Freges Begriffsschrift

Valerie Derks
5544718
Begeleider: Dr. S.A. Wepster

18 januari 2019

Inhoudsopgave

1 Inleiding

Mijn interesse heeft altijd al gelegen binnen zowel de wiskunde als de filosofie. De keuze voor de bachelor Wiskunde en toepassingen was hierdoor snel gemaakt. Eenmaal begonnen met deze bachelor raakte ik zeer geïnteresseerd in een onderwerp dat in zowel de wiskunde als de filosofie voorkomt: de logica. Dankzij de ruimte voor toepassingen in mijn bachelor heb ik veel vakken binnen de logica kunnen volgen en deze interesse enorm kunnen uitbreiden. Ook heb ik het genoegen gehad om het vak 'Geschiedenis van de wiskunde' te volgen, hier heb ik met plezier veel gelezen en geschreven over de geschiedenis van de wiskunde. Aangezien de geschiedenis me nog niet verveelde besloot ik mijn scriptie te schrijven over de geschiedenis van mijn favoriete onderwerp: de logica. Na enige verdieping in dit onderwerp stuitte ik op de logicus Frege en zijn eerste boek *Begriffsschrift*. Deze logicus wordt, grotendeels dankzij het *Begriffsschrift*, tegenwoordig beschouwd als een van de vaders van de moderne logica, maar kreeg van zijn tijdgenoten vooral heel veel kritiek op zijn boek. Dit riep bij mij de volgende vragen op: Wat heeft Frege met het *Begriffsschrift* toegevoegd aan de logica en waarom werd dit door zijn tijdgenoten niet gelijk erkend? En heeft Frege bereikt wat hij wilde met het *Begriffsschrift*? Deze vragen hoop ik in mijn scriptie te kunnen beantwoorden.

Deze scriptie zal beginnen in Sectie 2 met een stuk achtergrondinformatie. Hier worden de belangrijke ontwikkelingen die het boek vooraf zijn gegaan en de omstandigheden waarin het boek is uitgekomen besproken. Daarna behandelen we in sectie 3 het *Begriffsschrift* zelf. We doen dit met behulp van de Engelse vertaling van Stefan Bauer-Mengelberg zoals deze in bron [2] staat. Het *Begriffsschrift* bestaat uit een inleiding en drie hoofdstukken. In de inleiding wordt duidelijk gemaakt wat Freges doel is en hoe hij op het idee kwam om een beeldschrift te creeëren. Vervolgens legt het eerste hoofdstuk symbool voor symbool uit hoe het beeldschrift van Frege in elkaar zit. Het tweede hoofdstuk bestaat uit tientallen proposities, een negental hiervan beschrijft Frege als 'de kern van zijn ideologie'. In deze scriptie zullen we dan ook enkel deze negen proposities behandelen. In het derde hoofdstuk past Frege zijn beeldschrift toe op ingewikkelde wiskundige stellingen. Omdat het te veel tijd kost de wiskunde uit dit hoofdstuk door te nemen en het verder niet relevant is voor onze hoofdvraag wordt dit hoofdstuk helaas niet behandeld in deze scriptie. Het hoofdstuk wordt nog een enkele keer benoemd en staat wel in de inhoudsopgave omdat het toch deel is van het *Begriffsschrift* en daarom niet is weg te laten.
Hierna behandelen we in Sectie 4 het ontvangst van het *Begriffsschrift*, hier gaan we vooral in op de jaren vlak nadat het boek is uitgekomen. We bespreken de kritiek van zijn tijdgenoten en de reactie van Frege hierop. Vervolgens kijken we in Sectie 5 met een moderne blik naar Freges *Begriffsschrift*. Hier gaan we in op wat er nu nog van Frege te zien is en vergelijken we het *Begriffsschrift* met de hedendaagse logica. Als vergelijkingsmateriaal gebruiken we 'Introduction to Mathematical Logic' van Mendelson [5], dit boek geeft een duidelijk overzicht van de eisen waaraan bijvoorbeeld een eerste orde logica moet voldoen. Dit

boek is gekozen omdat het grootste deel van de artikelen over vergelijkingen met moderne logica hiernaar verwees.

In de conclusie (Sectie 6) worden de vragen 'Wat heeft Frege met het *Begriffsschrift* toegevoegd aan de logica en waarom werd dit door zijn tijdgenoten niet gelijk erkend?' en 'Heeft Frege bereikt wat hij wilde met het *Begriffsschrift*?' beantwoord.

2 Achtergrond

In dit hoofdstuk worden de ontwikkelingen die relevant waren voor het *Begriffsschrift* van Frege behandeld. De eerste relevante ontwikkeling voor Frege, maar ook voor de logica überhaupt, is te danken aan Aristoteles (384-322 v.Chr.). Aristoteles schreef zes geschriften over de logica, deze zijn door zijn volgelingen later samengevoegd in het *Organon* [6, p. 23]. Het *Organon* heeft nog jarenlang invloed gehad op logici en tot aan de negentiende eeuw is er niks met vergelijkbare invloed geschreven. Zo zien we dat bijvoorbeeld de grote filosoof Immanuel Kant (1724-1804) in zijn *Kritik der reinen Vernunft* zegt dat er niets te verbeteren is aan de logische werken van Aristoteles, en dat, aangezien er sindsdien geen vooruitgang meer is geweest, de werken compleet en perfect lijken te zijn. [6, p. 355]

Door de opkomst van experimentele wetenschap in de zestiende en zeventiende eeuw werd er in relatief korte tijd heel veel nieuwe kennis verworven. Vanwege al deze nieuwe kennis werd de behoefte aan een uitgebreid en helder handboek voor inductie en deductie groter om zo veel mogelijk juiste conclusies te kunnen trekken [3, p. 601]. Een andere motivatie voor de zoektocht naar een helder handboek was de grote hoeveelheid gevonden paradoxen uit de decennia ervoor. Om te achterhalen hoe deze paradoxen ontstonden keek men terug naar de grondslagen in de hoop deze te kunnen verduidelijken [3, p. 318]. Voor deze periode twijfelden weinig mensen aan de werken van filosofen uit de klassieke oudheid (Aristoteles, Euklides, etc), maar de behoefte aan een heldere basis werd steeds groter. Wetenschappers gingen steeds meer hun eigen weg en kregen twijfels aan de werken uit de oudheid. Zo was het Gauss (1777-1855) die Euklides verbeterde en zijn eigen meetkunde ontwikkelde [6, p. 379]. Het verbeteren en uitbreiden van de klassieke werken gebeurden in steeds meer gebieden, en uiteindelijk was het George Boole (1815-1864) die met de logica verder ging waar Aristoteles was opgehouden. Er waren al eerder pogingen gedaan (Leibniz (1646-1716)), maar met de hulp van de vooruitgang in onder andere de algebra en de meetkunde was het Boole die als eerste, met groot succes, de logica abstract beschreef en uitbreidde. Boole schreef twee grote werken, *The Mathematical Analysis of Logic*(1847) en *An Investigation of the Laws of Thought*(1854). Deze werken maakten een begin aan de moderne logica. Boole introduceerde hierin de waarde 0 voor 'onwaar' en de waarde 1 voor 'waar'. Deze waarden zijn nu vooral bekend uit de informatica, maar begonnen hier bij George Boole. De vernieuwende Booleaanse logica werd in de tijd van Frege door bijna elke logicus als basis gebruikt. [6, p. 404-406]

Gottlob Frege is geboren op 8 november 1848 in Wismar, Duitsland. In 1869 begon Frege aan de universiteit van Jena, hier bestudeerde hij vooral de wiskunde en de natuurkunde. In 1871 studeerde hij verder aan de universiteit van Göttingen, de beste Duits-sprekende universiteit op wiskundig gebied. Zijn interesses binnen de wiskunde schoven al snel richting de logica. Omdat de logica ook onderdeel was van de filosofie behaalde Frege uiteindelijk zijn doctorsgraad in de filosofie aan universiteit van Göttingen in het jaar 1873. In Duitsland is het mogelijk om na een doctorsgraad ook nog 'Habilitation' te ontvangen, dit is nog een niveau verder omhoog. Frege behaalde dit niveau bij de filosofische faculteit van de universiteit van Jena in 1874[4, p. 152].

In 1879, toen Frege nog bijna geen naambekendheid had, bracht hij zijn eerste boek *'Begriffsschrift'* uit [11, p. 413]. De volledige titel luidt: *'Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens'*. Het woord *Begriffsschrift* is te beschrijven als een geschrift dat bestaat uit begrippen. We houden de Duitse term aan om onduidelijkheden te voorkomen. De overige titel is te vertalen als: een op de aritmetica gebaseerde formule-taal van het zuivere denken. Wat Frege hiermee bedoelt zal in het volgende hoofdstuk duidelijker worden.
Het *Begriffschrift* gaat niet door op de Booleaanse logica, maar gaat geheel zijn eigen richting in. Hierdoor verschilde het enorm van andere werken uit deze tijd. Zijn keuze hiervoor was heel bewust, hij maakt zowel in zijn boek als in latere artikelen duidelijk dat zijn doel verschilt van Booles doel. Dit wordt verder uitgebreid in Hoofdstuk 4.

