De Banach-Tarski Paradox

Bram Buiting
5922518

Begeleider: Dr. K. Dajani
Bachelorscriptie Wiskunde
Universiteit Utrecht
29 mei 2019

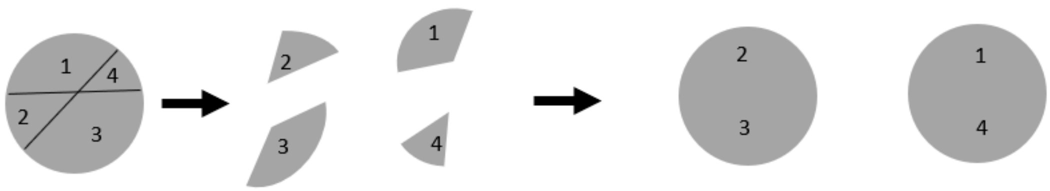
Inhoudsopgave

1 Inleiding

In deze scriptie gaan we een bewijs geven van de Banach-Tarski paradox. Informeel kan deze als volgt geformuleerd worden.

Stelling 1. *Een massieve bol kan in eindig veel niet overlappende stukken worden opgedeeld, die op zo'n manier geroteerd en verschoven kunnen worden dat ze samen twee even grote masieve bollen vormen.*

In het onderstaande figuur is dit schematisch weergegeven. Het is misschien niet meteen duidelijk waarom



Figuur 1: Schematische voorstelling van de Banach-Tarski paradox

dit een paradox is. Stel echter dat je een massieve bol van je favoriete materiaal bezit. De Banach-Tarski paradox zegt dan dat we de bol in eindig veel stukken kunnen snijden en die stukken vervolgens zo kunnen samenvoegen dat we twee massieve bollen krijgen. Niets houdt ons tegen om met de bollen die zo ontstaan hetzelfde te doen, wat betekent dat we zo veel bollen kunnen maken als we willen. Dit is duidelijk niet hoe volume in de praktijk werkt. Als we een bol bijvoorbeeld in 10 stukken snijden en 5 van die stukken samenvoegen om een figuur A te maken en 5 stukken samen te voegen om een figuur B te maken, dan zou er intuïtief moeten gelden dat de som van het volume van A en B het volume van de bol waar we mee begonnen is. Het volume van de stukken waarin we de bol hebben verdeeld verandert namelijk niet als we de stukken verschuiven of roteren. De Banach-Tarski paradox zegt echter dat we het volume van de bol kunnen verdubbellen door de stukken te roteren en te verschuiven. De consequentie hiervan blijkt te zijn dat er deelverzamelingen van $\mathbb{R}^3$ bestaan waar we geen volume aan kunnen toekennen. Dit betekent dat stelling 1 met recht een paradox genoemd mag worden.

De onderwerpen die we in deze scriptie aan bod komen zijn als volgt geordend:
In hoofdstuk 2 behandelen we vrije groepen, in hoofdstuk 3 gaan we kijken naar $SO3$, in hoofstuk 4 introduceren we de begrippen paradoxaal en equideelbaar, in hoofdtsuk 5 bewijzen we de Hausorff paradox, in hoofdstuk 6 bewijzen we de Banach-Tarski paradox en in hoofdstuk 7 kijken we naar de gevolgen van de Banach-Tarski paradox voor maattheorie. De bronnen die we gebruiken zijn te vinden in hoofdstuk 9 en de notatie die we gebruiken wordt toegelicht in hoofdstuk 10. We volgen de lijn van het bewijs van de Banach-Tarski paradox uit [3].

2 Vrije groepen

Als je berekeningen wilt maken in een eindigdimensionale vectorruimte V, dan is het handig om de vectoren van V uit te drukken ten opzichte van een basis $v_1, \ldots, v_n$. Een basis staat je bijvoorbeeld toe om een lineaire afbeelding te schrijven als een matrix. De belangrijkste eigenschappen van een basis zijn dat

$$\mathrm{span}(\{v_1, \ldots, v_n\}) = V \tag{1}$$

en dat

$$\sum_{i=0}^{n} a_i v_i = 0. \tag{2}$$

dan en slechts dan als $a_i = 0$ voor alle $1 \leq i \leq n$. We gaan in dit hoofdstuk kijken naar groepen waarvoor we op een bepaalde manier ook een 'basis' kunnen definiëren. Het stuk uit dit hoofdstuk van definitie 1 tot en met definitie 4 is gebaseerd op hoofdstuk 27 uit [1].
We beginnen met een definitie

Definitie 1. *Laat X een verzameling. Een woord in X is een paar $(x_1, \ldots, x_n) \times (n_1, \ldots, n_k) \in X^k \times \mathbb{Z}^k$ voor een $k \in \mathbb{N}_0$, dat we noteren als een eindig product $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k}$. We noemen een woord gereduceerd als $x_j \neq x_{j+1}$ voor $1 \leq j \leq k-1$ en $n_j \neq 0$ voor $1 \leq j \leq k$. Dit product mag ook leeg zijn en het lege woord noteren we met e. We noemen $x_1, \ldots, x_n$ ook wel de letters van het woord.*

Merk op dat hoewel we in definitie 1 $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k}$ een product noemen, het op dit moment nog puur notatie is die we gebruiken om een woord op te schrijven. De elementen van X kunnen gezien worden als elementen van een alfabet waarmee we woorden kunnen opschrijven. Doordat op dit moment de produten puur notatie zijn, geldt bijvoorbeeld nog voor $x \in X$ dat x^n en xx^{n-1} verschillende woorden zijn. Omdat we willen dat deze woorden hetzelfde zijn, gaan we woorden door ze te reduceren identiviseren met een gereduceerd woord. Als we dit gedaan hebben kunnen we definieren wat het betekent om twee elementen van X met elkaar te vermenigvuldigen. Het idee hierachter is dat X een 'basis' wordt van een groep die alle gereduceerde woorden in X bevat.

We definiëren deze groep als volgt. Laat $\mathcal{W}_X$ de verzameling van alle woorden in X en laat

$$W_X = \{w \in \mathcal{W}_{\mathcal{X}} \mid w \text{ is gereduceerd}\}. \tag{3}$$

de verzameling van alle gereduceerde woorden in X. Laat $w_1 = x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k}, w_2 = y_1^{m_1} y_2^{m_2} \ldots y_s^{m_s} \in W_X$. We definiëren het product $\cdot : W_X \times W_X \to W_X$ als

$$w_1 \cdot w_2 = w_1 w_2 = x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k} y_1^{m_1} y_2^{m_2} \ldots y_s^{m_s}. \tag{4}$$

Merk op dat uit vergelijking 4 gelijk volgt dat e het eenheidselement is. Hoewel deze definitie goed aansluit bij de intuïtie is er een probleem. Stel dat $x \in X$. Als $w_1 = x$ en $w_2 = x$ dan geldt er dat $w_1 \cdot w_2 = xx$, wat niet meer gereduceerd is. We moeten daarom een woord na het vermenigvuldigen nog reduceren. Hiermee bedoelen dat we een woord gaan identificeren met een gereduceerd woord. De manier waarop we de woorden gaan identificeren lijkt op de manier waarop we in $\mathbb{R}$ producten van getallen met elkaar identificeren. Er zijn twee manieren waarop we woorden met elkaar kunnen identificeren.

