Universiteit Utrecht

Bachelorscriptie Kunstmatige Intelligentie (7,5 ECTS)

Ordered Justification Logic

Een uitbreiding van de logica J om rechtvaardigingen te vergelijken

Kimberly van Hees
3709450

Eerste begeleider:
Prof. dr. Rosalie Iemhoff

Tweede beoordelaar:
Dr. Janneke van Lith

19 augustus 2019

Inhoudsopgave

1 Inleiding **2**

2 Justification Logic **3**
2.1 Epistemologie . . . 3
2.2 Justification Logic . . . 4
2.3 Formele Semantiek . . . 5

3 Ordening **8**
3.1 Ordered Justications . . . 8
3.2 Soundness . . . 9
3.3 Volledigheid . . . 10
3.4 Waarheidslemma . . . 11
3.5 Volledigheidsbewijs . . . 14
3.6 Ordeningsaxioma . . . 14
3.7 Aanvullende soundness en volledigheid . . . 15
3.7.1 Soundness . . . 15
3.7.2 Volledigheid . . . 15
3.8 Vervolgstappen . . . 16

4 Uitbreidingen en Toepassingen **17**
4.1 Proof Checker . . . 17
4.2 Proof Checker in Justification Logic . . . 18
4.2.1 Soundness voor J4 . . . 18
4.2.2 Volledigheid voor J4 . . . 18
4.3 t en $!t$ vergelijken . . . 19
4.3.1 $t \leq !t$ . . . 19
4.3.2 $!t \leq t$ . . . 20
4.3.3 $t = !t$ . . . 21
4.3.4 $!t$ en t zijn niet te vergelijken . . . 22

5 Conclusie **23**

1 Inleiding

> ... as you accumulate years, you will learn that most answers boil down, eventually, to "Because".
>
> Terry Pratchett, *Thief of Time*

Elk feit heeft wel een onderbouwing. Niet alle onderbouwingen zijn echter even goed. In een debat zal een stelling als "dit is een probleem omdat ik dat zo zie" minder overtuigingskracht hebben dan "dit is een probleem en hier is de data die dat ondersteunt". Hoewel deze twee onderbouwingen dezelfde stelling ondersteunen, zal de ene geloofwaardiger overkomen dan de andere. We stellen onszelf regelmatig, onbewust of niet, de vraag welke redenen we overtuigender vinden dan de andere.

Dit soort vergelijkingen zijn op dit moment in verschillende logische systemen te beschrijven. Echter is dit niet mogelijk in de logica waarin onderbouwingen of rechtvaardigingen zijn geformaliseerd. Hier willen we met deze scriptie verandering in brengen.

Onderzoeksopzet

We behandelen in deze scriptie Artemovs Justification Logic [1], een logica waarin zich al rechtvaardigingen, ofwel *justifications*, bevinden. Met deze logica hebben we een nuttig raamwerk. We hopen hiermee de volgende onderzoeksvragen te beantwoorden:

1. Zijn de justifications[1] in Justification Logic onderling te vergelijken?
2. Zijn deze vergelijkingen ook te verenigen met andere uitbreidingen van Justification Logic?

Om antwoord te geven op deze vragen zullen we eerst Justification Logic voldoende moeten bestuderen, wat we zullen doen in hoodstuk 2. Vervolgens zullen we in hoofdstuk 3 de logica uitbreiden om vergelijkingen tussen justifications mogelijk te maken. Nadat we een werkbare versie hebben gecreëerd, zullen we kijken of deze versie te verenigen is met J4, Justification Logic waarin positieve introspectie is toegevoegd. Dit zal het onderwerp van hoofdstuk 4 zijn.

[1] Verder hebben we hier gekozen om de termen in Justification Logic, alsmede "Justification Logic", onvertaald te laten. Mocht de lezer er behoefte aan hebben om meer te weten komen over deze logica, dan zijn de onvertaalde termen een beter handvat dan onze pogingen om deze in het Nederlands te vertalen.

2 Justification Logic

2.1 Epistemologie

Kennis is een moeilijk te grijpen concept. Van veel verschillende hoeken is geprobeerd te omvatten wat kennis is en hoe het ontstaat. Hoewel het brede onderwerp van kennis niet de hoofdzaak is van deze scriptie, is het noodzakelijk om een korte geschiedenis over kennisleer te geven, of ten minste voor zoverre dat relevant is voor dit onderwerp.

Na deze samenvatting zullen we kijken naar de syntax en semantiek van Justification Logic, de basis van deze scriptie, zodat we hierop verder kunnen bouwen in de volgende hoofdstukken.

Justified True Belief

In de epistemologie, de tak van de filosofie die kennis onderzoekt, wordt vaak verwezen naar een traditionele analyse van kennis [2]. Deze analyse, die al minstens sinds Plato's Theaetetus bestaat, zegt dat kennis ontstaat door een samenstelling van drie elementen.

- Waarheid; de meest vanzelfsprekende van de drie elementen. Kennis moet waar zijn voordat het daadwerkelijk als kennis beschouwd kan worden.
- Geloof; naast de waarheid is er ook een overtuiging nodig voordat iets kennis is. Een goede gok op een vraag zal geen kennis vormen.
- Rechtvaardiging of Justification; de reden waarop het bovenstaande geloof is gebaseerd.

Deze drie elementen samen vormen een justified true belief. Hoewel er sinds Gettier [3] veel geschreven is over de vraag of dit echt kennis is, zullen wij ons hier niet op richten. Waar wij ons wel op zullen richten, is een manier om deze kijk op kennis te modelleren.

Epistemische Logica en Justifications

Epistemische logica is een door Hintikka [4] geïntroduceerd logisch systeem[2] om kennis te modeleren. Hierin vormt een True Belief kennis. Opvallend is dat van de bovengenoemde traditionele analyse de rechtvaardiging ontbreekt. Dit is een van de redenen waarom Artemov zijn justifications probeert te vatten in een logisch systeem, Justification Logic. Dit is een poging het gat te dichten tussen epistemologie en epistemische logica.

[2] Hintikka zelf is van mening dat von Wright deze eer toekomt [4].

2.2 Justification Logic

Artemovs Justification Logic [1], J, wordt gevormd door de standaard propositielogica, versterkt met justifications. Dit ziet er als volgt uit:

$$t{:}F$$

en is uit te drukken als "t is een justification voor F". Met andere woorden, een agent gelooft dat F waar is met de reden t. Er wordt een justification aan een formule in de taal gekoppeld waardoor een nieuwe formule ontstaat.

Daarnaast voegt Artemov twee justificationoperatoren toe aan de taal, namelijk de Application- en Sum-operatoren $\cdot$ en $+$.

Application-operator

$$s{:}(F \to G) \to (t{:}F \to s{\cdot}t{:}G)$$

Informeel is dit te zien als "Als ik geloof (met een reden s) dat $F \to G$ waar is en vervolgens een justification t heb om te geloven dat F waar is, dan kan ik die justification toepassen op de eerdere formule om zo een justification $s{\cdot}t$ te verkrijgen om G te geloven." Kortom, de application-operator past twee justifications op elkaar toe zodat deze samen een nieuwe justification voor een andere formule vormen.

Laten we een informeel voorbeeld als illustratie gebruiken: "Ik geloof met reden s dat straten nat worden als het regent". De exacte invulling van s is niet relevant maar kan bijvoorbeeld zijn "omdat water nat is". "Hiernaast geloof ik met reden t dat het regent." De variabele t zou hier het geluid van regen op een dak kunnen zijn. Met deze twee feiten en justifications kunnen we nu zeggen "Ik geloof nu met reden $s \cdot t$ dat de straten nat zijn."

Sum-operator

$$s{:}F \to s{+}t{:}F \text{ en } s{:}F \to t{+}s{:}F$$

Met andere woorden, als s al een justification is om F als waar te zien, dan is s met daaraan meer toegevoegde informatie t nog steeds een justification om in F te geloven.

Ook de justificationtermen zullen wat uitgebreider besproken moeten worden. Justifications worden opgebouwd uit justificationconstanten zoals $a, b, c, ...$ en justificationvariabelen zoals $s, t, ...$ Deze kunnen we combineren met de bovenstaande sum- en applicationoperatoren om nieuwe justifications te verkrijgen.

De twee axioma's voor de toegevoegde operatoren, gecombineerd met de klassieke propositielogica vormen samen de Justification Logic J_0, die als volgt is opgebouwd:

A1. De klassieke propositionele axioma's met toegevoegd de regel Modus Ponens,
A2. Het Application-axioma $s{:}(F \to G) \to (t{:}F \to s{\cdot}t{:}G)$,
A3. Het Sum-axioma $s{:}F \to s{+}t{:}F$.