3 Begriffsschrift

Het *Begriffsschrift* opent met een inleiding waarin Frege het doel van zijn boek uitlegt. Hij begint hiermee door zich af te vragen op welke manier een wetenschappelijk bewijs zo waterdicht mogelijk kan zijn. Het gaat hier niet om bewijzen uit een specifiek wetenschappelijk gebied, maar juist over de overeenkomst tussen de bewijzen uit alle verschillende gebieden: de taal die het bewijs vormgeeft. In elk gebied is te zien dat in bewijzen verschillende proposities en gevolgtrekkingen aan elkaar verbonden worden met de taal, maar hoe kan ervoor worden gezorgd dat dit waterdicht gebeurt? Frege concludeert al snel dat zuivere logica hierop het antwoord moet zijn. Met zuivere logica bedoelt Frege hier dat er enkel logische gevolgtrekkingen (modus ponens) worden getrokken, en er geen intuïtieve vooronderstellingen (*'Anschauliches'*) aan te pas komen. De zuivere logica is, zoals Frege dat verwoord, enkel gebaseerd op de wetten waarop alle kennis rust. Frege ziet al snel dat de taal hier niet precies genoeg voor is, zodra de bewijzen ingewikkelder worden blijkt dat het veel lastiger wordt om logisch en precies te blijven en geen gaten te creëren. In de taal is tenslotte veel verwarring te vinden, in bijvoorbeeld de vorm van dubbele betekenissen, intuïtieve conclusies en vertalingsfouten. Zo komt Frege met het idee van een beeldschrift. Het doel van dit beeldschrift is om ons ten eerste een betrouwbare manier te geven om de geldigheid van een reeks gevolgtrekkingen te controleren en ten tweede een manier om intuïtieve vooronderstellingen te herkennen zodat kan worden onderzocht waar deze vandaan komen.

Frege komt ook terug op zijn volledige titel: *Begriffsschrift, een op de aritmetica gebaseerde formule-taal van het zuivere denken.* Frege benadrukt dat, ondanks dat het een beeldschrift is en het woord aritmetica in de ondertitel staat, de relatie van zijn beeldschrift met de aritmetica niet verder gaat dan fundamentele ideeën, zoals vooral het gebruik van letters als variabelen. In verdere details is het een ideologie op zichzelf en staat het los van de aritmetica. Ook geeft Frege een duidelijk voorbeeld over wat het verband is tussen zijn ideologie en de spreektaal (*'Sprache des Lebens'*). Dit voorbeeld beschrijft de relatie tussen het menselijk oog en een microscoop. Hoewel het oog op bijna elk gebied superieur is aan een microscoop, is een microscoop perfect voor een specifiek doel, namelijk het bestuderen van objecten die voor het oog te klein zijn. Op dezelfde manier is de spreektaal op de meeste gebieden superieur aan Freges beeldschrift, maar als het gaat om het controleren van de geldigheid van proposities, of om het herkennen van intuïtieve vooronderstellingen, is volgens Frege zijn ideologie de betere optie.

Frege sluit af met de hoop dat logici open staan voor de innovatie van het *Begriffsschrift*, ondanks de mogelijke angsten die iets nieuws en vreemds vaak opwekken. Frege is zich er duidelijk van bewust dat zijn notatie nogal kan afschrikken, maar benadrukt dat hij achter zijn ideeën staat en dat de logica zich tot nu heeft belemmerd door te dicht bij normale taal te blijven.

Na een duidelijke inhoudsopgave begint vervolgens het eerste deel van het boek.

3.1 'I: Erklarüng der Bezeichnungen.'

Frege begint zijn uitleg door duidelijk te maken dat de symbolen die worden gebruikt in twee verschillende categorieën zijn op te delen. De eerste categorie is variabelen, hierin kunnen de variabelen staan voor een nog in te vullen begrip of functie. Als de variabele eenmaal is ingevuld dan blijft de betekenis van de variabele gelijk in deze context. De tweede categorie zijn symbolen die wel al een vaste betekenis hebben, deze zullen hieronder worden beschreven. Denk aan symbolen als $+$, $-$ en $\surd$ binnen de wiskunde, deze hebben altijd een vaste betekenis. De categorieën zijn ook wel te beschrijven als onbepaald (de letters) en bepaald (de symbolen met bekende betekenis).

3.1.1 Oordeel

Het eerste symbool dat Frege introduceert is bedoeld om een oordeel uit te drukken. Hij gebruikt hiervoor het volgende teken:

$\vdash\!\!\!-\!\!\!-\, A$

De verticale streep in de afbeelding wordt ook wel de *oordeel streep* genoemd, deze staat enkel voor het feit dat er een oordeel gemaakt wordt. De horizontale streep wordt de *inhoud streep* genoemd, deze geeft de inhoud aan het oordeel. Stel dat $\vdash A$ zou staan voor het oordeel 'Lotje is een kat', dan zou $-A$ staan voor enkel het idee dat Lotje misschien een kat is. Het is dan aan de lezer om te bepalen of het idee correct is. Frege benadrukt nog het onderscheid tussen inhoud die beoordeeld kan worden ('Lotje is een kat') en inhoud die niet beoordeeld kan worden ('huis'). De inhoud A in het oordeel $\vdash A$ moet altijd beoordeelbare inhoud zijn.

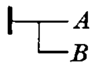
3.1.2 Voorwaardelijkheid

Als we twee variabelen A en B hebben die beide staan voor een beoordeelbare inhoud, zijn er vier mogelijkheden:

1. A wordt bevestigd en B wordt bevestigd;
2. A wordt bevestigd en B wordt ontkend;
3. A wordt ontkend en B wordt bevestigd;
4. A wordt ontkend en B wordt ontkend.

Frege gebruikt hiervoor de termen 'bejaht' en 'verneint', dit vertaalt letterlijk naar 'ge-ja'd' en 'ge-nee'd'. Aangezien dit in het Nederlands geen normale werkwoorden zijn heb ik gekozen voor de termen 'bevestigen' en 'ontkennen'.

Met behulp van deze situatie-onderscheiding introduceert Frege het volgende symbool voor een voorwaardelijkheid:

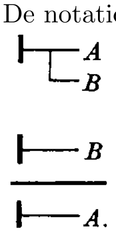


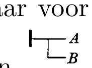
Deze notatie staat voor het oordeel dat situatie 1, 2 of 4 plaats vindt. Dus als B wordt ontkend, kan A zowel worden bevestigd als ontkend, maar als B wordt bevestigd dan moet A ook worden bevestigd. De verticale streep die de twee inhoud strepen met elkaar verbindt noemt Frege de *voorwaarde streep.*
De bovenstaande voorwaardelijkheid komt overeen met $B \to A$, dit is de notatie die wordt gebruikt in de hedendaagse logica, voorwaardelijkheid wordt nu ook wel implicatie genoemd.

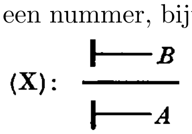
3.1.3 Gevolgtrekking

Na de uitleg van voorwaardelijkheid laat Frege ons een nieuw geval zien waarin twee oordelen met elkaar worden gecombineerd, hij gebruikt hiervoor de volgende twee oordelen:

De voorwaardelijkheid links in de afbeelding laat zien dat we ons bevinden in situatie 1, 2 of 4, en het rechtse figuur uit de afbeelding laat zien dat B wordt bevestigd. De combinatie van deze twee oordelen is alleen mogelijk in situatie 1, hierin zal A ook worden bevestigd. Het gevolg van deze is combinatie is hierdoor $\vdash A$.
De notatie de Frege voor deze gevolgtrekking vindt ziet er zo uit:

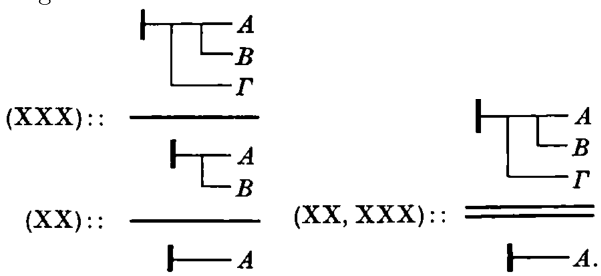


Deze notatie werkt goed voor een simpele gevolgtrekking als deze, maar voor ingewikkeldere oordelen bedacht Frege een versimpeling. Stel we geven  een nummer, bijvoorbeeld X, dan is de gevolgtrekking als volgt op te schrijven:

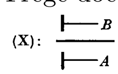
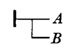


Tegenwoordig zou dit als volgt genoteerd worden: $(B \wedge (B \to A)) \to A$.