1. De eerste manier houdt in dat we, als er in een woord twee dezelfde letters naast elkaar staan, we de letters samen kunnen voegen, mits we de exponenten bij elkaar optellen. Hiermee bedoelen we bijvoorbeeld dat $a^4 a^3 = a^7$. De formele definitie luidt als volgt. Laat $w = x_1^{k_1} \ldots x_i^{k_i} x_{i+1}^{k_{i+1}} \ldots x_n^{k_n}$ en neem aan dat $x_i = x_{i+1}$. Er geldt dan dat
$$w = x_1^{k_1} \ldots x_i^{k_i + k_{i+1}} x_{i+2}^{k_{i+2}} \ldots x_n^{k_n}. \tag{5}$$
2. De tweede manier waarop we woorden met elkaar identificeren houd in dat $x^0 = e$ voor alle $x \in X$. Dit betekent dat als $w = x_1^{k_1} \ldots x_{i-1}^{k_{i-1}} x_i^{k_i} x_{i+1}^{k_{i+1}} \ldots x_n^{k_n}$, met $k_i = 0$, er geldt dat
$$w = x_1^{k_1} \ldots x_{i-1}^{k_{i-1}} x_{i+1}^{k_{i+1}} \ldots x_n^{k_n}. \tag{6}$$

Het idee achter deze definitie is dat we willen dat er voor een $x \in \mathcal{W}_X$, met $x \in X$ geldt dat de inverse wordt gegeven door $x^{-1} \in \mathcal{W}_X$. Uit deze definitie volgt dat voor een woord $w = x_1^{n_1}x_2^{n_2}\dots x_k^{n_k}$, de inverse wordt gegeven door $x_k^{-n_k}\dots x_1^{-n_1}$.

We noemen de in vergelijking 5 en 6 beschreven manieren waarop we woorden met elkaar kunnen identificeren ook wel de reduceerstappen. Merk op dat als en woord $w \in \mathcal{W}_X$ gereduceerd is, we het woord met de reduceerstappen niet verder kunnen reducren, terwijl we een $w \in \mathcal{W}_X$, met $w \notin W_X$ altijd met een van de reduceerstappen kunnen reduceren.

We geven nu een voorbeeld waarin we laten zien hoe een woord met behulp van deze regels kan worden geïdentificeerd met een gereduceerd woord. Stel dat $x, y, z \in X$ en $w = x^2xyy^{-1}z^2z^3x$. Uit de bovenstaande twee regels voor reduceren volgt nu dat

$$w = x^2xyy^{-1}z^2z^3x = x^3y^0z^5x = x^2z^5x,$$

wat een gereduceerd woord is. Als we aannemen dat we ieder woord uniek kunnen reduceren tot een gereduceerd woord, dan is de vermenigvuldiging uit vergelijking 4 goed gedefinieerd en associatief, mits we in ons achterhoofd houden dat we na het vermenigvuldigen nog moeten reduceren. Noem de functie die een woord w afbeeld op het unieke waar tot w gereduceerd kan worden R. Er geldt dan dat W_X, met de vermenigvuldiging $\circ : W_X \times W_X \to W_X$ zodat

$$w_1w_2 := w_1 \circ w_2 = R(w_1 \cdot w_2)$$

een groep is. We gaan nu de aannamen bewijzen. Voor we het bewijs kunnen geven hebben we nog een definitie nodig en moeten we een paar hulpstellingen bewijzen.

Definitie 2. *Laat $w = x_1^{n_1}x_2^{n_2}\dots x_k^{n_k} \in \mathcal{W}_X$, met $k \in \mathbb{N}$. We definiëren de lengte van w als k.*

Lemma 1. *Laat X een verzameling, $x \in X$ en $w = x_1^{k_1}\dots x_n^{k_{n+1}} \in W_X$. Er geldt dan dat xw uniek gereduceerd kan worden.*

Bewijs. Er zijn twee gevallen. Als xw reeds gereduceerd is, dan kan xw niet verder gereduceerd worden en is de stelling waar. Als xw niet gereduceerd is, dan geldt er dat $x_1 = x^s$, voor een $s \in \mathbb{N}$. Uit reduceerstap 1 volgt dat $xw = x_1^{k_1+s}\dots x_n^{k_{n+1}}$. Er zijn twee gevallen. Als $k_1 + s \neq 0$, dan geldt er, doordat w gereduceerd is, dat $x_1^{k_1+s}\dots x_n^{k_{n+1}}$ gerdeduceerd is en niet verder gereduceerde kan worden. Doordat de reduceerstap die we uitvoerde de enige reduceerstap was die we konden uitvoeren, is $x_1^{k_1+s}\dots x_n^{k_{n+1}}$ het unieke woord waar xw naar gereduceerd kan worden. Als $k_1 + s = 0$ dan volgt uit reduceerstap 2 dat $wx = x_2^{k_2}\dots, x_n^{k_{n+1}}$. Doordat w gereduceerd is, geldt er dat $x_2^{k_2}\dots, x_n^{k_{n+1}}$ gereduceerd is. Beide keren dat we xw reduceerde hebben we de enige reduceerstap uitvoerd die uitgevoerd kon worden, wat betekent dat $x_2^{k_2}\dots, x_n^{k_{n+1}}$ het unieke woord is waar xw naartoe gereduceerd kan worden. □

Lemma 2. *Laat X een verzameling. Voor iedere $w \in \mathcal{W}_\mathcal{X}$ geldt dat w gerduceerd kan worden naar een $w_0 \in W_X$.*

Bewijs. We bewijzen dit lemma met inductie over de lengte van het woord.
Er is maar een woord van lengte 0, namelijk e en dit woord is al gereduceerd, dus is ieder woord met lengte nul te reduceren naar een gereduceerd woord. Stel nu dat de stelling waar is voor alle woorden met lengte $n \in \mathbb{N}$. Laat $w = x_1^{k_1}\dots x_{n+1}^{k_{n+1}} \in \mathcal{W}_\mathcal{X}$ een woord met lengte $n+1$ en neem aan dat w niet gereduceerd is. Er zijn twee mogelijkheden. Of er bestaat een $i \in \mathbb{N}$, zodat $x_i = x_{i+1}$, of er bestaat een $j \in \mathbb{N}$, zodat $k_j = 0$. In beide gevallen geldt er dat w gereduceerd kan worden naar een woord w', met lengte n. Uit de inductiehypothese volgt nu dat w' gereduceerd kan worden naar een gereduceerd woord, wat betekent dat w gereduceerd kan worden naar een gereduceerd woord.

□

Stelling 2. *Laat X een verzameling. Ieder woord in $\mathcal{W}_X$ kan gereduceerd worden naar precies één gereduceerd woord.*

Bewijs. Laat $x \in X$ en $w \in \mathcal{W}_x$. in lemma 1 hebben we aangetoond dat xw gereduceerd kan worden naar een uniek woord $w_0 \in W_X$. We noteren dit woord met $R(xw)$. Laat $x \in X$. We definiëren de functie $f_x : W_X \to W_X$, met $f_x(w) = R(xw)$. De functie f_x is een bijectieve functie. Er geldt namelijk voor de functie $g : W_X \to W_X$, met $g(w) = R(x^{-1}w)$ dat $g \circ f = id = f \circ g$. Laat $\omega = x_1^{k_1} \dots x_n^{k_{n+1}} \in \mathcal{W}_X$. We definiëren dan $f_\omega : W_X \to W_X$ zodat

$$f_\omega(v) = f_{x_1}^{k_1} \dots f_{x_n}^{k_n}(v) = R(x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} v) = R(\omega v), \tag{7}$$

