Universiteit Utrecht

Departement Wiskunde

Bachelorscriptie

Het Spectrum van een Ring

Auteur:
Robert Silfhout

Begeleider:
Prof. Dr. C. Faber

17 juni 2016

Voorwoord

Allereerst wil ik mijn begeleider Professor Dr. Carel Faber bedanken voor dit geweldige onderwerp. Zo kreeg ik de mogelijkheid om mij te verdiepen in het spectrum van een ring R, zijn topologische ruimte Spec(R) met de Zariski topologie, en de structuurschoof van Spec(R).
Voor het eigen maken van het spectrum van een ring heeft Professor Faber mij het boek *Introduction to Commutative Algebra* [1] aanbevolen. Voor de theorie van schoven heeft hij mij allereerst het boek *The Red Book of Varieties and Schemes* [2] aanbevolen en later ook de boeken *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves* [5] en *Algebraic Geometry* [4].
Twee van deze boeken ([2] en [4]) behandelen eerst de klassieke definitie van de Zariski topologie, die zich situeert op de algebraïsche variëteiten. Ook de schoventheorie wordt eerst behandeld met behulp van algebraïsche variëteiten.
Mijn gegeven uitdaging was om deze klassieke definitie te negeren en alleen de moderne definitie te bestuderen, welke een veralgemenisering is van de klassieke definitie.

Om mij te kunnen verdiepen in de structuurschoof van de topologische ruimte Spec(R), moest ik mij de theorie van schoven, in het bijzonder schoven van ringen, eigen maken. De theorie van schoven van ringen maakt gebruik van veel definities en eigenschappen van zowel ringen als topologische ruimtes. Hierdoor wordt er in de boeken een (brede) voorkennis van zowel ringen als topologie vereist. Zodoende was ik in het begin veel aan het terugbladeren in de dictaten van de vakken "Ringen en Galoistheorie" [3] en "Inleiding topologie" [7]. Dit bracht mij op het idee voor een extra uitdaging: ik zou mijn scriptie zo volledig mogelijk voorzien van de minimaal nodige voorkennis, zodat ik overal specifiek naar de voorkennis zou kunnen verwijzen en er bij het lezen van deze scriptie geen andere literatuur nodig zou moeten zijn.

Hiervoor heb ik naast het vertalen van de gebruikte definities/lemma's/proposities/stellingen deze ook veelal aangepast, gecombineerd tot één, of juist opgesplitst tot meerdere, waar ik dat nodig achtte voor een voor mijn scriptie beter lopend verhaal. Met aanpassen bedoel ik het gebruik van andere symbolen, of het aanpassen van het bijbehorende bewijs om extra voorkennis te vermijden.

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 1

Inleiding

In hoofdstuk 2 wordt de nodige voorkennis van ringen en topologie gegeven. Omdat we veel zullen werken met idealen, ligt de nadruk van de voorkennis ringen op idealen en zullen er hier ook al enkele lemma's en gevolgen gegeven worden. Omdat ik in de hoofdstukken erna steeds aangeef waar ik welk(e) lemma/definitie uit hoofdstuk 2 gebruik, is het voor de lezer prima mogelijk om hoofdstuk 2 over te slaan en, waar nodig, naar terug te slaan.
Hoofdstuk 3 gaat over het spectrum van een ring, de verzameling van priem-idealen van een ring. Hier laat ik een topologie op los: de Zariski topologie; deze geeft een bijzondere topologische ruimte, hetgeen ik laat zien door naar de scheidingsaxioma's te kijken en nog enkele andere eigenschappen van deze ruimte te benoemen.
Hoofdstuk 4 gaat over de theorie van schoven van ringen op een willekeurige topologische ruimte X. Hier komen de benodigde definities en eigenschappen voorbij die wij nodig hebben voor het laatste hoofdstuk, waar ik expliciet een schoof van ringen op de topologische ruimte van hoofdstuk 3 maak.

Ik zal in het begin naar bijna alle definities en bewezen eigenschappen terugverwijzen, maar naarmate de scriptie vordert ga ik ervan uit dat de lezer bepaalde (basis)eigenschappen intuïtief na een tijdje zal herkennen en kan toepassen.

Hoofdstuk 2

Voorkennis

2.1 Voorkennis Ringen

Definitie 2.1.1 ([3], 1.1.1) *Een commutatieve ring R is een verzameling met de binaire operaties "+" (=optelling) en "·" (=vermenigvuldiging), waarvoor geldt:*

(R0) *R is een abelse groep onder de optelling, dus er geldt:*

> **(G0)** $a + b = b + a \in R$ *voor alle* $a, b \in R$.
>
> **(G1)** $a + (b + c) = (a + b) + c$ *voor alle* $a, b, c \in R$.
>
> **(G2)** *Er is een $x \in R$ zodat $x + a = a + x = a$ voor alle $a \in R$. Deze x noemen wij het nulelement van R en wij noteren dit element vanaf nu als 0, of als 0_R wanneer we duidelijk onderscheid willen maken met een andere ring.*
>
> **(G3)** *Voor alle $a \in R$ is er een $b \in R$ zodat $a + b = b + a = 0$. Deze b noemen wij het inverse element van a onder de optelling en wij noteren dit element vanaf nu als $-a$.*

(R1) $ab = ba \in R$ *voor alle* $a, b \in R$, *waarbij* $ab := a \cdot b$.

(R2) $a(bc) = (ab)c$ *voor alle* $a, b, c \in R$.

(R3) $a(b + c) = ab + ac$ *en* $(b + c)a = ba + ca$ *voor alle* $a, b, c \in R$.

(R4) *Er is een $y \in R$ zodat $ya = ay = a$ voor alle $a \in R$. Deze y noemen wij het eenheidselement van R en wij noteren dit element vanaf nu als 1, of als 1_R wanneer we duidelijk onderscheid willen maken met een andere ring.*

Allereerst merken we op dat de beschreven elementen van (G2), (G3) en (R4) uniek zijn:

Stel $a, b \in R$ voldoen aan (G2), dan krijgen we $a = a + b = b$.
Stel $a, b \in R$ voldoen aan (R4), dan krijgen we $a = ab = b$.
Stel $a, b \in R$ voldoen aan (G3) voor het element $x \in R$, dan krijgen we

$$a = 0 + a = (b + x) + a = b + (x + a) = b + 0 = b\,.$$

De tweede belangrijke opmerking is de volgende:
Voor elke $a \in R$ geldt door (G2) en (R4) dat $(1 + 0)a = a$. Ook geldt $(1+0)a = a+0a$ door (R3) en (R4). De gelijkheid $a+0a = a$ geeft ons het veelgebruikte gevolg dat $0a = 0$ voor alle $a \in R$.

Stel $1 = 0$, dan geldt voor elke $x \in R$ dat $x = 1x = 0x = 0$, dus $R = \{0\}$; de nulring. De nulring is over het algemeen voor deze scriptie niet relevant. Als we vanaf nu R schrijven, of schrijven over een ring, dan bedoelen wij een commutatieve ring mèt 1 en $1 \neq 0$, tenzij anders aangegeven.

Er zal ook vaak gebruik gemaakt worden van de schrijfwijze x^n, met $n \in \mathbb{N}$. Hiermee wordt de n-voudige vermenigvuldiging $x \cdot x \cdots x$ bedoeld. Hetzelfde geldt voor nx, waarmee een n-voudige optelling van x wordt bedoeld.
Als $x \in R$ en $n \in \mathbb{N}$, dan geldt $x^n, nx \in R$; met inductie volgt dit uit (R1) en (G0).
Ook zullen we vaak $a - b$ schrijven. Hiermee bedoelen we $a + (-b)$.

2.1.1 Belangrijke idealen in R

Definitie 2.1.2 ([3], 2.1.5) *Een ideaal I van R is een deelverzameling van R waarvoor geldt:*

(I0) $0 \in I$.

(I1) *Als $a, b \in I$, dan geldt $a - b \in I$.*

(I2) *Als $x \in I$, dan geldt $rx \in I$ voor alle $r \in R$.*

We zien dat als $a, b \in I$, dan geeft (I1) en (I2) ons dat $a + b = a - (-b) \in I$. Idealen behoren tot de belangrijkste deelverzamelingen van R. Daarom zullen we nu een paar belangrijke idealen noemen. De volgende definitie is een veralgemeniseerde versie van Definitie 2.1.11 van [3].

Definitie 2.1.3 *Neem $E \subset R$ een niet-lege deelverzameling, dan definiëren wij $\langle E \rangle$, het ideaal voortgebracht door E, als verzameling van eindige sommaties als volgt:*

$$\langle E \rangle := \{\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \mid n > 0,\ r_1, \ldots, r_n \in R \text{ en } x_1, \ldots, x_n \in E\}$$

We noemen een ideaal $I \subset R$ een hoofdideaal als $I = \langle r \rangle$ voor een $r \in R$.

Het bewijs dat $\langle E \rangle$ daadwerkelijk een ideaal is, is enigszins triviaal en zullen we daarom overslaan.
Als $E = \{e_1, \ldots, e_k\}$ een eindige verzameling is, zien we door gebruik van (R0) en (G3) dat $\langle E \rangle = \{\sum_{i=1}^{k} r_i e_i \mid r_i \in R\}$.
Middels deze definitie kunnen wij operaties op idealen definiëren. $A + B$ is het ideaal voortgebracht door alle optellingen $a + b$ en AB is het ideaal voortgebracht door alle producten ab, waarbij $a \in A$ en $b \in B$. Met behulp van (I2) en (G0) kunnen we deze verzamelingen omschrijven tot een handzamere en veel vaker gebruikte definitie:

Definitie 2.1.4 ([1], blz. 6) *Neem idealen A, B, dan definiëren wij de volgende operaties:*

i) $AB := \{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \mid n > 0,\ a_i \in A,\ b_i \in B\}$

ii) $A + B := \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$

Definitie 2.1.5 ([3], 5.1.1) *Een priemideaal P is een ideaal waarvoor geldt:*

(P0) $P \neq \langle 1 \rangle$.

(P1) *Als $ab \in P$, dan geldt $a \in P$ of $b \in P$, voor alle $a, b \in R$.*

Gevolg 2.1.6 *Neem $a, b \in R$ en priemideaal P, dan geldt:*
$ab \in P$ precies als $a \in P$ of $b \in P$.

Bewijs: De ene kant op is precies eigenschap (P1). Voor de andere kant op zien we dat eigenschap (I2) equivalent is aan: als $a \in P$ of $b \in P$, dan geldt $ab \in P$. ⊠

Definitie 2.1.7 ([3], 5.2.1) *Een maximaal ideaal M is een ideaal waarvoor geldt:*

(M0) $M \neq \langle 1 \rangle$.

(M1) *Als I een ideaal en $M \subset I$, dan geldt $I = M$ of $I = \langle 1 \rangle$.*

Lemma 2.1.8 ([3], 5.2.2) *Als M een maximaal ideaal is, dan is M ook een priemideaal.*

Bewijs: Stel M is niet een priemideaal, dus zijn er een $x, y \notin M$ zodat $xy \in M$. Dan ligt M strikt in het ideaal $M + \langle x \rangle$, dus volgt $M + \langle x \rangle = \langle 1 \rangle$. Dit geeft ons $m + rx = 1$, voor een $m \in M$ en $r \in R$. Vermenigvuldiging met y geeft ons $my + rxy = y$. Omdat $m, xy \in M$ geldt $my, rxy \in M$, dus volgt $y \in R$, maar volgens aanname geldt $y \notin R$. $\lightning$ $\boxtimes$

Het bewijs van het volgende lemma vloeit voort uit Theorem 5.4.1 van [3].

Lemma 2.1.9 *Voor elke ideaal $I \neq \langle 1 \rangle$ is er een maximaal ideaal M zodat $I \subset M$.*

Bewijs: We bewijzen dit met behulp van Zorn's Lemma. Dit zegt dat als een poset de eigenschap heeft dat elke keten een bovengrens heeft, dan heeft deze poset een maximaal element.
We definiëren een poset $(\mathcal{P}, <)$ van idealen $A \neq \langle 1 \rangle$ zodat $I \subset A$, geordend op inclusie. We zien $I \in \mathcal{P}$, dus $\mathcal{P}$ is niet leeg. Hierdoor kunnen we een niet-lege keten $C \subset \mathcal{P}$ kiezen. We bekijken $\bigcup C$ en zullen laten zien dat $\bigcup C \in \mathcal{P}$.
Neem willekeurig $I \in C$, dan geldt $0 \in I \subset \bigcup C$, dus $0 \in \bigcup C$. Stel $x, y \in \bigcup C$, dan is er een $I_1, I_2 \in C$ zodat $x \in I_1$ en $y \in I_2$. Omdat C een keten is, geldt $I_1 \subset I_2$ of $I_2 \subset I_1$. Zonder verlies van algemeenheid stellen we dat $I_1 \subset I_2$. Dan geldt $x, y \in I_2$ en dus geldt $x - y \in I_2 \subset \bigcup C$, dus $x - y \in \bigcup C$. Op zelfde wijze kunnen we zeggen dat voor elke $x \in \bigcup C$ geldt dat er een $I \in C$ is zodat voor alle $r \in R$ geldt $rx \in I \subset \bigcup C$. Voor elke $I \in C$ geldt $I \neq \langle 1 \rangle$, ofwel $1 \notin I$, dus $1 \notin \bigcup C$. $\bigcup C$ is dus een ideaal, $\bigcup C \neq \langle 1 \rangle$ en voor elke $I \in C$ geldt $A \subset I \subset \bigcup C$, dus $\bigcup C \in \mathcal{P}$.
We zien $I \subset \bigcup C$ voor elke $I \in C$, dus $\bigcup C$ is een bovengrens voor C. We zien dat we voor elke keten op soortgelijke wijze een bovengrens kunnen vinden, dus zegt Zorn's Lemma dat $\mathcal{P}$ een maximaal element M heeft. We zien dat dit precies het maximale ideaal is met $I \subset M$. $\boxtimes$

Definitie 2.1.10 ([1], blz. 4) *We noemen R een lokale ring als R één maximaal ideaal heeft.*

Definitie 2.1.11 ([1], blz. 8) *Neem een deelverzameling $E \subset R$, dan definiëren wij het radicaal, $r(E)$, van E als volgt:*

$$r(E) := \{x \in R \mid \exists k > 0 : x^k \in E\}$$

Het volgende lemma, gebaseerd op bladzijde 8 van [1], heeft een aangepast bewijs.

Lemma 2.1.12 *Voor elk ideaal I geldt dat $r(I)$ ook een ideaal is.*

Bewijs: We zien door definitie dat $I \subset r(I)$ en omdat $0 \in I$, volgt dat $0 \in r(I)$.
Stel $x \in r(I)$, dan geldt $x^n \in I$ voor een $n > 0$. We nemen $r \in R$ willekeurig en zien $(rx)^n = r^n x^n \in I$, dus $rx \in r(I)$.
Stel $x, y \in r(I)$, dan geldt $x^n, y^k \in I$, voor een $n, k > 0$. We bekijken $(x-y)^{n+k+1}$. Het Binomium van Newton geeft ons:

$$(x-y)^{n+k+1} = \sum_{i=0}^{n+k+1} N_i x^{n+k+1-i}(-y)^i \text{ , met } N_i := \binom{n+k+1}{i} \in \mathbb{N}\,.$$

Stel er is een i zodat $n+k+1-i < n$ en $i < k$, dan geldt $n+k < n+k$. $\lightning$
Dus voor alle i geldt $n+k+1-i \geq n$ of $i \geq k$, wat betekent $x^{n+k+1-i} \in I$ of $(-y)^i \in I$ (want in ieder geval één van deze elementen is een veelvoud van x^n of y^k). Dit betekent $N_i x^{n+k+1-i}(-y)^i \in I$ voor elke i en dus dat $(x-y)^{n+k+1} \in I$. $\boxtimes$

Definitie 2.1.13 ([3], 2.1.1) *Neem ringen R_1 en R_2, dan noemen we de afbeelding $f : R_1 \to R_2$ een ringhomomorfisme, als geldt:*

(H0) $f(1) = 1$.

(H1) *Als $a, b \in R_1$, dan geldt $f(a+b) = f(a) + f(b)$.*

(H2) *Als $a, b \in R_1$, dan geldt $f(ab) = f(a)f(b)$.*

Het volgende lemma is geïnspireerd op de tekst over "contraction" op bladzijde 9 van [1].

Lemma 2.1.14 *Neem ringhomomorfisme $f : R_1 \to R_2$.*
Als $I \subset R_2$ een (priem)ideaal is, dan is

$$f^{-1}(I) = \{x \in R_1 \mid f(x) \in I\} \subset R_1$$

een (priem)ideaal.

Bewijs: Stel $I \subset R$ is een ideaal. Door (H0) en (H1) volgt $1 = f(1) = f(1+0) = f(1) + f(0)$. Dit betekent $f(0) = 1 - f(1) = 0 \in I$, dus $0 \in f^{-1}(I)$.

Stel $a, b \in f^{-1}(I)$, dan geldt $f(a-b) = f(a+(-b)) = f(a) + f(-b) = f(a) - f(b) \in I$, want $f(a), f(b) \in I$ en I is een ideaal.
Stel $a \in f^{-1}(I)$ en $r \in R_1$, dan geldt $f(ra) = f(r)f(a) \in I$, op grond van vergelijkbare argumenten als hiervoor.
Stel $I \subset R$ is een priemideaal. Omdat $1 \notin I$ geldt $1 \notin f^{-1}(I)$. Stel $ab \in f^{-1}(I)$, dus $f(ab) = f(a)f(b) \in I$, dan geldt $f(a) \in I$ of $f(b) \in I$, dus $a \in f^{-1}(I)$ of $b \in f^{-1}(I)$. ⊠

Na deze belangrijke idealen rest ons nog een, voor deze scriptie, belangrijke soort ring:

2.1.2 Lokalisatie van een ring

Deze paragraaf is geïnspireerd op de eerste bladzijden van hoofdstuk 3 van [1].

We noemen $S \subset R$ een multiplicatieve gesloten deelverzameling als $1 \in S$ en S is gesloten onder vermenigvuldiging.
Vanaf nu zullen we (zonder melding) met S steeds een multiplicatieve gesloten deelverzameling van R bedoelen.

Definitie 2.1.15 *We definiëren de volgende relatie $\sim_S$ op $R \times S$:*

$$(a, s) \sim_S (b, t) \iff x(at - bs) = 0 \text{ voor een } x \in S$$

Lemma 2.1.16 *$\sim_S$ is een equivalentierelatie.*

Bewijs: $as - as = 0$ voor alle $a \in R$ en $s \in S$, dus $\sim_S$ is reflectief.
Als $x(at - bs) = 0$, dan geldt $x(bs - at) = -x(at - bs) = 0$, dus $\sim_S$ is ook symmetrisch.
Het bewijs voor transitief is minder triviaal en zullen we derhalve formeler geven. Stel $(a, s) \sim_S (b, t)$ en $(b, t) \sim_S (c, u)$, dus $x(at - bs) = y(bu - ct) = 0$ voor een $x, y \in S$. We definiëren $z := txy \in S$. Dit geeft ons:

$$\begin{aligned} z(au - cs) &= txy(au - cs) \\ &= yuxat - xsyct \\ &= yuxat - yuxbs + yuxbs - xsyct \\ &= yux(at - bs) + xsy(bu - ct) \\ &= 0\,, \end{aligned}$$

dus $(a, s) \sim_S (c, u)$ en dit geeft ons dat $\sim_S$ ook transitief is. ⊠

Definitie 2.1.17 *We definiëren met* $\frac{a}{s}$ *de equivalentieklasse van* (a, s) *onder* $\sim_S$ *en definiëren hiermee:*

$$S^{-1}R := {}^{R \times S}\!/\!_{\sim_S} = \{ \frac{a}{s} \mid a \in R,\ s \in S\}$$

Lemma 2.1.18 *De volgende optelling en vermenigvuldiging zijn in* $S^{-1}R$*, voor alle* $a, b \in R$ *en* $s, t \in S$*, goed gedefiniëerd:*

i) $\frac{a}{s} + \frac{b}{t} := \frac{at+bs}{st}$

ii) $\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} := \frac{ab}{st}$

Bewijs: We moeten bewijzen dat de operaties onafhankelijk zijn van het gekozen representant van de equivalentieklasse. Dus stel $(a, s) \sim_S (a', s')$, ofwel $x(as' - a's) = 0$ voor een $x \in S$:
`Optelling:` Er moet voor elke $(b, t) \in R \times S$ gelden: $\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{a'}{s'} + \frac{b}{t}$, ofwel $(at + bs, st) \sim_S (a't + bs', s't)$. Dit laten we zien middels de volgende vergelijking:

$$\begin{aligned} x((at + bs)s't - (a't + bs')st) &= x(t^2as' + bss't - t^2a's - bss't) \\ &= t^2x(as' - a's) \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

`Vermenigvuldiging:` Er moet voor elke $(b, t) \in R \times S$ gelden: $\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{a'}{s'} \cdot \frac{b}{t}$, ofwel $(ab, st) \sim_S (a'b, s't)$. Met de volgende vergelijking:

$$\begin{aligned} x((ab)(s't) - (a'b)(st)) &= x(btas' - bta's) \\ &= btx(as' - a's) \\ &= 0 \end{aligned}$$

hebben we dit laten zien. ⊠

Het bewijs is redelijk triviaal en zullen we hier niet behandelen, maar er geldt dat $S^{-1}R$ middels deze optelling en vermenigvuldiging een ring is, met $\frac{0}{1}$ en $\frac{1}{1}$ het nul- en eenheidselement.

Definitie 2.1.19 $S^{-1}R$ *noemen we de lokalisatie van* R *in* S*, met extra schrijfwijze voor de volgende bijzondere gevallen:*

i) Neem $a \in R$*, dan is* $S = \{a^n \mid n \geq 0\}$ *een multiplicatieve gesloten deelverzameling en schrijven we* R_a *voor* $S^{-1}R$*.*

ii) Neem priemideaal $P \subset R$*, dan is* $S = R - P$ *een multiplicatieve gesloten deelverzameling en schrijven we* R_P *voor* $S^{-1}R$*.*

2.2 Voorkennis Topologie

Lemma 2.2.2 en Definitie 2.2.3 zijn gebaseerd op een inleveropgave van het vak van [7].

Definitie 2.2.1 ([7], 2.1) *Een topologie op een verzameling X is een verzameling $\mathcal{T}$ van deelverzamelingen van X, zodat geldt:*

(T0) $\emptyset$ *en X zijn elementen van $\mathcal{T}$.*

(T1) *Elke doorsnede van twee elementen van $\mathcal{T}$ is weer een element van $\mathcal{T}$.*

(T2) *Elke vereniging van willekeurig veel elementen van $\mathcal{T}$ is weer een element van $\mathcal{T}$.*

We noemen $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte.
Een deelverzameling $U \subset X$ heet open in $(X, \mathcal{T})$ als $U \in \mathcal{T}$. Anders gezegd: als een verzameling $\mathcal{T}$ aan het bovenstaande voldoet, dan zijn de elementen van $\mathcal{T}$ de open verzamelingen in de topologische ruimte $(X, \mathcal{T})$. Een deelverzameling $V \subset X$ heet gesloten in $(X, \mathcal{T})$ als zijn complement $V^{\complement} := X - V$ open is in $(X, \mathcal{T})$.

