \\
 \bullet \\
 C \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 | \\
 \bullet \\
 C \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

4 Partities en de nilpotente matrices

In dit hoofdstuk zullen we na een korte introductie over partities, deze gebruiken om het algemene geval te bestuderen. Daarin zal naar de banen en afsluitingen van de nilpotente matrices worden gekeken.

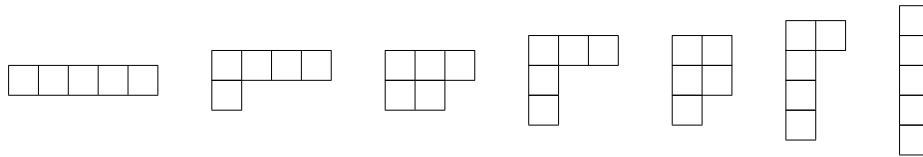
4.1 Partities

Definitie 4.1. Een partitie k van n , $k \in P(n)$, is een afnemend gekozen rijtje niet negatieve getallen waarvan de som gelijk is aan n . Voor een partitie $k = (k_1, k_2, \dots, k_r)$ van n geldt dus

$$\sum_{i=1}^r k_i = n \text{ met } k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_r.$$

Het is dan duidelijk dat voor elke n er maar eindig veel verschillende partities zijn en dat $(1,1)$ hetzelfde is als $(1,1,0,0,0)$. Er volgt dat er voor $n = 2, 3$ ook respectievelijk twee en drie verschillende partities zijn. Namelijk (2) en $(1,1)$ in het eerste geval en (3) , $(2,1)$ en $(1,1,1)$ voor het getal drie. Het getal vier heeft met (4) , $(3,1)$, $(2,2)$, $(2,1,1)$, $(1,1,1,1)$ echter al vijf verschillende partities. Zo neemt voor grotere getallen het aantal partities sterk toe. Een makkelijke manier om partities visueel te beschrijven is een Young diagram. Hierin wordt elk getal binnen een rijtje aangegeven met dat aantal blokken. Het volgende getal binnen die partitie is vervolgens het aantal blokken direct eronder genoteerd. In het volgende voorbeeld wordt deze notatie duidelijker gemaakt.

Voorbeeld 4.2. De zeven verschillende partities van $P(5)$ in een Young diagram.



Een ander belangrijk begrip is de *geconjugeerde partitie*. De geconjugeerde van een partitie krijg je door hem te spiegelen in de diagonaal. Simpel gezegd tel je nu niet het aantal blokken per rij maar per kolom. Onder conjugatie is het dan duidelijk dat:

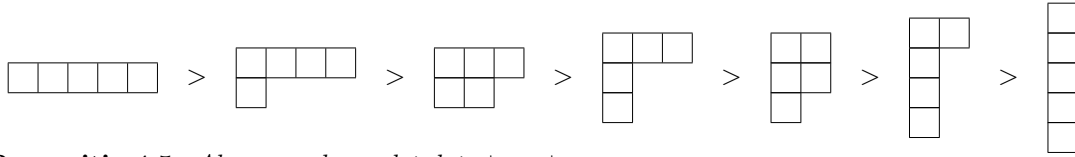
$$\begin{aligned} (5) &\mapsto (1, 1, 1, 1, 1) \\ (4, 1) &\mapsto (2, 1, 1, 1) \\ (3, 2) &\mapsto (2, 2, 1) \\ (3, 1, 1) &\mapsto (3, 1, 1) \end{aligned}$$

Formeel gedefinieerd geldt dan voor de geconjugeerde partitie van k , $k_i^* = \#\{j \mid k_j \geq i\}$. Bekijk we $(3,2)$ als voorbeeld dan zijn er 2 k_j waarvoor $k_j \geq 1$, 2 waarvoor $k_j \geq 2$ en 1 j waarvoor geldt $k_j \geq 3$. Dus volgt inderdaad dat $k^* = (2, 2, 1)$. Ook is het duidelijk dat $k^{**} = k$. Dit volgt direct uit het feit dat k_i^* het aantal blokken is in de i -de kolom van het Young diagram.

Definitie 4.3. We zeggen dat een partitie p van n een partitie q van n domineert, $p > q$, als geldt $\forall 1 \leq r \leq n$, $\sum_{i=1}^r p_i \geq \sum_{i=1}^r q_i$.

Waarbij het i -de element van een partitie nul is als het niet bestaat. Het vierde element van bijvoorbeeld $(3,1,1)$ is nul.

Voorbeeld 4.4. In het eerder gegeven voorbeeld voor $n = 5$ gelden dan de volgende dominanties.



Propositie 4.5. Als $p > q$ dan volgt dat $q^* > p^*$

Bewijs. $\max(p_i - j, 0)^* = (p_{j+1}^*, \dots, p_n^*)$ met $j \in \mathbb{N}$. Dit volgt direct uit het Young-diagram. Als je vanaf de linkerkant j blokken aftrekt houd je duidelijk alleen de kolommen vanaf de $j+1$ -ste kolom over. Dus $\sum_{i=1}^n \max(p_i - j, 0) = \sum_{i=1}^n \max(p_i - j, 0)^* = \sum_{i=j+1}^n p_i^*$. Hetzelfde geldt voor q dus

volgt dat $\sum_{i=j+1}^n p_i^* \geq \sum_{i=j+1}^n q_i^*$. Wat betekent dat aangezien de som van alle elementen voor zowel

p als q gelijk is aan n dat $\sum_{i=1}^j p_i^* \leq \sum_{i=1}^j q_i^*$ voor alle $j \in \mathbb{N}$. Oftewel $q^* > p^*$. \square

4.2 Afsluitingen van banen van nilpotente matrices

In dit hoofdstuk zal in het begin kort de behandeling van [3], hoofdstuk 1.3, gevolgd worden waarna het overgrote deel mijn eigen behandeling is. De gegeven diagrammen zijn hier zelf berekend maar oorspronkelijk uit [3].