waar f_x^n betekent dat we de functie f_x n keer achter elkaar toepassen. Doordat f_x bijectief is voor alle $x \in X$, geldt er dat f_ω een samenstelling van bijectieve functies is en dientengevolge bijectief is. Merk op dat de verzameling $G = \{f_x \mid x \in \mathcal{W}_X\}$ een groep onder samenstelling van functies vormt. Het eenheidselement in de groep is f_e en de inverse van een f_ω, met ω zoals eerder, wordt gegeven door $f_{\omega^{-1}}$, met $\omega^{-1} = x_n^{-k_n} \dots x_1^{-k_1}$. Stel dat $w \in \mathcal{W}_X$ en $w' \in \mathcal{W}_X$ een woord is dat is ontstaan door op w één van de reduceer stappen toe te passen. Er geldt dan dat $f_w = f_{w'}$, want de vermenigvuldiging in G is associatief. Hieruit volgt met inductie dat als $w \in \mathcal{W}_X$ en w gereduceerd kan worden tot $w' \in W_X$, er geldt dat $f_w = f_{w'}$. Stel nu dat w gereduceerd kan worden tot $w_1 \in W_X$ en w gereduceerd kan worden tot $w_2 \in W_X$, met $w_1 \neq w_2$. Er geldt dan dat

$$w_1 = f_{w_1}(e) = f_w(e) = f_{w_2}(e) = w_2, \tag{8}$$

wat tot een tegenspraak leidt. Doodat we door lemma 2 weten dat we elke $w \in \mathcal{W}_X$ kunnen reduceren tot een $w' \in W_X$, volgt hieruit dat deze $w' \in W_X$ het enige gereduceerde woord is waar tot w gereduceerd kan worden. □

Uit stelling 2 volgt nu dat W_X inderdaad een groep is. We willen dit gebruiken om te kijken naar een groep G die een deelverzameling X heeft zodat G isomorf is met W_X. Hiervoor hebben we de volgende definities nodig.

Definitie 3. *Laat G een groep en $X \subset G$ een deelverzameling. We noemen X een vrije verzameling van generatoren van G als iedere $g \in G - \{e\}$ op een unieke manier geschreven kan worden als een woord in X, zodat*

$$g = x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k},$$

met $x_j \neq x_{j+1}$ voor $1 \leq j \leq k-1$ en $n_j \neq 0$ voor $1 \leq j \leq k$.

Definitie 4. *Laat G een groep, we noemen G een vrije groep als er een $X \subset G$ bestaat, zodat X een vrije verzameling van generatoren is.*

Een voorbeeld van een vrije groep is $\mathbb{Z}$ met optelling. In dit geval wordt de vrije verzameling van generatoren geven door $\{1\}$.
Laat X een verzameling. Een ander voorbeeld van een vrije groep is W_X. De vrije verzameling van generatoren van W_X is X.
We kunnen de verzameling X uit definitie 3 zien als een soort basis van G. Ieder element van G kan namelijk , net als bij een basis van een vectorruimte, op een unieke manier uitgedrukt worden met behulp van elementen uit X. Vergelijking 1 motiveert nu de volgende stelling

Stelling 3. *Laat G een groep en X een vrije verzameling van generatoren van G. Er geldt dan dat de functie $\phi : W_X \to G$, met $\phi(x_1^{n_1} \dots x_n^{n_k}) = x_1^{n_1} \dots x_n^{n_k}$ een isomorfisme is.*

Bewijs. We geven niet het volledige bewijs. De lastigste stap in het bewijs is het controleren dat $\phi(x)\phi(y) = \phi(xy)$ voor $x, y \in W_X$. Dit is hetzelfde als controleren of als $w \in \mathcal{W}_X$ en w gereduceerd wordt tot $w' \in W_X$, ze in G nog hetzelfde element voorstellen. Dit volgt direct uit het feit dat als w'' een woord is dat is ontstaan door één van de twee reduceerstappen op w toe te passen er nog steeds geldt dat w en w'' in G hetzelfde element voorstellen. □

Stelling 3 stelt ons instaat om een vrije groep G te identificeren met W_X, waar $X \subset G$ een vrije verzameling van generatoren van G is. Dit betekent dat we geen onderscheid hoeven te maken tussen een gereduceerd woord in G en in W_X. We zouden nu graag een criterium hebben om te controleren of een verzameling $X \subset G$ een vrije verzameling van generatoren is. Vergelijking 2 motiveert de volgende stelling.

Stelling 4. *Laat G een groep en $X \subset G$. Er geldt dat X een vrije verzameling van generatoren is dan en slechts dan als voor ieder niet leeg gereduceerd woord $w \in W_X$ geldt dat $w \neq e_G$.*

Bewijs. Stel dat $w = x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k}$ een niet leeg gereduceerd woord in X is en $w = e_G$. Er geldt dan dat $n_1 \neq 0$. Hieruit volgt dat

$$x_1^{n_1} = x_1^{n_1} e = x_1^{2n_1} \dots x_k^{n_k}.$$

Dit betekent dat X geen vrije verzameling van generatoren van G is.
Neem nu aan dat X geen vrije verzameling van generatoren van G is. Er bestaat dan een $g \in G$, zodat

$$g = w_1 = w_2.$$

met $w_1, w_2 \in W_X$ en $w_1 \neq w_2$ in W_X. Hieruit volgt dat $e = w_1 w_2^{-1}$ in G. Doordat W_X een groep is en er geldt dat $w_1 \neq w_2$, volgt hieruit dat $w_1 w_2^{-1} \neq e$ in W_X. Hieruit volgt dat er een niet leeg gereduceerd woord w in G bestaat, zodat $w = e_G$. □

Het kan voorkomen dat een deelverzameling $X \subset G$ wel aan stelling 4 voldoet, maar er geldt dat $W_X \subset G$ en $W_X \neq G$. In dit geval is W_X een deelgroep van G en noemen we W_X de vrije groep voortgebracht door X.

3 Orthogonale matrices

In dit hoofdstuk gaan we het volgende bewijzen bewijzen

Stelling 5. *Voor alle* $A \in SO3 := \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid \det(A) = 1, id = AA^T = A^T A\}$ *geldt dat* A *een rotatie rond een lijn door de oorsprong is*

Deze stelling hebben we later nodig om de Hausdorff-paradox te bewijzen. Dit hoofdstuk is gebaseerd op het bewijs dat gegeven is op bladzijde 12 en 13 van [2]. We hebben het bewijs aangevuld op de de delen die niet gedetailleerd waren of waren gegeven als een opgave voor de lezer.
We gaan de stelling bewijzen door te laten zien dat we een orthogonale basis $\{u_1, u_2, u_3\}$ van $\mathbb{R}^3$ kunnen bepalen, zodat A ten opzichte van deze basis een rotatie rond de lijn door u_1 en de oorsprong voorstelt. We bepalen de vectoren $\{u_1, u_2, u_3\}$ met behulp van de eigenwaarden van A. Dit betekent dat we, voor we de stelling kunnen bewijzen, eerst wat hulpstellingen over de eigenwaarden van een orthogonale matrix moeten bewijzen.
We herhalen eerst de definitie van een orthogonale matrix.

Definitie 5. *Laat* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. *We noemen* A *een orthogonale matrix als er geldt dat* $A^T A = id = AA^T$.

Uit de definitie van een orthogonale matrix volgt gelijk het volgende lemma

Lemma 3. *Laat* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *een orthogonale matrix, dan geldt er voor alle* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *dat*

$$\langle x, y\rangle = \langle Ax, Ay\rangle.$$

Bewijs. Er geldt dat

$$\langle x, y\rangle = x^T y = x^T A^T Ay = \langle Ax, Ay\rangle.$$

□

Uit lemma 3 volgt dat orthogonale matrices het inproduct behouden. Dit kunnen we gebruiken om het volgende lemma over eigenvectoren en eigenwaarde van een orthogonale matrix te bewijzen.