De eigenschap (T2) kunnen we abstract definiëren als:
$\forall k \in K : U_k \in \mathcal{T} \longrightarrow \bigcup_{k \in K} U_k \in \mathcal{T}$, waarbij K een willekeurige verzameling is.
Vanaf nu zullen we zonder extra melding de symbolen $\bigcap_{k \in K}$ en $\bigcup_{k \in K}$ gebruiken als we doorsneden of verenigingen bedoelen van willekeurig veel elementen.

We merken op, omdat $U \subset X$ open is precies als $U^{\complement}$ gesloten is, dat het een keuze is om een topologie met open verzamelingen te definiëren. Om precies te zijn is $\mathcal{T}$ uit Definitie 2.2.1 een *open verzameling topologie.* We kunnen ook een topologie maken middels een verzameling $\mathcal{T}^*$ van gesloten deelverzamelingen. Hiervoor kunnen we drie equivalente axioma's maken. We zien dat $\emptyset$ en X elkaars complementen zijn, dus het eerste axioma blijft gelijk. De volgende lemma's zullen ons de overige equivalente axioma's geven:

Lemma 2.2.2 *Neem verzameling X, dan geldt:*

i) $\left(\bigcup_{k \in K} U_k\right)^{\complement} = \bigcap_{k \in K} (U_k)^{\complement}$, *voor alle $U_k \subset X$.*

ii) $\left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i\right)^{\complement} = \bigcup_{i=1}^{n} (U_i)^{\complement}$, *voor alle $n \in \mathbb{N}$.*

Bewijs i): Neem $z \in \bigcup_{k\in K} U_k$. Dan volgen de volgende equivalenties:

$$\begin{aligned}
z \in \bigcup_{k\in K} U_k &\iff \exists k \in K : z \in U_k \\
z \notin \bigcup_{k\in K} U_k &\iff \forall k \in K : z \notin U_k \\
z \in \left(\bigcup_{k\in K} U_k\right)^{\complement} &\iff \forall k \in K : z \in (U_k)^{\complement} \\
&\iff z \in \bigcap_{k\in K} (U_k)^{\complement}
\end{aligned}$$

en hebben we i) bewezen. $\boxtimes$

Bewijs ii): Dit bewijzen we middels inductie op $\mathbb{N}$:

Stel $n = 1$, dan geldt $\left(\bigcap_{i=1}^{1} U_i\right)^{\complement} = (U_1)^{\complement} = \bigcup_{i=1}^{1} (U_i)^{\complement}$.

Stel dit is waar voor alle $k < n$. We bekijken $\bigcup_{i=1}^{n} (U_i)^{\complement}$ en zien:

$$\begin{aligned}
\bigcup_{i=1}^{n} (U_i)^{\complement} &= \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} (U_i)^{\complement}\right) \cup (U_n)^{\complement} \\
&= \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} U_i\right)^{\complement} \cup (U_n)^{\complement} \\
&= \left(\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} U_i\right) \cap U_n\right)^{\complement} \\
&= \left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i\right)^{\complement},
\end{aligned}$$

waarmee we ii) hebben bewezen. $\boxtimes$

Definitie 2.2.3 *Een verzameling $\mathcal{T}^*$ van deelverzamelingen van X noemen we een gesloten verzameling topologie op X als geldt:*

(TG0) *$\emptyset$ en X zijn elementen van $\mathcal{T}^*$.*

(TG1) *Elke vereniging van twee elementen van $\mathcal{T}^*$ is weer een element van $\mathcal{T}^*$.*

(TG2) *Elke doorsnede van willekeurig veel elementen van $\mathcal{T}^*$ is weer een element van $\mathcal{T}^*$.*

Er wordt over het algemeen gewerkt met de open verzameling topologie. Wij zullen daarom vanaf nu, tenzij anders aangegeven, werken met de *open verzameling topologie*, die wij standaard zullen schrijven als $\mathcal{T}$ (voor zijn gesloten variant schrijven wij dan $\mathcal{T}^*$). Met de axioma's voor gesloten deelverzamelingen van hierboven is, waar nodig, elke volgende definitie of bewering om te schrijven naar definitie of bewering met gesloten deelverzamelingen.

Lemma 2.2.4 ([7], 2.8) *Als $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte is, dan heeft elke deelverzameling $A \subset X$ ook een eigen topologie, die gemaakt kan worden met $\mathcal{T}$.*

Bewijs: We definiëren $\mathcal{T}|_A := \{B \subset A \ : \ B = U \cap A$, met $U \in \mathcal{T}\}$ en laten zien dat $\mathcal{T}|_A$ een topologie op A is.
We nemen $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ en zien $\emptyset = \emptyset \cap A \in \mathcal{T}|_A$ en $A = X \cap A \in \mathcal{T}|_A$.
Neem $U_1, U_2 \in \mathcal{T}|_A$, dan geldt $U_1 = U_1' \cap A$ en $U_2 = U_2' \cap A$ voor een $U_1', U_2' \in \mathcal{T}$. We zien dat $U_1 \cap U_2 = U_1' \cap U_2' \cap A = (U_1' \cap U_2') \cap A \in \mathcal{T}|_A$, omdat wegens (T1) geldt dat $U_1' \cap U_2' \in \mathcal{T}$.
Neem $\bigcup\limits_{k \in K} U_k$, met $U_k \in \mathcal{T}|_A$. We kunnen wederom U_k schrijven als $U_k = U_k' \cap A$, met $U_k' \in \mathcal{T}$. Nu kunnen we de vereniging schrijven als $\bigcup\limits_{k \in K} U_k' \cap A = \left(\bigcup\limits_{k \in K} U_k' \right) \bigcap A$ en zien we door (T2) dat $\bigcup\limits_{k \in K} U_k' \in \mathcal{T}$ en dus dat $\bigcup\limits_{k \in K} U_k \in \mathcal{T}|_A$. ⊠

Definitie 2.2.5 ([7], 2.10) *We noemen $\mathcal{T}|_A$ de geïnduceerde topologie op $A \subset X$. We noemen $B \subset X$ open in A als $B \in \mathcal{T}|_A$. Als we $A \subset X$ zien als een eigen topologische ruimte, dan bedoelen we $(A, \mathcal{T}|_A)$, tenzij anders aangegeven.*

Door middel van een topologie op een verzameling kunnen we veel eigenschappen van die verzameling bekijken. We willen ook kunnen kijken naar lokale eigenschappen en hiervoor zullen we naar de omgevingen van punten moeten kijken.

Definitie 2.2.6 ([7], 2.21) *Neem de topologische ruimte $(X, \mathcal{T})$ en $x \in X$, dan definiëren wij $\mathcal{T}(x)$, de verzameling van open omgevingen van x, als de elementen van $\mathcal{T}$ waarvoor geldt dat x hier in zit, dus:*
$\mathcal{T}(x) := \{U \in \mathcal{T} \mid x \in U\}$.
Een omgeving hoeft niet open te zijn. Een verzameling $V \subset X$ is een omgeving van x als er een open omgeving is van x die in V ligt. Middels $\mathcal{T}(x)$ kunnen wij de verzameling van alle omgevingen van x definiëren als:
$\mathcal{N}(x) := \{V \subset X \mid U \subset V, \text{ voor een } U \in \mathcal{T}(x)\}$.

We zien dat $\mathcal{T}(x) \subset \mathcal{N}(x)$. Vaak is het voldoende voor lokale eigenschappen om te kijken naar de verzameling $\mathcal{T}(x)$. In veel gevallen is $\mathcal{T}(x)$ nog steeds veel groter dan nodig is. Wanneer we bedenken welke open omgevingen overbodig kunnen zijn als we naar lokale eigenschappen willen kijken, zien we dat de volgende verzameling (als we deze kunnen maken) in veel gevallen voldoende is om te bekijken:

Definitie 2.2.7 ([7], 2.30) *Neem $(X, \mathcal{T})$ en $x \in X$. We noemen $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{T}$ een lokale basis in x als geldt:*
Voor elke $U \in \mathcal{T}(x)$ is er een $B \in \mathcal{B}_x$ zodat $B \subset U$.

Met dezelfde soort argumenten als bij het definiëren van een lokale basis, willen wij ook kunnen werken met een deelverzameling van $\mathcal{T}$. Deze heet de basis van de topologische ruimte en zullen wij nu definiëren.

Definitie 2.2.8 ([7], 2.47) *Neem $(X, \mathcal{T})$. We noemen $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ een basis voor de topologische ruimte $(X, \mathcal{T})$ als elke $U \in \mathcal{T}$ geschreven kan worden als vereniging van elementen van $\mathcal{B}$.*

Lemma 2.2.9 ([7], blz. 41) *Neem $(X, \mathcal{T})$, dan geldt: $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ is een basis voor $(X, \mathcal{T})$ precies als voor elke $x \in X$ de verzameling*

$$\mathcal{B}(x) := \{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}$$

een lokale basis in x is.

Bewijs: Stel $\mathcal{B}$ is een basis voor $(X, \mathcal{T})$. Neem een $x \in X$ en $U \in \mathcal{T}(x)$ willekeurig. Door aanname is er een $\{B_k\}_{k \in K} \subset \mathcal{B}$ zodat $U = \bigcup_{k \in K} B_k$. Vanwege dit laatste is er een $i \in K$ zodat $x \in B_i$. We zien dat $B_i \in \mathcal{B}(x)$ en $B_i \subset U$, dus $\mathcal{B}(x)$ is een lokale basis in x voor alle $x \in X$.
Stel $\mathcal{B}(x)$ is een lokale basis in x voor elke $x \in X$. Neem een $U \in \mathcal{T}$ willekeurig. Voor elke $y \in U$ geldt dat $U \in \mathcal{T}(y)$. Door aanname kunnen we voor elke $y \in U$ een $B_y \in \mathcal{B}(y)$ kiezen zodat $B_y \subset U$. We zien dat de vereniging van al deze elementen gelijk is aan U. Door definitie geldt $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{B}$ voor alle $x \in X$, dus hebben we laten zien dat U geschreven kan worden als vereniging van elementen van $\mathcal{B}$. ⊠

Een deelverzameling $A \subset X$ hoeft noch open, noch gesloten te zijn. Wel kunnen we kijken naar de open deelverzamelingen die in A bevat zitten, of naar de gesloten deelverzamelingen waar A in bevat is. Voor deze scriptie is het voldoende om alleen een definitie voor dit laatste geval te geven.

Definitie 2.2.10 ([7], 2.36) *Neem $(X, \mathcal{T})$ en $A \subset X$. Wij noemen $\overline{A}$, de kleinste gesloten verzameling waar A in zit, de afsluiting van A en kunnen deze op de volgende wijze definiëren:*

$$\overline{A} := \bigcap \{V \mid V \in \mathcal{T}^* \text{ en } A \subset V\}$$

NB: De volgende definitie en het lemma erna zijn geïnspireerd op opgave 19 op bladzijde 13 van [1].
Wij zullen vaak kijken naar elementen van $\mathcal{T}^*$ en hiervoor is de volgende definitie van belang:

Definitie 2.2.11 *We noemen $V \in \mathcal{T}^*$ reducibel als er twee gesloten strikte deelverzamelingen A, B van V zijn, zodat $V = A \cup B$.*

Hiermee bedoelen we dus dat A en B elementen van de geïnduceerde gesloten topologie $\mathcal{T}^*|_V$ zijn en ongelijk aan V zelf. Voor het gemak zullen we in deze schrijfstijl het volgende lemma schrijven:

Lemma 2.2.12 *$V \in \mathcal{T}^*$ is irreducibel precies als $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ voor alle niet-lege $U_1, U_2 \in \mathcal{T}|_V$.*

Bewijs: In $(V, \mathcal{T}|_V)$ geldt $\emptyset^{\complement} = V$ en Lemma 2.2.2 zegt ons dat $(U_1)^{\complement} \cup (U_2)^{\complement} = (U_1 \cap U_2)^{\complement}$. Per definitie geldt dat het kiezen van een niet-lege open deelverzameling equivalent is aan het kiezen van een gesloten strikte deelverzameling. Dit betekent dat de eigenschap

$$U_1 \cap U_2 \neq \emptyset, \text{ voor alle niet-lege } U_1, U_2 \in \mathcal{T}|_V$$

equivalent is aan: $V_1 \cup V_2 \neq V$, voor alle gesloten strikte deelverzamelingen V_1, V_2 van V, ofwel dat V irreducibel is. ⊠

Definitie 2.2.13 ([7], 4.14) *Neem $(X, \mathcal{T})$. We noemen $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$ een open overdekking van $U \subset X$ als $U = \bigcup \mathcal{U}$.*

Definitie 2.2.14 ([7], 4.14) *We noemen $(X, \mathcal{T})$ quasi-compact als elke open overdekking $\mathcal{U}$ van X een eindige deelverzameling $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ heeft, zodat $X = \bigcup \mathcal{V}$.*

Hoofdstuk 3

Het spectrum van een ring

3.1 Definitie

Deze paragraaf en de volgende zijn geïnspireerd op opgave 15 op bladzijde 12 van [1].

Voor elke ring R kunnen we een verzameling maken van alle priemidealen van R. Deze verzameling noemen we het spectrum van R en schrijven we als $\mathrm{Spec}(R)$. We kunnen hierdoor een priemideaal P nu op twee manieren interpreteren: als element van $\mathrm{Spec}(R)$ of als deelverzameling van R. Later zullen we van $\mathrm{Spec}(R)$ een topologische ruimte maken, waardoor we met priemidealen zelfs punten kunnen bedoelen. Daarom zullen we vanaf nu $[P]$ schrijven als we priemideaal P als element bedoelen. Hiermee kunnen we nu $\mathrm{Spec}(R)$ formeel als volgt definiëren:

$$\mathrm{Spec}(R) := \{[P] \mid P \subset R \text{ is een priemideaal}\}$$

Voor een later doeleinde definiëren we hier nog een deelverzameling van $\mathrm{Spec}(R)$, namelijk $\mathrm{Max}(R)$: de verzameling van maximale idealen van R.

Als we schrijven over eigenschappen van $\mathrm{Spec}(R)$ waarbij wij niets zeggen over de ring R, betekent dit dat dit voor elke commutatieve ring R met $1 \neq 0$ geldt.

Wanneer we terugkijken naar Lemma 2.1.14, kunnen we dit anders formuleren zodat dit meer betrekking heeft tot het spectrum van een ring:

Lemma 3.1.1 *Met elk ringhomomorfisme $f : R_1 \longrightarrow R_2$ kunnen we het volgende ringhomomorfisme maken:*

$$f^* : \mathrm{Spec}(R_2) \longrightarrow \mathrm{Spec}(R_1), \quad [P] \longmapsto [f^{-1}(P)]$$

3.2 De Zariski topologie op het spectrum

Definitie 3.2.1 *Neem $E \subset R$, dan definiëren wij $V(E)$ als de verzameling van priemidealen die E bevatten:*

$$V(E) := \{P \mid [P] \in \mathrm{Spec}(R),\ E \subset P\}$$

Als $E = \{x\}$, dan zullen we voor het gemak $V(x)$ schrijven, in plaats van $V(\{x\})$.

Gevolg 3.2.2 *$V(B) \subset V(A)$, voor alle $A \subset B \subset R$.*

Bewijs: Voor elke $[P] \in V(B)$ geldt $P \supset B \supset A$, dus $[P] \in V(A)$. ⊠

We zullen laten zien dat we middels deze $V(E)$'s van $\mathrm{Spec}(R)$ een topologische ruimte kunnen maken. Dit kunnen we aantonen wanneer we gebruik maken van de volgende eigenschap van $V(E)$:

Lemma 3.2.3 *Neem $E \subset R$ en $I := \langle E \rangle$, dan geldt:*

$$V(E) = V(I) = V(r(I))$$

Bewijs: We zien middels Definitie 2.1.3 en 2.1.11 dat $E \subset I \subset r(I)$, dus zegt Gevolg 3.2.2 dat $V(r(I)) \subset V(I) \subset V(E)$.
Neem $[P] \in V(E)$ willekeurig, dan geldt $E \subset P$. Stel $z \in r(I)$, dan geldt $z^k = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i$ voor een $k, n > 0$, met $r_i \in R$ en $x_i \in E \subset P$. Hierdoor geldt voor elke i dat $r_i x_i \in P$ en volgt dat de sommatie hiervan ook tot P behoort. Omdat $z^k \in P$, volgt $z \in P$. Dus $r(I) \subset P$, voor elke $[P] \in V(E)$, dus $V(E) \subset V(r(I))$. Samen geeft dit $V(E) = V(I) = V(r(I))$. ⊠

Stelling 3.2.4 *De verzameling $\mathcal{T}_z^* := \{V(E) \mid E \subset R\}$ voldoet aan de axioma's van Definitie 2.2.3.*

Bewijs (TG0): We gebruiken hiervoor $\{0\}$ en $\langle 1 \rangle$. Er geldt $0 \in P$ voor alle $[P] \in \mathrm{Spec}(R)$, dus $\mathrm{Spec}(R) = V(0) \in \mathcal{T}_z^*$.
Eigenschap (P0) zegt ons dat elk priemideaal strikt in $\langle 1 \rangle$ ligt, dus géén element van $\mathrm{Spec}(R)$ zit in de verzameling $V(1)$, dus $\emptyset = V(1) \in \mathcal{T}_z^*$. ⊠
Bewijs (TG1): We merken op dat door definitie geldt dat het willekeurig kiezen van een element van $\mathcal{T}_z^*$ equivalent is aan het willekeurig kiezen van een deelverzameling van R, dus we nemen $V(E_1), V(E_2) \in \mathcal{B}^z$ met $E_1, E_2 \subset R$ willekeurig.

We definiëren $A := \langle E_1 \rangle$ en $B := \langle E_2 \rangle$ en zien dat we vanwege Lemma 3.2.3 verder kunnen werken met $V(A)$ en $V(B)$.
We zien dat $A \cap B$ bevat is in zowel A als B, dus geldt $V(A), V(B) \subset V(A \cap B)$ (Gevolg 3.2.2). Dit geeft ons $V(A) \cup V(B) \subset V(A \cap B)$.
Stel $[P] \notin V(A) \cup V(B)$, dus $A, B \not\subseteq P$. Dan is er een $a \in A$ en $b \in B$ zodat $a, b \notin P$. We nemen $y = ab$ en zien door (I2) en de contrapositie van (P1) dat $y \in A \cap B$ en $y \notin P$. Dit tegenvoorbeeld geeft ons $A \cap B \not\subseteq P$, dus $[P] \notin V(A \cap B)$.
Samengevoegd geeft dit $V(A) \cup V(B) = V(A \cap B) \in \mathcal{T}_z^*$. ⊠
Bewijs (TG2): We zullen hier bewijzen dat geldt $\bigcap\limits_{k \in K} V(E_k) = V(\bigcup\limits_{k \in K} E_k)$.
Stel $[P] \in \bigcap\limits_{k \in K} V(E_k)$, dan geldt $E_k \subset P$ voor elke k, dus geldt $\bigcup\limits_{k \in K} E_k \subset P$ en volgt $[P] \in V(\bigcup\limits_{k \in K} E_k)$.
Stel $[P] \in V(\bigcup\limits_{k \in K} E_k)$, dan geldt $\bigcup\limits_{k \in K} E_k \subset P$, dus $E_k \subset P$ voor elke k en volgt $[P] \in \bigcap\limits_{k \in K} V(E_k)$. Samen geeft dit $\bigcap\limits_{k \in K} V(E_k) = V(\bigcup\limits_{k \in K} E_k) \in \mathcal{T}_z^*$. ⊠

Definitie 3.2.5 *De gesloten verzameling topologie $\mathcal{T}_z^*$ heet de Zariski topologie op* Spec(R).

Vanaf nu zullen we steeds alleen Spec(R) schrijven, waarmee we bedoelen: Spec(R) met de Zariski topologie.

3.3 Eigenschappen van Spec(R)

De Zariski topologie op het spectrum van een ring is een bijzondere topologie. Allereerst is het een gesloten topologie in plaats van een open. De reden hiervoor vinden we wanneer we nogmaals kijken naar Lemma 3.2.3: we zien dat we $\mathcal{T}_z^*$ ook kunnen maken door alleen gebruik te maken van de idealen van R! De verzameling van alle idealen van R is in veel gevallen veel eenvoudiger te maken/formuleren dan de machtsverzameling $\mathcal{P}(R)$; de verzameling van alle deelverzamelingen van R (zie [6], 1.1.5). Dit maakt het veel gemakkelijker om $\mathcal{T}_z^*$ te maken.
We zullen nu, zonder bewijzen, een voorbeeld geven om te verklaren wat we met "gemakkelijker" bedoelen. We nemen hiervoor de ring $\mathbb{Z}$ van gehele getallen. Hiervoor geldt dat $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ een overaftelbaar oneindig grote verzameling is en er geen bijectie bestaat tussen $\mathbb{Z}$ en $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ (zie [6], 1.1.5, 1.1.7), terwijl $\mathcal{I} = \{\langle n \rangle \mid n \geq 0\}$ de verzameling van idealen van $\mathbb{Z}$ is (zie [3], 2.3.2) en deze is aftelbaar oneindig groot, dus er is zelfs een bijectie tussen $\mathbb{Z}$ en $\mathcal{I}$ (zie [6], 1.1.1).

3.3.1 Spec(R) en de scheidingsaxioma's

Deze paragraaf is geïnspireerd op de opgaven op bladzijde 12, 13 en 14 van [1].