Ook de notatie voor gevolgtrekkingen uit meer dan twee oordelen heeft Frege uitgewerkt. We geven $\vdash B$ het nummer XX en $\vdash \Gamma$ het nummer XXX. Nu kunnen we de notatie voor gevolgtrekkingen uit meer dan twee oordelen als volgt noteren:

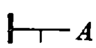


,

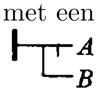
De linker afbeelding gebruikt hiervoor de vorige notatie tweemaal, deze kan zoals te zien flink opstapelen, maar de rechter afbeelding introduceert de dubbele streep. Als er twee oordelen gebruikt worden om tot een conclusie te komen, moeten er dus twee strepen worden gebruikt. Deze dubbele streep maakt het een stuk simpeler om ingewikkelde gevolgtrekkingen te noteren. Frege maakt hierin niet duidelijk of hetzelfde geldt bij het gebruik van meer dan twee oordelen.
Ook zien we in deze afbeelding niet één, maar twee dubbele punten. Frege doet dit omdat het een andere soort gevolgtrekking is dan bijvoorbeeld , die we hiervoor zagen. In de vorige pasten we namelijk  toe op $\vdash B$, dus we passen de voorwaardelijkheid toe op het oordeel. Als er sprake is van twee dubbele punten is dit andersom. We passen dan het oordeel toe op de voorwaardelijkheid, net zoals in de bovenstaande afbeelding.
Het nut van het onderscheid dat Frege hiermee maakt is onduidelijk en Frege komt er verder ook niet op terug. Tegenwoordig zou dit korter genoteerd worden met behulp van een 'en' teken: $(\Gamma \wedge B \wedge (\Gamma \rightarrow (B \rightarrow A))) \rightarrow A$.

3.1.4 Negatie

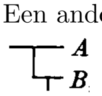
Om duidelijk te maken dat een situatie, bijvoorbeeld A, niet plaats vindt, gebruikt Frege de *negatie streep*:



De plaatsing van de negatie streep is van belang, Frege laat dit duidelijk zien met een aantal voorbeelden. Zo betekent



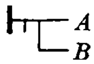
dat de situatie waarin B is bevestigd en de negatie van A is ontkend niet plaats vindt. Oftewel, de situatie waarin A en B allebei zijn bevestigd is niet mogelijk. Zo zijn alleen situatie 2, 3 en 4 over.
Een ander voorbeeld laat de situatie zien die wij zouden beschrijven als 'of':

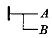


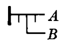
De voorwaardelijkheid beschrijft dat de situatie waarin niet-B waar is terwijl

A onwaar niet voor kan komen, oftewel situatie 4 kan niet voorkomen. Het is dus situatie 1, 2 of 3, dit is de beschrijving van de moderne (inclusieve) ‘of’. In moderne notatie heeft dit een eigen symbool: $A \vee B$.

De negatie kan zich ook nog aan het begin van de voorwaardelijkheid bevinden:

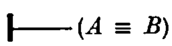


Dit betekent dat  niet plaats vindt, oftewel situatie 1, 2 en 4 vinden niet plaats. Hierdoor betekent de afbeelding dat situatie 3 de enige situatie is die plaats kan vinden.

Door meerdere negaties te gebruiken vindt Frege ook een manier om ‘en’ uit te drukken: .

3.1.5 Identiteit

Freges uitleg van identiteit is zeer uitgebreid. Hij benoemt hier dat er verschillende manieren zijn waarop twee dingen identiek kunnen zijn. De ene manier is dat ze dezelfde naam hebben, de andere manier is dat ze dezelfde inhoud hebben. Zijn notatie bevat beide manieren:



Dit houdt in dat de betekenis die gegeven is aan A hetzelfde is als de betekenis die gegeven is aan B. Ook betekent dit dat A overal kan worden van vervangen door B, en andersom.

3.1.6 Functies

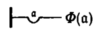
Freges definitie van een functie zit als volgt in elkaar. Een uitdrukking is te verdelen in een functie en een argument, het argument is een woord/variabele dat kan worden aangepast overal in de uitdrukking, en de functie is het resterende deel van de uitdrukking. Zijn ideeën worden duidelijk met behulp van een voorbeeldzin: ‘De situatie waarin koolstofdioxide zwaarder is dan waterstof’. Hierin kunnen drie verschillende functies met drie verschillende argumenten worden gezien:

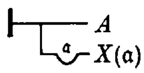
1. Het argument is ‘koolstofdioxide’ en de functie is het resterende deel van de zin.
2. Het argument is ‘waterstof’ en de functie is het resterende deel van de zin.
3. De zin heeft twee argumenten, namelijk ‘koolstofdioxide’ en ‘waterstof’, de functie is wederom het resterende deel van de zin.

De notatie is zeer duidelijk: $\Phi(A)$. Hier is Φ de functie en A het argument. In het geval van meerdere argumenten is de notatie $\Psi(A, B)$, met A het eerst voorkomende argument in de functie. Dit lijkt ontzettend op de moderne notatie van een functie.

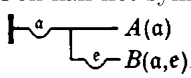
3.1.7 Universaliteit

Frege heeft ook een vrij moderne aanpak voor universaliteit. De notatie:

staat namelijk voor een functie Φ die, voor alle mogelijke waarden van a, een feit is. Frege noemt specifiek dat het geldt voor alle mogelijke waarden van a waarvoor $\Phi(a)$ een beoordeelbare inhoud is. Dus als $\Phi(a)$ alleen gedefinieerd is voor a tussen 0 en 1, dan betekent  dat $\Phi(a)$ een feit is voor alle a's tussen 0 en 1. Dit komt overeen met de moderne notatie 'voor alle': $\forall a : \phi(a)$. Net zoals bij de negatie is het bij dit symbool ook van belang waar het wordt geplaatst. Om dit duidelijk te maken volgen weer een aantal voorbeelden:

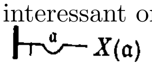


Dit figuur houdt in dat de situatie waarin $X(a)$ klopt voor alle waarden van a terwijl A niet bevestigd is, niet plaats kan vinden. In moderne notatie: $(\forall a : X(a)) \rightarrow A$. Dit betekent dat er wel een δ zou kunnen zijn waarvoor $X(\delta)$ wordt bevestigd en A wordt ontkend, maar dat het niet voor alle waarden van a waar kan zijn.
Ook kan het symbool meerdere keren in een figuur terugkeren:

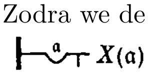


Dit betekent dat voor alle mogelijke waarden van a geldt dat de situatie waarin voor alle mogelijke waarden van e $B(a, e)$ is bevestigd en $A(a)$ is ontkend, niet plaats vindt. In moderne notatie is dit: $\forall a : ((\forall e : B(a, e)) \rightarrow A(a))$.

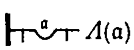
De combinatie van een negatie symbool en een universaliteit symbool is ook interessant om te benoemen:



Hier wordt bedoeld dat $X(a)$ niet voor alle mogelijke waarden van a bevestigd wordt. Oftewel, er is minstens één waarde in te vullen voor a waarvoor $X(a)$ wordt ontkend.
Zodra we de symbolen omwisselen krijgen we een andere betekenis:



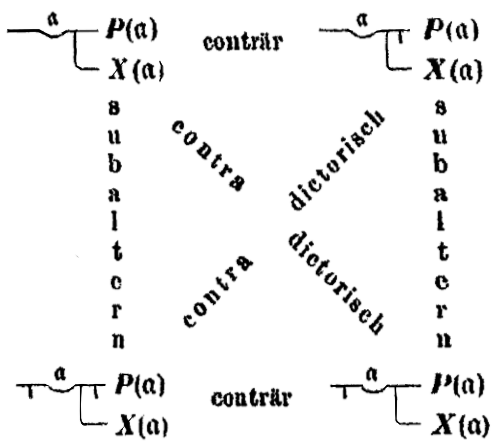
Dit betekent: voor elke mogelijke waarde van a wordt $X(a)$ niet bevestigd.
Als we nog een extra negatie toevoegen zien we een ander modern logica symbool verschijnen:



Dit is de ontkenning van de vorige figuur. De ontkenning van 'voor elke mogelijke waarde van a wordt $X(a)$ niet bevestigd' is gelijk aan: er is minstens één waarde voor a waarvoor $X(a)$ wordt bevestigd. Dit doet zeker denken aan het hedendaagse symbool '$\exists$'.

3.1.8 Vierkant der Oppositie

Frege eindigt het hoofdstuk met een afbeelding die bijna al zijn symbolen combineert: het vierkant der oppositie. Dit vierkant is voor het eerst gezien in de werken van Aristoteles en is door vele logici overgenomen. Het is in eerste instantie ontworpen om het verschil tussen een tegenstelling en een tegenspraak uit te leggen [9, p. 3-4]. Frege benoemt Aristoteles zelf niet en gebruikt het vierkant om zijn notatie nog beter uit te leggen. Hij legt elke hoek een voor een uit en noemt de verbanden tussen de hoeken maar kort.