Constanten en Constantspecificaties

We komen nu terug op de justificationtermen, de bouwstenen van een justification. We hebben eerder genoemd dat deze bestaan uit justificationconstanten en justificationvariabelen. Justificationconstanten zijn atomaire justifications, deze worden in het logisch systeem niet verder geanalyseerd. Justificationvariabelen zijn te zien als de tegenhanger van de justificationconstanten. Het zijn enkel ongespecificeerde justifications.

Als we willen zeggen dat er een axioma A in het systeem a priori justified is, kunnen we dat doen door te stellen

$$e_1{:}A$$

waar e_1 een justificationconstante is. Als we deze formule dan ook weer als justified willen meegeven aan ons systeem, zal dat er als volgt uitzien

$$e_2{:}(e_1{:}A)$$

Dit kan ook weer verder justified worden met justification e_3 enzovoorts. Een verzameling van dit soort axioma's justified met een constante wordt ook wel een Constant Specification CS genoemd. De Constant Specification wordt gedefiniëerd als een verzameling van formules van de vorm

$$e_n{:}\ e_{n-1}{:}\ ...\ :\ e_1{:}A \quad (n \geq 1)$$

met A een axioma in de logica en $e_1, ..., e_n$ justificationconstanten. Verder geldt dat als $e_n{:}\ e_{n-1}{:}\ ...\ :\ e_1{:}A$ een onderdeel is van de CS dat ook $e_{n-1}{:}\ ...\ :\ e_1{:}A$ een onderdeel van de CS.

Verder definiëren we een logica J_{CS} als de basis van de Justification Logic J_0 met daaraan toegevoegd een Constant Specification. Oftewel

$$\mathsf{J}_{CS} = \mathsf{J}_0 + CS$$

Het valt overigens te concluderen dat J_0 te zien is als J_{CS} met een lege CS, dus zonder toegevoegde axioma's. In J_0 zullen hiermee geen vooraf justified axioma's zitten. Deze logica zal dus niet a priori formules kunnen afleiden van de vorm $t{:}F$. Met deze logica kunnen we echter wel conclusies van de vorm

Als $x{:}A, y{:}B, z{:}C$, *...,* *dan geldt ook* $t{:}F$

evalueren op hun waarheid.

2.3 Formele Semantiek

Nu de syntax voldoende besproken is, zullen wij ons op de semantiek van Justification Logic richten. Standaard voor de verschillende variaties en uitbreidingen voor Justification Logic is het Kripke-Fitting J-model $\mathcal{M} = (W, R, \mathcal{E}, \Vdash)$ [5]. Dit is een standaard

Kripke-model $(W, R, \Vdash)$ met daaraan toegevoegd een evidentiefunctie $\mathcal{E}$.

In dit model $\mathcal{M}$ is W de verzameling werelden in het model en R is de verzameling relaties tussen die werelden.

Daarnaast hebben we de evidentiefunctie $\mathcal{E}$. Per tupel van een justification t en een formule F geeft de evidentiefunctie een verzameling werelden. Het kan bijvoorbeeld zijn dat wereld $u \in \mathcal{E}(s, G)$. Wat dit informeel betekent is dat in wereld u de formule $s{:}G$ mogelijk waar is.

Als laatste hebben we de forcingoperator $\Vdash$. Deze houdt zich in elke wereld u aan de volgende regels:

1. $\Vdash$ houdt zich aan de regels van de propositielogica. Oftewel, als bijvoorbeeld geldt dat $u \Vdash F$ en $u \Vdash G$ dan geldt bijgevolg ook $u \Vdash F \wedge G$.

2. $u \Vdash s{:}F$ desda $u \in \mathcal{E}(s, F)$ en voor alle v met uRv geldt $v \Vdash F$. Hiermee vragen we dus dat in alle werelden vanaf u de formule F waar moet zijn en hiernaast dat de wereld u in de evidentiefunctie $\mathcal{E}(s, F)$ zit voordat $s{:}F$ waar is in F.

Deze definitie van ons model is hiermee nog niet volledig afgerond. Op dit moment zouden we namelijk kunnen stellen dat we een wereld w hebben waarin geldt $w \Vdash s{:}(F \to G)$ en $w \Vdash t{:}F$ maar niet $w \in \mathcal{E}(s{\cdot}t, G)$. Hoewel we kunnen zeggen dat voor elke wereld v met wRv geldt dat $v \Vdash F \to G$ en $v \Vdash F$ en daarmee ook volgens onze definitie van $\Vdash$ geldt $v \Vdash G$. We kunnen dit laten gelden in een model waarin $w \notin \mathcal{E}(s{\cdot}t, G)$ en daarmee geldt $w \nVdash s{\cdot}t{:}G$. Dit is een conclusie die we op dit moment wel kunnen trekken in ons model, maar geen plaats heeft in Justification Logic. Het model zoals we hem nu hebben gedefiniëerd, heeft daarom nog een aantal regels nodig voor de toelaatbaarheidsfunctie $\mathcal{E}$.

- Application: $\mathcal{E}(s, F \to G) \cap \mathcal{E}(t, F) \subseteq \mathcal{E}(s{\cdot}t, G)$

  Als een wereld in de verzameling zit waarin $s{:}(F \to G)$ waar kan zijn èn in de verzameling zit waarin $t{:}F$ waar kan zijn, dan zal deze wereld bijgevolg ook in de verzameling zitten waarin $s{\cdot}t{:}G$ waar kan zijn. Deze regel komt overeen met ons eerder gestelde axioma A2.

- Sum: $\mathcal{E}(s, F) \cup \mathcal{E}(t, F) \subseteq \mathcal{E}(s{+}t, F)$

  Als een wereld in de verzameling zit waarin s een toelaatbare justification voor F is of in de verzameling zit waarin t een toelaatbare justification is voor F, dan zal deze wereld ook in de verzameling zitten van werelden waarvoor $s{+}t$ een toelaatbare justification is voor F. Deze regel geeft dus een basis voor axioma A3.

Met deze regels voor de toelaatbaarheidsfunctie kunnen we nu bewijzen dat J sound[3] en volledig is. Dit zullen we echter niet direct behandelen. We zullen later terugkomen op

[3]Hoewel volledigheid een goede vertaling is voor completeness, is er geen voldoende Nederlands equivalent voor soundness.

een aanpassing van deze bewijzen voor onze aanvullende regels. Deze aanpassingen zijn dusdanig klein, dat het overbodig is om de bewijzen voor de soundness en volledigheid van Justification Logic tweemaal te geven.

Samenvatting

We hebben gezien hoe Justification Logic in de huidige vorm als een overbrugging gezien kan worden tussen epistemologie en epistemische logica. Verder hebben we in dit hoofdstuk besproken wat een *CS* inhoudt en wat de axioma's van J zijn, namelijk de klassieke propostielogica-axioma's in combinatie met het Sum-axioma en Application-axioma. Vervolgens hebben we op een formelere wijze naar de semantiek van Justification Logic gekeken. We hebben op dit moment de regels van Justification Logic voldoende behandeld om hier in de volgende hoofdstukkken onze onderzoeksvragen proberen te beantwoorden.

3 Ordening

We zullen in dit hoofdstuk gaan kijken op welke manier we de syntax en semantiek van J moeten aanpassen om in staat te zijn justifications te vergelijken. Hierna zullen we kijken of dit systeem nog steeds sound en volledig is. In dit hoofdstuk zullen we hiermee onze eerste onderzoeksvraag kunnen beantwoorden.

3.1 Ordered Justications

Met Justification Logic kunnen we redenen, justifications, verbinden aan een logica. Als iemand zou geloven "Ik ben ziek", dan is dat te beschrijven als een propositie Z, en de justification van die propositie, bijvoorbeeld "Ik hoest" of "Ik heb koorts", als justifications t respectievelijk s. Dus $s{:}Z$ zal dan kunnen betekenen "Ik ben ziek want ik hoest".

Nu we een logica hebben die justifications kan verbinden aan beliefs, is de volgende stap om die justifications onderling te kunnen vergelijken. Het geloof "Ik ben ziek" met als justification "Ik hoest", is misschien minder geloofwaardig of overtuigend dan "Ik ben ziek, want ik heb koorts".

Intuïtief is er een ordening aan te brengen aan de justifications uit dit voorbeeld: t is een betere justification dan s, ofwel $s \leq t$. Deze vergelijkingen van justifications zijn echter zelf geen justifications. "Hoesten is een minder sterke justification dan koorts" zal niet een justification zijn voor "Ik ben ziek". De uitspraak $s \leq t$ zal zich gedragen als iets wat waar of onwaar is in plaats van als een justification zoals in traditionele Justification Logic.

Nu we een informele uitleg van deze ordening en het ordeningssymbool hebben gegeven, zullen we de taal van Ordered Justification Logic ook formeel definiëren.