Een andere bijzondere eigenschap is wanneer we puur naar een punt in Spec(R) kijken:

Lemma 3.3.1 ([1], opg. 18) *$\{[P]\}$ is gesloten in* Spec(R) *precies wanneer P een maximaal ideaal is.*

Bewijs: Als $\{[P]\}$ gesloten is, betekent dit $V(E) = \{[P]\}$ voor een $E \subset R$. Stel P is geen maximaal ideaal, dan zegt Lemma 2.1.8 en 2.1.9 dat er een $[P'] \in \text{Spec}(R)$ is, zodat $P \subsetneq P'$ (dus in het bijzonder geldt $[P] \neq [P']$), maar dat zou betekenen dat $[P'] \in V(E) = \{[P]\}$, ofwel $[P'] = [P]$. $\lightning$
Stel P is een maximaal ideaal, dan geldt $P \nsubseteq P'$ voor alle $[P'] \in \text{Spec}(R)$, met $[P'] \neq [P]$. Dit betekent $[P'] \notin V(P)$ voor alle $[P'] \neq [P]$, dus $V(P) = \{[P]\}$, wat betekent dat $\{[P]\}$ gesloten is. $\boxtimes$

Dit lemma laat zien dat een punt niet altijd gesloten hoeft te zijn in Spec(R), iets wat vaak bij topologieën wèl het geval is. Als een punt niet gesloten is, dan hoeven we nog steeds alleen P te gebruiken als we naar de afsluiting van $\{[P]\}$ willen kijken, want $\overline{\{[P]\}}$ is de kleinste $V(E) \in \mathcal{T}_z^*$ zodat $\{[P]\} \subset V(E)$. Dit is equivalent aan het zo groot mogelijk maken van $E \subset R$, zodat $E \subset P$. We zien dat dit betekent dat $\overline{\{[P]\}} = V(P)$.
Als niet elk punt gesloten is in deze topologie, dan kunnen wij ons afvragen of twee disjuncte punten in Spec(R) wel topologisch te onderscheiden zijn. Twee punten $x, y \in X$ zijn topologisch ononderscheidbaar als ze precies dezelfde omgevingen hebben, dus als $\mathcal{N}_x = \mathcal{N}_y$. Vanaf hier zijn er scheidingsaxioma's die, van zwak tot sterk, aangeven hoe goed een topologische ruimte disjuncte punten kan onderscheiden. Het zwakste scheidingsaxioma, bekend als T_0, zegt dat elke twee disjuncte punten x, y in X topologisch te onderscheiden zijn. Dit betekent voor alle $x, y \in X$ met $x \neq y$, dat $\mathcal{N}_x \neq \mathcal{N}_y$, wat equivalent is aan:

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_x \neq \mathcal{N}_y &\iff \mathcal{N}_x \nsubseteq \mathcal{N}_y \text{ of } \mathcal{N}_y \nsubseteq \mathcal{N}_x \\
&\iff \exists U_x \in \mathcal{N}_x : U_x \notin \mathcal{N}_y \text{ of } \exists U_y \in \mathcal{N}_y : U_y \notin \mathcal{N}_x \\
&\iff \exists U_x \in \mathcal{N}_x : y \notin U_x \text{ of } \exists U_y \in \mathcal{N}_y : x \notin U_y
\end{aligned}$$

Lemma 3.3.2 ([1], opg. 18) Spec(R) *is een* T_0*-ruimte.*

Bewijs: Stel $[P_1] \neq [P_2]$. Dit betekent $P_1 \neq P_2$, dus $P_1 \not\subseteq P_2$ of $P_2 \not\subseteq P_1$. Zonder verlies van algemeenheid, stel $P_1 \not\subseteq P_2$.
Als $[P_2] \in \overline{\{[P_1]\}} = V(P_1)$, dan geldt $P_1 \subset P_2$. Dit betekent dat als $P_1 \not\subseteq P_2$, dan geldt $[P_2] \notin V(P_1) \in \mathcal{N}_{[P_1]}$. ⊠

Het opvolgend scheidingsaxioma, bekend als T_1, zegt dat elke twee disjuncte punten x, y in X topologisch te scheiden zijn. Dit betekent dat $\mathcal{N}_x \not\subseteq \mathcal{N}_y$ én $\mathcal{N}_y \not\subseteq \mathcal{N}_x$, ofwel er is een $U_x \in \mathcal{N}_x$ zodat $y \notin U_x$ en er is een $U_y \in \mathcal{N}_y$ zodat $x \notin U_y$.

Lemma 3.3.3 *X is een T_1-ruimte precies als $\{x\}$ gesloten is voor alle $x \in X$.*

Bewijs: Stel $\{x\}$ is gesloten, voor alle $x \in X$. Stel $x, y \in X$ zijn disjunct, dan volgt $\{x\} \neq \{y\}$. We nemen $U_x = \{y\}^\complement \in \mathcal{T}(x)$ en $U_y = \{x\}^\complement \in \mathcal{T}(y)$ en zien dat dit twee omgevingen zijn om te gebruiken voor het T_1 axioma, dus is X een T_1-ruimte.
Stel X is een T_1-ruimte. Stel $x, y \in X$ zijn disjunct, dan geldt $y \notin U_x$ en $x \notin U_y$ voor een $U_x \in \mathcal{N}_x$ en $U_y \in \mathcal{N}_y$. Door definitie van omgevingen betekent dit dat er een $U'_x \in \mathcal{T}(x)$ en $U'_y \in \mathcal{T}(y)$ is zodat $U'_x \subset U_x$ en $U'_y \subset U_y$. We zien nu dat het equivalent is om bij het axioma T_1 te eisen dat de omgevingen open zijn.
We fixeren een $x \in X$. Vanwege bovenstaand volgt, als X een T_1-ruimte is, dat voor alle $y \in X$ met $y \neq x$ geldt dat er een $U_y \in \mathcal{T}(y)$ is zodat $x \notin U_y$. We definiëren $U := \{U_y \mid U_y \in \mathcal{T}(y) \text{ en } y \neq x \text{ en } x \notin U_y\}$ en zien dat $U = \{x\}^\complement$ en U is open, dus $\{x\}$ is gesloten. ⊠

Middels Lemma 3.3.1 zien we dat dit het volgende oplevert voor de Zariski topologie:

Gevolg 3.3.4 Spec(R) *is een* T_1*-ruimte precies als* P *een maximaal ideaal is, voor alle* $[P] \in \text{Spec}(R)$*, ofwel precies als* Spec(R)=Max(R).

Omdat dit natuurlijk niet altijd het geval is betekent dit dat Spec(R) niet altijd een T_1-ruimte is. We zullen nu een voorbeeld geven van een ring zodat Spec(R) wel een T_1-ruimte is.

Voorbeeld van een T_1-ruimte
We nemen ring B_n met de eigenschap dat $x^n = x$ voor alle $x \in B_n$, met $n \in \mathbb{N}_{>1}$. Hier valt een bijzondere en welbekende ring onder die wij later extra aandacht zullen geven. We beweren dat $\mathrm{Spec}(B_n)$ een T_1-ruimte is.
We nemen $[P] \in \mathrm{Spec}(B_n)$. Stel P is geen maximaal ideaal, dan zegt Lemma 2.1.9 dat er een maximaal ideaal M is zodat $P \subsetneq M$, dus er is een $x \in M$ zodat $x \notin P$. Hiervoor geldt $x(x^{n-1} - 1) = x^n - x = 0 \in P$. Door aanname moet dan gelden dat $x^{n-1} - 1 \in P$, wat betekent dat $x^{n-1}, x^{n-1} - 1 \in M$. Maar dan volgt $1 = x^{n-1} - (x^{n-1} - 1) \in M$, wat in tegenstrijd is met eigenschap (M0). $\lightning$ $\diamondsuit$

Het bijzondere geval van de ring B_n is voor $n = 2$. De ring $B := B_2$ heet de Boolese ring en deze bevat nog veel andere mooie eigenschappen, waaronder zelfs de eigenschappen voor een T_2-ruimte! Voordat we gaan kijken naar dit opvolgende scheidingsaxioma, is het beter om eerst enkele andere interessante eigenschappen van $\mathrm{Spec}(R)$ te vergaren. Om te beginnen, omdat wij ook willen werken met $\mathcal{T}_z$, willen wij kijken naar de complementen van de elementen van $\mathcal{T}_z^*$. Het volgende lemma maakt het eenvoudiger om te werken met deze $\mathcal{T}_z$. Hierbij definiëren we voor elke $E \subset R$, X_E als het complement van $V(E)$ in $\mathrm{Spec}(R)$, waarbij we voor het gemak X_a zullen schrijven in plaats van $X_{\{a\}}$. Formeel geeft dit, voor elke $E \subset R$:

$$X_E := \{[P] \in \mathrm{Spec}(R) \mid E \nsubseteq P\}$$

Waar nodig, zullen we X_E^R schrijven in plaats van X_E, als we duidelijk willen aangeven dat X_E een verzameling van elementen van $\mathrm{Spec}(R)$ is.

Lemma 3.3.5 ([1], opg. 17) $\mathcal{B}^z := \{X_a \mid a \in R\}$ *is een basis voor* $\mathrm{Spec}(R)$.

Bewijs: Neem willekeurig $E \subset R$, dan definiëren we Y als het complement van $V(E)$. Dit geeft ons een willekeurig element van $\mathcal{T}_z$.
`Claim:` $Y = \bigcup\limits_{a \in E} X_a$.
Stel $[P] \in Y$, dan geldt $E \nsubseteq P$, dus er is een $z \in E$ waarvoor geldt $z \notin P$. Dit zegt ons dat $[P] \in X_z$, dus $Y \subset \bigcup\limits_{a \in E} X_a$.
Stel $[P] \in \bigcup\limits_{a \in E} X_a$, dus $[P] \in X_z$ voor een $z \in E$. Deze z gebruiken we om te concluderen dat $E \nsubseteq P$, dus $[P] \in Y$. Onze claim is waar en we zien dat elk element van $\mathcal{T}_z$ te schrijven is als vereniging van elementen van $\mathcal{B}^z$. $\boxtimes$

Middels deze basis kunnen we gaan kijken naar eigenschappen van overdekkingen van $\mathrm{Spec}(R)$. Een heel belangrijke is het volgende lemma:

Lemma 3.3.6 ([1], opg. 17) Spec(R) *is quasi-compact.*

Bewijs: Omdat elke open deelverzameling te maken is middels de basis $\mathcal{B}^z$, is het voldoende om te kijken naar een willekeurige open overdekking van elementen van $\mathcal{B}^z$. Dus we definiëren $\mathcal{U} = \{X_{a_k} \mid k \in K\}$. Met Lemma 2.2.2 en de bewezen claim van het bewijs voor (TG2) kunnen wij het volgende zeggen:

$$\begin{aligned}\left(\bigcup_{k\in K} X_{a_k}\right)^{\complement} &= \bigcap_{k\in K} (X_{a_k})^{\complement} \\ &= \bigcap_{k\in K} V(a_k) \\ &= V(\bigcup_{k\in K} a_k)\,.\end{aligned}$$

Dit geeft ons: $\mathrm{Spec}(R) = \bigcup \mathcal{U} = \left(V(\bigcup\limits_{k\in K} a_k)\right)^{\complement} = X_{\{a_k \ \mid\ k\in K\}}$, dus $\{a_k \mid k \in K\} \nsubseteq P$ voor alle $[P] \in \mathrm{Spec}(R)$. We definiëren $I := \langle\{a_k \mid k \in K\}\rangle$; het ideaal voortgebracht door $\{a_k \mid k \in K\}$.
`Claim 1:` $I = \langle 1\rangle$.
Neem $[P] \in \mathrm{Spec}(R)$, dan geldt $a_k \notin P$ voor een $k \in K$. Omdat $P \neq \langle 1\rangle$, is er een $r \in R$ zodat $r \notin P$. Dan volgt met (P1) dat $a_k r \notin P$. We zien dat we een dergelijk tegenvoorbeeld kunnen maken voor elk priemideaal, dus geldt $I \nsubseteq P$ voor alle $[P] \in \mathrm{Spec}(R)$.
Stel $I \neq \langle 1\rangle$, dan zegt Lemma 2.1.9 dat er een maximaal ideaal M is, zodat $I \subset M$. Lemma 2.1.8 zegt ons dat $M \in \mathrm{Spec}(R)$, maar er geldt $I \nsubseteq P$ voor alle $[P] \in \mathrm{Spec}(R)$. $\lightning$
Omdat $I = \langle 1\rangle$, volgt dat $1 \in I$ en door Definitie 2.1.3 betekent dit dat $\sum\limits_{j\in J} r_j a_j = 1$, voor een eindige deelverzameling $J \subset K$ en $r_j \in R$. Dit betekent weer dat $\langle\{a_j \mid j \in J\}\rangle = \langle 1\rangle$. Dit kunnen we, middels bovenstaand, weer terugredeneren tot een eindige deelverzameling van $\mathcal{U}$ die Spec(R) overdekt:

$$\mathrm{Spec}(R) = V(1)^{\complement} = V(\{a_j \mid j \in J\})^{\complement} = \left(V(\bigcup_{j\in J} a_j)\right)^{\complement} = \bigcup_{j\in J} X_{a_j}. \qquad \boxtimes$$

Nu we letterlijk en figuurlijk een fijne basis hebben voor $\mathcal{T}_z$ en weten dat Spec(R) een quasi-compacte ruimte is, kunnen we gaan kijken naar het opvolgend scheidingsaxioma, T_2. Een T_2-ruimte staat vooral bekend als een Hausdorff-ruimte. Het Hausdorff-axioma is sterker dan T_1, omdat nu moet gelden dat twee disjuncte punten x, y in X topologisch met *omgevingen* te scheiden moet zijn. Dit betekent dat niet alleen moet gelden dat er een $U_x \in \mathcal{T}(x)$ en $U_y \in \mathcal{T}(y)$ zodat $y \notin U_x$ en $x \notin U_y$, maar dat deze twee open omgevingen ook nog disjunct moeten zijn.

Voorbeeld van een Hausdorff-ruimte ([1], opg. 23)
We zullen nu kijken naar het bijzondere geval van de Boolese ring, B, en zullen laten zien dat dit een Hausdorff-ruimte is. Om dit te bewijzen, moeten we eerst enkele andere eigenschappen bewijzen.
`Claim 1:` X_a en X_{a-1} zijn elkaars complementen, voor alle $a \in B$.
Stel $[P] \in X_a$ voor een $[P] \in \mathrm{Spec}(B)$. Omdat $0 = a(a-1) \in P$, volgt $a - 1 \in P$, dus $[P] \notin X_{a-1}$. Met dezelfde argumenten geldt ook dat als $[P] \in X_{a-1}$, dat $[P] \notin X_a$. Samen geeft dit $X_a = (X_{a-1})^{\complement}$.
`Claim 2:` Als voor alle $a \in B$ geldt dat $X_a \notin \mathcal{T}([P_1])$ of $X_{a-1} \notin \mathcal{T}([P_2])$, dan geldt $[P_1] = [P_2]$.
Eerst merken we door claim 1 op dat $X_a \in \mathcal{T}([P_1])$ precies als $X_{a-1} \notin \mathcal{T}([P_1])$. Stel $X_a \notin \mathcal{T}([P_1])$ of $X_{a-1} \notin \mathcal{T}([P_2])$, voor alle $a \in B$. We nemen een $a \in B$. Zonder verlies van algemeenheid, stel $X_a \notin \mathcal{T}([P_1])$. Dan volgt $X_{a-1} \in \mathcal{T}([P_2])$, want $X_a \notin \mathcal{T}([P_1])$ en $X_{a-1} \notin \mathcal{T}([P_2])$ is equivalent aan $X_{a-1} \in \mathcal{T}([P_1])$ en $X_a \in \mathcal{T}([P_2])$ en dit kan volgens onze aanname niet. Dus we hebben als $X_a \notin \mathcal{T}([P_1])$ dan $X_{a-1} \in \mathcal{T}([P_2])$, wat weer equivalent is aan: als $X_a \notin \mathcal{T}([P_1])$ dan $X_a \notin \mathcal{T}([P_2])$, wat weer equivalent is aan: als $a \in P_1$ dan $a \in P_2$, dus $P_1 \subset P_2$. Omdat $\mathrm{Spec}(B)$ een T_1-ruimte is, geldt dat P_1 en P_2 beide maximaal zijn. Dit betekent $P_1 = P_2$, dus $[P_1] = [P_2]$.
De contrapositie van claim 2 geeft ons nu: als $[P_1] \neq [P_2]$, dan is er een $a \in B$ zodat $X_a \in \mathcal{T}([P_1])$ en $X_{a-1} \in \mathcal{T}([P_2])$. Omdat deze twee open omgevingen elkaars complementen zijn, geldt dat ze disjunct zijn. ♢

Voorbeeld Boolese ring
Een mooi voorbeeld van een Boolese ring is de machtsverzameling van een willekeurige verzameling X. $\mathcal{P}(X)$ is een ring als we de volgende operaties toevoegen:

i) $A + B := (A - B) \cup (B - A)$

ii) $A \cdot B := A \cap B$

Dit geeft ons $\emptyset$ als het nulelement en X als het eenheidselement. We zien dat voor elke $A \in \mathcal{P}(X)$ geldt dat $A^2 = A$ en dat $\mathcal{P}(X)$ inderdaad een Boolese ring is. ♢

3.3.2 Een aantal overige eigenschappen

Wanneer we terugkijken naar Definitie 2.1.11 en we nemen een deelverzameling $E \subset R$, kunnen we middels Zorn's Lemma het volgende zeggen:

Propositie 3.3.7 ([1], 1.14) $r(E) = \bigcap\{P \mid [P] \in V(E)\}$.

Bewijs: NB: dit bewijs is aangepast en verschilt nu wezenlijk van die van [1].
Stel $x \in r(E)$, dan geldt $x^n \in E$ voor een $n > 0$. Voor elke $[P] \in \text{Spec}(R)$ met $E \subset P$ geldt $x^n \in P$ en vanwege (P1) geldt dan $x \in P$. Dit geeft $x \in \bigcap\{P \mid [P] \in \text{Spec}(R),\ E \subset P\}$.
Voor het tweede deel kijken wij naar het complement van $r(E)$.
Stel $z \notin r(E)$, dan geldt $z^n \notin E$ voor alle $n > 0$. We zullen nu bewijzen dat er een $[P] \in \text{Spec}(R)$ is zodat $E \subset P$ en $z \notin P$, waardoor geldt $z \notin \bigcap\{P \mid [P] \in \text{Spec}(R),\ E \subset P\}$.

Hiervoor bekijken we de poset $(\mathcal{P}, <)$ van idealen I zodat $z^n \notin I$ voor alle $n > 0$, geordend op inclusie. Vanwege Lemma 2.1.12 en het feit dat $z \notin r(E)$, geldt dat $z \notin r(\langle E \rangle)$ en dus dat $\mathcal{P}$ niet leeg is. Hierdoor kunnen we een niet-lege keten $C \subset \mathcal{P}$ kiezen. We bekijken $\bigcup C$ en zullen laten zien dat $\bigcup C \in \mathcal{P}$.
Dat $\bigcup C$ een ideaal is gaat op precies dezelfde wijze als bij het bewijs van Lemma 2.1.9.
Stel $z^n \in \bigcup C$ voor een $n > 0$, dan is er een $I \in C$ zodat $z^n \in I$, maar $I \in \mathcal{P}$ dus geldt $z^n \notin I$. $\lightning$ Dus zo'n $n > 0$ bestaat niet, dus $z^n \notin \bigcup C$ voor alle $n > 0$. Dit samen geeft ons dat $\bigcup C \in \mathcal{P}$.
Nu kunnen we op gelijke wijze als bij Lemma 2.1.9, middels $\bigcup C$, concluderen dat $\mathcal{P}$ een maximaal element P heeft.
We zullen nu bewijzen dat P een priemideaal is door middel van een contradictie. Stel P is niet een priemideaal. Dan zijn er $x, y \notin P$ waarvoor geldt $xy \in P$. We fixeren deze x en y en definiëren nu $A \subset R$ als volgt: $A := \{a \in R \mid ax \in P\}$.

`Claim:` A is een ideaal en P is een strikte deelverzameling van A.
$0 \cdot x = 0 \in P$, dus $0 \in A$. Stel $a, b \in A$, dan geldt $ax, bx \in P$ en omdat P een ideaal is geldt $(a+b)x = ax + bx \in P$, dus $a + b \in A$. Ook geldt als $ax \in P$, dat $(ra)x = r(ax) \in P$ voor elke $r \in R$. Dus $ra \in A$, voor elke $a \in A$ en $r \in R$. Samengevoegd voldoet A aan de eigenschappen van een ideaal, dus A is een ideaal.
Vanwege (I2) geldt $px \in P$ voor alle $p \in P$, dus $P \subset A$. Vanwege onze aanname geldt $y \notin P$ en $xy \in P$. Dit tegenvoorbeeld laat zien dat P een strikte deelverzameling is van A.

Omdat P het maximale element van $\mathcal{P}$ is en $P \subsetneq A$, geldt dat $A \notin \mathcal{P}$. Omdat A wel een ideaal is, betekent dit dat de andere eigenschap van de elementen van $\mathcal{P}$ niet moet gelden voor A. Dit zegt ons dat $z^k \in A$, voor een $k > 0$.
Omdat $P \in \mathcal{P}$, geldt $z^k \notin \mathcal{P}$. We definiëren nu $B := \{b \in R \mid bz^k \in P\}$ en kunnen met dezelfde stappen als hierboven concluderen dat B een ideaal is. Omdat $z^k \in A$, geldt $xz^k \in P$ en kunnen we x op soortgelijke wijze als hierboven gebruiken om te concluderen dat $P \subsetneq B$ en dat daarom $B \notin \mathcal{P}$, dus dat $z^t \in B$ voor een $t > 0$. Dit betekent dat $z^{t+k} = z^t z^k \in P$, maar $z^n \notin P$ voor alle $n > 0$. $\lightning$
Middels deze contradictie is bewezen dat $P \in \mathcal{P}$ een priemideaal is. Omdat $z^n \notin P$ voor alle $n > 0$, geldt in het bijzonder dat $z \notin P$. Dit tegenvoorbeeld geeft ons $z \notin \bigcap\{P \mid [P] \in \mathrm{Spec}(R),\ E \subset P\}$. ⊠

Gevolg 3.3.8 $r(0) = \bigcap\{P \mid [P] \in \mathrm{Spec}(R)$.