Lemma 4. *Laat* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *een orthogonale matrix,* λ, $\mu \in \mathbb{C}$ *verschillende eigenwaarden van* A *en* v_λ *en* v_μ *de bijbehorende eigenvectoren. Er geldt dan dat* $|\lambda| = |\mu| = 1$ *en*

$$\langle v_\lambda, v_\mu\rangle = 0.$$

Bewijs. Uit lemma 3 volgt dat

$$\langle v_\lambda, v_\lambda\rangle = \langle Av_\lambda, Av_\lambda\rangle = \langle \lambda v_\lambda, \lambda v_\lambda\rangle = \lambda\overline{\lambda}\langle v_\lambda, v_\lambda\rangle = |\lambda|^2\langle v_\lambda, v_\lambda\rangle.$$

Uit $\langle v_\lambda, v_\lambda\rangle > 0$ volgt dat $|\lambda|^2 = 1$ en $|\lambda| = 1$.Op dezelfde manier kan worden aangetoond dat $|\mu| = 1$.
We tonen nu aan dat $\langle v_\lambda, v_\mu\rangle = 0$. Neem ten onrechte aan dat $\langle v_\lambda, v_\mu\rangle \neq 0$. Uit lemma 3 volgt dat $\langle v_\lambda, v_\mu\rangle = \langle Av_\lambda, Av_\mu\rangle$. Dit betekent dat

$$\langle v_\lambda, v_\mu\rangle = \langle Av_\lambda, Av_\mu\rangle = \langle \lambda v_\lambda, \mu v_\mu\rangle = \lambda\overline{\mu}\langle v_\lambda, v_\mu\rangle.$$

Hieruit volgt dat $\lambda\overline{\mu} = 1$. Doordat $|\lambda| = |\mu| = 1$ geldt er dat $\overline{\lambda}\lambda = \overline{\mu}\mu = 1$. Uit $\lambda\overline{\mu} = 1$ volgt dan dat $\lambda = \mu$, wat tot een tegenspraak leidt. □

Met dit lemma kunnen de volgende stelling bewijzen.

Stelling 6. *Laat* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *een orthogonale matrix en* $\lambda \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ *een eigenwaarde van* A *met eigenvector* v_λ. *Er geldt dan dat* $\overline{\lambda}$ *een eigenwaarde van* A *is met eigenvector* $\overline{v_\lambda}$. *Daarnaast geldt er dat* $span_{\mathbb{C}}(v_\lambda, \overline{v_\lambda})$ *een orthogonale basis heeft bestaande uit twee vectoren* $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Bewijs. Er geldt, doordat $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, dat $\overline{A} = A$. Hieruit volgt direct dat

$$A\overline{v_\lambda} = \overline{Av_\lambda} = \overline{\lambda v_\lambda} = \overline{\lambda}\overline{v_\lambda}.$$

Laat $v_\lambda = v_r + iv_i$, met $v_r, v_i \in \mathbb{R}^n$. We gaan aantonen dat v_r en v_i een orthogonale basis van $\text{span}(v_\lambda, \overline{v_\lambda})$ vormen. Merk op dat

$$v_r = \frac{v_\lambda + \overline{v_\lambda}}{2} \qquad \text{en} \qquad v_i = -i\frac{v_\lambda - \overline{v_\lambda}}{2}.$$

Uit $|\lambda| = 1$ volgt dat er een $\phi \in [0, 2\pi)$ bestaat zodat $\lambda = \cos(\phi) + i\sin(\phi)$. Er geldt nu dat

$$Av_r = \frac{Av_\lambda + A\overline{v_\lambda}}{2} = \cos(\phi)v_r - \sin(\phi)v_i \quad \text{en} \quad Av_i = -i\frac{Av_\lambda - A\overline{v_\lambda}}{2} = \sin(\phi)v_r + \cos(\phi)v_i. \tag{9}$$

Uit lemma 4 volgt $\langle v_\lambda, \overline{v_\lambda}\rangle = 0$. Dit betekent dat

$$\langle v_r, v_i\rangle = \langle \frac{v_\lambda + \overline{v_\lambda}}{2}, -i\frac{v_\lambda - \overline{v_\lambda}}{2}\rangle = \frac{i}{4}(\langle v_\lambda, v_\lambda\rangle + \langle \overline{v_\lambda}, -\overline{v_\lambda}\rangle = \frac{i}{4}(\langle v_\lambda, v_\lambda\rangle - \langle v_\lambda, v_\lambda\rangle) = 0.$$

Dit betekent dat de vectoren orthogonaal zijn. We gaan nu aantonen dat $\|v_r\| = \|v_i\|$.
Uit lemma 3 en vergelijking 9 volgt dat

$$\langle v_i, v_i\rangle = \langle Av_i, Av_i\rangle = \sin^2(\phi)\langle v_r, v_r\rangle + \cos^2(\phi)\langle v_i, v_i\rangle.$$

Hieruit volgt dat $\sin^2(\phi)\langle v_i, v_i\rangle = \sin^2(\phi)\langle v_r, v_r\rangle$. Doordat $\lambda \notin \mathbb{R}$ geldt er dat $\sin(\phi) \neq 0$, wat betekent dat $\langle v_i, v_i\rangle = \langle v_r, v_r\rangle$ en $\|v_i\| = \|v_r\|$. Dit betekent dat we kunnen aannemen dat $\|v_i\| = \|v_r\| = 1$. Merk op dat $v_\lambda, \overline{v_\lambda} \in \text{span}_\mathbb{C}(v_r, v_i)$, wat betekent dat v_i en v_r de gezochte vectoren zijn. □

Uit deze stelling volgt dat A in het vlak opgespannen door v_i en v_r een rotatie is. Dit betekent dat $A\text{span}(v_i, v_r) = \text{span}(v_i, v_r)$. Dit motiveert de volgende lemma's.

Lemma 5. *Laat $V \subset \mathbb{R}^n$ een lineaire deelruimte en $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ een orthogonale matrix. Als er geldt dat $AV = V$, dan geldt er dat $AV^\perp \subset V^\perp$.*

Bewijs. Stel $x \in V^\perp$ en $v \in V$, dan volgt uit lemma 3 dat

$$\langle Ax, Av\rangle = \langle x, v\rangle = 0.$$

Doordat $AV = V$ volgt hieruit dat $\langle Ax, v\rangle = 0$ voor alle $v \in V$, wat betekent dat $Ax \in V^\perp$. □

Lemma 6. *Laat $V \subset \mathbb{R}^n$ een lineaire deelruimte en $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ een orthogonale matrix. Als er geldt dat $AV = V$, dan geldt er dat $AV^\perp = V^\perp$.*

Bewijs. Uit $AV = V$ volgt dat $A^TV = A^TAV = V$. Er geldt dat A ortogonaal is, wat betekent dat A^T ortogonaal is. Uit lemma 5 volgt dat $A^TV^\perp \subset V^\perp$. Laat $x \in V^\perp$, er geldt dan dat $A^Tx \in V^\perp$. Hieruit volgt dat $AA^Tx = x \in V^\perp$, wat betekent dat $V^\perp \subset AV^\perp$. Uit lemma 5 volgt dat $AV^\perp \subset V^\perp$, wat betekent dat $AV^\perp = V^\perp$. □

We kunnen nu stelling 5 bewijzen. We bewijzen eerst een algemenere stelling en laten dan zien dat stelling 5 een gevolg van deze stelling is.