Definitie 1. De taal van Ordered Justification Logic bestaat uit de volgende symbolen:

- De propositionele variabelen $p, q, ...$
- De connectieven $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$
- Het ordeningssymbool $\leq$

Verder bevat de taal justifications, deze zijn als volgt gedefiniëerd:

- Justificationvariabelen $s, t, ...$
- Justificationconstanten $a, b, c, ...$
- Als s en t justifications zijn, dan zijn $s{\cdot}t$ en $s + t$ dat ook.

Formules in Ordered Justification Logic zijn gedefiniëerd als volgt:

- De propositionele variabelen zijn formules.
- Als F een formule is, dan is $\neg F$ ook een formule.
- Als F en G formules zijn, zijn $F \vee G$, $F \wedge G$, $F \rightarrow G$ en $F \leftrightarrow G$ dat ook.
- Als s en t justifications zijn, dan is $s \leq t$ een formule.
- Als F een formule zonder ordeningssymbool is en s een justification, dan is $s{:}F$ een formule.

We hebben ervoor gekozen om het ordeningssymbool $\leq$ te gebruiken omdat een strictere $<$ niet mogelijk is in combinatie met de definitie van de $+$-operator. In het vorige hoofdstuk hebben we immers gezien dat volgens de semantiek van de sum-operator geldt dat $\mathcal{E}(s, F) \cup \mathcal{E}(t, F) \subseteq \mathcal{E}(s + t, F)$. Het kan hier waar zijn dat $\mathcal{E}(s, F)$ (of $\mathcal{E}(t, F)$) $= \emptyset$ en daarmee $\mathcal{E}(t, F) = \mathcal{E}(s + t, F)$. In dit geval is $t < s + t$ niet waar, maar $t \leq s + t$ wel.

We zullen nu aantonen dat Justification Logic met ons ordeningssymbool zowel sound als volledig is.

3.2 Soundness

Om aan te tonen dat J_{CS} in combinatie met ons ordeningssymbool sound is, zullen we moeten laten zien dat alles wat afleidbaar is in J_{CS} ook daadwerkelijk waar is. Dit zullen we doen door middel van inductie.

Theorema 1. J is sound.

Bewijs: Iets is afleidbaar in J_{CS} als het een bewijs heeft. We zullen nu eerst aantonen dat de axiomas van J_{CS} waar zijn. Hiermee bewijzen we dat de bewijzen van één bewijsstap waar zijn. Vervolgens zullen we door middel van inductie bewijzen dat alle bewijzen van meer dan één stap ook waar zullen zijn.

F is een tautologie

Elke wereld in een Kripkemodel gedraagt zich klassiek. Oftewel, in elke wereld van elk model met de CS gelden de regels van de propositielogica. Dit houdt in dat als F een tautologie is volgens de propositielogica, dan geldt F ook in J_{CS}.

Application-operator

Om dit te bewijzen nemen we een willekeurige wereld u in W waarin geldt $u \Vdash s{:}(F \rightarrow G)$ en $u \Vdash t{:}F$.

Hieruit volgt u zit in $\mathcal{E}(s, F \rightarrow G)$ en $\mathcal{E}(t, F)$. Volgens de application-conditie van $\mathcal{E}$ geldt dan ook $u \in \mathcal{E}(s{\cdot}t, G)$.

Omdat in u geldt dat $s{:}(F \to G)$, geldt dus voor alle v waarvoor geldt uRv dat $v \Vdash F \to G$. Ook omdat in u geldt $t{:}F$, dan geldt ook in v dat F waar is. Omdat in v geldt $F \to G$ en F, dan geldt ook $v \Vdash G$.

Omdat geldt dat $u \in \mathcal{E}(s{\cdot}t, G)$ en voor alle v met uRv $v \Vdash G$, volgt per definitie van $\Vdash$ dat ook geldt $u \Vdash s{\cdot}t{:}G$. Oftewel $s{:}(F \to G) \to (t{:}F \to s{\cdot}t{:}G)$ is waar in alle modellen in J_{CS}.

Sum-operator

Om dit te bewijzen nemen weer een willekeurige wereld $w \in W$ waarin geldt $w \Vdash s{:}F$.

Omdat geldt $w \Vdash s{:}F$, volgt dat $w \in \mathcal{E}(s, F)$. Volgens de Sum-conditie van $\mathcal{E}$, volgt dus dat als $w \in \mathcal{E}(s, F)$, dan ook $w \in \mathcal{E}(s{+}t, F)$.

Daarnaast geldt voor alle werelden r met wRr dat omdat $w \Vdash s{:}F$, geldt dat $r \Vdash F$.

We weten dat $w \in \mathcal{E}(s{+}t, F)$ en voor alle r waarvoor wRr geldt $r \Vdash F$. Hiermee geldt dus dat $w \Vdash s{+}t{:}F$ in alle modellen in J_{CS}. Dit bewijs werkt hetzelfde voor $t{:}F \to s{+}t{:}F$.

Modus Ponens

Daarnaast is nog aan te tonen dat alle axioma's in CS (van de vorm $e{:}A$) gelden in het model. Omdat het model de CS respecteert volgens de definitie van het model, geldt dus dat alle axioma's van de CS gelden in elke wereld van het model $\mathcal{M}$.

Stel er is meer dan één stap in het bewijs. Omdat de enige regel van afleiding in deze logica Modus Ponens is, zal de laatste stap van het bewijs de volgende vorm aannemen.

$$\frac{\mathrm{H} \qquad \mathrm{H} \to \mathrm{F}}{\mathrm{F}}$$

De inductiehypothese is dan:
Voor alle modellen K die de CS respecteren geldt dat als $K \Vdash H$ en $K \Vdash H \to F$ geldt dan ook F.

Omdat de $\Vdash$ zó gedefinieerd is, dat als $K \Vdash H$ en $K \Vdash H \to F$ geldt, dan ook $K \Vdash F$ geldt, betekent dit dat alle afleidingen van deze vorm waar zijn in J_{CS}. J_{CS} is dus sound. $\square$

3.3 Volledigheid

Om de volledigheid van Justification Logic aan te tonen, gebruiken we een in de logica standaard bewijsvorm: het canonieke model. Dit is een model waar elke wereld een maximaal consistente verzameling aan formules in onze taal bevat.

Een verzameling is consistent als er in de verzameling geen tegenspraken voorkomen. Zo is de verzameling $X = \{p, p \vee \neg p\}$ consistent, net als de verzameling $Y = \{\neg p, p \vee \neg p\}$, maar verzameling $Z = \{p, \neg p\}$ niet. Deze consistente verzamelingen kunnen uitgebreid worden tot maximaal consistente verzamelingen. Voor elke formule F in de logica kan ofwel F of zijn negatie $\neg F$ worden toegevoegd aan een consistente verzameling zonder deze inconsistent te maken. Aan de verzameling X is bijvoorbeeld de formule $\neg p \to p$

toe te voegen zonder de verzameling inconsistent te maken, maar de formule $p \rightarrow \neg p$ niet (en $\neg(p \rightarrow \neg p)$ weer wel).

Definitie 2. Het Canonieke Model $\mathcal{M} = (W, R, \mathcal{E}, \Vdash)$ voor J_{CS} ziet er als volgt uit:

- W is de verzameling van alle maximaal consistente verzamelingen in J_{CS}.
- $\Gamma R \Delta$ desda $\Gamma^\sharp \subseteq \Delta$ met $\Gamma^\sharp = \{F | t{:}F \in \Gamma$ voor een bepaalde $t\}$
- $\mathcal{E}(s, F) = \{\Gamma \in W | s{:}F \in \Gamma\}$
- $\Gamma \Vdash p$ desda $p \in \Gamma$
- $\Gamma \Vdash s \leq t$ desda $s \leq t \in \Gamma$

We hebben hiermee het canonieke model voor J_{CS}, een model waarin elke consistente formule in een wereld wordt waargemaakt. Om dit model te gebruiken om de volledigheid van J_{CS} aan te tonen, zullen we moeten aantonen dat het waarheidslemma geldt.

3.4 Waarheidslemma

Het waarheidslemma zullen we gebruiken om het canonieke model met alle consistente formules te verbinden met hun bewijsbaarheid. We laten hiermee zien dat alle formules in het canonieke model bewijsbaar moeten zijn als ze in het canonieke model zitten. Het waarheidslemma wordt hiermee ons middel om de volledigheid van deze logica te bewijzen. We zullen echter eerst nog moeten bewijzen dat het waarheidslemma hier geldig is.

Lemma. Waarheidslemma
Voor alle formules F voor een maximaal consistente Γ:

$$\Gamma \Vdash F \text{ desda } F \in \Gamma.$$

Bewijs: Het waarheidslemma zullen we bewijzen met inductie. Het basisgeval, een atomaire formule, is volgens de definitie van het canonieke model al triviaal waar (zie Definitie 2, punt 4). Nu zullen we moeten aantonen dat het waarheidslemma, onze inductiehypothese, geldt voor alle connectieven.