Lemma 3.3.9 ([1], opg. 19) *$V(E)$ is irreducibel precies als $r(E) \in \mathrm{Spec}(R)$.*

Bewijs: Zoals Definitie 2.2.5 vermeldt bedoelen we hier dus $V(E)$ met de geïnduceerde topologie $\mathcal{T}^z|_{V(E)}$, dus elke open deelverzameling $U \subset V(E)$ is te schrijven als $X_{E'} \cap V(E)$ voor een $E' \subset R$. We merken op dat het wederom genoeg is om hierbij te kijken naar de basis $\mathcal{B}^z \subset \mathcal{T}^*_z$.
Stel $V(E)$ is irreducibel, dan zegt Lemma 2.2.12 en bovenstaand dat dit equivalent is aan:

$$\forall\, a, b \in R :\ (X_a \cap V(E)), (X_b \cap V(E)) \neq \emptyset \implies (X_a \cap X_b) \cap V(E) \neq \emptyset$$

Middels Gevolg 2.1.6 kunnen we de volgende equivalenties schrijven:

$$\begin{aligned}
[P] \in X_a \cap X_b &\iff [P] \in X_a \text{ en } [P] \in X_b \\
&\iff a, b \notin P \\
&\iff ab \notin P \\
&\iff [P] \in X_{ab}
\end{aligned}$$

Dus $X_a \cap X_b = X_{ab}$, voor alle $a, b \in R$. Als $X_a \cap V(E) \neq \emptyset$, dan is er een $[P] \in \mathrm{Spec}(R)$ zodat $E \subset P$ en $a \notin P$. Door Propositie 3.3.7 is dit equivalent aan $a \notin \bigcap\{P \mid [P] \in V(E)\} = r(E)$.
Alles samengevoegd geeft ons dat $V(E)$ irreducibel is precies als geldt:

$$\forall\, a, b \in R :\ a, b \notin r(E) \implies ab \notin r(E)\,,$$

ofwel precies als $r(E) \in \mathrm{Spec}(R)$. ⊠

Gevolg 3.3.10 Spec(R) *is irreducibel precies als* R *een domein is.*

Bewijs: Dit is puur Lemma 3.3.9 voor $E = \{0\}$, wanneer we opmerken dat de definitie van een domein equivalent is aan de eigenschap dat $r(0) = \{0\} \in \mathrm{Spec}(R)$. $\boxtimes$

Hoofdstuk 4

Schoventheorie

In dit hoofdstuk heb ik de meeste aanpassingen gedaan bij het gebruiken van de literatuur. Het is daarom een inaccuraat proces om aan te geven waar ik wat vandaan heb. De verwijzingen moeten specifiek bij dit hoofdstuk niet te secuur gelezen worden. Door meer nadruk te leggen op deelschoven (paragraaf 4.5) heb ik naar mijn mening op een meer natuurlijke wijze een verschoving gemaakt in Propositie 4.6.2; door de beeldschoof te nemen onder een specifiek morfisme. Omdat mijn literatuur de theorie omtrent deelschoven na en met behulp van verschovingen behandeld, heb ik veel moeten aanpassen en schuiven. Zo heb ik bijvoorbeeld de definitie van surjectie in Definitie 4.5.8 aangepast aan die uit Definition 2.10 van [5]. Dit had weer als gevolg dat ik Proposition 1.1 van [4], welke zegt dat een morfisme ψ tussen schoven een isomorfisme is precies als elke ψ_x een isomorfisme is, heb opgesplitst tot twee lemma's en één propositie (Lemma 4.4.3 en 4.5.9 die ik gebruik bij Propositie 4.5.10). De bijbehorende bewijzen zijn hierbij ook aangepast ten opzichte van het bewijs waar ze op gebaseerd zijn.
De aangepaste definitie voor surjectie is geïnspireerd op de bi-implicatie uit opgave 1.3(a) op bladzijde 66 van [4]
Door deze andere aanpak voor de verschoving van een preschoof heb ik ook veel specifieker kunnen benoemen hoe we een $\mathcal{B}$-schoof kunnen uitbreiden tot een schoof; iets wat in de literatuur naar mijn mening vrij informeel behandeld wordt.

4.1 Preschoof van ringen

Een (pre)schoof is ontwikkeld om aan open deelverzamelingen van een topologische ruimte een algebraïsche structuur te koppelen. Gezien ons onderwerp, kiezen wij ervoor om ringen te gebruiken als algebraïsche structuur. Na de definitie van een preschoof van ringen zullen we een voorbeeld geven.

Definitie 4.1.1 ([5], 2.1) *Laat X een topologische ruimte zijn. We noemen $\mathcal{F}$ een preschoof van ringen op X, als de volgende eigenschappen gelden:*

i) $\mathcal{F}(U)$ is een ring voor elke $U \in \mathcal{T}$.

ii) Voor elke $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ met $U_1 \subset U_2$ is er een ringhomomorfisme $\rho_{U_1}^{U_2} : \mathcal{F}(U_2) \longrightarrow \mathcal{F}(U_1)$ zodat geldt:

(a) ρ_U^U is de identiteitsafbeelding voor alle $U \in \mathcal{T}$.

(b) Als $U_1, U_2, U_3 \in \mathcal{T}$ zodat $U_1 \subset U_2 \subset U_3$, dan geldt $\rho_{U_1}^{U_3} = \rho_{U_1}^{U_2} \circ \rho_{U_2}^{U_3}$.

We noemen de elementen van $\mathcal{F}(U)$ snedes van $\mathcal{F}$ over U.
We noemen $\rho_{U_1}^{U_2}$ een restrictie.

Voorbeeld preschoof van ringen ([5], ex. 2.3)
Neem een topologische ruimte X. Voor elke $U \in \mathcal{T}$ definiëren we $\mathcal{F}(U) := C(U)$; de verzameling van continue reëelwaardige afbeeldingen op U. We definiëren, gegeven $f, g \in C(U)$ en $x \in X$, de operaties $(f+g)(x) := f(x)+g(x)$ en $(fg)(x) := f(x)g(x)$ voor optellen en vermenigvuldigen, met $0(x) := 0$ en $1(x) := 1$ het nul- en eenheidselement. We zien dat deze structuur zorgt dat elke $\mathcal{F}(U)$ een ring is. Voor $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ met $U_1 \subset U_2$ definiëren we $\rho_{U_1}^{U_2}$ door elke $f \in \mathcal{F}(U_2)$ te sturen naar $f|_{U_1}$.
Voor elke $U \in \mathcal{T}$ geldt dat elke $f \in \mathcal{F}(U)$ met ρ_U^U wordt gestuurd naar $f|_U = f$, dus ρ_U^U is de identiteitsafbeelding voor elke $U \in \mathcal{T}$. Ook zien we voor opens $U_1 \subset U_2 \subset U_3$ dat voor elke $f \in \mathcal{F}(U_3)$ geldt dat $(f|_{U_2})|_{U_1} = f|_{U_1}$, dus $\rho_{U_1}^{U_3} = \rho_{U_1}^{U_2} \circ \rho_{U_2}^{U_3}$. $\diamondsuit$

4.2 Schoof van ringen

Wanneer het geen verwarring kan opleveren, zullen we gemakshalve bij een snede $s \in \mathcal{F}(U_2)$, $s|_{U_1}$ schrijven in plaats van $\rho_{U_1}^{U_2}(s)$. Dit maakt de volgende definitie een stuk leesbaarder:

Definitie 4.2.1 ([5], 2.2) *Laat X een topologische ruimte zijn. Een schoof van ringen, $\mathcal{F}$, op de topologische ruimte X is een preschoof van ringen op X die aan de eigenschap voldoet dat als $\{U_k\}_{k \in K}$ een open overdekking is van U, dan geldt:*

i) Als er voor elke $i \in K$ een snede $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ is en deze s_i's stemmen met elkaar overeen in de doorsneden, dat wil zeggen: voor elke $i, j \in K$ geldt $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$, dan is er een snede $s \in \mathcal{F}(U)$ zodat geldt $s|_{U_i} = s_i$ voor alle $i \in K$.

ii) Als er voor twee snedes $s, t \in \mathcal{F}(U)$ geldt $s|_{U_k} = t|_{U_k}$ voor alle $k \in K$, dan geldt $s = t$.

Informeel kunnen we de eerste eigenschap zien als het aan elkaar kunnen plakken van snedes. De tweede eigenschap zegt dat dit plakken op unieke wijze gaat. Waar het geen verwarring kan opleveren, zullen we deze eigenschappen het plak- en uniekheidsaxioma noemen.

Voorbeeld schoof van ringen ([5], ex. 2.3)
Ons voorgaand voorbeeld van een preschoof van ringen op de topologische ruimte X, met $\mathcal{F}(U) := C(U)$ voor elke $U \in \mathcal{T}$ is zelfs een schoof.
Stel we nemen een open overdekking $\{U_k\}_{k \in K}$ van U en voor elke $k \in K$ is er een $f_k \in C(U_k)$, waarvoor geldt $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ voor alle $i, j \in K$. We zullen nu laten zien dat we een continue reëelwaardige afbeelding $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ kunnen definiëren zodat $f|_{U_k} = f_k$ voor alle $k \in K$, en dat deze uniek is.
We definiëren f afhankelijk van $x \in U$ door $f(x) := f_k(x)$, als $x \in U_k$. Het maakt niet uit welke U_k we kiezen, als er meerdere zijn, omdat alle afbeeldingen overeen komen in de doorsneden, dus f is goed gedefiniëerd. Deze f is continu in al zijn punten, ofwel continu, dus $f \in \mathcal{F}(U)$ en $f|_{U_k} = f_k$ voor alle $k \in K$.
Stel er zijn $f, g \in \mathcal{F}(U)$ zodat $f|_{U_k} = g|_{U_k}$ voor elke $k \in K$, dus $f(x_k) = g(x_k)$ voor elke $x_k \in U_k$. Omdat $U = \bigcup_{k \in K} U_k$ betekent dit dat $f(x) = g(x)$ voor alle $x \in U$, dus $f = g$. $\diamondsuit$

De logische vraag die volgt, is of elke preschoof dan ook meteen een schoof is. We zullen met een tegenvoorbeeld laten zien dat dit niet het geval is.

Voorbeeld preschoof die geen schoof is (eigen voorbeeld)
We nemen $\mathbb{R}$ als topologische ruimte met de Euclidische topologie en definiëren voor elke $U \in \mathcal{T}$, $\mathcal{F}(U)$ als verzameling van begrensde continue reëelwaardige afbeeldingen op U. Neem de open overdekking $\mathcal{U}$ van $\mathbb{R}$, bestaande uit begrensde open deelverzamelingen van $\mathbb{R}$. Hierdoor geldt dat de identiteitsafbeelding $f(x) := x$ op elke $U_k \in \mathcal{U}$ begrensd is. Voor elke $U_k \in \mathcal{U}$ kiezen we $f_k := f|_{U_k}$, de restrictie van de identiteitsafbeelding f op U_k, dus voor elke k kiezen we deze $f_k \in \mathcal{F}(U_k)$. We zien dat voor deze f_k's ook geldt dat ze met elkaar overeenkomen in de doorsneden, maar f is natuurlijk géén begrensde afbeelding op $\mathbb{R} = \bigcup \mathcal{U}$. $\diamondsuit$

Mochten we een andere algebraïsche structuur willen gebruiken, zoals bijvoorbeeld (abelse) groepen, dan verandert er alleen dat elke $\mathcal{F}(U)$ een (abelse) groep moet zijn en $\rho_{U_1}^{U_2}$ een groepshomomorhisme. Algemeen gesproken voor elke categorie C is een preschoof $\mathcal{F}$ op X een functor met waarden in C, zodat $\mathcal{F}(U)$ een object is in C, voor elke $U \in \mathcal{T}$. Ook moet gelden dat voor elke twee opens $U_1 \subset U_2$ de restrictie $\rho_{U_1}^{U_2}$ een morfisme in de categorie C is.
Alles wat ik uit de literatuur gebruik, dat op categorisch niveau is geschreven, is teruggebracht tot het specifieke geval van ringen.
Omdat wij willen werken met ringen, zullen alle definities voor het gemak geschreven worden voor specifiek (pre)schoven van ringen. Met behulp van bovenstaande opmerking moet elke definitie makkelijk om te schrijven zijn voor gebruik van andere algebraïsche structuren. Om die reden en voor het gemak zullen we vanaf nu vaak schrijven over (pre)schoven, waar we (pre)schoven van ringen bedoelen.

4.3 Staak van een schoof

De eerste twee definities zijn gebaseerd op de definities uit opgave 14 op bladzijden 32/33 van [1]. Definitie 4.3.3 en Propositie 4.3.4 zijn gebaseerd op bladzijde 62 van [4].

Omdat een schoof $\mathcal{F}$ gedefinieerd is op open deelverzamelingen van een topologische ruimte X betekent dit dat een schoof niet altijd gedefinieerd hoeft te zijn op punten $x \in X$, want $\{x\}$ hoeft absoluut niet open te zijn in X (sterker nog: $\{x\} \in \mathcal{T}$ voor alle $x \in X$ precies als $\mathcal{T}$ de discrete topologie is). Toch is het heel belangrijk om te kijken hoe een schoof zich gedraagt op een punt $x \in X$. Dit doen we door te kijken naar hele kleine omgevingen van x. Omdat er bij topologieën zeker niet altijd een kleinste omgeving hoeft te zijn, zoeken we naar een manier om op structurele wijze naar kleine omgevingen te kijken en hoe de schoof zich hierop gedraagt. Dit kunnen wij doen door gebruik te maken van de volgende definities (wederom puur op ringen gedefinieerd):

Definitie 4.3.1 *Een gerichte verzameling A is een niet-lege poset met de extra eigenschap dat voor elke $x, y \in A$ er een $z \in A$ is zodat $x \leq z$ én $y \leq z$.*

Definitie 4.3.2 *Neem een gerichte verzameling K, $\{U_k \mid k \in K\}$ een verzameling van ringen geïndiceerd middels K en een ringhomomorfisme $f_j^i : U_i \longrightarrow U_j$ voor elke $i \leq j$, zodat geldt:*

i) f_i^i is de identiteitsafbeelding, voor elke U_i.

ii) $f_k^i = f_k^j \circ f_j^i$ voor alle $i \leq j \leq k$.

De gerichte limiet over deze paren (U_i, f_j^i) definiëren we als volgt:

$$\varinjlim U_k := \bigsqcup_{k \in K} U_k \Big/ \sim$$

met, voor $x_i \in U_i$ en $x_j \in U_j$, $x_i \sim x_j$ precies als er een $k \in K$ is zodat $f_k^i(x_i) = f_k^j(x_j)$.

We zien dat $\sim$ een equivalentie relatie is en dus dat de gerichte limiet goed gedefinieerd is.
Informeel zegt het laatste dat twee disjuncte elementen equivalent zijn precies als ze uiteindelijk naar hetzelfde element worden gestuurd.
In het eerste deel van de laatste definitie zijn de overeenkomsten met Definitie 4.1.1 duidelijk zichtbaar. De beste manier om op structurele wijze te kijken naar hoe een schoof zich op een punt $x \in X$ gedraagt, is daarom door gebruik te maken van de gerichte limiet op de verzameling $\mathcal{T}(x)$ van alle open omgevingen van dit punt. Wanneer we $\mathcal{T}(x)$ ordenen op omgekeerde inclusie, dus $U \leq V$ precies als $V \subset U$, dan kunnen we $\mathcal{T}(x)$ op gepaste wijze zien als een gerichte verzameling. De resulterende gerichte limiet, $\mathcal{F}_x$, noemen wij de staak van de schoof $\mathcal{F}$ van $x \in X$ en zullen we op de volgende pagina formeel definiëren.

Definitie 4.3.3 *Laat $\mathcal{F}$ een (pre)schoof van ringen op X zijn. We definiëren, voor elke $x \in X$, de staak $\mathcal{F}_x$ als volgt:*

$$\mathcal{F}_x := \left(\bigcup_{U \in \mathcal{T}(x)} \{(U, s) \mid s \in \mathcal{F}(U)\} \right) \Big/ \sim_x$$

met $(U, s) \sim_x (V, t)$ precies als er een $W \in \mathcal{T}(x)$ is zodat $W \subset U \cap V$ en $s|_W = t|_W$.

Vanaf nu zullen we werken met een kleine misbruik van notatie: wanneer we in een staak de equivalentieklasse van (U, s) gebruiken, zullen we deze nog steeds met (U, s) noteren.

Propositie 4.3.4 *Als $\mathcal{F}$ een (pre)schoof van ringen op X is, dan is $\mathcal{F}_x$ een ring voor elke $x \in X$.*

Bewijs: We zullen laten zien dat elke $\mathcal{F}_x$ een ring is middels de ring operaties behorende bij $\mathcal{F}$. We nemen een $x \in X$ willekeurig.
Stel we hebben $(U, s), (V, t) \in \mathcal{F}_x$. Deze twee elementen zijn dus de representanten van hun equivalentieklassen. Omdat $U, V \in \mathcal{T}(x)$, geeft (T1) ons dat $W = U \cap V \in \mathcal{T}(x)$. We kunnen hierdoor nieuwe representanten kiezen voor de twee equivalentieklassen, namelijk $(W, s|_W)$ en $(W, t|_W)$. Omdat $s|_W, t|_W \in \mathcal{F}(W)$ kunnen we hier de ring operaties van $\mathcal{F}(W)$ op loslaten. Dit geeft dus de volgende operaties:

i) $(U, s) + (V, t) := (U \cap V, s|_{U \cap V} + t|_{U \cap V})$

ii) $(U, s) \cdot (V, t) := (U \cap V, s|_{U \cap V} \cdot t|_{U \cap V})$

We moeten nu nog laten zien dat deze operaties welgedefiniëerd zijn, dus onafhankelijk zijn van de keuze van de representanten.
Stel we hebben $(U', s') \sim_x (U, s)$, dus er is een $U'' \in \mathcal{T}(x)$ zodat $U'' \subset U' \cap U$ en $s'|_{U''} = s|_{U''}$.
`Optelling:` Er moet voor elke $(V, t) \in \mathcal{F}_x$ gelden dat $(U, s) + (V, t) = (U', s') + (V, t)$, ofwel $(U \cap V, s|_{U \cap V} + t|_{U \cap V}) \sim_x (U' \cap V, s|_{U' \cap V} + t|_{U' \cap V})$.
We definiëren $W := U'' \cap V$. We zien dat $W \subset U \cap V$ en $W \subset U' \cap V$. Ook zien we, gegeven $s'|_{U''} = s|_{U''}$ en de eigenschap van restricties, dat

$$\begin{aligned} (s|_{U \cap V})|_W &= (s|_{U''})|_W \\ &= (s'|_{U''})|_W \\ &= (s'|_{U' \cap V})|_W \,. \end{aligned}$$

Dit betekent dat:

$$\begin{aligned}(s|_{U\cap V}+t|_{U\cap V})|_W &= (s|_{U\cap V})|_W+(t|_{U\cap V})|_W\\ &= (s'|_{U'\cap V})|_W+(t|_{U'\cap V})|_W\\ &= (s'|_{U'\cap V}+t|_{U'\cap V})|_W\end{aligned}$$

Ofwel, dat $(U,s)+(V,t)=(U',s')+(V,t)$.
`Vermenigvuldiging:` We zien dat we met W op gelijke wijze als bij optelling kunnen bewijzen dat $(U,s)\cdot(V,t)=(U',s')\cdot(V,t)$. ⊠

We zullen nu laten zien dat we met elke $U\in\mathcal{T}(x)$, het nul- en eenheidselement van $\mathcal{F}_x$ kunnen representeren met $(U,0)$ respectievelijk $(U,1)$.
Neem een $(V,t)\in\mathcal{F}_x$ willekeurig, dan geldt:

$$\begin{aligned}(U,0)+(V,t) &= (U\cap V,0|_{U\cap V}+t|_{U\cap V})\\ &= (U\cap V,0+t|_{U\cap V})\\ &= (U\cap V,t|_{U\cap V})\\ &= (V,t)\end{aligned}$$

Er geldt hier $0|_{U\cap V}=0$ omdat elke restrictie een ringhomomorfisme is en we in het bewijs van Lemma 2.1.14 hebben gezien dat een ringhomomorfisme het nulelement van zijn domein naar het nulelement van zijn beeld stuurt. Vanwege (H1) kunnen we met dezelfde soort argumenten het volgende schrijven, met wederom $(V,t)\in\mathcal{F}_x$ willekeurig:

$$\begin{aligned}(U,1)\cdot(V,t) &= (U\cap V,1|_{U\cap V}\cdot t|_{U\cap V})\\ &= (U\cap V,1\cdot t|_{U\cap V})\\ &= (U\cap V,t|_{U\cap V})\\ &= (V,t)\,,\end{aligned}$$

waarmee we hebben laten zien dat voor elke $U\in\mathcal{T}(x)$, $(U,0)$ en $(U,1)$ het nul- en eenheidselement van $\mathcal{F}_x$ kunnen representeren.

Definitie 4.3.5 ([5], 2.8) *Neem een (pre)schoof $\mathcal{F}$. Voor elke open omgeving U van $x\in X$ is er een afbeelding van $\mathcal{F}(U)$ naar $\mathcal{F}_x$, namelijk door een snede $s\in\mathcal{F}(U)$ te sturen naar de equivalentieklasse waar (U,s) bij hoort. Deze equivalentieklasse geven we aan met s_x en noemen we de kiem van s in x.*

We zien dat de beschreven afbeelding van bovenstaande definitie een ringhomomorfisme is. Ook merken we op dat alle elementen van $\mathcal{F}_x$ kiemen zijn van snedes, want elk element van $\mathcal{F}_x$ is van de vorm (U,s), met $U \in \mathcal{T}(x)$ en $s \in \mathcal{F}(U)$.

Lemma 4.3.6 ([5], 2.9) *Als $\mathcal{F}$ een schoof is op de topologische ruimte X, dan geldt voor elke $U \in \mathcal{T}$ dat het ringhomomorfisme*

$$\chi_U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x, \quad s \longmapsto \prod_{x \in U} s_x$$

injectief is.

Bewijs: Allereerst merken we op dat χ_U een product is van de ringhomomorfismen uit Definitie 4.3.5, dus χ_U is inderdaad een ringhomomorfisme.
Stel $s,t \in \mathcal{F}(U)$ zodat $\prod\limits_{x \in U} s_x = \prod\limits_{x \in U} t_x$. Dit betekent dat $s_x = t_x$ voor elke $x \in U$. Door Definitie 4.3.3 en 4.3.5, betekent dit dat voor elke $x \in X$ er een $V_x \in \mathcal{T}(x)$ is zodat $V_x \subset U$ en $s|_{V_x} = t|_{V_x}$.
We zien dat $U = \bigcup\limits_{x \in U} V_x$ en omdat $\mathcal{F}$ een schoof is geeft het uniekheidsaxioma ons dat $s = t$. ⊠

4.4 Morfisme tussen schoven

Definitie 4.4.1 ([5], 2.10) *Als $\mathcal{F}$ en $\mathcal{G}$ twee (pre)schoven van ringen op de topologische ruimte X zijn, dan heet $\psi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ een morfisme tussen de (pre)schoven $\mathcal{F}$ en $\mathcal{G}$ als geldt:*

i) $\psi_U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ is een ringhomomorfisme voor elke $U \in \mathcal{T}$.

ii) Voor elke $U, V \in \mathcal{T}$ met $V \subset U$ geldt $\psi_V \circ \rho_{\mathcal{F}}{}_V^U = \rho_{\mathcal{G}}{}_V^U \circ \psi_U$, ofwel het volgende diagram commuteert:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\psi_U"] \arrow[d, "\rho_{\mathcal{F}}{}_V^U"] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\rho_{\mathcal{G}}{}_V^U"] \\ \mathcal{F}(V) \arrow[r, "\psi_V"] & \mathcal{G}(V) \end{tikzcd}$$

We zeggen dat ψ injectief is als elke ψ_U injectief is.

De definitie voor surjectiviteit gaat heel anders dan die van injectiviteit, en zullen we pas later geven.
We kunnen eigenschap 4.4.1ii), gegeven een $s \in \mathcal{F}(U)$, op de volgende wijze eenvoudiger opschrijven: $\psi_V(s|_V) = \psi_U(s)|_V$. Dit zullen we vaak gebruiken.