In het geval van de 2×2 en 3×3 -matrices bekeken we de afbeeldingen π en η die alleen afhingen van de eigenwaarden en daardoor constant waren binnen de conjugatieklassen. Voor het algemene geval willen we iets soortgelijks doen en het ligt daarom voor de hand om naar het karakteristieke polynoom te kijken.

$$\text{Det}(A - tI_n) = (-1)^n t^n + (-1)^{n-1} a_{n-1} t^{n-1} + \dots - a_1 t + a_0$$

We weten dat dit polynoom en dus alle coëfficiënten a_i constant zijn binnen een conjugatieklasse. De afbeelding π die een matrix naar deze coëfficiënten stuurt is dus net als voor de specifieke gevallen constant binnen een conjugatieklasse.

$$\pi : M_n \mapsto \mathbb{C}^n \quad A \mapsto (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$$

Deze afbeelding π stuurt elke conjugatieklasse dus naar een punt in \mathbb{C}^n en is daarbij surjectief, alle punten in \mathbb{C}^n worden bereikt. Dit volgt uit het feit dat de coëfficiënten compleet bepaald wordt door de eigenwaarden van een matrix. Elk punt $P \in \mathbb{C}^n$ geeft ons namelijk n coëfficiënten en dus een karakteristieke polynoom van graad n . Wat omdat we in \mathbb{C} zitten altijd oplosbaar is dus alle eigenwaarden geeft. Aangezien dit voor elk punt kan is π dus surjectief. We krijgen zo voor elk punt alle eigenwaarden en hun multipliciteit.

We zullen vanaf nu alleen nog maar naar de nilpotente conjugatieklassen kijken, oftewel $\pi^{-1}(0)$. Het is duidelijk dat $\pi^{-1}(0)$ karakteristieke polynoom $(-1)^n t^n$ geeft en dus alle eigenwaarden nul. Anderzijds worden alle matrices met alleen eigenwaarde nul ook naar het punt $0 \in \mathbb{C}^n$ gestuurd. We willen dus aantonen dat het hebben van nul als enige eigenwaarde equivalent is met nilpotent zijn. Nu geldt voor een matrix die nilpotent is dat $A^n = 0$. Dus als v een eigenvector van A is dan volgt $0 = A^n v = \lambda^n v$. Dus inderdaad heeft een nilpotente matrix alleen eigenwaarden nul. Andersom volgt het direct uit de Jordan-normaalvorm. We zagen dat elke matrix geconjugueerd is aan een Jordan-normaalvorm die geschreven kan worden als de som van een diagonaal en een

nilpotente matrix. In het geval van alle eigenwaarden nul blijft dus alleen de nilpotente matrix over. Het is hier overigens duidelijk dat nilpotentheid behouden blijft binnen een conjugatieklasse wegens hetzelfde bewijs als gegeven voor het minimumpolynoom.

We weten dat in elke conjugatieklasse een Jordan-normaalvorm zit. Voor de nilpotente matrices neemt deze dus de volgende speciale vorm aan waarmee we weer elke conjugatieklasse zullen identificeren.

$$\left(\begin{array}{cccc} J_{k_1} & & & \\ & J_{k_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{k_{r-1}} \\ & & & & J_{k_r} \end{array} \right) \text{ waarbij geldt } J_{k_i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \in M_{k_i}$$

Aangezien volgorde niet uit maakt kiezen we hier onze Jordan-normaalvorm steeds zo dat het grootste Jordan-blok linksboven staat. Met deze aanname is de belangrijke volgende stap nu om in te zien dat dit er voor zorgt dat er een bijectie bestaat dus de nilpotente conjugatieklassen van M_n en de partities van n . Het is duidelijk dat de som van de groottes van de Jordan-blokken altijd gelijk is aan n en dat elke conjugatieklasse maar naar 1 partitie kan worden gestuurd aangezien twee matrices met verschillende Jordan-blokken nooit hetzelfde kunnen zijn. De afbeelding is dus goed gedefinieerd en ook bijectief aangezien de inverse afbeelding goed gedefinieerd is. Voor 4x4-matrices ziet het er bijvoorbeeld als volgt uit. Waarbij dit alle mogelijke conjugatieklassen en partities zijn.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto (4)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto (3,1)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto (2,2)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto (2,1,1)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto (1,1,1,1)$$

Een mooi gevolg van deze identificatie is dat omdat er maar eindig veel partities van n zijn er dus ook maar eindig veel nilpotente conjugatieklassen zijn. Ook is het duidelijk dat het minimumpolynoom dan t^{k_1} is. Vanaf nu zullen we, aangezien de notatie simpeler is, partities gebruiken om de conjugatieklassen aan te geven. In het laatste hoofdstuk zullen deze partities

ook vrij essentieel zijn voor het bewijs van de stelling van Gerstenhaber-Hesselink.

We zullen nu weer gaan kijken naar de afsluitingen van de verschillende conjugatieklassen. We werken nu alleen met de nilpotente conjugatieklassen en het is daarom te verwachten dat net zoals bij de 3×3 -matrices al deze klassen in hetzelfde inclusie-diagram zitten. Dit is inderdaad het geval aangezien voor elke matrix geldt dat de nulmatrix in zijn afsluiting zit. Dit is eenvoudig in te zien. In elke conjugatieklasse zit de matrix die je krijgt als je in de Jordan-normaalvorm de "1-tjes" vervangt door epsilons. In de limiet naar nul geeft dit de bekende nulmatrix. Anderzijds zit elke matrix in de afsluiting van de conjugatieklasse die hoort bij de Jordan-normaalvorm met alleen maar 1-en op de bovendagonaal. Dit volgt op dezelfde wijze als net besproken alleen in dit geval voeg je epsilons toe op de plekken waar geen 1 staat in de bovendagonaal. Ter illustratie ziet dit er als volgt uit voor $(2,2,1)$. Het is duidelijk dat dit principe voor alle conjugatieklassen geldt.