Stelling 7. *Laat $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ een orthogonale matrix. Er bestaat een orthogonale basis B van $\mathbb{R}^n$ zodat A er, ten opzichte van B, uitziet als*

$$\begin{pmatrix} \pm1 & & & & & & \\ & \pm1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \pm1 & & & \\ & & & & D_{\phi_1} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & D_{\phi_k} \end{pmatrix}$$

met

$$D_\phi = \begin{pmatrix} cos(\phi) & -sin(\phi) \\ sin(\phi) & cos(\phi) \end{pmatrix}.$$

Bewijs. We bewijzen deze stelling met inductie over n. Voor $n = 0$ en $n = 1$ is de stelling makkelijk na te gaan. Neem nu aan dat de stelling waar is voor alle $k \leq n$, voor een $n \geq 1$. Laat $A \in \mathbb{R}^{n+1 \times n+1}$ een orthogonale matrix. Merk op dat de functie $\lambda \to \det(A - \lambda id)$ een polynoom is, wat betekent dat er een $\mu \in \mathbb{C}$ bestaat, zodat $\det(A - \mu id) = 0$. Hieruit volgt dat μ een eigenwaarde van A is. Er zijn nu twee gevallen. Het eerste geval is dat $\mu \in \mathbb{R}$. Uit lemma 4 volgt dat $\mu = \pm 1$. Laat v_μ een eigenvector die hoort bij deze eiegenwaarde. Er geldt dat $A\text{span}(v_\mu) = \text{span}(v_\mu)$. Hieruit volgt met lemma 6 dat $A\text{span}(v_\mu)^\perp = \text{span}(v_\mu)^\perp$. Kies een orthogonale basis $\{u_1, \ldots, u_n\}$ van $\text{span}(v_\mu)^\perp$. Merk op dat $\{v_\mu, u_1, \ldots, u_n\}$ een basis van $\mathbb{R}^{n+1}$ vormen. Laat $U := (v_\mu, u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. We zien de vector U als een matrix door v_μ en u_i voor $1 \leq i \leq n$ te zien als de kolommen van een $n + 1 \times n + 1$ matrix. Er geldt dat U een orthogonale matrix is en dat

$$UAU^T = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix}, \tag{10}$$

met $A' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ een orthogonale matrix. De nullen aan de rechterkant van vergelijking 10 ontstaan, doordat $A\text{span}(v_\mu) = \text{span}(v_\mu)$ en $A\text{span}(v_\mu)^\perp = \text{span}(v_\mu)^\perp$. Er geldt dat A' orthogonaal is, doordat U en A orthogonaal zijn. Uit de inductie hypothese volgt nu dat we de basis $\{u_1, \ldots, u_n\}$ zo kunnen kiezen dat de matrix A' de vereiste vorm heeft.
Neem nu aan dat $\mu \notin \mathbb{R}$. Laat v_r en v_l en ϕ net zoals in stelling 6. Uit vergelijking 9 volgt dat $A\text{span}(v_r, v_l) = \text{span}(v_r, v_l)$. Merk op dat we in stelling 6 bewezen hebben dat v_l en v_r een orthogonaal zijn en $\|v_r\| = \|v_l\| = 1$. Uit lemma 6 volgt dat $A\text{span}(v_r, v_l)^\perp = \text{span}(v_r, v_l)^\perp$. Kies een orthogonale basis $\{u_1, \ldots, u_{n-1}\}$ van $\text{span}(v_r, v_l)^\perp$ en laat $U = (u_1, \ldots, u_{n-1}, v_r, v_l)$. Merk op dat U een orthogonale matrix is en dat

$$UAU^T = \begin{pmatrix} A' & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}, \tag{11}$$

met $A' \in \mathbb{R}^{n-1 \times n-1}$ een orthogonale matrix is. De nullen aan de rechter kan van vergelijking 11 ontstaan, doordat $A\text{span}(v_r, v_l) = \text{span}(v_r, v_l)$ en $A\text{span}(v_r, v_l)^\perp = \text{span}(v_r, v_l)^\perp$. Er geldt dat A' orthogonaal is, doordat U en A orthogonaal zijn. Uit de inductie hypothese volgt dat we de basis $\{u_1, \ldots, u_{n-1}\}$ zo kunnen kiezen dat A' in de gewenste vorm staat.

□

Gevolg 1. *Iedere matrix $A \in SO3$ is een rotatie rond een lijn door de oorsprong.*

Bewijs. Er geldt dat $SO3 = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid A \text{ orthogonaal, en } \det(A) = 1\}$. Laat $A \in SO3$. Uit stelling 7 en het feit dat $\det(A) = 1$ volgt dat er een orthogonale basis $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ van $\mathbb{R}^3$ bestaat, zodat A, ten opzichte van deze basis, geschreven kan worden als

$$UAU^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix},$$

met $\phi \in [0, 2\pi)$. Deze matrix stelt een rotatie rond de lijn $l = \{\lambda u_1 : \lambda \in \mathbb{R}\}$ voor. □

4 Pradoxale groepsactie

4.1 Definitie

In dit hoofdstuk gaan we de theorie behandelen waarmee we stelling 1 exacter kunnen formuleren en gaan we een lemma bewijzen dat we gaan gebruiken om de Haussdorf-paradox te bewijzen. Dit hoofdstuk is gebasseerd op hoofdstuk 1 uit [3]. Om een onderscheid te maken tussen stellingen waarvan het bewijs gebaseerd is op een bewijs uit een bron en bewijzen die we zelf bedacht hebben, hebben we bij bewijzen die gebaseerd zijn op een bewijs uit een bron precies aangegeven op welke stelling/bewijs we het gebaseerd hebben.
We beginnen met het herhalen van de definitie van een groepsactie en een isometrie.

Definitie 6. *Laat X een verzameling, G een groep en S_X de verzameling van bijectieve functies van X naar X. Een actie van G op X is een functie van $\phi : G \to S_X$, zodat voor $g, h \in G$ geldt dat $\phi(g) \circ \phi(h) = \phi(gh)$. Daarnaast moet voor het eenheidselement $e \in G$ gelden dat $\phi(e) = id$. Laat $x \in X$ en $g \in G$. We noteren $\phi(g)(x)$ in het vervolg ook als $g(x)$. Als er een groespactie van G op X is, zeggen we ook wel dat de groep G werkt op X.*

Definitie 7. *Laat U, V metrische ruimte. Een functie $h : U \to V$ is een isometrie als er geldt dat h bijectief is en voor alle $x, x' \in X$ geldt dat*
$$d(f(x), f(x')) = d(x, x').$$

We kunnen nu de volgende definitie geven.

Definitie 8. *Laat X een verzameling, G een groep die werkt op X en $U \subset X$. We zeggen dat U G-paradoxaal is als er $m, n \in \mathbb{N}$, paarsgewijs disjuncte verzamelingen $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m \subset U$ en $g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_m \in G$ bestaan, zodat $U = \cup_{i=1}^{n} g_i(A_i)$ en $U = \cup_{i=1}^{m} h_m(B_i)$.*

Om een beeld te krijgen bij deze definitie geven we een voorbeeld, dat tevens een lemma is dat we later gebruiken.