We lezen dit als volgt:

1. De afbeelding links bovenin betekent: voor alle mogelijke waarden van a geldt dat de situatie waarin $X(a)$ waar is terwijl $P(a)$ onwaar is niet voor kan komen. Iets moderner gezegd, voor alle waarden van a geldt dat als $X(a)$, dan $P(a)$.

2. De afbeelding rechts bovenin betekent: voor alle mogelijke waarden van a geldt dat de situatie waarin $X(a)$ waar is terwijl $P(a)$ ook waar is (dubbele ontkenning) niet kan voorkomen. Moderner gezegd, voor alle waarden van a geldt dat als $X(a)$, dan niet $P(a)$.

3. De afbeelding links onderin betekent: het is niet voor alle mogelijke waarden van a zo dat geldt dat de situatie waarin $X(a)$ waar is terwijl $P(a)$ ook waar is (dubbele ontkenning) niet voor kan komen. Moderner gezegd, er is een waarde van a waarvoor zowel $X(a)$ als $P(a)$ waar is.

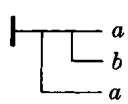
4. De afbeelding rechts onderin betekent: het is niet voor alle mogelijke waarden van a zo dat de situatie waarin $X(a)$ waar is terwijl $P(a)$ onwaar is niet voor kan komen. Moderner gezegd, er een waarde van a waarvoor $X(a)$ waar is terwijl $P(a)$ onwaar is.

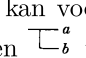
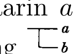
De connectie tussen 1 en 2 (*conträr*) staat voor een tegenstelling, dit houdt in dat ze nooit allebei tegelijk waar kunnen zijn, maar dat ze wel allebei tegelijk onwaar kunnen zijn. Bij de connectie tussen 3 en 4 staat ook het Duitse woord *conträr*, dit was echter een foutje en moet *subconträr* zijn. Hiermee wordt het tegenovergestelde bedoeld, 3 en 4 kunnen namelijk wel allebei waar zijn, maar niet allebei onwaar. De term *contradictorisch* toont het verband tussen 1 en 4 en tussen 2 en 3. De vertaling hiervan is een tegenspraak, de ene is letterlijk de ontkenning van de andere en hierdoor kunnen ze nooit allebei waar of allebei onwaar zijn. Als laatste de connecties tussen 1 en 3 en tussen 2 en 4: *subaltern*. Dit betekent dat de een (3 en 4) een zwakkere variant is van de ander (1 en 2). Zo zien we dat als 1 waar is, 3 ook waar is, maar andersom niet.

3.2 'II: Darstellung und Ableitung einiger Urtheile des reinen Denkens.'

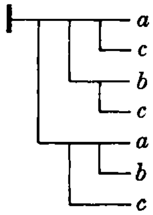
Na Freges duidelijke uitleg van zijn symbolisme, volgt er een abstracter hoofdstuk waarin al zijn symbolen terugkomen in een groot aantal logische stellingen. Er zijn negen proposities die volgens Frege de kern vormen van alle formules die gecreëerd kunnen worden in zijn ideologie. In het *Begriffsschrift* zijn deze genummerd als (1), (2), (8), (28), (31), (41), (52), (54) en (58). De eerste drie bevatten enkel voorwaardelijkheid, de volgende drie ook negatie, de twee hierna ook identiteit, en de laatste ook nog universaliteit.

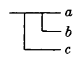
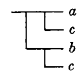
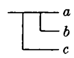
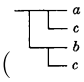
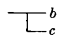
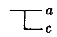
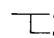
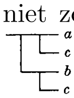
3.2.1 (1)



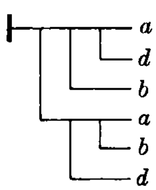
Deze propositie houdt in dat de situatie waarin a zowel bevestigd als ontkend wordt niet kan voorkomen. Er staat namelijk dat de situatie waarin a wordt bevestigd en  wordt ontkend is uitgesloten. De gevolgtrekking  wordt ontkend als b wordt bevestigd en a wordt ontkend. De situatie die niet voor kan komen is dus de situatie dat a wordt bevestigd, b wordt bevestigd, en a wordt ontkend. Oftewel, a kan niet tegelijk waar en onwaar zijn.

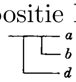
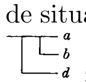
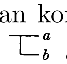
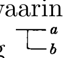
3.2.2 (2)

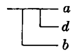


We zien dat de situatie waarin  wordt bevestigd en  wordt ontkend niet kan voorkomen. Hierin betekent  dat het niet zo kan zijn dat c en b waar zijn, terwijl a onwaar is. Het tweede deel () houdt in dat het niet zo kan zijn dat  waar is terwijl  onwaar is. We weten dat  enkel onwaar is als c waar is terwijl a onwaar is. Als tegelijkertijd  waar moet zijn betekent het dat b ook waar is. Als deze situatie is bevestigd kan het dus niet zo zijn dat c en b waar zijn terwijl a onwaar is. We zien dat  en  dezelfde situatie uitsluiten. Hierdoor kan het niet zo zijn dat de eerste wordt bevestigd terwijl de tweede wordt ontkend, het is door (1) namelijk al uitgesloten dat iets zowel waar als onwaar kan zijn.
Het doel van Frege is hier om te laten zien dat als a een zekere consequentie is van b en c, en b ook een consequentie van c, dan is a ook een consequentie van enkel en alleen c. Dit noemen we ook wel distributiviteit.

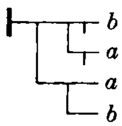
3.2.3 (8)

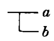
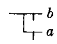
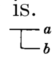


Freges derde propositie laat zien dat de volgorde van b en d geen invloed heeft in gevolgtrekking . Ook al worden b en d omgedraaid betekenen beide gevolgtrekkingen dat de situatie waarin b en d waar zijn terwijl a onwaar is niet voor kan komen. In  zien we namelijk dat de situatie waarin d waar is terwijl  onwaar is niet voor kan komen. De gevolgtrekking  is onwaar als b waar is terwijl a onwaar is. De situatie die niet voor kan komen is dus

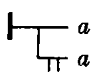
de situatie waarin b en d waar zijn terwijl a onwaar is. Op dezelfde manier analyseren we , ook hier komt uit dat de situatie die niet voor kan komen gelijk is aan de situatie waarin b en d waar zijn terwijl a onwaar is. Hierdoor kan het niet zo zijn dat de ene volgorde van b en d wordt bevestigd terwijl de andere wordt ontkend, ze hebben namelijk dezelfde betekenis. Net zoals we in (1) en (2) al zagen, is dit onmogelijk.
Frege gaat hier niet inhoudelijk op in, het lijkt hierdoor een minder belangrijke propositie. Ook is er in 1934 door Łukasiewicz al bewezen dat dit axioma af te leiden is uit de eerste twee[13, p. 65].

3.2.4 (28)



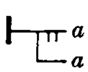
Hier is de situatie dat  waar is en  onwaar is uitgesloten. Het tweede deel is onwaar als $\neg a$ waar is terwijl $\neg b$ onwaar is. Oftewel, als a onwaar is terwijl b waar is. En dat is precies de situatie die  uitsluit.
Wat Frege hiermee duidelijk wil maken is dat als a een gevolg is van b, $\neg b$ ook een gevolg is van $\neg a$. Het voorbeeld dat Frege erbij geeft gaat als volgt: Neem voor a de propositie 'de man ademt' en voor b 'de man leeft'. Als b waar is, dan is a waar, en als $\neg a$ waar is, dan is $\neg b$ ook waar. Dit wordt door Frege ook *modus tollens* genoemd, een eeuwenoude term (uit de klassieke tijden) die we tegenwoordig ook nog gebruiken.

3.2.5 (31)



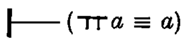
Deze propositie spreekt vrij voor zich, het kan niet zo zijn dat a waar is terwijl de ontkenning van de ontkenning van a onwaar is. Frege benadrukt hiermee dat de ontkenning van de ontkenning van a aangeeft dan a waar is.

3.2.6 (41)



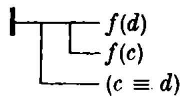
Ook deze spreekt vrij voor zich, het kan niet zo zijn dat de ontkenning van de ontkenning van a waar is terwijl a onwaar is. Frege benadrukt hiermee dat de bevestiging van a de ontkenning van a ontkent.

Frege noemt in zijn inleiding dat hij later opmerkte dat (31) en (41) ook samen zijn te voegen op de volgende manier:



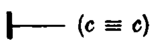
Dit houdt in dat de ontkenning van de ontkenning van a dezelfde inhoud heeft als a.

3.2.7 (52)



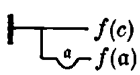
De situatie waarin c en d identieke inhoud hebben, $f(c)$ waar is en $f(d)$ onwaar is kan niet plaatsvinden. Als c en d identiek zijn kan d tenslotte overal de plaats van c in nemen. Dus als $f(c)$ waar is moet $f(d)$ ook waar zijn. Hiermee bevestigd Frege dat variabelen met dezelfde identiteit altijd door elkaar te vervangen zijn.