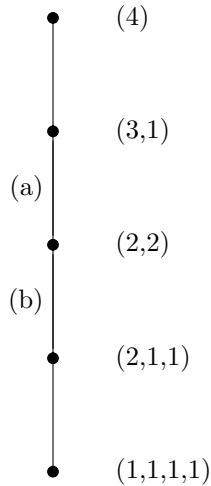
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Voor grote n zal het aantal partities extreem groot zijn waardoor het onmogelijk is deze inclusie-diagrammen handmatig te tekenen. Voor kleinere n zijn ze wel goed uit te rekenen. We zullen daarom die van $n = 4, 5, 6, 7, 8$ geven en verscheidene belangrijke inclusies daarin bewijzen. Het is in deze diagrammen overigens duidelijk dat als $B \in \overline{C_A}$ en $D \in \overline{C_B}$ dat dan $D \in \overline{C_B} \subset \overline{C_A}$.

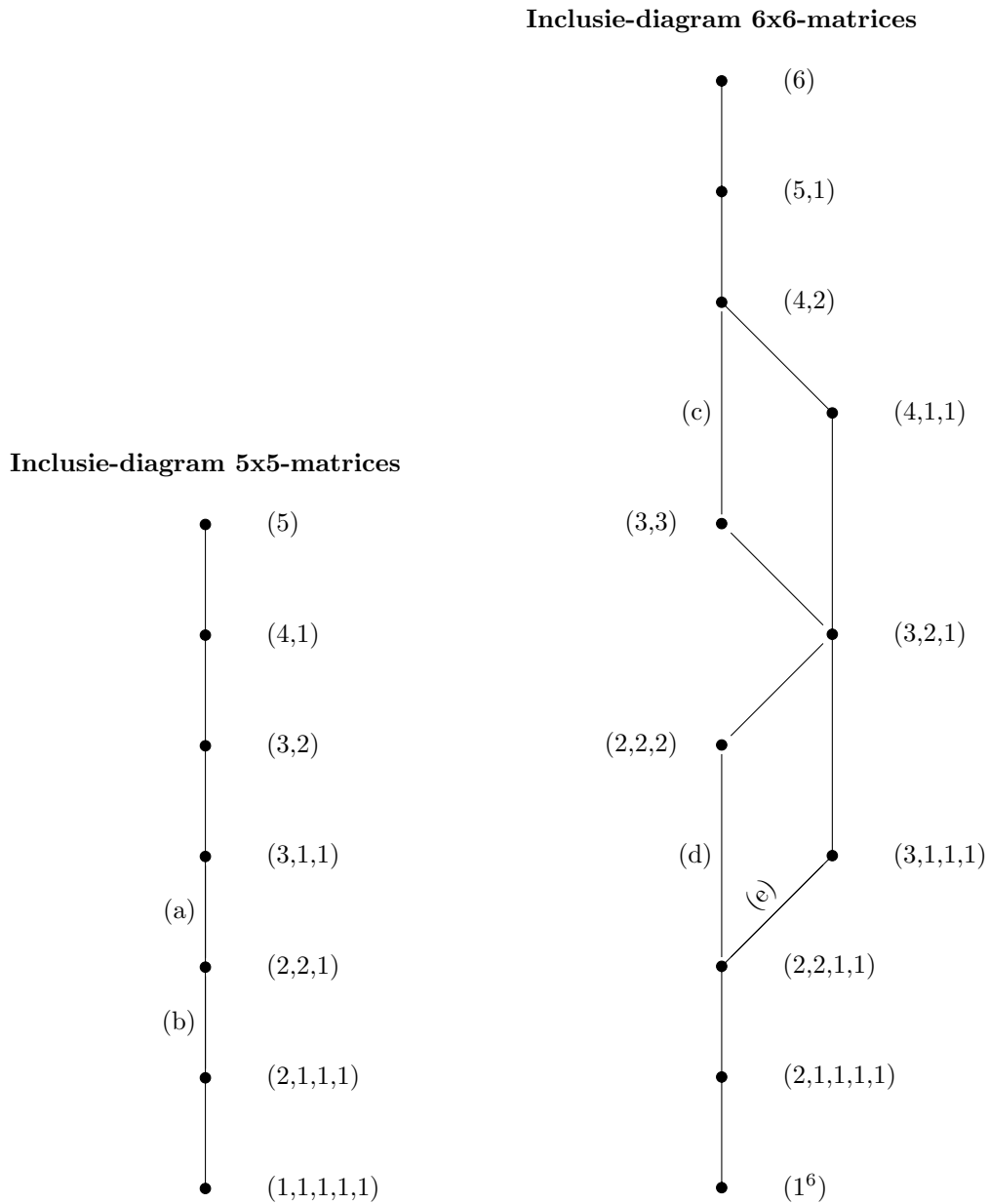
4.2.1 Afsluitingen 4x4-matrices

Inclusie-diagram afsluitingen 4x4-matrices



We zien dat alle nilpotente banen hier direct verbonden zijn. Voor elk paar banen geldt dat één van de twee altijd in de afsluiting van de ander zit. We beschouwen nu de twee inclusies aangegeven met (a) en (b). Voor (a) merken we op dat $\forall \epsilon \neq 0$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim (3,1)$. De gegeven matrix heeft namelijk minimumpolynoom t^3 en kan dus alleen geconjugeerd zijn aan (3,1). De conjugatieklasse (2,2) is dus een limietpunt van een rijtje in (3,1) en zit daarom in zijn afsluiting. Voor (b) geldt op zowat identieke wijze dat $\forall \epsilon \neq 0$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim (2,2)$ want er is geen andere conjugatieklasse met minimumpolynoom t^2 en rang 2. Als limietpunt van een rijtje in (2,2) zit (2,1,1) dus inderdaad in de afsluiting van deze baan.