Lemma 7. *[3, st.1.2, blz. 5] Laat $X = \{\sigma, \mu\}$ een verzameling en W_X de vrije groep voortgebracht door X. Laat W_X op W_X werken met de groepsactie $\phi : W_X \to S_{W_X}$, zodat $\phi(w)(x) = wx$, voor $w, x \in W_X$. Er geldt dan dat W_X W_X-paradoxaal is.*

Bewijs. Laat
$$U_\sigma = \{x_1^{n_1} \dots, x_k^{n_k} \in W_X \mid x_1 = \sigma, k \in \mathbb{N}, n_1 > 0\}$$
en
$$U_{\sigma^{-1}} = \{x_1^{n_1} \dots, x_k^{n_k} \in W_X \mid x_1 = \sigma, k \in \mathbb{N}, n_1 < 0\}.$$
Definieer op dezelfde manier U_μ en $U_{\mu^{-1}}$. Uit de definitie volgt gelijk dat de verzamelingen U_σ, $U_{\sigma^{-1}}$, U_μ en $U_{\mu^{-1}}$ paarsgewijs disjuncte deelverzamelingen van X zijn. We tonen nu aan dat $U_\sigma \cup \sigma U_{\sigma^{-1}} = W_X$. Merk op dat er geldt dat
$$U_\sigma \cup \sigma U_{\sigma^{-1}} \subset W_X.$$
Laat $w = x_1^{n_1} \dots, x_k^{n_k} \in W_X$. Er zijn vier gevallen.
Het eerste geval is dat $x_1 = \sigma$ en $n_1 > 0$. Er geldt dan dat $w \in U_\sigma \subset U_\sigma \cup \sigma U_{\sigma^{-1}}$.
Het tweede geval is dat $x_1 = \sigma$ en $n_1 < 0$. Er geldt dan dat $w' := x_1^{n_1 - 1} \dots, x_k^{n_k} \in U_{\sigma^{-1}}$ en $w = \sigma w' \in \sigma U_{\sigma^{-1}}$.
Het derde geval is dat $x_1 = \mu$. Er geldt dan dat $w' := \sigma^{-1} x_1^{n_1} \dots, x_k^{n_k} \in U_{\sigma^{-1}}$ en $w = \sigma w' \in \sigma U_{\sigma^{-1}}$.
Het laatste geval is dat $w = e$. Er geldt dan dat $w = \sigma\sigma^{-1} \in \sigma U_{\sigma^{-1}}$.
Met een vergelijkbaar bewijs kan worden aangetoond dat $U_\mu \cup \mu U_{\mu^{-1}} = W_X$. $\square$

Dit lemma motiveert de volgende definitie

Definitie 9. *Laat G een groep en laat G op zichzelf werken met de groepsactie $\phi : G \to S_G$, zodat $\phi(g)(h) = gh$, voor $g, h \in G$. We noemen G paradoxaal als G G-paradoxaal is.*

We willen nu stelling 1 met behulp van definitie 8 preciezer formuleren. Om dit te kunnen doen moeten we eerst bepalen wat de groep is die we op de bol uit stelling 1 willen laten werken. In stelling 1 zijn de bewerkingen die we toestaan om de stukken waarin we de bol verdelen te herschikken rotaties en translaties. Merk op dat een translatie en een rotatie allebei voorbeelden zijn van een isometrie. Dit motiveert de keus om als groep die we op de bol laten werken de groep

$$G_{iso} := \{h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \mid h \text{ is een isometrie}\}$$

te kiezen. De vermenigvuldiging van deze groep is samenstelling van functies. De groepsactie $\phi : G_{iso} \to S_{\mathbb{R}^3}$ wordt gegeven door $\phi(h)(x) = h(x)$, voor $h \in G_{iso}$ en $x \in \mathbb{R}^3$. In de inleiding hebben we uitgelegd dat de Banach-Tarski paradox een paradox is, doordat we verwachten dat wanneer we de stukken verschuiven en transleren, het volume van de stukken niet zou moeten veranderen. Het is op het eerste gezicht niet duidelijk of alle isometriën functies zijn waarvan we zouden willen dat ze volume behouden. Er kan echter aangetoond worden dat elke isometrie van $\mathbb{R}^3$ naar $\mathbb{R}^3$ een samenstelling is van spiegelingen in een vlak, rotaties rond een lijn en translaties ([2, st.1.15, blz. 17]). Dit zijn allemaal functies waarvan we intuïtief verwachten dat ze volume behouden, wat betekent dat G_{iso} een logische groep is om te kiezen. We kunnen stelling 1 nu als volgt formuleren

Stelling 8. *Er geldt dat* $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| \leq 1\} \subset \mathbb{R}^3$*,* G_{iso}*-paradoxaal is.*

Hoewel stelling 8, net als stelling 1 impliceert dat er disjuncte deelverzamelingen van een bol zijn die samen twee even grote bollen kunnen vormen, zijn er subtiele verschillen met stelling 1. Als we de notatie van definitie 8 aanhouden en $X = \mathbb{R}^3$, $U = B_1(0)$ en $G = G_{iso}$ kiezen, dan zegt stelling 1 dat we de verzamelingen $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m$ ook zo kunnen kiezen dat

1. er geldt dat $\cup_{i=0}^{n} A_i \cup \cup_{i=0}^{m} B_i = X$
2. er geldt dat $g_i(A_i) \cap g_j(A_j) = \emptyset$ voor $1 \leq i, j \leq n$, met $i \neq j$ en $h_i(B_i) \cap h_j(B_j) = \emptyset$ voor $1 \leq i, j \leq m$, met $i \neq j$.

Er blijkt te gelden dat als een verzameling $U \subset X$ G-paradoxaal is, de verzamelingen A_i en B_j ook zo gekozen kunnen worden dat ze aan eis 1 en 2 voldoen. We tonen dit nu aan voor eis 2, voor eis 1 tonen we dit later aan. In de stelling houden we de notatie uit definitie 8 aan.

Stelling 9. *Laat* X *een verzameling,* $U \subset X$ *een deelverzameling en* G *een groep die werkt op* X*. Als* U G*-paradoxaal is, dan kunnen we voor* $1 \leq i \leq n$ *en* $1 \leq j \leq m$ *de verzamelingen* A_i *en* B_j *zo kiezen dat er geldt dat* $g_i(A_i) \cap g_j(A_j) = \emptyset$ *voor* $1 \leq i, j \leq n$*, met* $i \neq j$ *en* $h_i(B_i) \cap h_j(B_j) = \emptyset$ *voor* $1 \leq i, j \leq m$*, met* $i \neq j$*.*

Bewijs. We bewijzen de stelling voor de verzamelingen A_i, met $1 \leq i \leq n$. Het bewijs gaat hetzelfde voor de verzamelingen B_j, met $1 \leq j \leq m$. Definieer voor $1 \leq k \leq n$ de verzamelingen A'_k als volgt, $A'_1 = A_1$ en

$$A'_k = g_k^{-1}(g_k(A_k) \backslash \cup_{i=1}^{k-1} g_i(A_i)) = A_k \backslash g_k^{-1}(\cup_{i=1}^{k-1} g_i(A_i))$$

als $2 \leq k \leq n$. Er geldt dat $A'_i \subset A_i \subset U$ voor $1 \leq i \leq n$. Hieruit volgt dat de verzamelingen paarsgewijs disjunct zijn, wat betekent dat $A'_i \cap A'_j = \emptyset$, voor $1 \leq i \leq n$ en $1 \leq j \leq m$. We tonen nu aan dat

$$\cup_{i=1}^{n} g_i(A'_i) = U.$$

Merk op dat $\cup_{i=1}^{n} g_i(A'_i) \subset \cup_{i=1}^{n} g_i(A_i) = U$. Laat nu $u \in U$. Er bestaat dan een kleinste $i \in \mathbb{N}$, zodat $u \in g_i(A_i)$. Als $i = 1$, dan $u \in A_1 = A'_1$. Als $i > 1$ dan volgt hieruit dat $u \in g_i(A_i) \backslash \cup_{j=1}^{i-1} g_j(A_j) = g_i(A'_i)$. Dit betekent dat $u \in \cup_{i=1}^{n} g_i(A'_i)$, $U \subset \cup_{i=1}^{n} g_i(A'_i)$ en $U = \cup_{i=1}^{n} g_i(A'_i)$.