Negatie

$$\neg F \in \Gamma \Rightarrow \Gamma \Vdash \neg F$$

Als $\neg F$ in Γ zit, betekent dit dat $F \notin \Gamma$ omdat Γ een maximaal consistente verzameling is. F is dus niet een element van Γ en volgens de inductiehypothese geldt $\Gamma \nVdash F$. Omdat $\Gamma \nVdash F$ zal wel gelden $\Gamma \Vdash \neg F$.

$$\neg F \in \Gamma \Leftarrow \Gamma \Vdash \neg F$$

Dit bewijs volgt op eenzelfde manier. Als geldt dat $\Gamma \Vdash \neg F$, dan geldt ook $\Gamma \nVdash F$. Per inductiehypothese zal dus gelden $F \notin \Gamma$ en, vanwege het feit dat Γ maximaal consistent is, ook $\neg F \in \Gamma$.

Conjunctie

$$F \wedge G \in \Gamma \Rightarrow \Gamma \Vdash F \wedge G$$

Als $F \wedge G$ in Γ zit dan zal gelden dat ook $F \in \Gamma$ en $G \in \Gamma$, aangezien Γ maximaal consistent is.De verzameling $\{\neg F, \neg G, F \wedge G\}$ is immers tegenstrijdig. Per de inductiehypothese volgt dat $\Gamma \Vdash F$ en $\Gamma \Vdash G$. Per definitie van de conjunctie volgt dat $\Gamma \Vdash F \wedge G$.

$$F \wedge G \in \Gamma \Leftarrow \Gamma \Vdash F \wedge G$$

$\Gamma \Vdash F \wedge G$, daarom zal ook gelden dat $\Gamma \Vdash F$ en $\Gamma \Vdash G$. Volgens onze inductiehypothese betekent dit dat $F \in \Gamma$ en $G \in \Gamma$. Omdat Γ zowel F als G bevat en verder maximaal consistent is, zal dus ook gelden $F \wedge G \in \Gamma$.

Disjunctie

$$F \vee G \in \Gamma \Rightarrow \Gamma \Vdash F \vee G$$

$F \vee G \in \Gamma$ en omdat Γ maximaal consistent is, geldt $F \in \Gamma$ ofwel $G \in \Gamma$. Stel nu dat $F \in \Gamma$. Als $F \in \Gamma$ dan volgt, volgens de inductiehypothese, dat $\Gamma \Vdash F$ en per definitie van de disjunctie $\Gamma \Vdash F \vee G$. Stel nu dat $\neg F \in \Gamma$. In dat geval zal $G \in \Gamma$ gelden omdat anders Γ inconsistent zou zijn. Daarom geldt in dat geval ook per IH $\Gamma \Vdash G$ en ook $\Gamma \Vdash F \vee G$

$$F \vee G \in \Gamma \Leftarrow \Gamma \Vdash F \vee G$$

Als $\Gamma \Vdash F \vee G$ dan volgt ook $\Gamma \Vdash F$ of $\Gamma \Vdash G$. Stel $\Gamma \Vdash F$, dan per inductiehypothese $F \in \Gamma$. Omdat Γ maximaal consistent is zal de formule $F \vee X$ (met X een willekeurige formule) ook in Γ zitten. Daarom geldt ook $F \vee G \in \Gamma$. Dit werkt hetzelfde met $\Gamma \Vdash G$.

Implicatie

$$F \rightarrow G \in \Gamma \Rightarrow \Gamma \Vdash F \rightarrow G$$

Stel $F \in \Gamma$, omdat $F \in \Gamma$ en Γ is maximaal consistent dan zit ook G in Γ. Per inductiehypothese $\Gamma \Vdash F, G$ en daarmee ook per definitie van de implicatie $\Gamma \Vdash F \rightarrow G$. Stel $\neg F \in \Gamma$ dan zit $F \notin \Gamma$. Per inductiehypothese $\Gamma \nVdash F$ en dus $\Gamma \Vdash \neg F$. Vervolgens per definitie van de implicatie $\Gamma \Vdash F \rightarrow G$.

$$F \to G \in \Gamma \Leftarrow \Gamma \Vdash F \to G$$

$\Gamma \Vdash F \to G$, daarom ofwel $\Gamma \Vdash \neg F$ ofwel $\Gamma \Vdash G$. Stel $\Gamma \Vdash \neg F$, dan geldt dus $\Gamma \nVdash F$ en volgens de inductiehypothese ook $F \notin \Gamma$. Omdat Γ maximaal consistent is, is $\neg F$ een elemen van Γ en daarmee ook $F \to G \in \Gamma$.

Stel nu $\Gamma \Vdash G$. Per inductiehypothese geldt $G \in \Gamma$. Omdat Γ maximaal consistent is en $G \in \Gamma$, zal ook $X \to G \in \Gamma$ voor alle formules X en daarmee ook $F \to G \in \Gamma$.

Bi-implicatie

$$F \leftrightarrow G \in \Gamma \Rightarrow \Gamma \Vdash F \leftrightarrow G$$

Als $F \leftrightarrow G \in \Gamma$, dan zitten ofwel F en G in Γ, ofwel $\neg F$ en $\neg G$ in Γ want Γ is maximaal consistent. Stel $F \in \Gamma$ en $G \in \Gamma$, per inductiehypothese ook $\Gamma \Vdash F$ en $\Gamma \Vdash G$ en volgens de definitie van de bi-implicatie dus ook $\Gamma \Vdash F \leftrightarrow G$.

Stel nu $\neg F$ en $\neg G \in \Gamma$. Dan volgt $F \notin \Gamma$ en $G \notin \Gamma$. Per inductiehypothese volgt dan $\Gamma \nVdash F$ en $\Gamma \nVdash G$ en daarmee ook $\Gamma \Vdash F \leftrightarrow G$.

$$F \leftrightarrow G \in \Gamma \Leftarrow \Gamma \Vdash F \leftrightarrow G$$

Als $\Gamma \Vdash F \leftrightarrow G$ dan geldt ofwel $\Gamma \Vdash F$ en $\Gamma \Vdash G$ of $\Gamma \Vdash \neg F$ en $\Gamma \Vdash \neg G$. Stel $\Gamma \Vdash F$ en $\Gamma \Vdash G$. Volgens de inductiehypothese geldt dan $F \in \Gamma$ en $G \in \Gamma$ en volgens de bi-implicatie ook $F \leftrightarrow G \in \Gamma$. Stel nu dat $\Gamma \Vdash G$ of $\Gamma \Vdash \neg F$ en $\Gamma \Vdash \neg G$. Dan geldt $\Gamma \nVdash F$ en $\Gamma \nVdash G$ en volgens de inductiehypothese ook $F \notin \Gamma$ en $G \notin \Gamma$. Hiermee krijgen we $\neg F$ en $\neg G \in \Gamma$ en daarmee dan ook $F \leftrightarrow G \in \Gamma$.

Justification

$$t{:}F \in \Gamma \Rightarrow \Gamma \Vdash t{:}F$$

Als $t{:}F \in \Gamma$ dan zit F in Δ voor alle Δ waarvoor geldt $\Gamma R \Delta$. Per inductiehypothese geldt $\Delta \Vdash F$. Daarnaast zit Γ in $\mathcal{E}(t, F)$ volgens de definitie van de evidentiefunctie. Samen volgt dat $\Gamma \Vdash t{:}F$.

$$t{:}F \in \Gamma \Leftarrow \Gamma \Vdash t{:}F$$

Als $\Gamma \Vdash t{:}F$ dan geldt ook $\Delta \Vdash F$ voor alle Δ met $\Gamma R \Delta$. Hieruit volgt weer dat $F \in \Delta$ volgens de inductiehypothese. Γ zit verder ook in de $\mathcal{E}(t, F)$. Hieruit volgt ook dat $t{:}F \in \Gamma$.

Constant Specificatie

CS geldt in elke wereld in W. We weten dus voor alle $\Gamma \in W$ dat $CS \subseteq \Gamma$ en daarmee weten we ook dat als $\Gamma \Vdash c{:}A$ dan ook $c{:}A \in \Gamma$ en vice versa.

Omdat nu voor alle mogelijke F is aangetoond dat de inductiehypothese correct is, kunnen we het waarheidslemma als bewezen beschouwen. Er geldt dus voor alle formules F in $\mathsf{J}_{CS} F \in \Gamma$ desda $\Gamma \Vdash F$. □

3.5 Volledigheidsbewijs

Nu we hebben aangetoond dat het waarheidslemma geldt voor deze uitgebreide logica, kunnen we het volledigheidsbewijs afronden.

Theorema 2. J is volledig.