3.2.8 (54)



De inhoud van c is altijd gelijk aan de inhoud van c, verdere uitleg hierover staat in 3.1.5. Dit noemen we ook wel reflexiviteit.

3.2.9 (58)



De situatie die hier niet kan plaatsvinden is de situatie waarin $f(a)$ waar is voor alle mogelijke waarden van a, terwijl $f(c)$ niet waar is. Deze situatie kan duidelijk niet plaatsvinden aangezien $f(a)$ niet waar kan zijn voor alle waarden van a als het niet waar is voor $a = c$. Frege benadrukt hiermee dat als het al bevestigd is dat $f(a)$ voor alle a waar is, dan mag men er vanuit gaan dat het voor elke willekeurige waarde klopt, waaronder c.

3.3 'III: Einiges aus einer allgemeinen Reihenlehre'

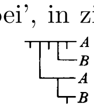
In het derde hoofdstuk genaamd 'een deel van de algemene leer der reeksen' is het Freges bedoeling om een algemeen idee te geven hoe men met de notatie om moet gaan. Hij past zijn notatie daarom toe op een groot aantal ingewikkelde wiskundige stellingen waar we, zoals eerder genoemd, helaas niet verder op ingaan.

4 Ontvangst van het Begriffsschrift

We zagen in Hoofdstuk 2 dat Frege, in tegenstelling tot zijn tijdgenoten, niet door ging op het werk van Boole. Sterker nog, Boole wordt niet eens genoemd in het hele *Begriffsschrift*. Ook zagen we in de inleiding van het *Begriffsschrift* dat Frege zich er bewust van was dat zijn notatie een afschrikkende werking kon hebben, maar dat hij hoopte dat de logici daarvoor open zouden staan. Dit bleek niet het geval. Met behulp van Vilkko [11] en Schlimm [13] onderzoeken we het ontvangst van het *Begriffsschrift* en de reacties van Frege hierop. Door Freges uitgebreide reacties op alle kritiek en misvattingen kan er een duidelijk beeld worden geschetst van de bedoelingen van Freges ideologie.

In de twee jaar na de uitgave van het *Begriffsschrift* kwamen er zes boekbesprekingen uit en stond er een recensie in het boek *'Die neuesten Bestrebungen auf dem Gebiete der Logik bei den Deutschen und die logische Frage* uit 1880 van Leonhard Rabus. De zes tijdschriftpublicaties zijn geschreven door filosoof en wiskundige Reinold Hoppe, filosoof en schrijver Kurd Lasswitz, filosoof en wiskundige Paul Tannery, pedagoog en filosoof Karl Michaëlis, wiskundige en logicus Ernst Schröder, en de filosoof John Venn. Voor preciezere informatie over waar en wanneer deze recensies zijn uitgebracht verwijs ik naar Vilkko[11, p. 413-414]. Deze recensies zijn verschillend in lengte en inhoud, maar er zijn twee onderwerpen die in bijna elke beoordeling terugkomen. Dit zijn de notatie van Frege en het feit dat hij zijn voorgangers compleet heeft genegeerd. Deze onderwerpen gaan we daarom behandelen. Na deze onderwerpen en Freges reactie hierop kijken we kort naar de reacties op Frege verder na de uitgave van het *Begriffsschrift*. De moderne kijk behandelen we in het hoofdstuk hierna.

4.1 Notatie

Het eerste onderwerp is de vreemde en 'twee-dimensionale' notatie die Frege introduceert, de reacties hierop waren niet positief. Zoals genoemd gebruiken we Vilkko [11, p. 415-416] om een samenvatting van de recensies te laten zien. Rabus zegt dat het uitvinden van een nieuwe manier van noteren de logica in algemeen geen enkel goed zal doen. Hoppe volgt door te zeggen dat hij twijfelt of er wel iets is bereikt door het uitgevonden beeldschrift. Lasswitz's kritiek focust op de gekozen titel, hij vindt dit al zeer afschrikkend voor de filosofen die niet geloven in 'het zuivere denken', zoals Frege zijn ideologie beschrijft in zijn ondertitel. Tannery is een stuk directer en beschrijft de notatie als 'buitengewoon complex'. Michaëlis vindt de indruk van de notatie alleen al 'vreemd en kil'. Schröder is een stuk uitgebreider in zijn kritiek en geeft ook een voorbeeld. Hij noemt de situatie 'a of b is waar, maar niet allebei', in zijn notatie is dit één enkele zin: $ab_1 + a_1b = 1$, maar bij Frege is het: 

. Volgens Schröder is zijn algebraïsche versie veel makkelijker te begrijpen. Behalve de lengte van de notatie benoemt Schröder ook nog de onhandige notaties voor 'en' en 'of', waarom heeft Frege daarvoor geen symbool ontwikkeld? Schröder noemt de notatie ook nog een 'monsterlijke verspilling van ruimte'. Als laatste hebben we nog de reactie van Venn, hij noemde de notatie 'omslachtig en onhandig'.

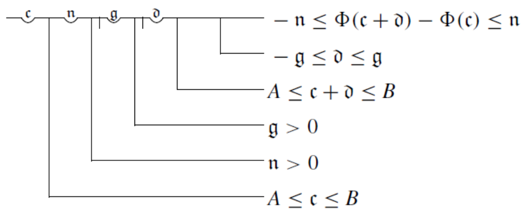
Freges reacties op al deze kritiek zijn zeer uitgebreid en laten ook een zekere frustratie doorschemeren. Zo noemt hij in een van zijn eerste reacties dat men eerst wil zien wat voor nut zijn *Begriffsschrift* heeft voordat ze zich in zijn notatie verdiepen, maar dat hij het nut niet kan laten zien voordat mensen zich bekend maken met zijn notatie. Hij beschrijft het als een vicieuze cirkel. Enige frustratie is hem ook niet kwalijk te nemen, de kritiek gaat vaak niet verder dan het uiterlijk van zijn beeldschrift en gaat zelden in op Freges ideologie. In de hoop dat men zijn ideologie ooit nog zou gaan begrijpen heeft Frege in de drie a vier jaar na uitgave veel reacties en artikelen geschreven waarin hij per kritiekpunt precies uitlegt wat zijn beredenering was. De kritiekpunten die we nu gaan behandelen zijn het punt dat de notatie 2-dimensionaal is, het punt dat de notatie lang en onpraktisch wordt gevonden en het punt dat Frege te weinig symbolen heeft gebruikt (bijvoorbeeld geen 'en' en 'of').

4.1.1 2-Dimensionaal

De tijdgenoten van Frege hadden weinig begrip voor de 2-dimensionale richting van de notatie, het werd gezien als onnodig en zeer onhandig om te leren begrijpen. Freges reactie hierop vinden we in Schlimm [13, p. 75]: hij noemt zijn beeldschrift 'niet voor het oor, maar voor het oog'. Wat hij hiermee bedoelt is dat hij zich niet wil laten leiden door de restricties van de taal, want, zoals hij in zijn inleiding ook al benoemt, de taal is simpelweg niet precies genoeg voor de logica. De restrictie waar Frege hier op doelt is het noteren in horizontale richting, dit doen we volgens Frege namelijk omdat we het op die manier makkelijk kunnen uitspreken. Maar Freges beeldschrift is bedoeld als een preciezere, duidelijkere variant van de taal, dus waarom zou hij zich houden aan deze restrictie? Zijn notatie is niet bedoeld om voor te lezen, maar om geschreven bewijzen te verhelderen: niet voor het oor, maar voor het oog.

4.1.2 Lang en onpraktisch

In het geval van langere stellingen vond men de notatie van Frege onnodig lang en zeer onpraktisch, vooral in vergelijking met eerdere logici. Frege antwoordt hierop dat lengte geen prioriteit heeft voor hem, precisie en nauwkeurigheid zijn het eerste doel, 'kortheid' zal alleen naar gezocht worden als het niet ten koste gaat van de precisie [13, p. 70]. In langere stellingen zou het, volgens Frege, vaak ten koste gaan aan de hoeveelheid informatie die wordt weergeven. Zo zien we het voorbeeld van Schlimm [13, p. 69], waarin hij de zin 'de reeële functie $\phi(x)$ (met x ook reeël) is continu tussen A en B' uitschrijft in Freges notatie, met de definitie van continuïteit ingevuld:



In de gegeven zin staat het woord 'continu', maar in Freges notatie is dit geheel uitgewerkt in wat we nu kennen als een epsilon-delta definitie. Stel dit was in de gegeven zin ook zo uitgebreid uitgewerkt, dan was dat een zin geworden van meerdere regels lang met ontzettend veel haken:
$\forall c((A \leq c \leq B) \rightarrow \forall n((n > 0) \rightarrow \neg\forall g((g > 0) \rightarrow \neg\forall d((A \leq c + d \leq b) \rightarrow ((-g \leq d \leq g) \rightarrow (-n \leq \phi(c+d) - \phi(c) \leq n))))))$.
Freges notatie neemt nog steeds meer plek in, maar laat de informatie veel overzichtelijker zien. Frege benadrukt daarom ook dat, vanwege psychologische redenen, het veel overzichtelijker is om een stelling in een lijst uit te werken dan in meerdere lange zinnen. Wel moet genoemd worden dat de bovenstaande formule een letterlijke vertaling is van Frege in de moderne logica, er kan dus nog een klein beetje worden ingekort.