We tonen nu aan dat $g_i(A'_i) \cap g_j(A'_j) = \emptyset$ als $i \neq j$ en $1 \leq i, j \leq n$. We kunnen aannemen dat $i < j$. Doordat $A'_i \subset A_i$, geldt er dat

$$\emptyset \subset g_i(A'_i) \cap g_j(A'_j) \subset g_i(A_i) \cap g_j(A'_j) = g_i(A_i) \cap (g_j(A_j) \backslash \cup_{k=1}^{j-1} g_k(A_k)) \subset g_i(A_i) \cap (g_j(A_j) \backslash g_i(A_i)) = \emptyset,$$

en dus dat $g_i(A'_i) \cap g_j(A'_j) = \emptyset$.
Uit $A'_j \subset A_j$ voor $1 \leq j \leq n$ volgt dat $A'_j \cap B_i \subset A_j \cap B_i = \emptyset$ voor $1 \leq j \leq n$ en $1 \leq i \leq m$. Dit betekent dat $A'_1 \ldots A'_n$ de gezochte verzamelingen zijn. $\square$

We hebben nu een manier om stelling 1 precies te formuleren, namelijk stelling 8. Als we stelling 8 bestuderen, dan rijst de vraag of er een eenvoudige manier bestaat om voor een verzameling X en een groep G die werkt op X te controleren of X G-paradoxaal is. In lemma 7 hebben we van een groep aangetoond dat die paradoxaal is. In dit geval was het echter mogelijk om de verzamelingen A_i en B_j te bepalen. Onder bepaalde voorwaarden blijkt er een manier om te bewijzen dat X G-paradoxaal is, zonder de verzamelingen A_i en B_j uit definitie 8 te hoeven bepalen. In stelling 10 geven we de precieze voorwaarde en een bewijs. We gebruiken bij het bewijs van stelling 10 het keuzeaxioma. De versie van het keuzeaxioma die we gebruiken luidt als volgt

Lemma 8 (Keuzeaxioma)**.** *Voor elke surjectieve functie $f : X \to Y$ bestaat er een functie $s : Y \to X$, zodat $f(s(y)) = y$ voor alle $y \in Y$.*

Deze formulering van het keuzeaxioma is definitie 1.2.1 op bladzijde 12 uit [4]. Een uitgebreide behandeling van het keuzeaxioma valt buiten de focus van deze scriptie. Wat voor de scriptie van belang is, is dat we het keuze axioma nodig hebben om de Banach-Tarski paradox te bewijzen en dat het keuze axioma een aannamen is die niet bewezen kan worden. We komen later in de scriptie kort terug op het keuzeaxioma.
We geven nu het bewijs van stelling 10

Stelling 10. *[3, prop. 1.10, blz.11] Laat X een verzameling en G een groep die werkt op X. Neem aan dat G paradoxaal is en $g(x) \neq x$, voor alle $g \in G - \{e\}$ en $x \in X$. Dan is X G-paradoxaal*

Bewijs. Definieer op X de relatie $x \sim y$ dan en slechts dan als er een $g \in G$ bestaat zodat $gx = y$. Merk op dat $\sim$ een equivalentie relatie is. We noteren de equivalentieklassen van een $x \in X$ met $[x]$. Definieer de functie $\pi : X \to X/_\sim$, met $\pi(x) = [x]$. De functie π is surjectief. Uit het keuzeaxioma (lemma 8) volgt dat er een functie $s : X/_\sim \to X$ bestaat, zodat $\pi(s(y)) = y$, voor alle $y \in: X/_\sim$. Laat $U = s(X/_\sim)$. Uit de definitie van s volgt dat U uit elke equivalentieklasse van $\sim$ precies 1 element bevat. Definieer nu de verzameling $H = \{g(U) \mid g \in G\}$. We claimen dat H een partitie is van X. We tonen eerst aan dat $X = \cup_{g \in G} g(U)$.

Merk op dat $\cup_{g \in G} g(U) \subset X$. Laat $x \in X$, dan bestaat er een $u \in U$, zodat $x \sim u$, wat betekent dat $x = g_0(u)$, voor een $g_0 \in G$. Hieruit volgt dat $x \in g_0(U) \subset \cup_{g \in G} g(U)$, dus geldt er dat $X = \cup_{g \in G} g(U)$. We tonen nu aan dat de elementen va H disjunct zijn.
Stel dat er $g_1, g_2 \in G$ bestaan, met $g_1 \neq g_2$, zodat $g_1(U) \cap g_2(U) \neq \emptyset$. Dan bestaat er een $x \in g_1(U) \cap g_2(U)$. Er geldt dan dat $y := g_1^{-1}(x) \in U$ en $g_2^{-1}(g_1(y)) = g_2^{-1}(x) \in U$. Doordat $g_1 \neq g_2$, geldt er dat $g_2^{-1} g_1 \neq e$. Hieruit volgt dat $g_2^{-1} g_1(y) \neq y$. Dit leidt tot een tegenspraak, want $y \sim g_2^{-1} g_1(y)$, $y \neq g_2^{-1} g_1(y)$ en $y, g_2^{-1} g_1(y) \in U$, tewijl U van elke equivalentieklasse precies 1 element bevat.

Doordat G paradoxaal is, weten we dat er $n, m \in \mathbb{N}$, paarsgewijs disjuncte verzamelingen $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m \subset G$ en $g_1, \ldots, g_n, h_1, \ldots, h_m \in G$ bestaan, zodat $G = \cup_{i=1}^n g_i(A_i)$ en $G = \cup_{i=1}^m h_m(B_i)$. Definieer de verzamelingen

$$A_i^* = \cup_{g \in A_i} g(U)$$

en

$$B_j^* = \cup_{g \in B_j} g(U)$$

voor $1 \leq i \leq n$ en $1 \leq j \leq m$. Doordat H een partitie is en de verzamelingen $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots B_m$ paarsgewijs disjunct zijn, zijn de verzamelingen $A_1^*, \ldots, A_n^*, B_1^*, \ldots B_m^*$ paarsgewijs disjunct. We gaan nu aantonen dat er geldt dat $X = \cup_{i=1}^n g_i(A_i^*)$. Merk op dat $\cup_{i=1}^n g_i(A_i^*) \subset X$. Laat nu $x \in X$. Dan bestaat er een $u \in U$, zodat $x \sim u$. Dit betekent dat er een $g \in G$ bestaat, zodat $x \in g(U)$. Uit $G = \cup_{i=1}^n g_i(A_i)$, volgt dat er een $1 \leq i \leq n$ bestaat zodat $g \in g_i(A_i)$. Dit betekent dat $x \in g_i A_i^*$ en $x \in \cup_{i=1}^n g_i(A_i^*)$. Hieruit volgt dat $X \subset \cup_{i=1}^n g_i(A_i^*)$ en $X = \cup_{i=1}^n g_i(A_i^*)$. Op dezelfde manier kan worden aangetoond dat $\cup_{i=1}^m h_i(B_i^*) = X$. $\square$

Stelling 10 is ook andersom waar, hiermee bedoelen we het volgende

Stelling 11. *Laat X een verzameling en G een groep die werkt op X. Neem aan $g(x) \neq x$, voor alle $g \in G - \{e\}$ en $x \in X$. Als X G-paradoxaal is, dan geldt er dat G paradoxaal is.*

Bewijs. Laat $\sim$ de zelfde relatie als in stelling 10 en noteer opnieuw de equivalentieklassen van een $x \in X$ met $[x]$. Laat $m \in X$ en

$$M := [m] = \{x \in X \mid x \sim m\} = \{g(m) \mid g \in G\}.$$

Merk op dat $g(M) = M$ voor alle $g \in G$. Laat $x \in M$.