Bewijs: We bewijzen volledigheid met behulp van contrapositie:

$$\nvdash_{J_{CS}} F \Rightarrow \nvDash_{J_{CS}} F.$$

Stel nu dat F niet afleidbaar is in J_{CS}. De verzameling $\{F\}$ zal daarom leiden tot een tegenspraak. Hieruit valt af te leiden dat de verzameling $\{\neg F\}$ niet zal leiden tot een tegenspraak. We kunnen zeggen dat de verzameling $\{\neg F\}$ consistent is. Vervolgens bouwen we deze verzameling, $\{\neg F\}$, uit tot een maximaal consistente verzameling Γ.

We hebben hiermee de maximaal consistente verzameling Γ. Omdat Γ consistent is, zal gelden dat $\neg F \in \Gamma$ en ook dat $F \notin \Gamma$. Met het eerder bewezen Waarheidslemma kunnen we afleiden $\Gamma \nVdash F$.

Oftewel, $\nvdash_{J_{CS}} F \Rightarrow \nvDash_{J_{CS}} F$ en dus, per contrapositie, $\vDash F \Rightarrow \vdash F$.

Hiermee kunnen we Ordered Justification Logic zoals die nu is gedefinieerd als volledig beschouwen. □

3.6 Ordeningsaxioma

Zoals te zien aan het volledigheidsbewijs is de toevoeging van het ordeningssymbool aan de taal van Justification Logic een vrij kleine verandering geweest. Dit is begrijpelijk, we hebben immers alleen een toevoeging in de taal gemaakt, maar geen in de regels van de logica. We hebben een manier om uit te drukken dat een justification sterker is dan de andere, maar we halen hier geen nieuwe kennis uit.

De volgende stap is om een axioma toe te voegen aan de logica waarmee we dit wel behalen. Laten we hiervoor nogmaals het voorbeeld aan het begin van dit hoofdstuk aanhalen. “Ik hoest dus ik ben ziek.” Hierbij is “Ik hoest” een justification om te geloven dat ik ziek ben. Als we hierbij toevoegen “koorts is een betere justification om te geloven dat je ziek bent dan een hoestje.” kunnen we de conclusie trekken dat “Ik heb koorts dus ik ben ziek.” een logische redenering is. Formeel zou dit er zo uitzien:

$$(s \leq t \ \wedge s{:}F) \rightarrow t{:}F$$

Informeel betekent dit "Als ik justification s al een goede justification vind voor F, dan vind ik t zeker een goede justification voor F."

Nu we het ordeningsaxioma hebben gedefinieerd kunnen we Ordered Justification Logic definieren als J_{CS} gecombineerd met het ordeningsaxioma en ordeningssymbool $\leq$. We zullen Ordered Justification Logic aanduiden met $\mathsf{J}_{\leq}$.

Met dit axioma toegevoegd aan de logica zullen we nogmaals kijken naar de bewijzen voor de soundness en volledigheid. Aangezien we de logica hebben uitgebreid, zullen we ook de $\mathcal{E}$-functie moeten uitbreiden om dit axioma goed te kunnen weergeven. Dit doen we als volgt:

$$\mathcal{E}(s, F) \text{ en } s \leq t \rightarrow \mathcal{E}(t, F)$$

3.7 Aanvullende soundness en volledigheid

3.7.1 Soundness

Aan het bewijs voor soundness verandert niet veel, maar we zullen nu wel soundness moeten bewijzen voor het voorgestelde nieuwe axioma. Ter herhaling:

$$(s \leq t \ \wedge s{:}F) \rightarrow t{:}F$$

Theorema 3. $\mathsf{J}_{\leq}$ is sound.

Bewijs: Laten we een w in W nemen waarin geldt dat $s{:}F$ waar is en $s \leq t$ geldt. Het volgt dan dat $w \in \mathcal{E}(s, F)$. Volgens onze regels voor $\mathcal{E}$ geldt ook $w \in \mathcal{E}(t, F)$.

Hiernaast geldt voor elke wereld u met wRu dat $u \Vdash F$. Aangezien dit geldt en $w \in \mathcal{E}$ geldt, volgt ook dat $w \Vdash t{:}F$. $\square$

3.7.2 Volledigheid

Aan te tonen is hier dat het model met deze vernieuwde $\mathcal{E}$-functie nog steeds volledig is. Er zijn immers voldoende modellen in J te bedenken waar het ordeningsaxioma niet voor geldt, maar als we onze evidentiefunctie zorgvuldig hebben uitgebreid, zullen deze modellen niet ook in $\mathsf{J}_{\leq}$ voorkomen.

Theorema 4. $\mathsf{J}_{\leq}$ is volledig.

Bewijs: Ook hiervoor zullen we moeten aantonen dat $\vDash_{\mathsf{J}_{\leq}} F \Rightarrow \vdash_{\mathsf{J}_{\leq}} F$. Hiervoor zullen we weer het canonieke model en het Waarheidslemma moeten gebruiken.

We laten zien dat $\mathsf{J}_{\leq}$ volledig is door aan te tonen dat $\nvdash_{\mathsf{J}_{\leq}} F \Rightarrow \nvDash_{\mathsf{J}_{\leq}} F$. De enige verandering met het voorgaande bewijs is dat de $\mathcal{E}$-functie is aangepast en hierdoor meer restricties oplegt op het canonieke model. De verzameling $\{s{:}F, s \leq t, \neg t{:}F\}$ is niet consistent in $\mathsf{J}_{\leq}$, terwijl deze zelfde verzameling wel consistent zou zijn in J_{CS}. Dit is feitelijk het enkele verschil tussen deze twee bewijzen.

We nemen dus weer aan dat F niet afleidbaar is in ditmaal $\mathsf{J}_{\leq}$, en daarmee dat de verzameling $\{F\}$ leidt tot een tegenspraak. Hiermee concluderen we dat $\{\neg F\}$ niet tot een tegenspraak leidt en consistent is. We bouwen vervolgens deze verzameling $\Gamma = \{\neg F\}$ zoals eerder op tot een maximaal consistente verzameling.

We weten dat $\neg F \in \Gamma$ en hiermee, vanwege de consistentie $F \in \Gamma$. Met het waarheidslemma weten we ook $\Gamma \nVdash F$. Hiermee leidt $\nvdash_{\mathsf{J}_{\leq}} F$ tot $\nvDash \mathsf{J}_{\leq} F$ en per contrapositie ook voor $\mathsf{J}_{\leq}$ tot $\vDash F \Rightarrow \vdash F$

□

3.8 Vervolgstappen

Laten we nu kijken naar verdere mogelijkheden in deze logica. De formule

$$s \leq s{+}t \wedge s{:}F \rightarrow s{+}t{:}F$$

is een intuïtieve instantie van ons toegevoegde axioma.

In onze definitie van de taal van Ordered Justification Logic hebben we gesteld: "Als F een formule zonder ordeningssymbool is en s een justification, dan is $s{:}F$ een formule". We hebben gekozen om deze restrictie te leggen op het voorkomen van het ordeningssymbool om de toegevoegde elementen te versimpelen. Laten we deze restrictie nu weglaten. "Als F een formule is en s een justification, dan is $s{:}F$ een formule."Als we deze restrictie zouden laten staan, zou het betekenen dat een ordening een propositie is, zonder een justification voor die propositie mogelijk is. Het lijkt daarom voor de hand liggend om justifications aan ordeningen te kunnen koppelen.

Dit betekent voor de logica dus dat we een volgende formule kunnen toestaan:

$$r{:}((s \leq t \wedge s{:}F) \rightarrow t{:}F) \rightarrow (u{:}(s \leq t \ \wedge \ s{:}F) \rightarrow (u{\cdot}r){:}t{:}F)$$

Dit is het application-axioma toegepast op ons ordeningsaxioma.

Samenvatting

We hebben nu gezien dat $\mathsf{J}_{\leq}$ sound en volledig is nadat we onze nieuwe regels hebben toegevoegd. We hebben verder een voorzichtige stap gezet om te onderzoeken wat de gevolgen van deze regel zijn op de bestaande regels. We gaan in het volgende hoofdstuk verder kijken naar de combinatie van $\mathsf{J}_{\leq}$ met een andere uitbreiding van J om te zien of de andere onderzoeksvraag ook beantwoord kan worden.

4 Uitbreidingen en Toepassingen

Nu we een redelijke basis en definitie voor Ordered Justification Logic hebben, kunnen we kijken naar verdere toepassingen en uitbreidingen.

Een mogelijke uitbreiding is om een systeem toe te voegen om ordeningen af te leiden uit de modellen. Op dit moment zijn alle ordeningen als het ware van bovenaf bepaald en is het niet mogelijk om binnen een model nieuwe ordeningen te genereren. Het zou moeten kunnen als een model een constructie heeft waarin $\mathcal{E}(s, F)$ volledig omvat wordt door $\mathcal{E}(t, F)$, dat hiermee $s < t$ afgeleid kan worden. Op dit moment zijn hier nog geen regels voor binnen onze logica.