4.2.2 Afsluitingen 5x5-en 6x6-matrices



In het inclusie-diagram van de nilpotente 5x5-matrices blijkt dat nog steeds alle 7 verschillende banen direct met elkaar verbonden zijn door de afsluitingsinclusies. Dit geldt echter niet voor de 6x6-matrices waar bijvoorbeeld (3,3) niet in de afsluiting van (4,1,1) zit en het vice versa ook niet het geval is. We analyseren weer sommige van de inclusies. Ten eerste in het geval van (a) en (b) volgt dan dat,

$$\forall \epsilon \neq 0, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim (3, 1, 1) \text{ en } \forall \epsilon \neq 0, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim (2, 2, 1)$$

Het feit dat deze matrices in de genoemde conjugatieklasse zitten volgt weer uit het minimumpolynoom en de rang van deze matrix. Vervolgens volgt dan weer vrij direct dat de inclusies (a) en (b) inderdaad gelden. Alhoewel deze argumentatie vrij eenvoudig is, was het in dit geval nog simpeler in te zien. Als je kijkt naar de gevallen (a) en (b) van de 4x4-matrices en deze vergelijkt met de twee huidige inclusies dan is het duidelijk dat ze zowat identiek zijn. Het enige verschil is dat er nu in beide gevallen een 1x1-Jordan-blok is toegevoegd maar dit verandert natuurlijk niks. Het mag duidelijk zijn dat als een rijtje matrices in de conjugatieklasse van (3,1) zit dat na het toevoegen van een 1x1-Jordan-blok aan elke matrix in dat rijtje, het resulterende rijtje in (3,1,1) zit. Aangezien de limiet van het rijtje matrices dan gewoon naar (2,2) gaat plus het Jordan-blok volgt inderdaad dat (2,2,1) in de afsluiting van (3,1,1) zit.

Als we nu naar de 6x6-matrices kijken wordt het al interessanter. De inclusie (c) bestaat inderdaad want $\forall \epsilon \neq 0$,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim (4, 2). \text{ Dit volgt uit het feit dat de gegeven}$$

matrix afhankelijk van ϵ minimumpolynoom t^4 heeft en duidelijk rang gelijk aan 4. Hij kan dus alleen geconjugerd zijn aan (4,2) aangezien (4,1,1) rang 3 heeft. Dit rijtje gaat in de limiet naar (3,3) en dus zit (3,3) in de afsluiting van de baan van (4,2). Opvallend is nu dat er schijnbaar geen rijtje in (4,1,1) bestaat wat naar (3,3) convergeert aangezien er geen inclusie is. De reden hiervoor lijkt de rang te zijn. (3,3) heeft namelijk rang 4 en (4,1,1) rang 3 wat betekent dat een rijtje matrices zou moeten convergeren naar een matrix met een hogere rang. Iets wat logischerwijs niet mogelijk is.

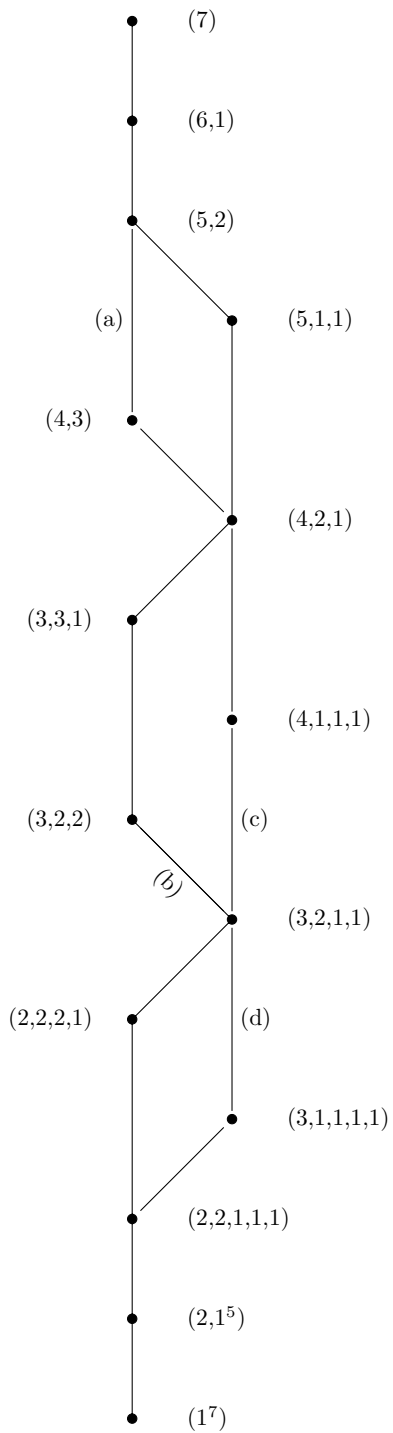
Als we dan naar de inclusies (d) en (e) kijken dan is het dus wel mogelijk dat een matrix in de afsluiting van twee verschillende conjugatieklassen zit die onderling geen inclusie hebben. De twee volgende, compleet verschillende, vrij simpele rijtjes convergeren namelijk beide naar (2,2,1,1),

$$(d) \forall \epsilon \neq 0, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim (2, 2, 2) \text{ en } (e) \forall \epsilon \neq 0, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim (3, 1, 1, 1)$$

Het is duidelijk dat in het eerste geval het laatste 2x2-blok geconjugerd is aan een standaard 2x2-Jordan-blok en dat het gegeven rijtje dus in de baan van (2,2,2) zit. Het tweede geval is eigenlijk weer een variant op het resultaat dat (2,2) in de afsluiting van de baan van (3,1) zit. Het is ook duidelijk doordat de gegeven matrices minimumpolynoom t^3 en rang 2 hebben wat inhoudt dat ze wel in de baan van (3,1,1,1) moeten zitten. Vanwege het feit dat beide rijtjes convergeren naar (2,2,1,1) geldt inderdaad dat deze matrix in beide afsluitingen zit.