Propositie 4.4.2 ([5], 2.10) *Met elk morfisme $\psi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ tussen (pre)schoven $\mathcal{F}$ en $\mathcal{G}$ van ringen op X, kunnen we voor elke $x \in X$ het volgende ringhomomorfisme ψ_x maken:*

$$\psi_x : \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x, \quad (U, s) \longmapsto (U, \psi_U(s))$$

Bewijs: We zullen bewijzen dat elke ψ_x goed gedefiniëerd is, dus dat ψ_x onafhankelijk is van de gekozen representant.
Stel we hebben $(U, s), (U', s') \in \mathcal{F}_x$ zodat $(U, s) = (U', s')$. Dat betekent dat er een $V \in \mathcal{T}(x)$ is zodat $V \subset U \cap U'$ en $s|_V = s'|_V$. Dit, samen met het feit dat ψ een morfisme is, geeft ons:

$$\psi_U(s)|_V = \psi_V(s|_V) = \psi_V(s'|_V) = \psi_{U'}(s')|_V$$

Dus $(U, \psi_U(s)) = (U', \psi_{U'}(s'))$ in $\mathcal{G}_x$. ⊠

Het volgende lemmma laat ons zien dat injectiviteit van een morfisme tussen schoven te bepalen met de staken:

Lemma 4.4.3 ([4], opg. 1.2) *Neem $\mathcal{F}$ en $\mathcal{G}$ twee schoven van ringen op X en een morfisme $\psi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$. Dan geldt:*
ψ is injectief precies als ψ_x injectief is voor elke $x \in X$.

Bewijs: Stel ψ is injectief, dus ψ_U is injectief voor elke $U \in \mathcal{T}$. We nemen een $x \in X$ willekeurig.
Stel we hebben $(U, s), (V, t) \in \mathcal{F}_x$ zodat $\psi_x(U, s) = \psi_x(V, t)$, dus $(U, \psi_U(s)) = (V, \psi_V(t))$ in $\mathcal{G}_x$. Dit betekent dat er een $W \in \mathcal{T}(x)$ is zodat $W \subset U \cap V$ en $\psi_U(s)|_W = \psi_V(t)|_W$. Omdat ψ een morfisme is, geeft dit ons $\psi_W(s|_W) = \psi_U(s)|_W = \psi_V(t)|_W = \psi_W(t|_W)$. Dit geeft ons $s|_W = t|_W$ door onze aanname. Hierdoor krijgen we de volgende gelijkheid in $\mathcal{F}_x$: $(U, s) = (W, s|_W) = (W, t|_W) = (V, t)$, dus ψ_x is injectief.
Stel ψ_x is injectief voor elke $x \in X$. We nemen een $U \in \mathcal{T}$ willekeurig.
Stel we hebben $s, t \in \mathcal{F}(U)$ zodat $\psi_U(s) = \psi_U(t)$. Dit geeft ons $(U, \psi_U(s)) = (U, \psi_U(t))$ in $\mathcal{G}_x$ voor elke $x \in U$. Door aanname volgt dan dat $(U, s) = (U, t)$ in $\mathcal{F}_x$ voor elke $x \in U$. Dit betekent dat voor elke $x \in U$ er een $V_x \in \mathcal{T}(x)$ is zodat $V_x \subset U$ en $s|_{V_x} = t|_{V_x}$. We zien dat $\{V_x\}_{x \in U}$ een open overdekking is van U. Omdat $\mathcal{F}$ een schoof is geeft het uniekheidsaxioma ons nu dat $s = t$, dus ψ_U is injectief. ⊠

Voor we een voorbeeld zullen geven van een morfisme tussen (pre)schoven, zullen we eerst laten zien hoe we een schoof kunnen maken uit een preschoof. Deze zullen we dan gebruiken om een voorbeeld te geven.

Stel we hebben een preschoof $\mathcal{F}$ van ringen op X, met bijbehorende staken $\mathcal{F}_x$ voor elke $x \in X$, dan is er een eenvoudige manier om hier een schoof $\mathcal{F}^*$ uit te halen. Voor elke $U \in \mathcal{T}$ definiëren we:

$$\mathcal{F}^*(U) := \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x$$

Met voor elke $U, V \in \mathcal{T}$ zodat $V \subset U$, de volgende restrictie:

$$\rho_V^U : \mathcal{F}^*(U) \longrightarrow \mathcal{F}^*(V), \quad \prod_{x \in U} s_x \longmapsto \prod_{x \in V} s_x$$

Propositie 4.4.4 *$\mathcal{F}^*$ is een schoof van ringen op X.*

Bewijs: Omdat elke $\mathcal{F}_x$ een ring is, volgt dat elke $\mathcal{F}^*(U)$ een ring is. We zien dat de restrictie ρ_V^U informeel niet meer doet dan het weglaten van elementen s_x, waar $x \notin V$. Hierdoor zien we dat $\rho_W^U = \rho_W^V \circ \rho_V^U$ voor alle $U, V, W \in \mathcal{T}$ zodat $W \subset V \subset U$, en dat elke ρ_U^U de identiteitsafbeelding is voor alle $U \in \mathcal{T}$. $\mathcal{F}^*$ is dus een preschoof. Nu zullen we laten zien dat hij ook voldoet aan de eisen van een schoof.
Stel we hebben $U = \bigcup_{k \in K} U_k$ met elke $U_k \in \mathcal{T}$, en we hebben voor elke k een snede $s_k \in \mathcal{F}^*(U_k)$ die met elkaar overeenstemmen in de doorsnede. Elke $s_k \in \mathcal{F}^*(U_k)$ kunnen we schrijven als $\prod_{x \in U_k} s_{k,x}$, waarbij we met $s_{k,x}$ de kiem van s_k in x bedoelen. We zien dat als $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$, dan betekent dit dat $s_{i,x} = s_{j,x}$ voor elke $x \in U_i \cap U_j$. Voor elke $x \in X$ kiezen we een $k \in K$ zodat $x \in U_k$ en definiëren we $t_x := s_{k,x}$. Het bovenstaande laat zien dat we uit de aanname kunnen concluderen dat elke t_x onafhankelijk is van de keuze van deze k, dus dat elke t_x goed gedefiniëerd is. Nu definiëren we $t = \prod_{x \in U} t_x$ en zien we dat $t \in \mathcal{F}^*(U)$ en $t|_{U_k} = s_k$ voor alle $k \in K$.
Stel we hebben snedes $s, t \in \mathcal{F}^*(U)$ zodat $s|_{U_k} = t|_{U_k}$ voor alle $k \in K$. We schrijven wederom $\prod_{x \in U} s_x$ en $\prod_{x \in U} t_x$ voor s respectievelijk t. Onze aanname is nu te schrijven als $\prod_{x \in U_k} s_x = \prod_{x \in U_k} t_x$ voor elke $k \in K$. Omdat $U = \bigcup_{k \in K} U_k$, betekent dit dat $s_x = t_x$ voor alle $x \in U$, dus zien we dat $s = t$. ⊠

We zien dat onze schrijfwijze $s = \prod_{x \in U} s_x$ voor elke snede $s \in \mathcal{F}^*(U)$ veel overeenkomsten heeft met het beeld van het ringhomomorfisme χ_U van Lemma 4.3.6. Dit is ons bruggetje naar het eerder beloofde voorbeeld van een morfisme tussen (pre)schoven:

Voorbeeld van een morfisme tussen (pre)schoven
We nemen de preschoven $\mathcal{F}$ en $\mathcal{F}^*$ zoals ze hiervoor beschreven staan. $\mathcal{F}^*$ is weliswaar een schoof, maar een schoof is in het bijzonder ook een preschoof. We nemen voor elke $U \in \mathcal{T}$ het ringhomomorfisme χ_U en zien dat $\chi_U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}^*(U)$. We nemen χ als verzameling van al deze χ_U's. We moeten nu alleen nog laten zien dat $\chi_V \circ \rho_{\mathcal{F}}{}^U_V = \rho_{\mathcal{F}^*}{}^U_V \circ \chi_U$, voor elke $U, V \in \mathcal{T}$ met $V \subset U$.
We nemen een $s \in \mathcal{F}(U)$ willekeurig. Hiervoor willen we laten zien dat $\chi_V(s|_V) = (\chi_U(s))|_V$. Door Definitie 4.3.5 kunnen we $\chi_V(s|_V)$ en $(\chi_U(s))|_V$ met handige representanten uitschrijven:

$$\begin{aligned} \chi_V(s|_V) &= \prod_{x \in V} (V, s|_V) \\ (\chi_U(s))|_V &= \prod_{x \in V} (U, s) \end{aligned}$$

Waarin we voor elke $x \in V$, $(V, s|_V)$ en (U, s) moeten zien als element van $\mathcal{F}_x$. We zien voor elke $x \in V$, omdat $V \subset U$, dat $(V, s|_V) = (U \cap V, s|_{U \cap V}) = (U, s)$ in $\mathcal{F}_x$. Dit geeft ons dat $\chi_V(s|_V) = (\chi_U(s))|_V$ voor elke $s \in \mathcal{F}(U)$ en dus dat $\chi_V \circ \rho_{\mathcal{F}}{}^U_V = \rho_{\mathcal{F}^*}{}^U_V \circ \chi_U$. $\diamondsuit$

We zien dat Lemma 4.3.6 ons geeft dat het morfisme χ uit het voorgaande voorbeeld injectief is, wanneer $\mathcal{F}$ een schoof is.

4.5 Kern en beeld van morfismen van schoven

Definitie 4.5.1 ([4], blz. 64) *Als $\mathcal{F}$ een schoof van ringen op X is, dan noemen we $\mathcal{H}$ een deel(pre)schoof van $\mathcal{F}$ als geldt:*

i) $\mathcal{H}$ is een (pre)schoof van ringen op X.

ii) $\mathcal{H}(U) \subset \mathcal{F}(U)$ voor alle $U \in \mathcal{T}$.

iii) De restrictie van $\mathcal{H}$ komt overeen met de restrictie van $\mathcal{F}$, dus $\rho_{\mathcal{H}}{}^U_V = \rho_{\mathcal{F}}{}^U_V|_{\mathcal{H}(U)}$ voor alle $U, V \in \mathcal{T}$ met $V \subset U$.

Waar het geen verwarring kan geven, zullen we voor het gemak $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ schrijven als we willen zeggen dat $\mathcal{H}$ een deel(pre)schoof van schoof $\mathcal{F}$ is.

We merken hier op dat als $\mathcal{H}$ een deelpreschoof van schoof $\mathcal{F}$ is, dat $\mathcal{H}$ altijd aan het uniekheidsaxioma zal voldoen:

Stel $U = \bigcup_{k \in K} U_k$ en we hebben snedes $s, t \in \mathcal{H}(U) \subset \mathcal{F}(U)$ zodat $s|_{U_k} = t|_{U_k}$ voor alle $k \in K$. Omdat de restrictie van $\mathcal{H}$ overeenkomt met die van $\mathcal{F}$ en $\mathcal{F}$ een schoof is, geeft het uniekheidsaxioma ons dat $s = t$.
Dus wanneer we willen bewijzen dat een deelpreschoof $\mathcal{H}$ van de schoof $\mathcal{F}$ een deelschoof is, hoeven we alleen nog te bewijzen dat $\mathcal{H}$ voldoet aan het plakaxioma.

De volgende twee definities en propositie zijn geïnspireerd op opgave 1.3 op bladzijde 66 van [4].

Definitie 4.5.2 *Neem $\mathcal{F}$ een schoof van ringen op X en $\mathcal{H}$ een deelpreschoof van $\mathcal{F}$. We zeggen dat een snede $s \in \mathcal{F}(U)$ lokaal in $\mathcal{H}(U)$ ligt als er een open overdekking $\mathcal{U} = \{U_k\}_{k \in K}$ van U is, zodat $s|_{U_k} \in \mathcal{H}(U_k)$ voor alle $k \in K$.*

Met deze laatste definitie kunnen we nu een mooie manier beschrijven waarmee we van elke deelpreschoof $\mathcal{H}$ een deelschoof $\overline{\mathcal{H}}$ kunnen maken. Voor een deelpreschoof $\mathcal{H}$ van een schoof $\mathcal{F}$, definiëren we $\overline{\mathcal{H}}$ voor elke $U \in \mathcal{T}$ als volgt:

$$\overline{\mathcal{H}}(U) := \{s \in \mathcal{F}(U) \mid s \text{ ligt lokaal in } \mathcal{H}(U)\}$$

Propositie 4.5.3 *$\overline{\mathcal{H}}$ is de kleinste deelschoof van $\mathcal{F}$ zodat $\mathcal{H} \subset \overline{\mathcal{H}}$.*

Bewijs: Voor elke $U \in \mathcal{T}$ geldt per definitie dat $\mathcal{H}(U) \subset \overline{\mathcal{H}}(U)$. Dat elke $\overline{\mathcal{H}}(U)$ nog steeds een ring is zullen we niet bewijzen, maar het mag duidelijk zijn dat voor de verzameling van elementen van $\mathcal{F}(U)$ die lokaal in $\mathcal{H}(U)$ liggen, de axioma's (R0) tot en met (R4) gelden. De restrictie van $\overline{\mathcal{H}}$ komt nog steeds overeen met die van $\mathcal{F}$, dus $\overline{\mathcal{H}}$ is een deelpreschoof van $\mathcal{F}$.
Nu zullen we laten zien dat $\overline{\mathcal{H}}$ een deelschoof is van $\mathcal{F}$:
Stel we hebben een open overdekking $\mathcal{U} = \{U_k\}_{k \in K}$ van U met snedes $s_k \in \mathcal{H}(U_k) \subset \mathcal{F}(U_k)$ die overeen komen in de doorsneden, dan geeft de schoof $\mathcal{F}$ ons een snede $s \in \mathcal{F}(U)$ zodat $s|_{U_k} = s_k \in \mathcal{H}(U_k)$ voor elke $k \in K$. We zien dat deze $s \in \mathcal{F}(U)$ dus lokaal in $\mathcal{H}(U)$ ligt en daardoor ook een element van $\overline{\mathcal{H}}(U)$ is.
Stel nu dat één van de snedes s_i een element van $\overline{\mathcal{H}}(U_i)$ is, dan betekent dit dat er een open overdekking $\mathcal{U}_i = \{U_{i_j}\}_{j \in K_i}$ van U_i is zodat $s_i|_{U_{i_j}} \in \mathcal{H}(U_{i_j})$ voor elke $j \in K_i$. Dan kunnen we U_i in de open overdekking $\mathcal{U}$ van U vervangen met de opens van $\mathcal{U}_i$ en snede s_i vervangen met de snedes $s_{i,j} := s_i|_{U_{i_j}}$. Door definitie komen deze $s_{i,j}$'s overeen in elkaars doorsneden. Voor elke $j \in K_i$ en $k \in K$ kunnen we door de eigenschap van de restricties het volgende zien:

$$s_{i,j}|_{U_{i_j} \cap U_k} = (s_i|_{U_i \cap U_k})|_{U_{i_j} \cap U_k} = (s_k|_{U_i \cap U_k})|_{U_{i_j} \cap U_k} = s_k|_{U_{i_j} \cap U_k}$$

Er geldt dus nog steeds dat deze nieuwe verzameling snedes overeenkomt in de doorsneden, waardoor we weer terug zijn in de al bewezen situatie. Als meerdere of zelfs alle s_k's elementen zijn van $\overline{\mathcal{H}}(U_k)$ dan kunnen we dit op gelijke wijze omschrijven naar de al bewezen situatie. Hiermee hebben we bewezen dat $\overline{\mathcal{H}}$ een deelschoof is van $\mathcal{F}$.
Dat $\overline{\mathcal{H}}$ de kleinste deelschoof is van $\mathcal{F}$ zodat $\mathcal{H} \subset \overline{\mathcal{H}}$ is heel logisch:
Kies een $U \in \mathcal{T}$ en $s \in \overline{\mathcal{H}}(U)$, met de bijbehorende open overdekking $\mathcal{U}_s = \{U_{s_k}\}_{k \in K}$ van U zodat $s|_{U_{s_k}} \in \mathcal{H}(U_{s_k})$ voor alle $k \in K$. Wanneer we deze snede s weglaten, is de open overdekking $\mathcal{U}_s$ met snedes $s|_{U_{s_k}}$ het tegenvoorbeeld dat er niet wordt voldaan aan het plakaxioma. We kunnen deelschoof $\overline{\mathcal{H}}$ dus niet kleiner maken.
Met dezelfde argumenten zien we dat als $\mathcal{H}$ een schoof is, dat voor elke $U \in \mathcal{T}$ geldt dat elke snede van $\overline{\mathcal{H}}(U)$ een snede van $\mathcal{H}(U)$ is, dus als $\mathcal{H}$ een schoof is geeft dit ons $\overline{\mathcal{H}} = \mathcal{H}$. ⊠

Definitie 4.5.4 *We noemen $\overline{\mathcal{H}}$ de verzadiging van $\mathcal{H}$.*

Definitie 4.5.5 ([4], blz. 64) *Neem $\mathcal{F}$ en $\mathcal{G}$ twee schoven van ringen op X en neem een morfisme $\psi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$. We definiëren de kern van ψ,* $\ker(\psi)$, *voor elke $U \in \mathcal{T}$ als volgt:*

$$\ker(\psi)(U) := \ker(\psi_U) = \{s \in \mathcal{F}(U) \mid \psi_U(s) = 0\}.$$

Propositie 4.5.6 ([4], blz. 64) $\ker(\psi)$ *is een deelschoof van $\mathcal{F}$.*

Bewijs: Het bewijs dat de kern van een ringhomomorfisme een ring is, is redelijk triviaal en zullen we overslaan. We nemen $U, V \in \mathcal{T}$ met $V \subset U$ en een $s \in \ker(\psi_U)$, dan kunnen we het volgende zeggen over de restrictie:

$$\begin{aligned} \psi_V(s|_V) &= (\psi_U(s))|_V \\ &= 0|_V \\ &= 0. \end{aligned}$$

Hierdoor zien we dat de restrictie van $\mathcal{F}$ snedes van $\ker(\psi_U)$ stuurt naar snedes van $\ker(\psi_V)$, dus dat de restrictie van $\ker(\psi)$ overeenkomt met die van $\mathcal{F}$. Dit geeft ons tot nu toe dat $\ker(\psi)$ een deelpreschoof van $\mathcal{F}$ is.
Stel we hebben een open overdekking $\mathcal{U} = \{U_k\}_{k \in K}$ van U met snedes $s_k \in \ker(\psi_{U_k})$ die overeenkomen in de doorsneden, dan geeft de schoof $\mathcal{F}$ ons een snede $s \in \mathcal{F}(U)$ zodat $s|_{U_k} \in \ker(\psi_{U_k})$ voor elke $k \in K$. Nu gebruiken we de schoof $\mathcal{G}$ om te laten zien dat $s \in \ker(\psi_U)$. We hebben $\psi_U(s) \in \mathcal{G}(U)$ met $\psi_U(s)|_{U_k} = \psi_{U_k}(s|_{U_k}) = 0$ voor elke $k \in K$. Omdat $\mathcal{G}$ een schoof is en $U = \bigcup_{k \in K} U_k$ geeft het uniekheidsaxioma ons dat $\psi_U(s) = 0$ en dus dat $s \in \ker(\psi_U)$. ⊠

Niets houdt ons tegen om een blik te werpen op de staken van $\ker(\psi)$. Hier kunnen wij het volgende over zeggen:

Propositie 4.5.7 *Neem $\mathcal{F}$ en $\mathcal{G}$ twee schoven van ringen op X en een morfisme $\psi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$. Dan geldt:*

$$(\ker(\psi))_x = \ker(\psi_x) \text{ voor elke } x \in X$$

Bewijs: NB: deze propositie is geïnspireerd op opgave 1.2 van [4].
We fixeren een $x \in X$ willekeurig. Stel $(U, s) \in (\ker(\psi))_x$, dus $U \in \mathcal{T}(x)$ en $s \in \ker(\psi)(U) = \ker(\psi_U)$. Dit betekent dat $\psi_x(U, s) = (U, \psi_U(s)) = (U, 0)$, wat een representant is voor het nulelement van $\mathcal{G}_x$, dus $(U, s) \in \ker(\psi_x)$.
Stel $(U, s) \in \ker(\psi_x)$, dus $U \in \mathcal{T}(x)$ en $s \in \mathcal{F}(U)$. Daarnaast moet gelden $\psi_x(U, s) = (U, \psi_U(s)) = (U, 0)$, een handig gekozen representant van het nulelement van $\mathcal{G}_x$. Dit betekent dat er een $V \in \mathcal{T}(x)$ is zodat $V \subset U$ en $\psi_U(s)|_V = 0|_V = 0$. Dit geeft ons dat $\psi_U(s) = 0$, wat betekent dat $s \in \ker(\psi_U)$ en dus dat $(U, s) \in (\ker(\psi))_x$. $\boxtimes$

Op soortgelijke wijze als de kern van ψ in Definitie 4.5.5, kunnen we met het beeld van ψ de volgende deelpreschoof $\psi(\mathcal{F})$ van $\mathcal{G}$ maken:

$$\psi(\mathcal{F})(U) := \psi_U(U) \text{ voor elke } U \in \mathcal{T}$$

Het is verleidelijk om aan te nemen dat $\ker(\psi)$ ook een schoof is, maar dit hoeft zeker niet waar te zijn! We willen dus (zo min mogelijk) elementen toevoegen aan het beeld van elke ψ_U, zodat het beeld van ψ wèl altijd een deelschoof van $\mathcal{G}$ is. Om deze reden definiëren we de beeldschoof $\mathrm{Im}(\psi)$ als $\overline{\psi(\mathcal{F})}$: de verzadiging van $\psi(\mathcal{F})$. Deze definitie is dus ook geïnspireerd op opgave 1.3 van [4] en een aanpassing van de definitie op bladzijde 64 van [4]. Formeel geschreven:

Definitie 4.5.8 *Neem $\mathcal{F}$ en $\mathcal{G}$ twee schoven van ringen op X en een morfisme $\psi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$. We definiëren de beeldschoof van ψ, $Im(\psi)$, voor elke $U \in \mathcal{T}$ als volgt:*

$$Im(\psi)(U) := \{s \in \mathcal{G}(U) \mid s \text{ ligt lokaal in } \psi_U(U)\}$$

We noemen ψ surjectief als $Im(\psi)(U) = \mathcal{G}(U)$ voor elke $U \in \mathcal{T}$.

Let op: de surjectiviteit hierboven is dus niet op gelijke wijze gedefiniëerd als injectiviteit! We zullen later zien dat als ψ zowel injectief als surjectief is, dat deze alsnog een isomorfisme is. Vandaar dat wij hier misbruik van het woord surjectief toelaten. Volgend lemma helpt ons op weg om dit isomorfisme te bewijzen:

Lemma 4.5.9 ([4], opg. 1.2) *Neem $\mathcal{F}$ en $\mathcal{G}$ twee schoven van ringen op X en morfisme $\psi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$. Dan geldt:*
ψ is surjectief precies als ψ_x surjectief is voor elke $x \in X$.