Een andere mogelijkheid is om operatoren toe te voegen. Er kan gekeken worden of bijvoorbeeld de $\Box$-operator in te voegen is in onze $\mathsf{J}_{\leq}$ om hiermee het verschil tussen kennis en justification ook in $\mathsf{J}_{\leq}$ te modelleren [6]. Ook kunnen we ons afvragen of positieve introspectie een plaats heeft in deze logica. In dit hoofdstuk zullen we naar dit laatste onderwerp kijken.

4.1 Proof Checker

In Artemovs Logic of Proofs (LP) [1] stelt hij een ander logisch systeem voor, namelijk Justification Logic in combinatie met een reflectie-axioma in de vorm van $s{:}F \to F$ en een proof checker $t{:}F \to !t{:}(t{:}F)$. We behandelen hier alleen de proof checker.

$$t{:}F \to !t{:}(t{:}F)$$

Wat hiermee gerepresenteerd wordt is de stelling dat t een justification is voor F dan zal er ook een justification $!t$ bestaan die bewijst dat $t{:}F$ een correcte formule is. Een voorbeeld zou zijn dat als t een bewijs is voor een stelling F, dat $!t$ een uitleg is waarom t de stelling bewijst Ook oordeelt een proof checker of een formule goed is, een $!t$ is over het algemeen een bevestiging dat $t{:}F$ een correcte redenatie is). Het lijkt vanzelfsprekend om deze twee justifications t en $!t$ ook met elkaar te kunnen vergelijken. Er zijn hiervoor vier mogelijke opties:

1. $t \leq !t$
2. $!t \leq t$
3. $t = !t$
4. t en $!t$ zijn niet te vergelijken.

We zullen hiervoor ook naar Artemovs aanpassingen voor de proof checker in Justification Logic moeten kijken.

4.2 Proof Checker in Justification Logic

Artemov vergelijkt zijn proof checker met het idee van positieve introspectie in de klassiekere epistemische logica. Als een agent weet dat een formule F waar is, oftewel $\mathsf{K}F$, dan weet hij ook dat hij weet dat F waar is, $\mathsf{KK}F$. Het grootste verschil tussen deze versie van positieve introspectie en Artemov's proof checker is, kort door de bocht, dat de justifications $!t$ en t beide verschillend zijn. De justification om F te geloven is hiermee anders dat de justification om $t{:}F$ te geloven. Zoals we eerder hebben gezien, is juist de nuance van Justification Logic belangrijk. De formules $s{:}F$ en $t{:}F$ zijn duidelijk verschillend, net zoals s en t verschillende justifications zijn om F te geloven. KF is daarentegen meer een black box. Zo ook is het te stellen dat $!t{:}t{:}F$ een explicietere manier is om positieve introspectie te implementeren dan KKF. Op deze manier is het namelijk makkelijk te herleiden wat de basis is om F aan te nemen.

De logica met het axioma $t{:}F \to !t{:}(t{:}F)$ noemt Artemov dan ook $\mathsf{J4}$ naar het vijfde axioma in de epistemische logica. Hij stelt verder dat $\mathsf{J4}$-modellen met een *transitieve* R twee extra voorwaarden hebben.

- Monoticiteit geldt voor R, dat wil zeggen dat als $w \in \mathcal{E}(t, F)$ en wRv dan ook $v \in \mathcal{E}(t, F)$.
- Introspection Closure: $\mathcal{E}(t, F) \subseteq \mathcal{E}(!t, t{:}F)$.

4.2.1 Soundness voor J4

Het bewijs voor soundness is vrijwel gelijk aan het oorspronkelijke bewijs met (Ordered) Justification Logic. We zullen nog echter moeten aantonen dat het positieve-introspectie-axioma geldt in alle werelden van $\mathsf{J4}$.

Theorema 5. $\mathsf{J4}$ is sound.

Bewijs: Stel nu dus dat $w \Vdash t{:}F$. Hieruit volgt dat $w \in \mathcal{E}(t, F)$ en dat voor alle v waarvoor geldt wRv geldt ook $u \Vdash F$. Omdat Introspection Closure geldt, zal dus ook gelden $w \in \mathcal{E}(!t, t{:}F)$. Nu zal alleen nog moeten gelden dat $v \Vdash t{:}F$. Hiervoor nemen we een willekeurige wereld u met vRu. Omdat R transitief is, geldt dus ook wRu en daarmee $u \Vdash F$. Omdat $\mathcal{E}$ monotoon is, volgt verder dat $v \in \mathcal{E}(t, F)$ en hiermee ook dat $u \Vdash t{:}F$.

Oftewel, $w \Vdash !t{:}(t{:}F)$ en daarmee ook $w \Vdash t{:}F \to !t{:}(t{:}F)$. Ook $\mathsf{J4}$ is sound. □

4.2.2 Volledigheid voor J4

Ook aan het bewijs voor de volledigheid van $\mathsf{J4}$ verandert niet veel ten opzichte van het bewijs voor J_{CS}. Het enige wat hiervoor nog aangetoond moet worden is dat de relatie R transitief is en dat de evidentiefunctie $\mathcal{E}$ monotoniciteit vertoont. Ook moet aangetoond worden dat de toegevoegde regel voor introspection closure standhoudt.

Theorema 6. $\mathsf{J4}$ is volledig.

Bewijs: Stel nu dat er voor een maximale verzameling Γ geldt dat $\Gamma R \Delta$ en verder dat $\Gamma \in \mathcal{E}(t, F)$, oftewel $t{:}F \in \Gamma$. Omdat Γ maximaal consistent is en we weten dat $\Vdash_{\mathsf{J4}} t{:}F \rightarrow !t{:}t{:}F$, volgt nu ook dat $!t{:}t{:}F \in \Gamma$. Per definitie volgt ook dat $t{:}F \in \Delta$ moet zitten. En hiermee geldt dat $\Delta \in \mathcal{E}(t, F)$. De relatie is dus monotoon.

Om de transitiviteit van het canonieke model voor $\mathsf{J4}$ aan te tonen, nemen we aan dat $\Gamma R \Delta$, $\Delta R \Lambda$ en $t{:}F \in \Gamma$. We weten dat voor Γ ook geldt $!t{:}t{:}F$, dat vanwege de monoticiteit van het canonieke model geldt $\Delta \in \mathcal{E}(t, F)$ en dat dit samen betekent dat $t{:}F \in \Delta$. Hieruit volgt dat $F \in \Lambda$ en omdat R dusdanig is gedefiniëerd, ook $\Gamma R \Lambda$. Het model is dus transitief.

Verder moeten we aantonen dat ook closure geldt voor dit model. We nemen daarom weer aan dat $\Gamma \in \mathcal{E}(t, F)$ en hiermee ook $t{:}F \in \Gamma$. Per introspectie-axioma weten we nu dat $!t{:}t{:}F \in \Gamma$ en hiermee ook dat $\Gamma \in \mathcal{E}(!t, t{:}F)$. Introspection Closure geldt dus ook.

Het bewijs volgt verder zoals de voorgaande volledigheidsbewijzen. We nemen aan dat een formule F niet afleidbaar is in $\mathsf{J4}_{\leq}$ en daarmee dat $\neg F$ wel afleidbaar is in $\mathsf{J4}_{\leq}$. We bouwen wederom de maximale consistente verzameling $\{\neg F\} = \Gamma$ op, ditmaal met ook de proof checker toegevoegd.

We kunnen aantonen met het feit dat $\neg F \in \Gamma$ dat hiermee ook geldt $F \notin \Gamma$. Hierop het waarheidslemma toegepast, geeft ons dat ook geldt $\Gamma \nvDash F$. Hieruit kunnen we weer concluderen dat als een formule F niet afleidbaar is, deze ook niet bewijsbaar is in $\mathsf{J4}_{\leq}$.

We hebben dus aangetoond dat ook $\mathsf{J4}_{\leq}$ volledig is. $\square$

4.3 t en $!t$ vergelijken

We zullen nu naar de bovenstaande drie opties voor een ordening van $!t$ en t kijken. De onderstaande bewijzen volgen grotendeels de bewijzen in 3.1 en 3.4.

4.3.1 $t \leq !t$

Laten we eerst kijken naar $t \leq !t$. Volgens onze eerdere regels zal dus volgen dat als we $t{:}F$ en $t \leq !t$ aannemen, dat daaruit volgt dat ook $!t{:}F$ waar moet zijn. We zullen nu kort kijken of deze versie van Ordered Justification Logic ($\mathsf{J4}_{\leq}$) samen met de regel $t \leq !t$ (voor een willekeurige t) ook sound en volledig is.