4.2.3 Afsluitingen 7x7-matrices

Inclusie-diagram



Het inclusie-diagram van de 7x7-matrices heeft duidelijk wat weg van dat van de 6x6-matrices. Het is iets gecompliceerder maar de symmetrie van de figuur blijft nog steeds behouden. De inclusie genoteerd met (a) lijkt erg op de inclusie (a) in het vorige geval. Het is echter steeds lastiger om het juist rijtje matrices te vinden wat de inclusie bevestigt. Voor grotere n wordt het aantal posities om epsilon te plaatsen in de matrix namelijk extreem groot. Het juiste rijtje is dan niet altijd meteen duidelijk.

$$\forall \epsilon \neq 0, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim (5,2) \text{ blijkt toch een rijtje te zijn dat voldoet. Na wat}$$

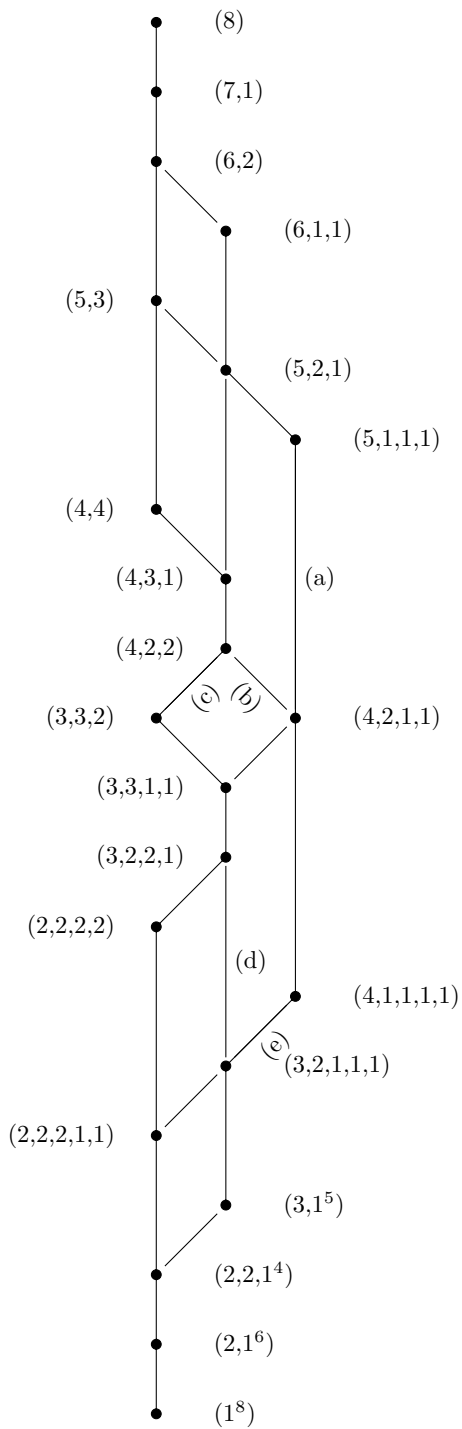
rekenen is duidelijk dat ze minimumpolynoom t^5 hebben en rang 5, wat het geconjugerd zijn met (5,2) impliceert. (4,3) is inderdaad de limiet van dit rijtje voor epsilon naar 0 dus zit (4,3) in de afsluiting van (5,2). Op identieke wijze als in de vorige paragraaf zit (4,3) echter niet in de afsluiting van (5,1,1). Een oneindig rijtje matrices met als limiet een matrix met hogere rang is namelijk niet mogelijk. Kijken we nu naar de inclusies (b) en (c) dan valt op dat er hier een zogeheten splitsing is zoals al eerder benoemd. Er blijkt inderdaad dat (3,2,1,1) in beide afsluitingen zit.

$$(b) \forall \epsilon \neq 0, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim (3,2,2) \text{ en, (c) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim (4,1,1,1)$$

(b) volgt weer triviaal uit het feit dat $\begin{pmatrix} 0 & \epsilon \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ in de baan van (2) zit. Voor (c) zien we na wat rekenen dat we te maken hebben met een rijtje matrices met minimumpolynoom t^4 en rang 3 wat direct het tot de baan van (4,1,1,1) horen impliceert. Het mag duidelijk wezen dat beide rijtjes convergeren naar (3,2,1,1). Het bijzondere aan deze splitsing is overigens dat in tegenstelling tot alle eerdere gevallen de "paden" niet gelijk weer bij elkaar komen. (3,2,2) zit ook nog in de afsluiting van de baan van (3,3,1) voor dat deze bij (4,2,1) komt. Dit volgt overigens direct uit de inclusie tussen (3,1) en (2,2). (4,1,1,1) zit wel direct in de afsluiting van de baan van (4,2,1). Tenslotte is de inclusie (d) natuurlijk vrij duidelijk door de net ook al genoemde inclusie tussen (3,1) en (2,2). Interessanter is het feit dat (3,1,1,1,1) niet in de afsluiting van (2,2,2,1) zit. Omgekeerd is dit duidelijk door het twee keer eerder genoemde argument betreffende de rang van de matrix. In dit geval is het echter goed mogelijk een rijtje in (2,2,2,1), met matrices van rang 3, te vinden die naar een matrix met rang 2 zouden convergeren. Het gaat hier echter fout bij het minimumpolynoom. Voor elk rijtje in (2,2,2,1) geldt dat de matrices minimumpolynoom t^2 hebben. Een simpel rijtje met 1 toegevoegde epsilon zou nooit minimumpolynoom lager hebben dan de limiet van dat rijtje. Het kan namelijk niet zo zijn dat voor oneindig veel verschillende epsilon de matrix tot een bepaalde macht nul is maar voor één bepaalde waarde opeens niet meer nul is. De coördinaten van bijvoorbeeld A^4 zijn namelijk polynomen in ϵ en deze kunnen geen oneindig veel nulpunten hebben zonder constant te zijn.

4.2.4 Afsluitingen 8x8-matrices

Inclusie-diagram



Voor de 8x8-matrices blijkt het diagram opeens een stuk complexer te zijn hoewel het nog steeds compleet symmetrisch is. Er zijn nu 22 mogelijke banen die door veel verschillende inclusies met elkaar verbonden zijn waardoor er verscheidene paden lijken te ontstaan. Veel inclusies zijn echter terug te herleiden naar de eerder besproken kleinere banen. Zo hadden we al gezien dat (4,2) in de afsluiting van de baan van (5,1) zit en dus zit (4,2,1,1) in de afsluiting van de baan van (5,1,1,1). Voor de inclusies (b) en (c) geldt exact hetzelfde. Dit is in het algemeen het geval aangezien toegevoegde Jordan-blokken geen effect hebben op het feit dat het eerste deel in de afsluiting van een bepaalde baan zit. Dat dit duidelijk is volgt uit de volgende redenatie. Stel (k_1, \dots, k_s) zit in de afsluiting van de baan van (k_1, \dots, k_r) . Dan hebben we een rijtje matrices (A_i) in de baan van (k_1, \dots, k_r) dat convergeert naar (k_1, \dots, k_s) . Dit betekent dat er een matrix Q bestaat zodat $QA_iQ^{-1} = (k_1, \dots, k_r)$. Stel nu we bekijken de baan van $(k_1, \dots, k_r, l_1\dots)$. We nemen hier zonder verlies van algemeenheid aan dat de extra Jordan-blokken erachter komen. Als we dan nu het volgende rijtje matrices nemen.