Bewijs: Stel ψ is surjectief, dus $\mathrm{Im}(\psi)(U) = \mathcal{G}(U)$ voor elke $U \in \mathcal{T}$. We nemen een $x \in X$ willekeurig.
Stel $(U, t) \in \mathcal{G}_x$, dus $U \in \mathcal{T}(x)$ en $t \in \mathcal{G}(U)$. Omdat $\mathcal{G}(U) = \mathrm{Im}(\psi)(U)$, betekent dit dat er een open overdekking $\mathcal{U} = \{U_k\}_{k \in K}$ van U is, zodat $t|_{U_k} \in \psi_{U_k}(U_k)$ voor alle $k \in K$. We kiezen $i \in K$ zodat $x \in U_i$. Dit kan omdat $\mathcal{U}$ een open overdekking is. Omdat $t|_{U_i} \in \psi_{U_i}(U_i)$, betekent dit dat er een $s \in \mathcal{F}(U_i)$ is zodat $\psi_{U_i}(s) = t|_{U_i}$. We hebben nu $U_i \in \mathcal{T}(x)$, $U_i \subset U$ en $\psi_{U_i}(s)|_{U_i} = \psi_{U_i}(s) = t|_{U_i}$. Met andere woorden: U_i laat ons zien dat $\psi_x(U_i, s) = (U_i, \psi_{U_i}(s)) = (U, t)$, dus ψ_x is surjectief.
Stel ψ_x is surjectief voor elke $x \in X$. We nemen een $U \in \mathcal{T}$ willekeurig.
Per definitie geldt $\mathrm{Im}(\psi)(U) \subset \mathcal{G}(U)$.
Stel $t \in \mathcal{G}(U)$. Door onze aanname geldt dat $(U, t) \in \psi_x(\mathcal{F}_x)$ voor elke $x \in U$, dus voor elke $x \in U$ is er een $s_x \in \mathcal{F}(U)$ zodat $(U, \psi_U(s_x)) = (U, t)$ in $\mathcal{G}_x$. (Let op: s_x is hier een schrijfwijze om aan te geven dat snede s_x afhankelijk is van x. We bedoelen hier niet dat s_x de kiem van s in x is). Dit betekent dat er voor elke $x \in U$ een $V_x \in \mathcal{T}(x)$ is, zodat $V_x \subset U$ en $t|_{V_x} = \psi_U(s_x)|_{V_x} = \psi_{V_x}((s_x)|_{V_x})$. We zien dat $\{V_x\}_{x \in U}$ een open overdekking van U is en dat elke $(s_x)|_{V_x}$ een snede van $\mathcal{F}(V_x)$ is. Dus we hebben laten zien dat $t|_{V_x} \in \psi_{V_x}(V_x)$ voor elke $x \in U$. Met andere woorden: t ligt lokaal in $\psi_U(U)$, dus $t \in \mathrm{Im}(\psi)(U)$. ⊠

We stippen hier even aan dat een een afbeelding een isomorfisme is wanneer hij een tweezijdige inverse heeft. Omdat een morfisme ψ van schoven afhankelijk is van al zijn ringhomomorfismen ψ_U, zien we dat ψ een isomorfisme is precies wanneer elke ψ_U een isomorfisme is. Daarnaast geldt dat een ringhomomorfisme een isomorfisme is precies als hij bijectief is, ofwel injectief en surjectief is. Nu zullen we onze eerder beloofde propositie geven:

Propositie 4.5.10 ([4], 1.1) *Neem $\mathcal{F}$ en $\mathcal{G}$ twee schoven van ringen op X en een morfisme $\psi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$. Dan geldt:*
ψ is een isomorfisme precies als ψ_x een isomorfisme is voor elke $x \in X$.

Bewijs: De ene kant op is eigenlijk al bewezen:
Stel ψ is een isomorfisme, dus ψ_U is een isomorfisme voor elke $U \in \mathcal{T}$. Dit betekent dat elke ψ_U een bijectie is. Per definitie geldt nu dat ψ injectief is.

Daarnaast: als elke ψ_U surjectief is, dan betekent dit in het bijzonder dat $\mathrm{Im}(\psi)(U) = \mathcal{G}(U)$, dus ψ is surjectief. Lemma's 4.4.3 en 4.5.9 samen geven ons nu dat elke ψ_x een bijectie is, dus een isomorfisme is.
Stel ψ_x is een isomorfisme, voor elke $x \in X$. Lemma 4.4.3 geeft ons dan dat ψ injectief is. Nu zullen we laten zien dat elke ψ_U surjectief is. We nemen een $U \in \mathcal{T}$ en $t \in \mathcal{G}(U)$ willekeurig en gaan verder met de gegevens van het einde van het bewijs van Lemma 4.5.9, dus we hebben de open overdekking $\{V_x\}_{x \in U}$ van U en voor elke $x \in U$ hebben we een snede $(s_x)|_{V_x} \in \mathcal{F}(V_x)$ zodat $\psi_{V_x}((s_x)|_{V_x}) = t|_{V_x}$. We definiëren voor het gemak $u_x := (s_x)|_{V_x}$ voor elke $x \in U$ (wederom geen kiemen). Voor elke $x, y \in U$ geldt:

$$\begin{aligned}
\psi_{V_x \cap V_y}(u_x|_{V_x \cap V_y}) &= \psi_{V_x}(u_x)|_{V_x \cap V_y} \\
&= (t|_{V_x})|_{V_x \cap V_y} \\
&= (t|_{V_y})|_{V_x \cap V_y} \\
&= \psi_{V_y}(u_y)|_{V_x \cap V_y} \\
&= \psi_{V_x \cap V_y}(u_y|_{V_x \cap V_y})
\end{aligned}$$

En omdat ψ injectief is geeft dit ons $u_x|_{V_x \cap V_y} = u_y|_{V_x \cap V_y}$ voor elke $x, y \in U$, dus de snedes u_x komen overeen in de doorsnede. Nu geeft het plakaxioma van de schoof $\mathcal{F}$ ons een snede $s \in \mathcal{F}(U)$ zodat $s|_{V_x} = u_x$ voor alle $x \in U$. We hebben nu snedes $\psi_U(s), t \in \mathcal{G}(U)$ waarvoor geldt:

$$\psi_U(s)|_{V_x} = \psi_{V_x}(s|_{V_x}) = \psi_{V_x}(u_x) = t|_{V_x} \ ,$$

voor elke $X \in U$. Het uniekheidsaxioma van de schoof $\mathcal{G}$ zegt ons nu dat $\psi_U(s) = t$, dus ψ_U is surjectief. Elke ψ_U is dus een bijectie, dus een isomorfisme. $\boxtimes$

We zullen vanaf nu spreken over dat de schoven $\mathcal{F}$ en $\mathcal{G}$ isomorf zijn, en schrijven $\mathcal{F} \cong \mathcal{G}$, als er een isomorfisme $\psi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ bestaat.

4.6 Verschoving van een preschoof

We hebben al eerder gezien hoe we met behulp van een preschoof een schoof kunnen maken. Er zijn veel manieren om dit te doen, waar heel verschillende schoven uit kunnen komen. Onze vraag is nu of we uit een preschoof $\mathcal{F}$ een schoof kunnen halen, die 'het meest trouw blijft' aan $\mathcal{F}$. De formele benaming en definitie van een schoof die 'het meest trouw blijft' aan de preschoof $\mathcal{F}$ zullen we op de volgende pagina geven.

Definitie 4.6.1 ([5], 2.14) *Neem een preschoof $\mathcal{F}$ van ringen op X. We noemen de schoof $\mathcal{F}^+$ met het bijbehorende morfisme $\phi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^+$ de verschoving van $\mathcal{F}$ als voor elk morfisme $\psi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$, met $\mathcal{G}$ een schoof, er een uniek morfisme $\widetilde{\psi} : \mathcal{F}^+ \longrightarrow \mathcal{G}$ is zodat $\psi = \widetilde{\psi} \circ \phi$, ofwel het volgende diagram commuteert:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\psi"] & \mathcal{F}^+ \arrow[d, "\widetilde{\psi}"] \\ & \mathcal{G} \end{tikzcd}$$

De volgende twee proposities zijn geïnspireerd op Proposition 2.15 van [5].

We zullen nu eerst laten zien dat voor elke preschoof $\mathcal{F}$ er een verschoving $\mathcal{F}^+$ bestaat. Hiervoor gebruiken we ons eerdere morfisme $\chi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^*$, met $\mathcal{F}^*(U) := \prod\limits_{x \in U} \mathcal{F}_x$ en $\chi_U(s) := \prod\limits_{x \in U} s_x$ voor elke $U \in \mathcal{T}$.

Propositie 4.6.2 *Neem $\mathcal{F}$ een preschoof van ringen op X, dan geldt dat $\mathcal{F}^+ :=$ Im(χ) een verschoving is van $\mathcal{F}$.*

Bewijs: Door definitie van Im(χ) weten we dat $\mathcal{F}^+$ een schoof is. Stel we hebben een schoof $\mathcal{G}$ en een morfisme $\psi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$. We definiëren op gelijke wijze als $\mathcal{F}^*$ en $\mathcal{F}^+$, de schoven $\mathcal{G}^*$ en $\mathcal{G}^+ := \mathrm{Im}(\chi_{\mathcal{G}})$, met $\mathcal{G}^*(U) := \prod\limits_{x \in U} \mathcal{G}_x$ voor elke $U \in \mathcal{T}$. Ook definiëren we op gelijke wijze het morfisme $\chi_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}^*$, met $\chi_{\mathcal{G},U}(s) := \prod\limits_{x \in U} s_x$ voor elke $U \in \mathcal{T}$.
We gaan hiermee laten zien dat er een uniek morfisme $\widetilde{\psi} : \mathcal{F}^+ \longrightarrow \mathcal{G}$ is, zodat $\psi = \widetilde{\psi} \circ \chi$.
Middels ψ kunnen we voor elke $U \in \mathcal{T}$ de volgende afbeelding maken:

$$\psi_U^* : \mathcal{F}^*(U) \longrightarrow \mathcal{G}^*(U), \quad \prod_{x \in U} s_x \longmapsto \prod_{x \in U} \psi_x(s_x) \ .$$

We zien door definitie dat elke ψ_U^* een ringhomomorfisme is. Neem $U, V \in \mathcal{T}$ met $V \subset U$ en $\prod\limits_{x \in U} s_x \in \mathcal{F}^*(U)$, dan geldt:

$$\begin{aligned}
\psi_U^*(\prod_{x \in U} s_x)|_V &= (\prod_{x \in U} \psi_x(s_x))|_V \\
&= \prod_{x \in V} \psi_x(s_x) \\
&= \psi_V^*(\prod_{x \in V} s_x) \\
&= \psi_V^*((\prod_{x \in U} s_x)|_V) \ .
\end{aligned}$$

Dit laat ons zien dat ψ^*, de verzameling van deze ψ_U^*'s, een morfisme tussen de schoven $\mathcal{F}^*$ en $\mathcal{G}^*$ is. We zullen later zien dat ψ^* zelfs een morfisme tussen de schoven $\mathcal{F}^+$ en $\mathcal{G}^+$ is! Hiervoor hebben we eerst een andere eigenschap nodig.
Neem een $s \in \mathcal{F}(U)$ willekeurig, dan geldt:

$$\begin{aligned}
\psi_U^* \circ \chi_U(s) &= \psi_U^*(\prod_{x \in U} s_x) \\
&= \psi_U^*(\prod_{x \in U} (U, s)) \\
&= \prod_{x \in U} (U, \psi_U(s)) \\
&= \prod_{x \in U} (\psi_U(s))_x \\
&= \chi_{\mathcal{G},U}(\psi_U(s)) \ ,
\end{aligned}$$

dus $\psi_U^* \circ \chi_U = \chi_{\mathcal{G},U} \circ \psi_U$, ofwel het volgende diagram commuteert:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{F} & \xrightarrow{\chi} & \mathcal{F}^* \\
\downarrow{\scriptstyle \psi} & & \downarrow{\scriptstyle \psi^*} \\
\mathcal{G} & \xrightarrow{\chi_{\mathcal{G}}} & \mathcal{G}^*
\end{array}$$

Stel $s \in \mathrm{Im}(\chi)(U)$, met $U \in \mathcal{T}$ nog steeds willekeurig, dan er is een open overdekking $\{U_k\}_{k \in K}$ van U met snedes $s_k \in \mathcal{F}(U_k)$ zodat $\chi_{U_k}(s_k) = s|_{U_k}$. Samengevoegd geeft dit ons voor elke $k \in K$:

$$\begin{aligned}
\psi_U^*(s)|_{U_k} &= \psi_{U_k}^*(s|_{U_k}) \\
&= \psi_{U_k}^*(\chi_{U_k}(s_k)) \\
&= \chi_{\mathcal{G},U_k}(\psi_{U_k}(s_k)) \ .
\end{aligned}$$

Met andere woorden: $\psi^*_U(s)$ ligt lokaal in $\chi_{\mathcal{G},U}(U)$, dus $\psi^*_U(s) \in \mathrm{Im}(\chi_{\mathcal{G}})(U)$. Er geldt dus dat $\psi^*_U : \mathrm{Im}(\chi)(U) \longrightarrow \mathrm{Im}(\chi_{\mathcal{G}})(U)$ voor elke $U \in \mathcal{T}$, dus ψ^* is inderdaad ook een morfisme tussen de schoven $\mathcal{F}^+$ en $\mathcal{G}^+$.
Als we $\chi_{\mathcal{G}}$ zien als morfisme van $\mathcal{G}$ naar $\mathcal{G}^+$, dan geldt dat $\chi_{\mathcal{G}}$ surjectief is (per definitie van $\mathcal{G}^+$). Omdat $\mathcal{G}$ een schoof is, geeft Lemma 4.3.6 ons dat $\chi_{\mathcal{G}}$ injectief is, dus $\chi_{\mathcal{G}}$ is zelfs bijectief. Lemma 4.4.3 en 4.5.9 samen geeft ons dat $\chi_{\mathcal{G},x}$ een bijectie is, dus een isomorfisme, voor elke $x \in X$. Propositie 4.5.10 zegt ons nu dat $\chi_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}^+$ een isomorfisme is. Dit geeft ons het morfisme $\chi_{\mathcal{G}}^{-1} : \mathcal{G}^+ \longrightarrow \mathcal{G}$. We definiëren hiermee het gezochte morfisme $\widetilde{\psi}$ als volgt: $\widetilde{\psi} := \chi_{\mathcal{G}}^{-1} \circ \psi^*$. We zien dat $\psi = \widetilde{\psi} \circ \chi$.
Nu zullen we laten zien dat $\widetilde{\psi}$ uniek is. Stel er is nog een morfisme $\widetilde{\psi}' : \mathcal{F}^+ \longrightarrow \mathcal{G}$ zodat $\psi = \widetilde{\psi}' \circ \chi$, dan zullen we laten zien dat $\widetilde{\psi}' = \widetilde{\psi}$, dus $\widetilde{\psi}'_U = \widetilde{\psi}_U$ voor elke $U \in \mathcal{T}$.
Stel $s \in \mathrm{Im}(\chi)(U)$, met $U \in \mathcal{T}$ willekeurig, dan er is een open overdekking $\{U_k\}_{k \in K}$ van U met snedes $s_k \in \mathcal{F}(U_k)$ zodat $\chi_{U_k}(s_k) = s|_{U_k}$. Omdat $\widetilde{\psi} \circ \chi = \psi = \widetilde{\psi}' \circ \chi$, geldt er

$$\begin{aligned}
\widetilde{\psi}'_{U_k}(s|_{U_k}) &= \widetilde{\psi}'_{U_k}(\chi_{U_k}(s_k)) \\
&= \widetilde{\psi}'_{U_k} \circ \chi_{U_k}(s_k) \\
&= \psi_{U_k}(s_k) \\
&= \widetilde{\psi}_{U_k} \circ \chi_{U_k}(s_k) \\
&= \widetilde{\psi}_{U_k}(\chi_{U_k}(s_k)) \\
&= \widetilde{\psi}_{U_k}(s|_{U_k})
\end{aligned}$$

voor elke $k \in K$. Omdat $\widetilde{\psi}$ en $\widetilde{\psi}'$ beide morfismen tussen schoven zijn, geldt er ook

$$\begin{aligned}
\widetilde{\psi}'_U(s)|_{U_k} &= \widetilde{\psi}'_{U_k}(s|_{U_k}) \\
&= \widetilde{\psi}_{U_k}(s|_{U_k}) \\
&= \widetilde{\psi}_U(s)|_{U_k}
\end{aligned}$$

voor elke $k \in K$. Omdat $\mathcal{G}$ een schoof is, geeft het uniekheidsaxioma ons nu dat $\widetilde{\psi}'_U(s) = \widetilde{\psi}_U(s)$.
Dit geldt dus voor elke $U \in \mathcal{T}$ en $s \in \mathcal{F}^+(U)$, dus $\widetilde{\psi}' = \widetilde{\psi}$ en we hebben hiermee bewezen dat $\widetilde{\psi}$ uniek is. $\boxtimes$

Nu we weten dat een verschoving bestaat, kunnen we enkele eigenschappen van een verschoving geven.

Propositie 4.6.3 *Een verschoving $\mathcal{F}^+$ van preschoof $\mathcal{F}$ is uniek op uniek isomorfisme na.*

Bewijs: Stel we hebben twee verschovingen $\mathcal{F}_1^+$ en $\mathcal{F}_2^+$ van preschoof $\mathcal{F}$, met bijbehorende morfismen $\psi_i : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}_i^+$. Omdat $\mathcal{F}_1^+$ in het bijzonder een schoof is zegt Definitie 4.6.1 dat er een uniek morfisme $\widetilde{\psi_1} : \mathcal{F}_2^+ \longrightarrow \mathcal{F}_1^+$ is, zodat $\psi_1 = \widetilde{\psi_1} \circ \psi_2$ (*). Met dezelfde argumenten voor de schoof $\mathcal{F}_2^+$ is er ook een uniek morfisme $\widetilde{\psi_2} : \mathcal{F}_1^+ \longrightarrow \mathcal{F}_2^+$ is, zodat $\psi_2 = \widetilde{\psi_2} \circ \psi_1$ (**). Als we deze laatste gelijkheid bij gelijkheid (*) invullen, krijgen we:

$$\psi_1 = \widetilde{\psi_1} \circ (\widetilde{\psi_2} \circ \psi_1) = (\widetilde{\psi_1} \circ \widetilde{\psi_2}) \circ \psi_1,$$

dus $\widetilde{\psi_1} \circ \widetilde{\psi_2} = id_{\mathcal{F}_1^+}$; de identiteitsafbeelding van $\mathcal{F}_1^+$. Als we gelijkheid (*) invullen bij gelijkheid (**), krijgen we:

$$\psi_2 = \widetilde{\psi_2} \circ (\widetilde{\psi_1} \circ \psi_2) = (\widetilde{\psi_2} \circ \widetilde{\psi_1}) \circ \psi_2,$$

dus $\widetilde{\psi_2} \circ \widetilde{\psi_1} = id_{\mathcal{F}_2^+}$; de identiteitsafbeelding van $\mathcal{F}_2^+$.
Dit laat ons zien dat het unieke morfisme $\widetilde{\psi_1}$ een tweezijdige inverse $\widetilde{\psi_2}$ heeft. Dit betekent dat $\mathcal{F}_1^+ \cong \mathcal{F}_2^+$ middels het unieke isomorfisme $\widetilde{\phi_1}$. ⊠

Gevolg 4.6.4 *Als $\mathcal{F}$ een schoof is, dan geldt $\mathcal{F} \cong \mathcal{F}^+$ voor elke verschoving $\mathcal{F}^+$ van $\mathcal{F}$.*

Bewijs: Als $\mathcal{F}$ een schoof is, dan is deze ook zijn eigen verschoving. Propositie 4.6.3 geeft ons nu $\mathcal{F} \cong \mathcal{F}^+$ voor elke verschoving $\mathcal{F}^+$ van $\mathcal{F}$. ⊠

4.7 (Pre)schoven op een basis

Deze paragraaf is inhoudelijk niet meer dan een samenvatting van de voorgaande paragraven, vandaar dat hier geen specifieke referenties te vinden zijn.

Wanneer we een basis $\mathcal{B}$ voor een topologische ruimte X hebben, kunnen we onszelf ook afvragen: als we een schoof op X willen maken, is het dan voldoende om deze schoof alleen voor elementen van $\mathcal{B}$ te definiëren, in plaats van voor alle elementen van $\mathcal{T}$? Aangezien voor elke $U \in \mathcal{T}$ geldt $U = \bigcup_{k \in K} B_k$ met $B_k \in \mathcal{B}$, kunnen we wellicht $\mathcal{F}(U)$ structureel met behulp van deze $\mathcal{F}(B_k)$'s definiëren.

Definitie 4.7.1 *Laat X een topologische ruimte zijn met $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ een basis voor X. We noemen $\mathcal{F}$ een $\mathcal{B}$-preschoof van ringen op X, wanneer $\mathcal{F}$ voldoet aan de eigenschappen van Definitie 4.1.1, maar dan voor alle elementen van $\mathcal{B}$ in plaats van alle elementen van $\mathcal{T}$.*

Wanneer we kijken naar de definitie voor een schoof van ringen op X wordt duidelijk dat we deze eigenschappen niet zo simpel kunnen omzetten voor de definitie van een $\mathcal{B}$-schoof; wanneer we twee elementen $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ nemen, hoeft helemaal niet te gelden dat $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$. Wel weten we dat $B_1 \cap B_2$ een vereniging is van elementen van $\mathcal{B}$. Dit leidt tot het idee om soortgelijke eisen te stellen aan alle elementen van $\mathcal{B}$ die in $B_1 \cap B_2$ bevat zijn.

Definitie 4.7.2 *Laat X een topologische ruimte zijn, met $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ een basis voor X.*
Een $\mathcal{B}$-schoof van ringen, $\mathcal{F}$, op de topologische ruimte X is een $\mathcal{B}$-preschoof van ringen op X die aan de eigenschap voldoet dat als $\{B_k\}_{k \in K} \subset \mathcal{B}$ een open overdekking is van B en $B \in \mathcal{B}$, dan geldt:

i) Als er voor elke $i \in K$ een snede $s_i \in \mathcal{F}(B_i)$ is en deze s_i's stemmen met elkaar overeen in alle basis open verzamelingen die bevat zijn in de doorsneden, dat wil zeggen: voor elke $i, j \in K$ geldt $s_i|_{B'} = s_j|_{B'}$ voor alle $B' \in \mathcal{B}$ zodat $B' \subset B_i \cap B_j$, dan is er een snede $s \in \mathcal{F}(B)$ zodat geldt $s|_{B_i} = s_i$ voor alle $i \in K$.

ii) Als er voor twee snedes $s, t \in \mathcal{F}(B)$ geldt $s|_{B_k} = t|_{B_k}$ voor alle $k \in K$, dan geldt $s = t$.