4.1.3 Te weinig symbolen

Freges reactie op dit kritiekpunt was een verduidelijking van zijn doel. Zijn doel was namelijk ook om een fundament te geven, niet per se om een praktisch systeem te maken. Hij wilde een geheel systeem waarin alle stellingen axioma's zijn of met gevolgtrekkingen van zijn axioma's af zijn te leiden. Hij noemt het een basisprincipe van de wetenschap om het aantal axioma's zo klein mogelijk te maken, en om deze reden wilde hij ook zo min mogelijk symbolen introduceren. Hij laat dan ook in een van zijn reacties zien dat meer symbolen leidt tot meer axioma's, en dit wilde hij voorkomen [**?**, p. 71]
Frege was zich wel bewust van de andere, veelgebruikte symbolen en heeft in zijn *Begriffsschrift* de formules voor bijvoorbeeld 'en' en 'of' dan ook expliciet vermeld. Ook noemt Frege dat zijn systeem zou werken met in plaats van een symbool voor implicatie, een symbool voor conjunctie. Maar hij zegt dat zijn preferentie ligt bij een kort, helder symbool voor implicatie, en dus verkoos hij dit boven een duidelijker symbool voor conjunctie. [2, p. 13]

4.2 Voorgangers

Het tweede grote onderwerp in alle kritiek is dat Frege alle vooruitgang uit de decennia voor hem (met nadruk op Boole) compleet negeert. We gebruiken weer Vilkko [11, p. 416-418] om de recensies samen te vatten. Michaëlis noemt dat het vooral zonde is omdat zijn voorganger dezelfde problemen wilden oplossen, hij had veel aan ze kunnen hebben en herhaling kunnen voorkomen. Ook Rabus heeft het idee dat het werk van Frege niet verder is ontwikkeld dan de werken van voorgaande logici, hij noemt het *Begriffsschrift* 'een uitgebreide samenvatting

van al bestaande werken'. Schröder vindt het vooral spijtig dat Freges notatie weinig overeenkomsten heeft met de algebra, zoals zijn eigen (en Booles) systeem. Hij doelt hier op het gebruik van bijvoorbeeld '+' of '×', mede omdat er op die manier minder nieuwe symbolen ontstaan om te onthouden. Hij had dit wel verwacht van het *Begriffsschrift*, grotendeels dankzij de ondertitel. Venn is zeer afkeurend in zijn recensie. Hij bekent dat hij zichzelf 'niet voldoende bekend heeft gemaakt' met Freges notatie, maar noemt desondanks dat het niet te vergelijken is met het systeem van Boole.
Het meest positieve commentaar kwam van Lasswitz, hij zag in dat het doel van Frege verschilde van het doel van Boole. Hij vond het daardoor niet meer dan logisch dat daar twee verschillende ideologieën uitkwamen.

Met behulp van Vilkko en Schlimm behandelen we Freges reactie op het punt dat hij zijn voorgangers heeft genegeerd, het punt dat men zijn systeem onpraktischer vond dan Boole en het punt dat er weinig overeenkomsten waren met de algebra.

4.2.1 Voorgangers genegeerd

Zoals al eerder genoemd was Frege van plan na de uitgave van het *Begriffsschrift* zijn ideologie verder uit te werken, maar was hij eerst drie tot vier jaar bezig met het verdedigen van zijn ideeën. Een groot deel van deze tijd was hij bezig met het vergelijken van zijn werk met de werken van Boole, in de hoop goed te maken dat Boole in zijn *Begriffsschrift* geen enkele keer voorkwam. Zo schreef hij onder andere: 'Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift'(1880/81) en 'Booles logische Formelsprache und meine Begriffsschrift'(1882). Beide artikelen werden geweigerd voor publicatie, maar wel verspreid binnen wetenschappelijke kringen [13, p. 65]. Hoewel Frege niet per se positief leek te zijn over Boole, zag hij duidelijk wel in dat het nodig was om zijn werk met dat van Boole te vergelijken om ervoor te zorgen dat men hem en zijn ideologie een kans zouden geven. Het feit dat hij niet per se positief was over Boole kan er wel voor hebben gezorgd dat zijn artikelen niet werden gepubliceerd.

4.2.2 Onpraktischer dan Boole

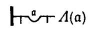
De meeste tijdgenoten van Frege zagen weinig nut in het *Begriffsschrift* en hielden het daarom liever bij de werken van Boole. Deze waren volgens velen veel praktischer en toegankelijker. Lasswitz zag als enige in dat Boole een ander doel had dan Frege. Frege noemt dat hij en Boole wel bij hetzelfde startpunt zijn begonnen, ze wilden namelijk beiden een helder systeem van symbolen om de logica in uit te drukken. Maar na het startpunt gingen Frege en Boole allebei een andere richting uit. Booles uitwerking ging in de richting van het uitdrukken van abstracte logica in formules, met als grootste prioriteit om het kort en simpel te houden. Met het systeem dat Boole heeft ontwikkeld is het mogelijk de waarheid van een stelling te controleren, maar niet meer dan dat. Na het invoeren van de stelling komt er een 0 (niet waar) of een 1 (waar) uit, de beredenering hierachter is niet te zien. Freges *Begriffsschrift* laat de beredenering wel zien, de hele opbouw van de stelling wordt uitgepakt in de notatie van Frege. Dit was, zoals we in de inleiding van het *Begriffsschrift* zagen, ook het doel van Frege. Hij wilde de taal verbeteren en beredeneringen in bewijzen zo helder mogelijk maken, en dit verschilt duidelijk van Booles doel. [13, p. 66-67]

Om het verschil tussen de twee verder uit te leggen worden de termen 'calculus ratiocinator' en 'lingua rationalis' vaak gebruikt, bijvoorbeeld door Vilkko [11, p. 417] en van Heijnoort [8, p. 11-16]. Deze termen zijn geïntroduceerd door Leibniz (1646-1716) en worden ook kort genoemd in de inleiding van het *Begriffsschrift*. 'Calculus ratiocinator' staat voor een abstract systeem bestaande uit symbolen waarin de wetten van de logica worden weergeven en kunnen worden toegepast op stellingen. 'Lingua rationalis' gaat een stap verder en staat voor een symbolisch systeem waarmee niet alleen de stellingen kunnen worden gepresenteerd, maar ook de structuur van de gedachtegang erachter. Leibniz hoopte dat er ooit een symbolisch systeem zou worden uitgevonden dat goed werkt als een 'calculus ratiocinator' én als een 'lingua rationalis'. Dit systeem zou dan de universele taal kunnen worden om de wetenschap in uit te drukken. Booles werken voldoen enkel aan de voorwaarden van een 'calculus ratiocinator'. Zijn doel was om de logica zo abstract en algebraïsch mogelijk weer te geven, en dat is ook precies wat hij heeft gedaan. Omdat zijn systeem zo abstract is voldoet het niet aan de eisen van een 'lingua rationalis', het is namelijk niet in staat om de structuur van een gedachtegang te presenteren en is daarom niet te beschrijven als een 'lingua'. Freges *Begriffsschrift* gaat verder waar Boole is opgehouden. Het is namelijk een symbolisch systeem dat voldoet aan de eisen van zowel een 'calculus ratiocinator' als een 'lingua rationalis'. Behalve dat het systeem de logica met duidelijke symbolen kan weergeven, laat het ook de denkwijze van de logische stelling op een heldere manier zien. Frege was hiermee de eerste die voldeed aan de universele taal die Leibniz in zijn hoofd had [8, p. 11-16].

4.2.3 Weinig connectie met algebra

Er was ook kritiek op de tekens die Frege uitkoos voor zijn beeldschrift, waarom koos hij, net als Boole en Schröder, geen bekende tekens zoals '+' en '×'? Zoals al genoemd wilde Boole de logica zo algebraïsch mogelijk noteren, en de tijdgenoten van Frege dachten daar nog hetzelfde over. We zien in Schlimm [13, p. 73] dat Frege erkent dat het makkelijk is voor de lezer als de symbolen al bekend zijn, maar dat is volgens Frege niet genoeg reden om voor die symbolen te kiezen. Frege vindt het zonde dat zijn voorgangers en veel tijdgenoten zo graag de algebra en de logica aan elkaar willen binden, dit kan namelijk een vorm van tunnelvisie opleveren. De logica is geheel een eigen wetenschap en verdient dan ook eigen symbolen. Een belangrijk punt voor Frege is dat de logica, de kunst van het beredeneren, in elke wetenschap terugkomt, om deze reden is het onverstandig om de symbolen uit een specifieke wetenschap over te nemen.