$$\begin{pmatrix} A_i & & \\ & L_i & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \text{ met } L_i \text{ de Jordan-blokken die met } l_i \text{ corresponderen,}$$

dan volgt met $Q' = \begin{pmatrix} Q & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$ dat de gegeven matrices in het rijtje geconjugerd zijn aan

$(k_1, \dots, k_r, l_1\dots)$. Aangezien dit rijtje vervolgens duidelijk convergeert naar $(k_1, \dots, k_s, l_1\dots)$ volgt dat $(k_1, \dots, k_s, l_1\dots)$ in de afsluiting van $(k_1, \dots, k_r, l_1\dots)$ zit. Op deze wijze valt ook te concluderen dat er geen inclusie tussen (3,3,2) en (4,2,1,1) kan bestaan. Waar (3,3) namelijk in de afsluiting van (4,2) zit, zit (1,1) in de afsluiting van (2). Dit betekent dat de ene baan nooit in de afsluiting van de andere kan zitten.

Als we nu verder in het diagram kijken naar de inclusies (d) en (e) dan valt op dat ze beide direct volgen. (1,1) zit in de afsluiting van (2) waardoor inclusie (d) volgt, en (3,2) zit in de afsluiting van (4,1) wat (e) bevestigt. Elke inclusie in dit diagram lijkt vrij eenvoudig te beargumenteren met behulp van de eerder bewezen inclusies. Door het chronologisch afgaan van de verschillende nilpotente nxn-matrices is elk diagram dus op te stellen. Dit is echter geen directe aanpak en het kan veel simpeler. Het bestaan of niet bestaan van elke inclusie volgt namelijk direct uit de stelling van Gerstenhaber-Hesselink. Deze zal in het volgende hoofdstuk worden bewezen waarna de diagrammen vrij snel kunnen worden opgesteld.

5 Stelling van Gerstenhaber-Hesselink

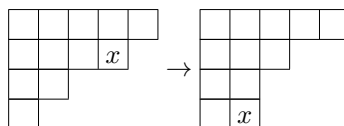
In de afgelopen hoofdstukken zijn verschillende afsluitingsinclusies voorbij gekomen. De aanpak om deze te vinden was steeds ongeveer hetzelfde. Het vinden van een mooi rijtje matrices in de desbetreffende baan, die in de limiet naar een andere baan gingen. Dit is bij $n \times n$ -matrices voor grotere n helaas een vrij lastig proces. De stelling van Gerstenhaber-Hesselink geeft echter gelijk uitsluitsel over de genoemde inclusies. De stelling en het bewijs hiervan komen aan bod in het komende hoofdstuk. Dit is gebaseerd op de bewijzen van Gerstenhaber [1], Hesselink [2] en Le Bruyn [5]. We zullen daarvoor eerst wat dieper in gaan op partities. Tenslotte is het idee van het bewijs gebaseerd op het in het algemeen vinden van rijtjes matrices.

5.1 Young tableau

Propositie 5.1. *Stel p, r en q zijn partities van n zodat $\{q\} = \{r \in P(n) \mid p > r \geq q\}$. Er bestaat dus geen partitie van n die strikt door p gedomineerd wordt en zelf q strikt domineert. Dan geldt dat p en q van de volgende vorm zijn: $p = (a_1, \dots, a_i + 1, \dots, a_j - 1, \dots)$ en $q = (a_1, \dots, a_i - 1, \dots, a_j + 1, \dots)$ voor $a_i, a_j \in \mathbb{N}$.*

Bewijs. $p > q$ dus er is een kleinste i zodat $p_i > q_i$. Dan volgt dat $p_i = q_i + 1$ want een groter verschil dan 1 zou betekenen dat er een $r \in P(n)$ is zodat $p > r > q$. Neem nu j het volgende getal waarvoor $p_j \neq q_j$. Aangezien $p_j > q_j$ duidelijk in tegenspraak is met de aanname van de stelling dat er geen $r \in P(n)$ is zodat $p > r > q$ is volgt dat $p_j < q_j$. Wat betekent dat $p_j + 1 = q_j$ want bij grote verschil is de dominantie niet behouden. De rest van de elementen van p en q zijn vervolgens gelijk anders zou de net beschreven partitie er tussen zitten wat weer in tegenspraak met de aanname van de stelling is. \square

Als p en q van de in propositie 5.1 genoemde vorm zijn dan noteren we dat voortaan als $p \rightarrow q$. Wanneer $p \rightarrow q$ dan volgt dat $q^* \rightarrow p^*$. Dit is direct duidelijk uit het Young diagram.



Voor de gegeven partities $p = (5, 4, 2, 1)$ en $q = (5, 3, 2, 2)$ geldt inderdaad dat $p \rightarrow q$. Er volgt echter ook dat $(5, 4, 2, 1) > (5, 3, 3, 1) > (5, 3, 2, 2)$ dus er bestaat een partitie die zagezegd tussen p en q inzit. Propositie 5.1 geldt dus maar één kant op.

Definitie 5.2. Een semi-standaard Young tableau is een Young diagram, met in elk blok een getal, dat aan de volgende eisen voldoet.

1. De getallen in een rij zijn niet dalend. Elk getal is groter dan of gelijk aan zijn voorganger.
2. Per kolom zijn de getallen strikt stijgend.

Definitie 5.3. Een semi-standaard Young p -tableau van type q is een Young tableau van p zodat elke i , precies q_i keer voorkomt.