Als $\mathcal{B}$ een basis is voor X dan gebruiken we voor elke $x \in X$ de bewezen lokale basis $\mathcal{B}(x) := \{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}$ uit Lemma 2.2.9 om de $\mathcal{B}$-staak $\mathcal{F}_x^{\mathcal{B}}$ te definiëren:

Definitie 4.7.3 *Laat X een topologische ruimte zijn met $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ een basis voor X en $\mathcal{F}$ een $\mathcal{B}$-(pre)schoof van ringen op X. Voor elke $x \in X$ definiëren we de $\mathcal{B}$-staak $\mathcal{F}_x^{\mathcal{B}}$ op gelijke wijze als in Definitie 4.3.3, alleen vervangen we de gerichte verzameling $\mathcal{T}(x)$ met zijn deelverzameling $\mathcal{B}(x)$.*

Er geldt nog steeds dat $\mathcal{F}_x^{\mathcal{B}}$ een ring is voor elke $x \in X$. Stel $(B', s), (B'', t) \in \mathcal{F}_x^{\mathcal{B}}$, dan definiëren we de volgende operaties:

i) $(B', s) + (B'', t) := (B, s|_B + t|_B)$

ii) $(B', s) \cdot (B'', t) := (B, s|_B \cdot t|_B)$, waarbij $B \in \mathcal{B}(x)$ zodat $B \subset B' \cap B''$. Omdat $B' \cap B'' \in \mathcal{T}(x)$ en elke $\mathcal{B}(x)$ een lokale basis is, bestaat deze B altijd. Op gelijke wijze als in Propositie 4.3.4 kunnen we bewijzen dat deze operaties goed gedefiniëerd zijn en van $\mathcal{F}_x^{\mathcal{B}}$ een ring maken.

We merken nu ook op dat het voldoende is om een staak $\mathcal{F}_x$ van een (pre)schoof $\mathcal{F}$ van ringen op X te definiëren met behulp van de verzameling $\mathcal{B}(x)$; voor elke $(U, s) \in \mathcal{F}_x$ is er een $B \in \mathcal{B}(x)$ zodat $B \subset U$ (want $U \in \mathcal{T}(x)$) en zien we dat we (U, s) kunnen representeren met $(B, s|_B)$. Ook kunnen we met dezelfde argumenten, als $(U, s) = (V, t)$ in $\mathcal{F}_x$, een $B \in \mathcal{B}(x)$ vinden zodat $B \subset U \cap V$ en $s|_B = t|_B$.

Definitie 4.7.4 *Als $\mathcal{F}$ een schoof van ringen op X is met $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ een basis voor X, dan noemen we $\mathcal{H}_{\mathcal{B}}$ een $\mathcal{B}$-deel(pre)schoof van $\mathcal{F}$ als geldt:*

i) *$\mathcal{H}_{\mathcal{B}}$ is een $\mathcal{B}$-(pre)schoof van ringen op X.*

ii) *$\mathcal{H}_{\mathcal{B}}(B) \subset \mathcal{F}(B)$ voor alle $B \in \mathcal{B}$.*

iii) *De restrictie van $\mathcal{H}_{\mathcal{B}}$ komt overeen met de restrictie van $\mathcal{F}$ op $\mathcal{B}$.*

Als $\mathcal{H}_{\mathcal{B}}$ een $\mathcal{B}$-deelpreschoof van de schoof $\mathcal{F}$ is, kunnen we een $\mathcal{B}$-verzadiging $\overline{\mathcal{H}_{\mathcal{B}}}$ maken:

$$\overline{\mathcal{H}_{\mathcal{B}}}(U) := \{s \in \mathcal{F}(U) \mid s \text{ ligt } \mathcal{B}\text{-lokaal in } \mathcal{H}_{\mathcal{B}}(U)\} \text{ voor alle } U \in \mathcal{T}\,,$$

waarmee we met "ligt $\mathcal{B}$-lokaal in" bedoelen dat de desbetreffende overdekking $\mathcal{U}$ bestaat uit elementen van $\mathcal{B}$. Ook is $\mathcal{H}_{\mathcal{B}}(U)$ hier een misbruik van notatie (voor $U \notin \mathcal{B}$ is hij niet gedefiniëerd), maar we zien door de uitleg van "ligt $\mathcal{B}$-lokaal in" dat $\overline{\mathcal{H}_{\mathcal{B}}}(U)$ alleen gebruik maakt van de ringen $\mathcal{H}_{\mathcal{B}}(B)$ met $B \in \mathcal{B}$, dus laten we dit hier toe.

Lemma 4.7.5 *$\overline{\mathcal{H}_{\mathcal{B}}}$ is de kleinste deelschoof van $\mathcal{F}$ zodat $\mathcal{H}_{\mathcal{B}} \subset \overline{\mathcal{H}_{\mathcal{B}}}$.*

Bewijs: Het bewijs dat dit de kleinste deelschoof van $\mathcal{F}$ is zodat $\mathcal{H}_{\mathcal{B}}(B) \subset \overline{\mathcal{H}_{\mathcal{B}}}(B)$ voor elke $B \in \mathcal{B}$, gaat op gelijke wijze als het bewijs van Propositie 4.5.3, daarom zullen we deze kort belopen.
Stel we hebben een open overdekking $\mathcal{U}\{U_k\}_{k \in K}$ van U met snedes $s_k \in \overline{\mathcal{H}_{\mathcal{B}}}(U_k)$ die overeenkomen in de doorsneden. Dit geeft ons door definitie voor elke $i \in K$ een open basis overdekking $\mathcal{U}_i = \{B_{i_j}\}_{j \in K_i}$ zodat $s_{i,j} := s_i|_{B_{i_j}} \in \mathcal{H}_{\mathcal{B}}(B_{i_j})$ voor elke $j \in K_i$. We vervangen elke U_i met de elementen van $\mathcal{U}_i$ en vervangen elke snede s_i met de snedes $s_{i,j}$. De schoof $\mathcal{F}$ geeft ons nu een $s \in \mathcal{F}(U)$ en we zien dat $s \in \overline{\mathcal{H}_{\mathcal{B}}}$. Ook zien we dat als $\mathcal{H}_{\mathcal{B}}$ een $\mathcal{B}$-schoof is, dat $\overline{\mathcal{H}_{\mathcal{B}}}(B) = \mathcal{H}_{\mathcal{B}}(B)$ voor alle $B \in \mathcal{B}$. ⊠

We zullen nu laten zien dat als $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ een $\mathcal{B}$-schoof is, we deze kunnen 'uitbreiden' tot een schoof $\mathcal{F}$. We zien dat de voorgaande vier definities veel overeenkomsten hebben met de oorspronkelijke. Het zal daarom ook niet verbazen dat we veel soortgelijke stappen zullen uitvoeren om te bewijzen dat we elke $\mathcal{B}$-schoof kunnen uitbreiden. Om niet (teveel) in herhaling te vallen, zullen we wat vlotter door deze stappen gaan als voorheen.

`Stap 1:` Eerst laten we zien dat we met elke $\mathcal{B}$-(pre)schoof $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ een schoof $\mathcal{F}^*$ kunnen maken.
We definiëren deze op gelijke wijze als $\mathcal{F}^*$ van Propositie 4.4.4 met dezelfde restrictie, alleen gebruiken we nu de gerichte verzameling $\mathcal{B}(x)$ voor elke $x \in X$:

$$\mathcal{F}^*(U) := \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x^{\mathcal{B}} \text{ voor elke } U \in \mathcal{T} .$$

Het is duidelijk dat dit nog steeds een schoof van ringen op X is.

`Stap 2:` We maken een afbeelding $\chi : \mathcal{F}_{\mathcal{B}} \longrightarrow \mathcal{F}^*$ op gelijke wijze als het morfisme χ van Lemma 4.3.6:

$$\chi_B(s) := \prod_{x \in B} s_x^{\mathcal{B}} \text{ voor elke } B \in \mathcal{B} .$$

`Stap 3:` We maken hier een beeldschoof $\mathcal{F}$ van op gelijke wijze als in Propositie 4.6.2, maar dan met behulp van opens in $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{F}(U) := \{\prod_{x \in U} s_x^{\mathcal{B}} \in \mathcal{F}^*(U) \mid \prod_{x \in U} s_x^{\mathcal{B}} \text{ ligt } \mathcal{B}\text{-lokaal in } \chi_U(U)\} \text{ voor alle } U \in \mathcal{T},$$

Op gelijke wijze als de bewijzen van de vorige paragraaf kunnen we bewijzen dat $\mathcal{F}$ uniek is op uniek isomorfisme en dat als $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ een $\mathcal{B}$-schoof is, dat $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(B) \cong \mathcal{F}(B)$ voor alle $B \in \mathcal{B}$. Dit is wat we bedoelen met het 'uitbreiden' van een $\mathcal{B}$-schoof. We zullen dit belangrijke resultaat nog even formeel als stelling benoemen.

Stelling 4.7.6 *Laat X een topologische ruimte zijn met $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ een basis en $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ een $\mathcal{B}$-schoof van ringen op X, dan kunnen we $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ uitbreiden tot een schoof $\mathcal{F}$ van ringen op X zodat $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(B) \cong \mathcal{F}(B)$ voor alle $B \in \mathcal{B}$. Deze schoof is uniek op uniek isomorfisme na.*

Hoofdstuk 5

De structuurschoof van Spec(R)

Wanneer we een schoof van ringen, $\mathcal{O}_X$, op een topologische ruimte X hebben, noemen we $\mathcal{O}_X$ de structuurschoof van X. Het paar $(X, \mathcal{O}_X)$ noemen we een geringde ruimte.
We noemen dit paar een lokaal geringde ruimte als elke staak $\mathcal{O}_{X,x}$ een lokale ring is, dus precies één maximaal ideaal heeft (Definitie 2.1.10).

5.1 Introductie

Deze paragraaf is gebaseerd op bladzijde 68 en 69 van [2].

We zullen in dit hoofdstuk de structuurschoof van Spec(R) maken. Het kunnen definiëren van deze schoof en bewijzen dat het überhaupt een schoof is, berust grotendeels op het volgende lemma:

Lemma 5.1.1 *Voor alle $g, f_1, \ldots, f_k \in R$ geldt $X_g \subset \bigcup_{i=1}^{k} X_{f_i}$ precies als $g \in r(\langle f_1, \ldots, f_k \rangle)$.*

Bewijs: Allereerst merken we op dat $\bigcup_{i=1}^{k} X_{f_i} = X_{\{f_1,\ldots,f_k\}}$, zoals we hebben gezien in het bewijs van Lemma 3.3.6. Ook weten we door Propositie 3.3.7 en Lemma 3.2.3 dat

$$r(\langle f_1, \ldots, f_k \rangle) = \bigcap \{P \mid [P] \in V(\{f_1, \ldots, f_k\})\} .$$

Dit geeft:

$$\begin{aligned} g \in r(\langle f_1, \ldots, f_k \rangle) &\iff g \in \bigcap \{P \mid [P] \in V(\{f_1, \ldots, f_k\})\} \\ &\iff \forall [P] \in \mathrm{Spec}(R) : (f_1, \ldots, f_k \in P \Longrightarrow g \in P) \\ &\iff \forall [P] \in \mathrm{Spec}(R) : (g \notin P \Longrightarrow \exists i : f_i \notin P) \\ &\iff X_g \subset X_{\{f_1,\ldots,f_k\}} = \bigcup_{i=1}^{k} X_{f_i} \end{aligned}$$

en is ons lemma bewezen. ⊠

Stel $X_g \subset X_f$, dan weten we nu dat er een $k > 0$ en $h \in R$ is zodat $g^k = hf$. We kunnen hiermee de volgende afbeelding maken:

$$\psi_g^f : R_f \longrightarrow R_g, \quad \frac{a}{f^n} \longmapsto \frac{ah^n}{g^{kn}}$$

Allereerst merken we op dat deze afbeelding niet afhankelijk is van de keuze van deze k en h. Stel we vinden nog een $k' > 0$ en $h' \in R$ zodat $g^{k'} = h'f$, dan geldt voor elke $\frac{a}{f^n} \in R_f$ dat

$$ah^n g^{k'n} = ah^n (g^{k'})^n = ah^n h'^n f^n = ah'^n (hf)^n = ah'^n g^{kn},$$

ofwel dat $\frac{ah^n}{g^{kn}} = \frac{ah'^n}{g^{k'n}}$. Elk element wordt nog steeds naar hetzelfde element gestuurd en dus blijft ψ_g^f hetzelfde.
Wanneer we in de volgende lemma's zullen werken met de eigenschap $X_g \subset X_f$, zullen we zonder melding gebruik maken van bovenstaand gevonden $k > 0$ en $h \in R$ zodat $g^k = hf$. We merken op dat we deze elementen voor elke $a, b \in R$ met $X_a \subset X_b$ kunnen vinden.

Lemma 5.1.2 *ψ_g^f is een ringhomomorfisme.*

Bewijs: We zien dat $\frac{1}{f^0} = \frac{1}{1}$ het eenheidselement van R_f is en $\psi_g^f(\frac{1}{f^0}) = \frac{h^0}{g^{k\cdot 0}} = \frac{1}{1}$. We nemen nu $\frac{a}{f^n}, \frac{a'}{f^{n'}} \in R_f$ en zien dat:

$$\begin{aligned}
\psi_g^f(\frac{a}{f^n} + \frac{a'}{f^{n'}}) &= \psi_g^f(\frac{af^{n'} + a'f^n}{f^{n+n'}}) \\
&= \frac{(af^{n'} + a'f^n)h^{n+n'}}{g^{k(n+n')}} \\
&= \frac{ah^n(hf)^{n'} + a'h^{n'}(hf)^n}{g^{k(n+n')}} \\
&= \frac{ah^n g^{kn'} + a'h^{n'}g^{kn}}{g^{kn}g^{kn'}} \\
&= \frac{ah^n}{g^{kn}} + \frac{a'h^{n'}}{g^{kn'}} \\
&= \psi_g^f(\frac{a}{f^n}) + \psi_g^f(\frac{a'}{f^{n'}})
\end{aligned}$$

en ook

$$\begin{aligned}
\psi_g^f(\frac{a}{f^n} \cdot \frac{a'}{f^{n'}}) &= \psi_g^f(\frac{aa'}{f^{n+n'}}) \\
&= \frac{aa'h^{n+n'}}{g^{k(n+n')}} \\
&= \frac{ah^n}{g^{kn}} \cdot \frac{a'h^{n'}}{g^{kn'}} \\
&= \psi_g^f(\frac{a}{f^n}) \cdot \psi_g^f(\frac{a'}{f^{n'}}) \,.
\end{aligned}$$

We zien dat ψ_g^f aan de drie eigenschappen van een ringhomomorfisme voldoet. ⊠

Voor elke $[P] \in X_f$ geldt dat $f^n \notin P$ voor elke $n \geq 0$. Zodoende geldt $\frac{a}{f^n} \in R_P$ voor elke $a \in R$ en $n \geq 0$. Ook zien we dat als $\frac{a}{f^n} = \frac{a'}{f^{n'}}$ in R_f, dus $f^k(af^{n'} - a'f^n) = 0$ voor een $k \geq 0$, dat deze gelijkheid ook laat zien dat $\frac{a}{f^n} = \frac{a'}{f^{n'}}$ in R_P (want $f^k \notin P$). Dit betekent dat de natuurlijke afbeelding

$$\eta_P^f : R_f \longrightarrow R_P$$

die de equivalenteklasse $\frac{a}{f^k} \in R_f$ stuurt naar de equivalentieklasse $\frac{a}{f^k} \in R_P$, goed gedefiniëerd is voor elke $[P] \in X_f$. Ook zien we dat dit een ringhomomorfisme is.

Let op: de schrijfwijze suggereert wellicht anders, maar de equivalentieklasse $\frac{a}{f^n} \in R_f$ hoeft absoluut niet gelijk te zijn aan de equivalentieklasse $\frac{a}{f^n} \in R_P$.

Lemma 5.1.3 *Als $X_g \subset X_f$, dan geldt $\eta_P^f = \eta_P^g \circ \psi_g^f$ voor alle $[P] \in X_g$.*

Bewijs: Stel $X_g \subset X_f$. We nemen een $\frac{a}{f^n} \in R_f$ willekeurig en gebruiken $g^k = hf$ om te zien dat

$$ag^{kn} = a(g^k)^n = a(hf)^n = ah^n f^n \; .$$

Dit geeft ons voor elke $[P] \in X_g$:

$$\begin{aligned} \eta_P^f(\frac{a}{f^n}) &= \frac{a}{f^n} \\ &= \frac{ah^n}{g^{nk}} \\ &= \eta_P^g \circ \psi_g^f(\frac{a}{f^n}) \; , \end{aligned}$$

ofwel $\eta_P^f = \eta_P^g \circ \psi_g^f$. ⊠

Lemma 5.1.4 *Als $X_g = X_f$, dan geldt $X_f \cong X_g$.*

Bewijs: Er geldt $X_g = X_f$ precies als $X_f \subset X_g$ en $X_g \subset X_f$. Dit geeft ons een $k, k' > 0$ en $h, h' \in R$ zodat $g^k = hf$ en $f^{k'} = h'g$. We nemen de bijbehorende ringhomomorfismen ψ_g^f en ψ_f^g. Voor een $\frac{a}{f^n} \in R_f$ willekeurig geldt:

$$\psi_f^g \circ \psi_g^f : R_f \longrightarrow R_f, \; \frac{a}{f^n} \longmapsto \frac{ah^n}{g^{kn}} \longmapsto \frac{ah^n h'^{kn}}{f^{k'kn}} \; .$$

We zien dat:

$$af^{k'kn} = a(f^{k'})^{kn} = a(h'g)^{kn} = ah'^{kn}(g^k)^n = ah'^{kn}(hf)^n = ah^n h'^{kn} f^n \; ,$$

dus $\frac{a}{f^n} = \frac{ah^n h'^{kn}}{f^{k'kn}}$ in R_f en geldt $\psi_f^g \circ \psi_g^f = id_{R_f}$. Met gelijksoortige argumenten zien we dat $\psi_g^f \circ \psi_f^g = id_{R_g}$, dus ψ_g^f en ψ_f^g zijn isomorfismen en elkaars inversen. ⊠

5.2 Definitie structuurschoof op $\mathcal{B}^z$

Vanwege dit laatste lemma kunnen we elke $X_f \in \mathcal{B}^z$, met $\mathcal{B}^z$ de basis voor $\mathrm{Spec}(R)$ uit Lemma 3.3.5, laten corresponderen met een ring middels de functor $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(R)}$, die we als volgt definiëren:

$$\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(R)}(X_f) := R_f \; ,$$

en voor elke $X_f, X_g \in \mathcal{B}^z$ met $X_g \subset X_f$ definiëren we het volgende ringhomomorfisme:

$$\rho_{X_g}^{X_f} := \psi_g^f$$

We zien dat $\rho_{X_f}^{X_f}$ de identiteitsafbeelding is voor elke $f \in R$. Ook geldt voor elke $X_{f_1} \subset X_{f_2} \subset X_{f_3}$ met bijbehorende vergelijkingen $(f_i)^{k_i} = h_i f_{i+1}$ voor $i = 1, 2$, dat $f_1^{k_1+k_2} = (f_1^{k_1})^{k_2} = (h_1 f_2)^{k_2} = (h_1^{k_2} h_2) f_3$. Dit betekent dat $\rho_{X_{f_1}}^{X_{f_3}} = \rho_{X_{f_1}}^{X_{f_2}} \circ \rho_{X_{f_2}}^{X_{f_3}}$.

Alles samengevoegd hebben we laten zien dat $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(R)}$ voldoet aan de eigenschappen van Definitie 4.7.1 en dus dat $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(R)}$ een $\mathcal{B}$-preschoof van ringen op $\mathrm{Spec}(R)$ is. We zullen laten zien dat $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(R)}$ zelfs een $\mathcal{B}$-schoof van ringen op $\mathrm{Spec}(R)$ is. Voor we dit kunnen bewijzen, hebben we nog twee lemma's en één propositie nodig. Deze zullen we nu geven.

Lemma 5.2.1 ([2], blz. 69) *Stel $X_f = \bigcup_{k \in K} X_{g_k}$ en er is een $\frac{a}{f^n} \in R_f$ zodat $\frac{a}{f^n}|_{X_{g_k}} = 0$ voor alle $k \in K$, dan geldt $\frac{a}{f^n} = 0$ in R_f.*

Bewijs: We bewijzen dit door middel van een contradictie. Hiervoor gebruiken we het volgende ideaal: $A := \{d \in R \mid da = 0\}$.

Stel $\frac{a}{f^n} \neq 0$ in R_f, dan betekent dit dat $f^m(a \cdot 1 - 0 \cdot f^n) \neq 0$, ofwel $f^m a \neq 0$, voor alle $m \geq 0$. Dit zegt ons dat $A \neq \langle 1 \rangle$. Lemma 2.1.9 zegt ons dat $A \subset P$ voor een $[P] \in \mathrm{Spec}(R)$. Omdat in het bijzonder $fa \neq 0$, zien we dat $[P] \in X_f$. Door aanname is er een $k \in K$ zodat $[P] \in X_{g_k}$.

We gebruiken Lemma 5.1.3 om te zien dat

$$\eta_P^f\left(\frac{a}{f^n}\right) = \eta_P^{g_k}\left(\frac{a}{f^n}|_{X_{g_k}}\right) = \eta_P^{g_k}(0_{R_{g_k}}) = 0_{R_P} ,$$

dus er is een $b \notin P$ zodat $ba = 0$. Dit zegt ons dat $b \in A$, maar $A \subset P$. $\lightning$ $\boxtimes$

Het volgende lemma en Stelling 5.2.4 zijn gebaseerd op bladzijde 70 van [2] en Proposition 3.1 van [5].

Lemma 5.2.2 *Stel $X_1 = \bigcup_{i=1}^{N} X_{g_i}$ en we hebben $\frac{a_i}{g_i^{k_i}} \in R_{g_i}$ voor elke i met de eigenschap dat $\frac{a_i}{g_i^{k_i}}|_{X_{g_i g_j}} = \frac{a_j}{g_j^{k_j}}|_{X_{g_i g_j}}$ voor elke i, j, dan is er een $\frac{a}{1} \in R_1$ zodat $\frac{a}{1}|_{X_{g_i}} = \frac{a_i}{g_i^{k_i}}$ voor elke i.*

Bewijs: We beginnen we met de opmerking dat voor elke i geldt dat $\frac{a_i}{g_i^{k_i}} = \frac{a_i g_i^t}{g_i^{k_i+t}}$ voor elke $t \geq 0$. We definiëren $n := \max\{k_i\}$ en $b_i := a_i g_i^{n-k_i}$, zodat we voor elke i kunnen werken met $\frac{b_i}{g_i^n}$ in plaats van $\frac{a_i}{g_i^{k_i}}$.