Soundness Gegeven is een $w \in W$ waarvoor geldt $t \leq !t$ en $t{:}F$. Omdat $w \vDash t{:}F$ geldt hiermee ook $w \in \mathcal{E}(t, F)$. Hiernaast geldt voor alle $v \in W$ met wRv ook $v \vDash F$. Verder kunnen we concluderen, omdat $t \leq !t$ en $w \in \mathcal{E}(t, F)$ ook dat $w \in \mathcal{E}(!t, F)$. We weten dat geldt dat voor alle v met wRv dat $v \vDash F$ dus volgt hieruit dat $w \vDash !t{:}F$. $\square$

Volledigheid In dit geval voegen we alleen toe dat $t \leq !t$ geldt voor elke willekeurige t. We construeren een maximale consistente verzameling Γ met hieraan toegevoegd de aanname dat $t \leq !t$ geldt. Dit gaat vrijwel gelijk aan de eerdere versies van dit volledigheidsbewijs.

We nemen een F die niet afleidbaar is in $\mathsf{J4}_{\leq}$. Hiermee leidt de verzameling $\{F\}$ tot een tegenspraak en daarmee dat de verzameling $\{\neg F\}$ niet tot een tegenspraak leidt en

consistent is. We bouwen nu weer de maximaal consistente verzameling $\Gamma = \{\neg F\}$ op, ditmaal met de aanname dat $t \leq !t$ waar is.

We weten nu dat $\neg F \in \Gamma$, en volgens de maximale consistentie van Γ ook dat $F \notin \Gamma$. Als we het waarheidslemma hier weer toepassen zullen we constateren dat $\Gamma \nvDash F$. Hiermee hebben we dus weer aangetoond dat als een formule F niet afleidbaar is in (ditmaal) $\mathsf{J4}_{\leq}$ dan geldt ook dat deze niet bewijsbaar is.

Waar we echter nu wel naar moeten kijken is of deze maximaal consistente verzameling Γ nog wel monotoon is en of introspection closure nog steeds van toepassing is met deze toevoegingen.

Laten we aannemen dat voor deze verzameling Γ een maximaal consistente Δ bestaat waarvoor geldt dat $\Gamma R \Delta$ en ook dat $\Gamma \in \mathcal{E}(t, F)$. Hier volgt dat $t{:}F \in \Gamma$. Hieruit volgt ook dat $!t{:}F \in \Gamma$ moet gelden en hiermee $\Gamma \in \mathcal{E}(!t, F)$. Om de monotoniciteit te behouden moet ook gelden dat $\Delta \in \mathcal{E}(!t, F)$. We weten dat in Γ geldt dat $\Gamma \Vdash !t{:}t{:}F$. Hieruit volgt dat voor alle Λ met $\Gamma R \Lambda$ ook geldt $\Lambda \Vdash t{:}F$. In dit geval geldt vervolgens dat $\Delta \Vdash t{:}F$. Nu we weten dat in Δ geldt $t{:}F$ volgt per maximale consistentie ook $!t{:}F$ en hiermee is bewezen dat $\Delta \in \mathcal{E}(t, F)$ en dus dat de relatie R monotoon is.

Verder volgt het aantonen van introspectie closure vrijwel hetzelfde als hiervoor. Ter herhaling nemen we aan dat $\Gamma \in \mathcal{E}(t, F)$ en daaruit dat $t{:}F \in \Gamma$. Volgens het introspectie-axioma kunnen we concluderen dat $!t{:}t{:}F$ en ook dat $\Gamma \in \mathcal{E}(!t, t{:}F)$. Wederom geldt introspection closure voor ditmaal $\mathsf{J4}_{\leq}$.

Hiermee kunnen we concluderen dat ook $\mathsf{J4}_{\leq}$ met deze toegevoegde aanname volledig is. $\square$

We kunnen concluderen dat een toevoeging van de regel $t \leq !t$ nog steeds leidt tot een correcte logica. Hier volgt uit dat $!t{:}F$ geldt met deze toegevoegde aanname.

Als we er informeel naar kijken, kunnen we zeggen dat in $!t{:}t{:}F$ de justification t het bewijs is voor een aanname F en $!t$ de reden waarom het bewijs t een goed bewijs is voor de aanname F. Hierdoor zouden we nu kunnen stellen dat ook $!t$ een bewijs is voor de aanname F en het daadwerkelijke bewijs buiten beschouwing laten. Het zou hier kunnen betekenen dat weten hoe een goed bewijs voor F moet werken al geldt als voldoende bewijs om F als waar te beschouwen. Dit lijkt niet een gewenst resultaat te zijn. Echter is dit wel een direct en logisch correct gevolg van de aanname dat $t \leq !t$ geldt.

4.3.2 $!t \leq t$

Laten we nu kijken wat de gevolgen zijn van de andere optie, $!t \leq t$. Als we dit aannemen met $!t{:}t{:}F$, zullen we krijgen dat $t{:}t{:}F$ ook zal gelden. Op deze manier valt het verschil tussen $\mathsf{J4}_{\leq}$ en de positieve introspectie in de klassiekere vorm geheel weg. Er zit geen nuance meer in het gebruik van $!t$ en t. Dit lijkt een gevolg dat we niet in onze logica willen, maar laten we toch naar de soundness en volledigheid van deze variatie kijken.

Soundness Laten we aannemen dat $w \vDash !t{:}t{:}F$ en $!t \leq t$. We weten hiermee dat $w \in \mathcal{E}(!t, t{:}F)$ en voor alle v, wRv geldt $v \vDash t{:}F$. Omdat $w \in \mathcal{E}(!t, t{:}F)$ en $w \vDash !t \leq t$ geldt

ook $w \in \mathcal{E}(t, t{:}F)$. Samen met het feit dat voor alle v, wRv geldt $v \vDash t{:}F$ volgt hiermee ook dat geldt $w \vDash t{:}t{:}F$. $\square$

Volledigheid Ook hier voegen we enkel de aanname $!t \leq t$ toe aan $\mathsf{J4}_{\leq}$.

Het volledigheidsbewijs volgt verder zoals het voorgaande bewijs maar ditmaal enkel met de modellen waarvoor geldt dat $!t \leq t$ waar is. We kijken nog kort of de monoticiteit voor deze modellen geldt.

Voor de maximaal consistente verzamelingen Γ en Δ geldt $t{:}F \in \Gamma$ en $\Gamma R \Delta$, daarmee geldt ook $\Gamma \in \mathcal{E}(t, F)$ en ook $F \in \Delta$. Nu geldt in Γ, vanwege de maximaal consistentie ook $!t{:}t{:}F$ en hiermee ook $t{:}t{:}F$. Er volgt ook $t{:}F \in \Delta$. R blijft ook hier monotoon.

$\square$

Ook hier zien we dat dit volgens onze logica een correcte afleiding is. Als t een gerechtvaardigde reden is om F te geloven, dus $t{:}F$, kunnen we nu weer t als justification voor deze formule geven, $t{:}t{:}F$. Dit is een cyclische redening die geen plaats zou moeten hebben in onze $\mathsf{J}_{\leq}$.

4.3.3 $t = !t$

Aangezien zowel $t \leq !t$ als $!t \leq t$ niet direct tot een tegenspraak leiden binnen onze logica, is het mogelijk om te zeggen dat deze misschien allebei tegelijkertijd waar kunnen zijn. Op deze manier zou gesteld kunnen worden dat $t = !t$ geldt. Dit lijkt ongewenst, maar ook deze aanname is niet direct ongeldig in $\mathsf{J4}_{\leq}$.

Het toevoegen van de aanname $t = !t$ is hier equivalent aan het tegelijk toevoegen van de aannames $t \leq !t$ en $!t \leq t$. We zullen dus moeten vaststelllen dat deze twee aannames samen niet tot een tegenstelling zullen leiden.

Soundness Om aan te tonen dat $\mathsf{J4}_{\leq}$ met de aanname $t = !t$ sound is, zullen we dus de aannames $t \leq !t$ en $!t \leq t$ moeten toevoegen. Deze toevoegingen gaan zoals in 4.3.1 en 4.3.2. Een van de gevolgen van deze aannames is dat dit alleen geldt voor de modellen waarin $\mathcal{E}(t, F) = \mathcal{E}(!t, F)$. Dit leidt echter niet tot een tegenspraak, dus ook met deze aanname blijft $\mathsf{J4}_{\leq}$ sound. $\square$

Volledigheid We zullen hiervoor de aanname $t = !t$ toevoegen aan $\mathsf{J4}_{\leq}$. We bouwen wederom een maximaal consistente verzameling Γ met ditmaal de toegevoegde aanname dat $t = !t$. Dit is wederom hetzelfde bewijs als de voorgaande twee volledigheidsbewijzen, echter voor een kleinere verzameling modellen, namelijk die waarvoor $t = !t$ geldt.

Ook hier zullen we tenslotte moeten controleren of Γ nog steeds monotoon is en ook of de introspectie closure nog geldt.

Monoticiteit werkt in dit geval vrijwel hetzelfde als de monoticiteit voor zowel $\mathsf{J4}_{\leq}$ met de aanname $t \leq !t$ en $\mathsf{J4}_{\leq}$ met de aanname $!t \leq t$ samengevoegd. In feite gelden beide bewijzen hier ook als bewijs dat R ook nu monotoon is.