Het is evident dat als $p \rightarrow q$ dat er dan een p -tableau van type q is. Voor elk tableau van q kies je namelijk de getallen i op de i -de rij. Na het omhoog schuiven van één z'n blok volgens de

beschreven relatie voldoet het verkregen p -tableau dan aan de net gedefinieerde eigenschappen. We gebruiken weer de twee partities $p = (5, 4, 2, 1)$ en $q = (5, 3, 2, 2)$ als voorbeeld.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 4 & \\ \hline 3 & 3 & & & \\ \hline 4 & & & & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 2 & & \\ \hline 3 & 3 & & & \\ \hline 4 & 4 & & & \\ \hline \end{array}$$

Het is dan duidelijk dat deze methode werkt voor alle $p \rightarrow q$. De omgekeerde bewering is echter onwaar getuige het volgende voorbeeld.

$$p = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 4 & \\ \hline 3 & 3 & & & \\ \hline 4 & & & & \\ \hline \end{array} \qquad q = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 2 & \\ \hline 3 & 3 & 3 & \\ \hline 4 & 4 & & \\ \hline \end{array}$$

We hebben hier te maken met een p -tableau van type q maar het mag duidelijk zijn dat $p \not\rightarrow q$. Niettemin volgt wanneer we een p -tableau van type q hebben wel dat $p > q$. Er zijn namelijk $q_1 + \dots + q_j$ blokken met getal kleiner dan of gelijk aan j . En omdat de kolommen strikt stijgend zijn moet elk blok met getal kleiner dan of gelijk aan j in de eerste j rijen liggen. We hebben dus minstens $q_1 + \dots + q_j$ blokken in de eerste j rijen. Oftewel $\sum_{i=1}^j p_i \geq \sum_{i=1}^j q_i \forall j \in \mathbb{N}$ en $p > q$.

5.2 Gerstenhaber-Hesselink

Propositie 5.4. *Laat $p \in P(n)$ corresponderen met de baan van de nilpotente matrix A . Dan geldt $\dim \text{Ker } A^m = \sum_{i=1}^m p_i^*$*

Bewijs. Ten eerste geldt voor een enkel $n \times n$ -Jordan-blok dat $\dim \text{Ker } J^m = \sum_{i=1}^m \{1 \text{ als } q_1 \geq i, 0 \text{ anders}\}$. Waar q de partitie bestaande uit 1 element is die bij het Jordan-blok J hoort. We weten ook dat we een directe som van Jordan-blokken hebben. Het is daarbij duidelijk dat de dimensie van de kern van de directe som gelijk is aan de som van dimensies van de verschillende kernen. Oftewel de dimensie van de kern van een Jordan-normaalvorm is gelijk aan de som van de kernen van de verschillende blokken. Als we nu een partitie p behorende bij de matrix A hebben dan geldt de gegeven formule dus voor alle p_i individueel. Waarbij het totaal de som van al deze uitkomsten is. Dit geeft $\dim \text{Ker } A^m = \sum_{i=1}^m \#\{j \mid p_j \geq i\} = \sum_{i=1}^m p_i^*$. Waarbij de laatste gelijkheid uit de definitie van de geconjugeerde partitie volgt. \square

We willen nu een basis kiezen die we zo ordenen dat voor de eerste $\sum_{i=1}^m p_i^*$ vectoren geldt dat ze de kern van A^m opspannen. Voor de partitie $p = (4, 2, 1)$, met $p^* = (3, 2, 1, 1)$, behorende bij de matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ & & & & 0 & 1 & \\ & & & & 0 & 0 & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

heb je zo de set $\{e_1, e_5, e_7, e_2, e_6, e_3, e_4\}$. Het is duidelijk dat ze eerste $p_1^* = 3$ vectoren de kern van A opspannen. De eerste $p_1^* + p_2^* = 5$ vectoren de kern van A^2 opspannen, enzovoort. Dit willen we nu samen met de gedefinieerde Young tableau gebruiken. Stel $p \rightarrow q$ dan volgt $q^* \rightarrow p^*$ dus weten we dat er een q^* -Young tableau van type p^* is. Ter illustratie nemen we dezelfde $p = (4, 2, 1)$ met $q = (3, 2, 2)$. Dan hebben we

$$q^* = (3, 3, 1) \rightarrow p^* = (3, 2, 1, 1)$$

1	1	1
2	2	3
4		

We kunnen in dit q^* -Young tableau van type p^* de getallen nu vervangen door de vectoren die de kern van A^m opspannen. Waarbij we logischerwijs de p_i^* i -tjes vervangen door de p_i^* vectoren die $\text{Ker } A^i - \text{Ker } A^{i-1}$ opspannen. In het door ons genomen voorbeeld worden de 1-en dan vervangen door $\{e_1, e_5, e_7\}$, de 2-en door $\{e_2, e_6\}$, enzovoort. In een Young tableau ziet dat er als volgt uit.

$$Y = \begin{array}{|c|c|c|} \hline e_1 & e_5 & e_7 \\ \hline e_2 & e_6 & e_3 \\ \hline e_4 & & \\ \hline \end{array}$$

Nu definiëren we de operator F op \mathbb{C}^n , over het tableau Y , zodat F elke vector naar de vector een blok daarboven stuurt. $F(v) = w$ met $v, w \in \mathbb{C}^n$ waarbij w dus boven v staat in Y . Het mag duidelijk zijn dat $F(v) = 0$ voor v op de bovenste rij van Y wat betekent dat F nilpotent is. Voor F geldt dan $\dim \text{Ker } F^m = \sum_{i=1}^m q_i^*$ wat direct volgt uit het feit dat dimensie van de kern van F simpelweg het aantal vectoren/blokken op de eerste rij is. Dit principe trekt zich logisch door voor hogere machten van F . Uit deze gelijkheid voor de kern volgt dat F dus de matrix is behorende bij de baan gegeven door de partitie q . Een belangrijke opmerking is ook dat $F(\text{ker } A^m) \subset F(\text{ker } A^{m-1})$. Dit volgt uit de manier waarop we Y hebben opgebouwd en de definitie van een tableau. Tenslotte kijken we nog een laatste keer naar het door ons gekozen voorbeeld. Helder is dat $F(e_4) = e_2, F(e_3) = e_7, F(e_6) = e_5, F(e_2) = e_1, F(e_7) = 0, F(e_5) = 0, F(e_1) = 0$. De matrix F ten opzichte van deze basis is dus

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & 0 & \\ 1 & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Het is makkelijk te checken dat deze matrix inderdaad in de baan van $q = (3, 2, 2)$ zit.