4.3 Latere reacties

Hoewel het ontvangst van het *Begriffsschrift* niet zo hartelijk was als gehoopt, heeft het wel deuren geopend voor Frege. Zo is Frege na de uitgave van zijn boek gepromoot tot 'Außerordentlicher Professor' (vertaling: 'buitengewoon hoogleraar') aan de universiteit van Jena en heeft hij nog decennia lang colleges gegeven over zijn ideologie [11, p. 418]. Een belangrijk punt hierin was dat Frege de eerste was die de kwantor ('voor alle') in werking bracht. Het idee was al vaker genoemd, maar Frege was de eerste die het in zijn systeem verwerkte. Maar net zoals de meeste eerste pogingen was zijn kwantor niet perfect. Zo had Frege enkel een kwantor voor 'voor alle' en geen kwantor voor 'er is een', dit drukte hij uit als  . Ook was het onduidelijk waar de grenzen van de kwantor lagen, dit zal verder worden uitgelegd in Sectie 5.1. Er zijn in de jaren erna verscheidene pogingen gedaan om kwantoren verder uit te werken, maar weinig van deze logici namen Freges kwantor als beginpunt. Giuseppe Peano (1858-1932) leek als eerste kwantoren volledig te begrijpen en toe te kunnen passen, dit was tien jaar na het *Begriffsschrift*. Ook Peano refereerde niet naar Frege, al blijkt dit te zijn omdat Peano toen nog niet bekend was met Frege [7, p. 97-98].

Bertrand Russell (1872-1870) is een van de weinige die Frege wel erkenning heeft gegeven, dit zien we onder andere in. Russell schreef van 1910 tot 1913 zijn *Principia Mathematica*, deze drie boeken telden samen negenenvijftig hoofdstukken. In een deel hiervan zien we volgens Pedriali [12, p. 215] Freges proposities (het tweede hoofdstuk van het *Begriffsschrift*) in Peanos notatie staan. Dit boek werd ontzettend goed ontvangen en daaraan is te zien hoeveel effect de notatie van Frege heeft gehad. De notatie van Peano kwam volgens velen veel 'vriendelijker' over en dit, in combinatie met de verbetering van de kwantoren, zorgde voor succes. Ondanks dat Russell wel naar Frege refereerde liep Frege deze jaren nog steeds niet echt met de grote logici mee. Hij had wel veel contact met onder andere Russell en Peano en dat is waarschijnlijk de reden dat er ook zo veel van Frege terug is te zien in *Principia Mathematica*. Maar de namen die bekend werden waren Peano en Russell [12, p. 215].

Tegenwoordig is Frege binnen de logica wél een bekende naam, hierover meer in het volgende hoofdstuk.

5 Moderne blik op Frege

In dit hoofdstuk gaan we het *Begriffsschrift* analyseren met behulp van de informatie die we nu hebben. Eerst kijken we met behulp van Mendelson [5] welke orde logica Frege heeft gecreëerd. Daarna gaan we kijken naar de toevoegingen die Frege heeft gedaan aan de logica van nu.

5.1 Vergelijking eerste orde logica

Moderne logica heeft meerdere niveaus, te beginnen bij propositielogica ('nulde orde logica'). Deze logica kan de negatie, de implicatie, en de 'en' en 'of' bevatten. Dit wordt uitgebreid tot de eerste orde logica, hier komen de kwantoren nog extra bij ('voor alle', 'er is een'). De kwantoren zijn in de eerste orde logica alleen toe te passen op individuele variabelen, niet op functies. Ook is het belangrijk dat het domein wordt gezet voor de variabele, dit zien we Frege benadrukken in Sectie 3.1.7. Vanaf de tweede orde zijn de kwantoren wel toe te passen op functies, maar ook hierbij is het belangrijk om een domein te specificeren. In de eerste twee hoofdstukken van het *Begriffsschrift* zien we geen tweede orde logica terug, maar in het derde hoofdstuk zien we met behulp van Boolos [14] dat Frege zijn kwantoren ook op functies toepast. Omdat Frege hier geen domein en geen verdere uitleg bij geeft is zijn beredenering te onduidelijk om het *Begriffsschrift* te vergelijken met de tweede orde logica. Omdat het *Begriffsschrift* wel aan de eerste orde logica lijkt te voldoen, gaan we kijken in hoeverre Freges logica hiermee overeen komt. Mendelson [5, 66-67 en 93] geeft een duidelijke lijst met axioma's en afleidingsregels voor de eerste orde logica, deze gaan we vergelijken met Freges proposities uit Hoofdstuk 3.2.

Mendelsons eerste axioma hierin is: $a \to (b \to a)$. Als we dit vergelijken met Freges eerste propositie zien we dat deze exact overeen komen. Als we (1) zouden vertalen naar de moderne notatie zouden we namelijk uitkomen op $a \to (b \to a)$.

Het tweede axioma van Mendelson is: $(c \to (b \to a)) \to ((c \to b) \to (c \to a))$. Ook deze zien we gelijk terug in Frege, namelijk in (2). Als we (2) vertalen naar de moderne notatie staat er exact hetzelfde. Dit staat ook wel bekend als distributiviteit.

Voor we verder gaan naar Mendelsons derde axioma moet er benoemd worden dat de derde propositie van Frege niet terug is te vinden in Mendelson. Dit heeft te maken met het feit dat deze propositie is af te leiden uit de eerste twee proposities, dit zorgt ervoor dat het niet per se nodig is deze te noemen in de basis axioma's. In moderne notatie zou dit $(d \to (b \to a)) \to (b \to (d \to a))$ zijn.

Mendelsons derde axioma is $(\neg a \to \neg b) \to ((\neg a \to b) \to a)$. Volgens Liu [10, p. 342-344] is deze terug te vinden in een combinatie van (28), (31) en (41). Deze noteren we tegenwoordig als volgt: $(b \to a) \to (\neg a \to \neg b)$, $(\neg\neg a) \to a$ en $a \to (\neg\neg a)$.

Het vierde axioma is $(\forall a : f(a)) \to f(c)$. Nu begint de volgorde van Frege en Mendelson te verschillen, deze komt namelijk overeen met Freges negende propositie (58). In de moderne notatie zijn ze exact gelijk.

Mendelsons vijfde axioma is iets ingewikkelder te vinden in Frege. Dit axioma luidt: $(\forall x)(a \to b) \to (a \to (\forall x)b)$. Deze is niet rechtstreeks te vinden in Frege, maar wel af te leiden. Dit wordt bewezen door Liu [10, p. 342-344].

Het zesde axioma $(\forall x)x = x$ zien we snel terug in (54). Frege verduidelijkt hier niet in zijn formule dat het voor alle mogelijke waarden voor x geldt, maar in zijn gebruik van het '=' teken in 3.1.5 wordt dit wel duidelijk. We noemen dit ook wel reflexiviteit.

Het zevende (en laatste) axioma van Mendelson is $(x = y) \to (a(x) \to a(y))$. Deze zien we rechtstreeks terug in de moderne notatie van (52).

De afleidingsregels die worden genoemd in Mendelson zijn de modus ponens en de generalisatie. Modus ponens houdt in dat als a waar is en het is waar dat als a, dan b, dan kan er geconcludeerd worden dat b ook waar is. Dit zien we duidelijk terug in Freges gevolgtrekkingen (3.1.3). Met generalisatie wordt bedoeld dat als gezegd wordt dat functie B waar is, dat $B(x)$ dan waar is voor alle mogelijke x. Ook dit zien we terug in Frege, namelijk in zijn paragraaf over universaliteit. Hij noemt hier dat als $\vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\, X(a)$ waar is, we dit ook kunnen schrijven als $\vdash\!\!\!-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\, X(\mathfrak{a})$ [2, 25].

Dit waren alle regels en axioma's die Mendelson heeft opgelegd aan de eerste orde logica. Aangezien Frege aan al deze voorwaarden voldoet, kan er geconcludeerd worden dat Frege de volwaardige eerste orde logica heeft bevat in zijn *Begriffsschrift*. Ook zien we dat alle proposities die Frege heeft gebruikt terugkomen in Mendelson. Het enige dat niet overeenkomt tussen de twee is dat Frege zijn kwantor ook soms toepast op functies, behalve dat zijn het *Begriffsschrift* en de eerste orde logica equivalent. Hiermee is Frege de eerste logicus die, met behulp van zijn kwantor, een volwaardige eerste orde logica ontwikkelde.