Vervolgens zullen we moeten laten zien dat de introspection closure nog steeds geldt. Ter herinnering moet gelden dat $\mathcal{E}(t, F) \subseteq \mathcal{E}(!t, t{:}F)$. Dit bewijs is verder niet gewijzigd van het oorspronkelijke $\mathsf{J4}_{\leq}$-bewijs, aangezien we geen wijzigingen hebben toegebracht aan de werking van de !-operator. □

We komen hiermee tot de conclusie dat ook deze extreme aanname voor een klein maar wezenlijk deel van alle modellen in $\mathsf{J4}_{\leq}$ waar kan zijn.

Het grootste gevolg hiervan is dat voor een gedeelte van de modellen van $\mathsf{J4}_{\leq}$ er geen wezenlijk verschil is tussen $!t$ en t. Hier zijn deze twee justifications vrijwel gelijk aan de klassiekere positieve introspectie-operator K. Dit is niet wenselijk gezien het doel van de toevoeging van de Justification Logic-versie van positive introspectie. We hebben eerder al gezien dat een van de redenen om een verschil te hebben tussen justifications de mogelijkheid tot het herleiden van de redenen om iets geloven is. Nu blijkt dat in een gedeelte van de mogelijke modellen deze twee justifications inwisselbaar kunnen zijn. Er zijn op dit moment geen regels om dit te voorkomen en hiermee valt de nuance van verschillende justifications weg. We zullen dus moeten concluderen dat in deze vorm $\mathsf{J4}_{\leq}$ niet voldoende is doordacht.

4.3.4 $!t$ en t zijn niet te vergelijken

Het lijkt erop dat onze drie bovenstaande aannames alledrie ongewenste resultaten hebben. Toch leidt geen van deze drie aannames tot een tegenspraak.

Wel hebben we meermaals aangetoond dat de gevolgen van het toevoegen van de vergelijking van $!t$ en t tot problemen leidt. Het lijkt daarom niet wenselijk om justifications met hun positive introspection te vergelijken. Het is natuurlijk mogelijk om als regel toe te voegen dat dit soort vergelijkingen niet correct zijn.

Dit kan echter problemen veroorzaken met de aan het begin van het hoofdstuk afleidbare ordeningen. Wanneer we toestaan dat een ordening afgeleid kan worden in het model in plaats van enkel ordeningen toestaan als losse proposities, is het mogelijk dat ordeningen als de bovenstaande afgeleid kunnen worden, maar niet wenselijk zijn. We zullen dus nog verder moeten experimenteren voordat we deze toevoegingen aan J ook kunnen toevoegen aan $\mathsf{J}_{\leq}$.

Samenvatting

We hebben gezien dat $\mathsf{J4}$ en $\mathsf{J}_{\leq}$ op het gebied van soundness en volledigheid samen te voegen zijn. Echter is gebleken dat geen van de uitkomsten van een zodanige samenvoeging een gewenste conclusie heeft. Zoals $\mathsf{J}_{\leq}$ nu is gedefinieerd, is de combinatie van de proof checker ! en de ordening $\mathsf{J}_{\leq}$ geen verrijking voor justification logic. $\mathsf{J}_{\leq}$ zal daarom nog verder aangepast moeten worden voordat het universeler kan worden toegepast.

5 Conclusie

Nu we het onderwerp van Ordered Justification Logic voldoende besproken hebben, kunnen we de onderzoeksvragen beantwoorden. Ter herhaling:

1. Zijn de justifications in Justification Logic onderling te vergelijken?
2. Zijn deze vergelijkingen ook te verenigen met andere uitbreidingen van Justification Logic?

Hoofdstuk 2 was voornamelijk een verkennend hoofdstuk, we hebben hierin de basis gelegd voor ons begrip van Justification Logic. We hebben ook kort gekeken naar het ontstaan, de syntax en de semantiek van J.

Vervolgens hebben we in hoofdstuk 3 de eerstgenoemde onderzoeksvraag proberen te beantwoorden. We hebben op een intuïtieve manier van justifications vergelijken een aantal aanpassingen gemaakt aan de oorspronkelijke Justification Logic. Daarna hebben we laten zien dat deze Ordered Justification Logic ook daadwerkelijk sound en volledig is. Hiermee hebben we laten zien dat op deze manier justifications inderdaad te vergelijken zijn binnen Justification Logic.

Verder hebben we in hoofdstuk 4 gekeken of onze nieuwe uitbreiding van J ook samen te voegen is met een andere uitbreiding van Justification Logic: $\mathsf{J4}$. Justification Logic met een proof checker ! als een geavanceerde vorm van positieve introspectie leek uit te breiden te zijn met onze manier van justifications onderling vergelijken. Zoals aangetoond in hoofdstuk 4 is deze combinatie sound en volledig. Echter bleken alle mogelijke vergelijkingen ongewenste gevolgen te hebben.

Bij de modellen waarin $t \leq !t$ met t een justification voor een formule F bleek de conclusie $!t{:}F$ in tegenspraak te zijn met het concept van de proof checker. Deze is juist bedoelt als justification voor een al eerder gerechtvaardigde formule. De modellen waarin $!t \leq t$ zou gelden hebben een probleem dat de conclusie $t{:}t{:}F$ kortgezegd een cirkelredening is: t is een justfication dat t een justification voor F is. De laatste mogelijkheid $t = !t$ heeft de combinatie van de bovenstaande twee problemen. Verder was het originele punt van de proof checker dat de resulterende justifications niet equivalent zouden zijn aan de oorspronkelijke justifications. In deze modellen is er vrijwel geen verschil tussen de justificationversie van positieve introspectie en klassiekere vormen van positieve introspectie.

De conclusie die we uit dit geheel hebben moeten trekken was dat in de huidige vorm onze Ordered Justification Logic niet verenigbaar is met $\mathsf{J4}$. Er zullen nog een aantal aanpassingen aan $\mathsf{J4}_{\leq}$ gedaan moeten worden voordat de proof checker zonder de hierboven beschreven nadelige resultaten in $\mathsf{J}_{\leq}$ past.

Vervolgonderzoek

Zoals hierboven is genoemd, is de huidige vorm van Ordered Justification Logic niet direct geschikt om samen te voegen met andere uitbreidingen van J. Er kan daarom gekeken worden of onze huidige toevoeging aan J aangepast kan worden zodanig dat

dit wel mogelijk is. Ook kan nog gekeken worden naar de in hoofdstuk 4 gesuggereerde andere operatoren. Is het bijvoorbeeld mogelijk om de $\Box$-operator toe te voegen in $\mathsf{J}_{\leq}$? Ook is het een optie om te kijken naar een manier om ordeningen af te leiden uit een gegeven model.

Relevantie voor KI

Volgens Russell & Norvig [7] is het onderzoek naar KI onder te verdelen in een viertal benaderingen: thinking humanly, acting humanly, acting rationally en thinking rationally. Vormen van logica vallen volgens hen in de thinking rationally aanpak.

Deze uitbreiding is voornamelijk een basis voor vervolgonderzoek naar Justification Logic. Op deze manier kan het in de toekomst mogelijk zijn om ook met justifications om te gaan die misschien niet correct of volledig zijn, waar op dit moment nog geen plaats voor is binnen Justification Logic, maar waar mensen regelmatig mee omgaan.

Ook zou deze vorm van logica een middel kunnen zijn om verschillende situaties waarin rechtvaardigingen of onderbouwingen een belangrijke rol spelen beter te kunnen analyseren. Een voorbeeld hier is juridisch redenen, waarin de bewijzen verschillende overtuigende waardes hebben. In dit gebied wordt al argumentatietheorie gebruikt, wat aangevuld zou kunnen worden met elementen uit Justification Logic. Ook kan het van nut zijn in de medische diagnostiek, omdat moet worden gekeken of de argumenten voor de ene ziekte sterker zijn dan de argumenten voor de andere ziekte.

Referenties

[1] Sergei Artemov, The logic of Justification. *Review of Symbolic Logic* 1 (4): 477-513. 2008.

[2] Richard Feldman, *Epistemology*, New Jersey: Pearson Education, 2003.

[3] Edmund L. Gettier, Is Justified True Belief Knowledge? *Analysis* 23(6): 121-123. 1963.

[4] Hans van Ditmarsch, Wiebe van der Hoek & Barteld Kooi, *Dynamic Epistemic Logic*, Springer, 2008.

[5] Melvin Fitting, The logic of proofs, semantically. *Annals of Pure and Applied Logic* 132: 1-25. 2005.

[6] Sergei Artemov & Elena Nogina, Basic systems of epistemic logic with justification. *Technical Report TR-2005004. CUNY PhD Program in Computer Science.* 2005.

[7] Stuart Russell & Peter Norvig, *Artificial Intelligence A Modern Approach*, Pearson, 2014.