Zoals we hebben bewezen is elk ringhomomorfisme $\psi_{g_i g_j}^{g_i}$ onafhankelijk van de keuze voor d_i en e_i zodat $(g_i g_j)^{d_i} = e_i g_i$. Daarom kunnen wij kiezen voor $d_i = 1$ en $e_i = g_j$ en zien we dat $\frac{b_i}{g_i^n}|_{X_{g_i g_j}} = \frac{b_i g_j^n}{(g_i g_j)^n}$ voor elke i, j. Door aanname hebben we nu $\frac{b_i g_j^n}{(g_i g_j)^n} = \frac{b_j g_i^n}{(g_i g_j)^n}$, dus $(g_i g_j)^{k_{i,j}} \left(b_i g_j^n (g_i g_j)^n - b_j g_i^n (g_i g_j)^n \right) = 0$ voor een $k_{i,j} \geq 0$, voor elke i, j. We definiëren $M := \max\{n + k_{i,j}\}$ en zien dat we hiermee deze gelijkheden kunnen vereenvoudigen tot:

$$(g_i g_j)^M b_i g_j^n = (g_i g_j)^M b_j g_i^n \tag{5.1}$$

voor elke i, j. Zoals bewezen in Lemma 3.3.9 geldt $X_a \cap X_b = X_{ab}$ voor alle $a, b \in R$, dus zien we dat $X_{g_i} = \bigcap_{j=1}^{M+n} X_{g_i} = X_{g_i^{M+n}}$ voor elke i, dus $X_1 = \bigcup_{i=1}^{N} X_{g_i^{M+n}}$ en dit geeft

$$1 = \sum_{i=1}^{N} h_i g_i^{M+n} \tag{5.2}$$

met $h_i \in R$. Hiermee definiëren we $a := \sum_{i=1}^{N} h_i g_i^M b_i$. We zien dat $\frac{a}{1} \in R_1$ en dat $\frac{a}{1}|_{X_{g_i}} = \frac{a g_i^M}{g_i^M}$ voor elke i. We zullen nu (5.1) en (5.2) gebruiken om te laten zien dat $a g_i^{M+n} = b_i g_i^M$ voor elke i:

$$\begin{aligned} a g_i^{M+n} &= \sum_{j=1}^{N} h_j g_j^M b_j g_i^{M+n} \\ &= \sum_{j=1}^{N} h_j (g_i g_j)^M b_j g_i^n \\ &= \sum_{j=1}^{N} h_j (g_i g_j)^M b_i g_j^n \\ &= b_i g_i^M \sum_{j=1}^{N} h_j g_j^{M+n} \\ &= b_i g_i^M . \end{aligned}$$

Waardoor we hebben aangetoond dat

$$\frac{a}{1}|_{X_{g_i}} = \frac{a g_i^M}{g_i^M} = \frac{b_i}{g_i^n} = \frac{a_i}{g_i^{k_i}}$$

voor elke i. ⊠

In het bewijs van de volgende propositie, die is gebaseerd op Proposition 3.11 van [1], maken we gebruik van het concept contractie en extensie van een ideaal. We hebben deze niet eerder benoemd, maar voor dit bewijs betekent het niets meer dan het versimpelen van de schrijfwijze.

Propositie 5.2.3 *De verzameling priemidealen van $S^{-1}R$ is isomorf met de verzameling priemidealen $P \subset R$ waarvoor geldt $P \cap S = \emptyset$.*

Bewijs: Voor het gemak schrijven we $A := \{[P] \in \mathrm{Spec}(R) \mid P \cap S = \emptyset\}$ en $B := \mathrm{Spec}(S^{-1}R)$. Voor elke lokalisatie van R in S kunnen we het volgende natuurlijke ringhomomorfisme definiëren:

$$\sigma : R \longrightarrow S^{-1}R, \;\; a \longmapsto \frac{a}{1} \, .$$

Middels dit natuurlijke ringhomomorfisme zullen we nu de volgende twee afbeeldingen definiëren:

$$\phi : A \ni [\alpha] \longmapsto [\alpha^e := \langle \sigma(\alpha) \rangle]$$
$$\psi : B \ni [\beta] \longmapsto [\beta^c := \sigma^{-1}(\beta)]$$

We beweren dat ϕ de bijectie is voor het te bewijzen isomorfisme. Dit kunnen we bewijzen door te laten zien dat $\phi : A \longrightarrow B$ en dat ψ zijn inverse is. Dit geeft ons de volgende te bewijzen beweringen:

i) $[\alpha^e] \in B$ voor alle $[\alpha] \in A$.

ii) $[\beta^c] \in A$ voor alle $[\beta] \in B$.

iii) $(\alpha^e)^c = \alpha$ voor alle $[\alpha] \in A$.

iv) $(\beta^c)^e = \beta$ voor alle $[\beta] \in B$.

Maar eerst zullen we de volgende claim bewijzen, die het ons wat gemakkelijker zal maken:

`Claim:` Voor elk ideaal $I \subset R$ geldt $\langle \sigma(I) \rangle = S^{-1}I$.
Stel $x \in \langle \sigma(I) \rangle$, dus $x = \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{1}\frac{a_i}{s_i}$ met $r_i \in I$ en $\frac{a_i}{s_i} \in S^{-1}R$. Voor elke i definiëren we $a_i' := r_i a_i$. We zien dat $a_i' \in I$ en we hebben nu $x = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i'}{s_i}$. Dit kunnen we omschrijven naar $x = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i'(s_1 \cdots s_{i-1}s_{i+1} \cdots s_n)}{s_1 \cdots s_n}$ en we zien dat x een optelling is van elementen van $S^{-1}I$ en dus een element van $S^{-1}I$ is.
Stel $x \in S^{-1}I$, dus $x = \frac{a}{s}$ voor een $a \in I$ en $s \in S$. We zien nu dat $x = \frac{a}{s} = \frac{a}{1}\frac{1}{s} \in \langle \sigma(I) \rangle$. Hiermee is de claim bewezen.

`Bewijs i):` We nemen een $[\alpha] \in A$ willekeurig. Per definitie geldt dat $\alpha^e \subset S^{-1}R$ een ideaal is. Door de bewezen claim weten we nu dat $\alpha^e = \{\frac{a}{s} \mid a \in \alpha, s \in S\}$. Hierdoor zien we, gegeven $\alpha \cap S = \emptyset$, dat $\frac{1}{1} \notin \alpha^e$. Dit tegenvoorbeeld geeft ons dat α^e voldoet aan (P0).
Stel $\frac{ab}{st} = \frac{a}{s}\frac{b}{t} \in \alpha^e$, dan geldt door (I2) dat $ab \in \alpha$, want $\frac{ab}{1} = \frac{st}{1}\frac{ab}{st} \in \alpha^e$. Dit geeft ons dat $a \in \alpha$ of $b \in \alpha$, wat betekent met dezelfde soort argumenten dat $\frac{a}{s} = \frac{1}{s}\frac{a}{1} \in \alpha^e$ of $\frac{b}{t} = \frac{1}{t}\frac{b}{1} \in \alpha^e$, dus α^e voldoet ook aan (P1).

`Bewijs ii):` We nemen een $[\beta] \in B$ willekeurig. Lemma 2.1.14 zegt ons dat $[\beta^c] \in \mathrm{Spec}(R)$. Stel $\beta^c \cap S \neq \emptyset$, dan is er een $s \in S$ zodat $s \in \beta^c$. Dit betekent dat $\frac{s}{1} \in \beta$, maar dat zou betekenen dat $\frac{1}{1} = \frac{1}{s}\frac{s}{1} \in \beta$ ↯, dus $\beta^c \cap S = \emptyset$.

`Bewijs iii):` We nemen een $[\alpha] \in A$ willekeurig. Per definitie geldt $\sigma(\alpha) \subset \alpha^e$, dus $\alpha = (\sigma(\alpha))^c \subset (\alpha^e)^c$.
Stel $r \in (\alpha^e)^c$, dan geldt $\frac{r}{1} \in \alpha^e = S^{-1}\alpha$, dus er is een $a \in \alpha$ en $s \in S$ zodat $\frac{r}{1} = \frac{a}{s}$. Per definitie betekent dit dat $u(rs - a) = 0$ voor een $u \in S$, ofwel $urs = ua$. We zien dat $ua \in \alpha$, dus $urs \in \alpha$. Omdat $\alpha \cap S = \emptyset$ en α voldoet aan (P1), moet gelden dat $r \in \alpha$. Samengevoegd geeft dit ons $(\alpha^e)^c = \alpha$.

`Bewijs iv):` We nemen een $[\beta] \in B$ willekeurig. Stel $\frac{a}{s} \in \beta$, dan geldt dat $\frac{a}{1} = \frac{s}{1}\frac{a}{s} \in \beta$, dus $a \in \beta^c$. Omdat $\frac{a}{s} = \frac{1}{s}\frac{a}{1}$ zien we dat $\frac{a}{s} \in (\beta^c)^e$.
Per definitie geldt, omdat $\sigma(\beta^c) = \sigma(\sigma^{-1}(\beta)) \subset \beta$ en β in het bijzonder een ideaal is, dat $(\beta^c)^e = \langle \sigma(\sigma^{-1}(\beta)) \rangle \subset \beta$. Samengevoegd geeft dit ons $(\beta^c)^e = \beta$. ⊠

We merken op dat, omdat $X_f \cap X_g = X_{fg} \in \mathcal{B}^z$ voor alle $f, g \in R$, het potentiële 'probleem' dat we bespraken voorafgaande aan Definitie 4.7.2 nu helemaal niet van toepassing is. Dit zorgt ervoor dat we de te bewijzen eigenschappen van Definitie 4.7.2 wat kunnen verzwakken. We hebben nu alle ingrediënten klaarliggen om te bewijzen dat $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(R)}$ een $\mathcal{B}$-schoof van ringen op $\mathrm{Spec}(R)$ is!

Stelling 5.2.4 *$\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(R)}$ is een $\mathcal{B}$-schoof van ringen op* $\mathrm{Spec}(R)$. *Dat wil zeggen als $X_f = \bigcup_{k\in K} X_{g_k}$, dan moet gelden:*

i) Stel we hebben $\frac{a_k}{g_k^{n_k}} \in R_{g_k}$ voor elke $k \in K$ met de eigenschap dat $\frac{a_i}{g_i^{n_i}}|_{X_{g_i g_j}} = \frac{a_j}{g_j^{n_j}}|_{X_{g_i g_j}}$ voor elke $i, j \in K$, dan is er een $\frac{a}{f^n} \in R_f$ zodat $\frac{a}{f^n}|_{X_{g_k}} = \frac{a_k}{g_k^{n_k}}$ voor elke $k \in K$.

ii) Stel we hebben $\frac{a}{f^n}, \frac{a'}{f^{n'}} \in R_f$ zodat $\frac{a}{f^n}|_{X_{g_k}} = \frac{a'}{f^{n'}}|_{X_{g_k}}$ voor elke $k \in K$, dan geldt $\frac{a}{f^n} = \frac{a'}{f^{n'}}$ in R_f.

Bewijs i): We maken hier een gevalsonderscheiding voor f.
Stel $f = 1$, dan geldt X_f=X_1=$\mathrm{Spec}(R)$ en Lemma 3.3.6 zegt ons dan dat er een eindige deelverzameling $J \subset K$ is, zodat $X_1 = \bigcup_{j\in J} X_{g_j}$. Omdat we nu met J een eindige vereniging hebben kunnen vinden, zegt Lemma 5.2.2 ons nu dat er een $\frac{a}{1} \in R_1$ is, zodat $\frac{a}{1}|_{X_{g_j}} = \frac{a_j}{g_j^{n_j}}$ voor elke $j \in J$. Nu willen we laten zien dat dit voor de overige $\frac{a_k}{g_k^{n_k}} \in R_{g_k}$ met $k \in K - J$ ook waar is.
We nemen een $t \in K - J$ willekeurig. Omdat $X_{g_t} \subset X_1$ geldt $X_{g_t} \subset \bigcup_{j\in J} X_{g_j}$, dus $X_{g_t} = X_{g_t} \bigcap \left(\bigcup_{j\in J} X_{g_j} \right) = \bigcup_{j\in J} X_{g_t g_j}$. Door aanname geldt $\frac{a_j}{g^{n_j}}|_{X_{g_j g_t}} = \frac{a_t}{g^{n_t}}|_{X_{g_j g_t}}$ voor elke $j \in J$ en we hebben bewezen dat $\frac{a}{1}|_{X_{g_j}} = \frac{a_j}{g^{n_j}}$ voor elke $j \in J$. Samen geeft dit ons:

$$(\frac{a}{1}|_{X_{g_t}})|_{X_{g_t g_j}} = (\frac{a}{1}|_{X_{g_j}})|_{X_{g_j g_t}} = \frac{a_j}{g^{n_j}}|_{X_{g_j g_t}} = \frac{a_t}{g^{n_t}}|_{X_{g_j g_t}} \,,$$

dus $\left(\frac{a}{1}|_{X_{g_t}} - \frac{a_t}{g^{n_t}}\right)|_{X_{g_t g_j}} = 0$ voor elke $j \in J$. Lemma 5.2.1 geeft ons nu dat $\frac{a}{1}|_{X_{g_t}} = \frac{a_t}{g^{n_t}}$ voor elke $t \in K - J$. We hebben nu, voor $f = 1$, eigenschap i) bewezen.
Stel $f \neq 1$. We merken op dat voor alle $[P] \in \mathrm{Spec}(R)$ geldt dat $P \cap \{f^n \mid n \geq 0\} = \emptyset$ precies als $f \notin P$. Dit geeft ons, samen met Propositie 5.2.3, dat:

$$\mathrm{Spec}(R_f) \cong \{[P] \in P \mid f \notin P\} = X_f$$

Met dezelfde soort argumenten zien we dat:

$$X^{R_f}_{\frac{g_k}{1}} \cong \{[P] \in \mathrm{Spec}(R) \mid f, g_k \notin P\} = X_{f g_k}$$

De gelijkheid $X_f = \bigcup_{k\in K} X_{g_k}$ geeft ons $X_f = X_f \bigcap \left(\bigcup_{k\in K} X_{g_k} \right) = \bigcup_{k\in K} X_{f g_k}$.

Nu zien we dat we in plaats van kijken naar de gelijkheid $X_f = \bigcup_{k\in K} X_{g_k}$, met behulp van de bovenstaande isomorfismen kunnen gaan kijken naar de gelijkheid:

$$\mathrm{Spec}(R_f) = \bigcup_{k\in K} X^{R_f}_{\frac{g_k}{1}}$$

Omdat $\mathrm{Spec}(R_f) = X^{R_f}_1$, zijn we weer terecht gekomen bij het al bewezen geval van het eerste deel van dit bewijs. ⊠

Bewijs ii): Anders opgeschreven geldt er door aanname dat $(\frac{a}{f^n} - \frac{a'}{f^{n'}})|_{X_{g_k}} = 0$ voor alle $k \in K$. Lemma 5.2.1 zegt ons dan dat $(\frac{a}{f^n} - \frac{a'}{f^{n'}}) = 0$ in R_f, ofwel dat $\frac{a}{f^n} = \frac{a'}{f^{n'}}$ in R_f. ⊠

5.3 Staak van de structuurschoof

Nu we hebben bewezen dat $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(R)}$ een $\mathcal{B}$-schoof van ringen op $\mathrm{Spec}(R)$ is, geeft Stelling 4.7.6 ons dat we $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(R)}$ kunnen uitbreiden tot een schoof. We hebben gezien dat we dit via staken doen, daarom is het tijd om te gaan kijken naar $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(R),[P]}$: de staken van $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(R)}$ voor elke $[P] \in \mathrm{Spec}(R)$. Zoals we eerder hebben beschreven is het voldoende is om de verzameling

$$\mathcal{B}^z([P]) := \{X_f \in \mathcal{B}^z \mid [P] \in X_f\}$$

te gebruiken als gerichte verzameling om $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(R),[P]}$ te definiëren. Dit geeft ons nu:

$$\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(R),[P]} := \left(\bigcup_{X_f \in \mathcal{B}^z([P])} \{ \left(X_f, \frac{a}{f^n} \right) \mid \frac{a}{f^n} \in R_f \} \right) \Big/ \sim_{[P]}$$

Met $\left(X_f, \frac{a}{f^n}\right) \sim_{[P]} \left(X_g, \frac{b}{g^k}\right)$ precies als er een $X_h \in \mathcal{B}^z([P])$ is zodat $X_h \subset X_{fg}$ en $\frac{a}{f^n}|_{X_h} = \frac{b}{g^k}|_{X_h}$.

We zullen dit gebruiken in de volgende stelling:

Stelling 5.3.1 ([5], 3.1) *$\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(R),[P]}$ is isomorf met R_P voor alle $[P] \in \mathrm{Spec}(R)$.*

Bewijs: Neem een $(X_f, \frac{a}{f^n}) \in \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(R),[P]}$ willekeurig. Omdat $[P] \in X_f$, weten we door eerdere argumenten dat de volgende afbeelding goed is gedefiniëerd:

$$\psi : \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(R),[P]} \longrightarrow R_P, \quad (X_f, \frac{a}{f^n}) \longmapsto \eta^f_P(\frac{a}{f^n})$$

We zullen laten zien dat ψ een bijectie is.
Neem $\frac{a}{t} \in R_P$ willekeurig. Omdat $t \notin P$, betekent dit dat $X_t \in \mathcal{B}^z([P])$, dus $(X_t, \frac{a}{t}) \in \mathcal{O}_{\text{Spec}(R),[P]}$. We zien dat $\psi(X_t, \frac{a}{t}) = \frac{a}{t}$, dus ψ is surjectief.
We zien dat we op gelijke wijze als in Lemma 5.1.2 kunnen laten zien dat ψ een ringhomomorfisme is. Hierdoor is het voldoende om te laten zien dat $\ker(\psi) = \{0\}$ om te bewijzen dat ψ injectief is.
Stel $(X_f, \frac{a}{f^n}) \in \ker(\psi)$, dus $\frac{a}{f^n} = \frac{0}{1}$ in R_P, dan geldt per definitie dat $ga = 0$ voor een $g \notin P$. We zien dat $X_g \in \mathcal{B}^z([P])$, dus $(X_g, \frac{0}{1}) \in \mathcal{O}_{\text{Spec}(R),[P]}$. Omdat $ga = 0$, geldt in het bijzonder dat $fga = 0$ en dus dat $\frac{a}{f^n}|_{X_{fg}} = \frac{0}{1}|_{X_{fg}}$. Dit betekent dat $(X_f, \frac{a}{f^n}) = (X_g, \frac{0}{1}) = 0$, dus $\ker(\psi) = \{0\}$ en we hebben bewezen dat ψ ook injectief is. ⊠

5.4 De structuurschoof van Spec(R)

Nu we weten dat $\mathcal{O}_{\text{Spec}(R),[P]} \cong R_P$ voor alle $[P] \in \text{Spec}(R)$, kunnen we de algemeen beschreven uitbreiding van $\mathcal{O}_{\text{Spec}(R)}$ **wat** specifieker geven. Dit geeft ons voor elke $U \in \mathcal{T}$ de volgende beschrijving:

$\mathcal{O}_{\text{Spec}(R)}(U)$ is de verzameling van producten $\prod_{[P]\in U} \frac{b_p}{g_p}$ met $\frac{b_p}{g_p} \in R_P$, waarvoor er een open basis overdekking $\{X_{f_k}\}_{k\in K}$ van U bestaat met $\frac{a_k}{f_k^{n_k}} \in R_{f_k}$ voor elke $k \in K$, zodat $\eta_P^{f_k}(\frac{a_k}{f_k^{n_k}}) = \frac{b_p}{g_p}$ als $[P] \in X_{f_k}$.

Het paar $(\text{Spec}(R), \mathcal{O}_{\text{Spec}(R)})$ is een lokaal geringde ruimte, want:

Propositie 5.4.1 ([1], blz. 38) *R_P is een lokale ring voor alle $[P] \in \text{Spec}(R)$.*

Bewijs: We nemen $M = S^{-1}P$. Per definitie geldt $P \cap S = \emptyset$, want $S = R - P$. Propositie 5.2.3 zegt ons dan dat $[M] \in \text{Spec}(R_P)$. We gebruiken de bijectie ϕ van Propositie 5.2.3 om te concluderen dat elk priemideaal van R_P van de vorm $S^{-1}P'$ is, met $[P'] \in \text{Spec}(R)$ zodat $P' \cap S = \emptyset$. We zien dat $P' \cap (R - P) = \emptyset$ precies als $P' \subset P$. Samen geeft ons dit dat $S^{-1}P' \subset S^{-1}P$ voor alle $[S^{-1}P'] \in \text{Spec}(R_P)$. Omdat Max($R_P$)$\subset$ Spec(R_P) (Lemma 2.1.8) zien we dat M het enige maximale ideaal is. ⊠

We zijn inhoudelijk bij het einde van deze scriptie aangekomen. We maken nog één observatie, die goed laat zien hoe krachtig de bereikte structuurschoof is.

We hebben dus het lokaal geringde paar $(\mathrm{Spec}(R), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(R)})$, met in het bijzonder

$$\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(R)}(X_f) \cong R_f$$

voor elke $f \in R$. Met het ringhomomorfisme σ uit Propositie 5.2.3 zien we dat $R \cong R_1$ en we weten dat $X_1 = \mathrm{Spec}(R)$, samen geeft dit ons:

$$\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(R)}(\mathrm{Spec}(R)) \cong R\,.$$

Dit zegt ons dat de globale snedes, de ring die we met de structuurschoof aan de hele topologische ruimte $\mathrm{Spec}(R)$ koppelen, isomorf is aan R zelf.

Waarom is dit zo krachtig? We zijn begonnen met een commutatieve ring R met $1 \neq 0$. Hieruit hebben we met behulp van zijn (priem)idealen een topologische ruimte $\mathrm{Spec}(R)$ gemaakt. Daarna hebben we met schoventheorie de structuurschoof van $\mathrm{Spec}(R)$ gemaakt ...

... en in dit hele proces is de ring R zelf niet verloren gegaan!

Bibliografie

[1] M.F. Atiyah en I.G. Macdonald. *Introduction to commutative Algebra.* Addison-Wesley Publishing Company, 1969.

[2] D. Mumford. *The Red Book of Varieties and Schemes.* Tweede editie. Springer Verlag, 1999.

[3] F. Beukers. *Rings and Galois Theory.* Department of Mathematics, University Utrecht, 2014.

[4] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry.* Springer Verlag, 1977.

[5] Q. Liu. *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves.* Volume 6 of Oxford Graduate Text in Mathematics. Oxford University Press, 2002.

[6] J. van Oosten en I. Moerdijk. *Sets, Models and Proofs.* Department of Mathematics Universiteit Utrecht, 2000; revised, 2015.

[7] M. Crainic. *Inleiding Topologie 2013/2014.* Department of Mathematics, University Utrecht, 2013.