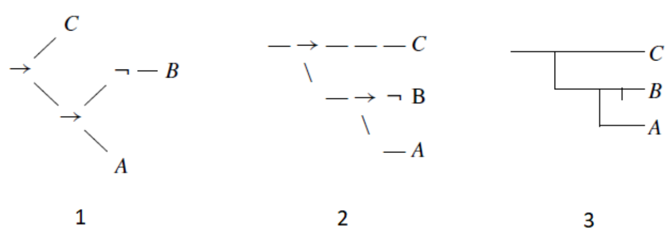
5.2 Freges toevoegingen aan de moderne logica

Om te kijken wat Frege heeft toegevoegd aan de moderne logica maken we een onderscheid tussen de logica in de wiskunde en de logica in andere vakgebieden. We beginnen bij de wiskunde.

Binnen de wiskunde zien we helaas weinig directe invloed terug. We gebruiken tenslotte geen symbolen die Frege heeft geïntroduceerd. Maar zoals we in Sectie 4.3 zagen heeft Frege de eerste kwantor ontwikkeld en was daarmee de uitdaging om de perfecte kwantoren te vinden begonnen. Dus Frege heeft zelf misschien niet de kwantoren ontwikkeld die we nu gebruiken, maar hij is wel de periode gestart waarin de kwantoren uiteindelijk zijn ontworpen. Een andere toevoeging zijn de proposities uit het tweede hoofdstuk van het *Begriffsschrift*. Deze zijn misschien in eerste instantie overgeslagen dankzij de uitgebreide notatie van Frege, maar zijn in een andere notatie uiteindelijk wel bekend geworden. Ook zien we in Sectie 5.1 dat zijn proposities vandaag de dag nog steeds worden gebruikt. Weliswaar in een andere notatie, maar Frege blijft de eerste die deze proposities heeft uitgeschreven.

In andere vakgebieden zien we Frege wel direct terug, bijvoorbeeld in de filosofie met de 'turnstile'. Het woord'turnstile' is de Engelse term voor het teken '$\vdash$'. Als we 'turnstile' letterlijk vertalen betekent het 'toegangspoortje', dit is omdat het symbool '$\vdash$' lijkt op het bovenaanzicht van een toegangspoortje. Er is geen officiële Nederlandse term voor het symbool en omdat 'toegangspoortje' verwarrend kan zijn gebruiken we de Engelse term 'turnstile'.
De turnstile is geïntroduceerd door Frege en heeft vandaag de dag nog dezelfde betekenis binnen de logica. Als we $\vdash A$ schrijven betekent dit dat A een feit is, net zoals $\vdash\!\!\!-\!\!\!-\, A$ in Freges notatie betekent dat A een feit is [11, p. 416].

Ook is er een verband te zien tussen de moderne syntaxisboom en Freges notatie. Dit laat Schlimm duidelijk zien in de volgende afbeelding [13, p. 61-62]:



Hierin is in Figuur 1 de omgedraaide syntaxisboom van de logische formule $(A \to \neg B) \to C$ te zien. Als we deze boom iets rechter trekken komen we uit op Figuur 2, de gelijkenis met Freges notatie (te zien in Figuur 3) is hier duidelijk te zien. Dit lijkt toch vergezocht, de kans dat Frege dit direct heeft beïnvloed is aanzienlijk kleiner dan bij de turnstile. Toch is het waard om te benoemen dat de 2-dimensionaalheid van Freges notatie een nuttig doel heeft gevonden in de taalkunde en de informatica. Syntaxisbomen worden in de taalkunde onder andere gebruikt om zinnen te ontleden en ambiguïteit te herkennen. Binnen de informatica worden de bomen gebruikt om programmeertaal te vertalen naar een andere programmeertaal (of naar spreektaal). Dit heeft overeenkomsten met waarom Frege een 2-dimensionaal schrift ontwikkelde, hij wilde de taal verbeteren en menselijke intuïtie (hieronder vallen ambiguïteiten) herkennen en vermijden. Zo zien we dat Freges gedachtegang zeker terugkomt in gebieden als informatica en taalkunde.

6 Conclusie

De vragen die we wilden beantwoorden in deze scriptie waren:

- 'Wat heeft Frege met het *Begriffsschrift* toegevoegd aan de logica en waarom werd dit door zijn tijdgenoten niet gelijk erkend?'
- 'Heeft Frege bereikt wat hij wilde met het *Begriffsschrift*?'

We beginnen met de tweede vraag.

Het doel van het *Begriffsschrift* was om een beeldschrift te creëren waarmee kon worden beredeneerd op geheel logische wijze, zonder misinterpretaties of andere vormen van intuïtie. Wat we hierbij in gedachten moeten houden is dat het *Begriffsschrift* de eerste poging ooit was om dit doel te bereiken. Frege bedacht de eerste kwantor en axiomatiseerde de logica met zijn negen proposities. Voor een eerste poging om het genoemde doel te bereiken is Frege naar mijn mening geslaagd. Het is niet het meest praktische systeem (zoals vaak bij een eerste poging) maar het doet wel waarvoor het bedoeld is: logisch beredeneren. Als we kijken naar hoe fel en uitgebreid Frege zijn werk heeft verdedigd kunnen we concluderen dat Frege ook grotendeels tevreden was met zijn werk.

Wat heeft Frege met het *Begriffsschrift* toegevoegd aan de logica en waarom werd dit door zijn tijdgenoten niet gelijk erkend? We beginnen met de toevoeging van Frege aan de logica. Zoals in Sectie 5.1 wordt behandeld heeft Frege in 1879 een bijna perfecte eerste orde logica ontwikkeld. De proposities die Frege in het *Begriffsschrift* introduceert zijn exact de axiomas die we vandaag nog gebruiken. Het enige punt waarop zijn logica verschilt van de eerste orde logica is zijn kwantor. Zoals eerder genoemd was Frege de eerste die de kwantor in werking bracht, maar was er in zijn notatie onduidelijkheid over waarop de kwantor kon worden toegepast. Behalve zijn proposities zien we ook zijn symbool '$\vdash$' terug in de moderne logica, met exact dezelfde betekenis. Ook zien we de gedachtegang van Freges notatie terug in de taalkunde en de informatica. Syntaxisbomen werken op dezelfde manier als Freges notatie en worden gebruikt om taal te ontleden en ambiguïteiten te ontdekken. Het vinden van ambiguïteiten was ook een van de redenen van Frege om zijn notatie te creëren.

Als laatste kijken we waarom het *Begriffsschrift* zo negatief is ontvangen. Zoals blijkt uit Sectie 4.3 werden Freges proposities in een andere notatie een stuk beter ontvangen. Hierdoor kunnen we concluderen dat het vooral de onpraktische notatie was die mensen af schrok. Hoewel de notatie ook zeker zijn voordelen heeft is Frege dankzij diezelfde notatie ontzettend benadeeld als logicus. De weinigen die zich niet lieten afschrikken hadden vaak misvattingen over het doel van Frege, dit bleek te verschillen van het doel van zijn tijdgenoten. Hoewel Frege de jaren na uitgave hard heeft gewerkt om zijn ideologie te verduidelijken heeft hij tijdens zijn leven nooit echt de erkenning gekregen die hij, naar mijn mening, verdiende.

Referenties

[1] Dr. Gottlob Frege, *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Halle an der Saale, Louis Nebert, (1879)

[2] Jean van Heijenoort, *From Frege to Gödel: a sourcebook in mathematical logic, 1879-1931*, tweede editie, (1971)

[3] Ivor Grattan-Guinness, *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, vol. 1, eerste editie, Routledge, (1994)

[4] *Frege*, Complete Dictionary of Scientific Biography, vol. 5, p. 152-155, Charles Scribner's Sons, (2008)

[5] Elliot Mendelson, *Introduction to mathematical logic*, zesde editie, CRC Press, (2015)

[6] William Kneale & Martha Kneale, *The Development of Logic*, gecorrigeerde versie van de eerste editie (1962), Clarendon Press, (1975)

[7] Ivor Grattan-Guinness, *History and Philosophy of Logic*, eerste editie, Abacus Press, (1980)

[8] Jean van Heijenoort, *Selected Essays*, History of Logic III, Bibliopolis, (1985)

[9] Terence Parsons, *The Traditional Square of Opposition*, The Stanford Encyclopedia of Philosophy, Metaphysics Research Lab, Stanford University, (2017)

[10] Yang Liu, *Freges Begriffsschrift is Indeed First-Order Complete*, History and Philosophy of Logic, vol. 38, no. 4, p. 342-344, (2017)

[11] Risto Vilkko, *The Reception of Frege's Begriffsschrift*, Historio Mathematica, vol. 25, p. 412-422, (1998)

[12] Walter B. Pedriali, *Frege*, The History of Philosophical and Formal Logic : From Aristotle to Tarski, uitgegeven door Alex Malpass and Marianna Antonutti Marfori, Bloomsbury Publishing PLC, (2017)

[13] Dirk Schlimm, *On Freges Begriffsschrift Notation for Propositional Logic: Design Principles and Trade-Offs*, History and Philosophy of Logic, vol. 39, no. 1, p. 53-79, (2018)

[14] George Boolos, *Reading the Begriffsschrift*, Mind, vol. 94, no. 375, p. 331-344, Oxford University Press, (1985)