We hebben nu een algemene matrix F gevonden die voor $p \rightarrow q$ in de baan van q zit en vectoren in de kern van A^m , partitie p , naar elkaar stuurt. Wat we in vorige hoofdstukken voor exacte voorbeelden hebben gedaan willen we nu dus in het algemeen gaan doen. Rijtjes matrices vinden binnen een baan die in de limiet naar een andere baan convergeren.

We definiëren voor $\epsilon \in \mathbb{C}$ de volgende matrix

$$F_\epsilon = (1 - \epsilon)F + \epsilon A$$

Het is duidelijk dat $F_0 = F$ in de baan van q zit. We willen dus aantonen dat voor alle behalve een eindig aantal ϵ , F_ϵ in de baan van A , C_A zit. In dat geval hebben we een algemeen rijtje gevonden dat aan de eisen voldoet.

Uit de constructie van F volgde dat $F(\ker A) = 0$ en $F(\ker A^m) \subset F(\ker A^{m-1})$. Ook is het duidelijk dat uit $A^{m+1}(\ker A^{m+1}) = 0$ volgt dat $A^m(A(\ker A^{m+1})) = 0$ en dus $A(\ker A^{m+1}) \subset \ker A^m$. Met deze resultaten kan met behulp van inductie vervolgens worden aangetoond dat $F_\epsilon^m(\ker A^m) = 0$.

1. Duidelijk is dat $F_\epsilon(\ker A) = (1 - \epsilon)F(\ker A) + \epsilon A(\ker A) = 0$

2. Nu stel $F_\epsilon^k(\ker A^k) = 0$ dan volgt

$$\begin{aligned} F_\epsilon^{k+1}(\ker A^{k+1}) &= F_\epsilon^k(F_\epsilon(\ker A^{k+1})) \\ &= F_\epsilon^k((1 - \epsilon)F + \epsilon A)(\ker A^{k+1}) \\ &\subset F_\epsilon^k(\ker A^m) = 0 \end{aligned}$$

Met het principe van inductie volgt dan dat $F_\epsilon^m(\ker A^m) = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$. Dus $\dim \ker A^m \leq \dim \ker F_\epsilon^m$ of $\text{Rang } A^m \geq \text{Rang } F_\epsilon^m$. We weten echter dat voor $\epsilon = 1$, $F_\epsilon = A$. Stel nu $d_m = \text{Rang } A^m$ dan heeft F_1^m dus rang d_m . Deze matrix heeft nu een $d_m \times d_m$ -”submatrix” van rang d_m die je krijgt door de verschillende onnodige kolommen en rijen te verwijderen. Dit betekent dat de determinant van deze matrix ongelijk aan nul is voor $\epsilon = 1$. Aangezien de determinant een polynoom in ϵ is betekent dit dat de determinant voor alle behalve een eindig aantal ϵ niet nul is. Wat betekent deze matrix voor alle behalve een eindig aantal ϵ rang d_m heeft. Concluderend geldt dus $\dim \ker A^m = \dim \ker F_\epsilon^m$ voor alle behalve een eindig aantal ϵ . Uit Propositie 5.4 volgt dan dat voor alle behalve een eindig aantal ϵ , F_ϵ in de baan van p zit. Het gekozen rijtje matrices voldoet. Dit betekent dat wanneer $p \rightarrow q$ dan zit de matrix q in de afsluiting van p . \square

Stelling 5.5. Gerstenhaber-Hesselink

Stel de partities p en q corresponderen respectievelijk met de banen van de matrices A en B dan,

$$B \in \overline{C_A} \iff p > q.$$

Bewijs. \Leftarrow We hebben het aangetoond voor $p \rightarrow q$. Met behulp van propositie 5.1 en het feit dat als $B \in \overline{C_A}$ en $D \in \overline{C_B}$ dan $D \in \overline{C_B} \subset \overline{C_A}$ volgt het ook voor $p > q$.

\Rightarrow Ten eerste is het helder dat als B in de afsluiting van A zit dat B^m dan in de afsluiting van A^m zit. Want stel (A_ϵ) is een rijtje in de baan van A dan is (A_ϵ^m) een rijtje in de baan van A^m wat duidelijk naar B^m convergeert. Hieruit volgt dat $\text{Rang } A^m \geq \text{Rang } B^m$ voor alle m . Stel namelijk dat B^m een hogere rang zou hebben dan zou dit betekenen dat de limiet van het rijtje een hogere rang heeft dan de termen in het rijtje zelf. Oftewel volgens de eerder beschreven redenatie zou de determinant van een ”submatrix” nul zijn voor alle behalve een eindig aantal ϵ .

Dit is in tegenstelling met de hoofdstelling van de algebra. Dus $\text{Rang } A^m \geq \text{Rang } B^m \Rightarrow \dim \text{Ker } B^m \geq \dim \text{Ker } A^m \Rightarrow q^* > p^* \Rightarrow p > q$. \square

Gevolg 5.6. $B \in \overline{C_A} \iff \dim \text{Ker } B^m \geq \dim \text{Ker } A^m$.

Bewijs. Equivalentie met de Gerstenhaber-Hesselink stelling volgt direct uit Propositie 5.4 en $p > q \iff q^* > p^*$. \square

Referenties

- [1] Murray Gerstenhaber. On dominance and varieties of commuting matrices. *Annals of Mathematics*, 73(2):324–348, 1961.
- [2] Wim Hesselink. Singularities in the nilpotent scheme of a classical group. *Transactions of the american mathematical society*, 223:1–32, 1976.
- [3] H. Kraft. *Geometrische Methoden in der Invariantentheorie*. Aspects of mathematics. F. Vieweg, 1985.
- [4] S. Lang. *Algebra*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2005.
- [5] Lieven LeBruyn. *Noncommutative Geometry and Cayley-smooth Orders*, volume 290 of *Pure and Applied Mathematics*. Chapman and Hall / CRC, 2007. 592 pages.