Er bestaat dan een $g \in G$, zodat $x = gm$. Deze g is uniek . Stel namelijk dat $x = g_1(m) = g_2(m)$, met $g_1 \neq g_2$, dan geldt er dat $m = g_1^{-1}g_2(m)$, met $g_1^{-1}g_2 \neq id$. Dit is in tegenspraak met het feit dat $g(x) \neq x$, voor alle $x \in G - \{e\}$.
Definieer de functie $f : M \to G$, zodat $f(x) = g$, waar g het unieke element van G is zodat $x = g(m)$. Merk op dat de functie f een bijectie is. Doordat X paradoxaal is, bestaan er $m, n \in \mathbb{N}$, paarsgewijs disjuncte verzamelingen $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m \subset X$ en $g_1, \ldots, g_n, h_1, \ldots, h_m \in G$, zodat $X = \cup_{i=1}^n g_i(A_i)$ en $X = \cup_{i=1}^m h_m(B_i)$. Laat $A'_i = A_i \cap M$ en $A^*_i = f(A'_i)$ voor $1 \leq i \leq n$ en $B'_i = B_i \cap M$ en $B^*_i = f(B'_i)$ voor $1 \leq i \leq m$. We tonen nu aan dat $A^*_1, \ldots A^*_n, B_1 \ldots, B^*_n$ paarsgewijs disjunct zijn en

$$G = \cup_{i=1}^n g_i(A^*_i) = \cup_{i=1}^m h_i(B^*_i).$$

Doordat $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m$ paarsgewijs disjunct zijn, $A'_i \subset A_i$ en $B'_j \subset B_j$, voor $1 \leq i \leq n$ en $1 \leq j \leq m$ en f een bijectie is, zijn de verzamelingen $A^*_1, \ldots A^*_n, B^*_1 \ldots, B^*_n$ paarsgewijs disjunct.
We tonen nu aan dat $G = \cup_{i=1}^n g_i(A^*_i)$. Het bewijs dat $G = \cup_{i=1}^m h_i(B^*_i)$ gaat op dezelfde manier.
Laat $g \in G$. Dan bestaat er een $i \in I$, zodat $g(m) \in g_i(A_i)$, wat betekent dat $g(m) \in g_i(A'_i)$. Hieruit volgt dat $g_i^{-1}g(m) \in A'_i$ en dus dat $g_i^{-1}g \in A^*_i$. Er geldt nu dat $g \in g_i(A^*_i)$ en $g \in \cup_{j=1}^n g_j(A^*_j)$.
Dit betekent dat $G = \cup_{i=1}^n g_i(A^*_i)$. $\square$

4.2 Equideelbaarheid

Om de Banach-Tarski paradox kunnen bewijzen, moeten we onze kennis van paradoxale groepsacties vergroten. In dit hoofdstuk introduceren we de term equideelbaar en laten we zien hoe dit begrip samenhangt met het begrip paradoxaal. Dit hoofdstuk is gebaseerd op hoofdstuk 3 uit [3].
We beginnen met twee definities

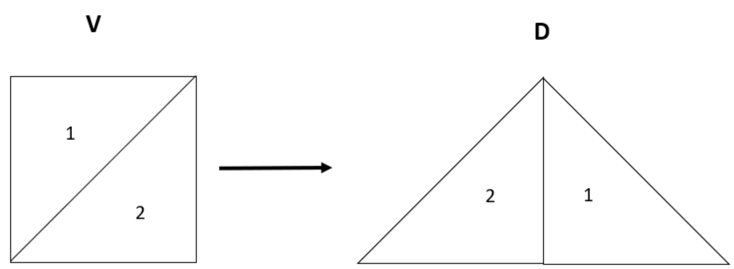
Definitie 10. *Laat X een verzameling en $P \subset \mathcal{P}(X)$. We noemen P een partitie van X als:*

1. *Er geldt dat $\cup P = X$.*
2. *Voor $A, B \in P$, met $A \neq B$ geldt dat $A \cap B = \emptyset$.*

In deze definitie van een partitie staan we toe dat een partitie de lege verzameling bevat.

Definitie 11. *Laat X een verzameling en G een groep die werkt op X. We noemen twee verzamelingen $A, B \subset X$ G-equideelbaar als er voor een $n \in \mathbb{N}$ een partitie $\{A_1, \ldots, A_n\}$ van A, een partitie $\{B_1, \ldots, B_n\}$ van B en $g_1, \ldots, g_n$ bestaan, zodat $g_i(A_i) = B_i$ Als dit het geval is, dan noteren we dit met $A \sim_G B$.*

We geven eerst een voorbeeld van equideelbare verzamelingen. Laat $X = \mathbb{R}^2$ en $G = \{f \in (\mathbb{R}^2)^{(\mathbb{R}^2)} \mid f \text{ is een isometrie }\}$. We hebben in het onderstaande figuur een vierkant V en een driehoek D weergegeven die G-equideelbaar zijn. We hebben het vierkant en het driehoek in twee driehoeken verdeeld. Het is duidelijk dat driehoek 1 met behulp van rotaties en translaties op driehoek 1 kan worden afgebeeld en driehoek 2 met behulp van rotaties en translaties op driehoek 2 kan worden afgebeeld. Dit betekent dat $D \sim_G V$



Figuur 2: Voorbeeld van G-equideelbare verzamelingen

Als X een verzameling is en G een groep is die werkt op X, dan geldt er dat $\sim_G$ een relatie op $\mathcal{P}(X)$ definieert. Het volgende blijkt te gelden:

Stelling 12. *Laat X een verzameling en G een groep die werkt op X. De relatie $\sim_G$ definieerd een equivalentie-relatie op $\mathcal{P}(X)$.*

Bewijs. Uit definitie 11 volgt meteen dat voor alle $A \in \mathcal{P}(X)$ geldt dat $A \sim_G A$.
Laat $A, B \in \mathcal{P}(X)$ en neem aan dat $A \sim_G B$. Er bestaat dan voor een $n \in \mathbb{N}$ een partitie $\{A_1, \ldots, A_n\}$ van A, een partitie $\{B_1, \ldots, B_n\}$ van B en $g_1, \ldots, g_n$, zodat $g_i(A_i) = B_i$. Dit betekent dat $A_i = g_i^{-1}(B_i)$ voor $1 \leq i \leq n$. Hieruit volgt dat $B \sim_G A$.
Neem nu aan dat $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$ en er geldt dat $A \sim_G B$ en $B \sim_G C$. Er bestaat dan voor een $n \in \mathbb{N}$ een partitie $\{A_1, \ldots, A_n\}$ van A, een partitie $\{B_1, \ldots, B_n\}$ van B en $g_1, \ldots, g_n$, zodat $g_i(A_i) = B_i$ en voor een $m \in \mathbb{N}$ bestaat er een paritie $\{\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_m\}$ van B, een partitie $\{C_1, \ldots, C_m\}$ van C en $h_1, \ldots, h_m \in G$ zodat $h(\mathcal{B}_i) = C_i$ voor $1 \leq i \leq m$.
Definieer $\mathcal{A}_{i,j} = g_i^{-1}(B_i \cap \mathcal{B}_j)$, voor $1 \leq i \leq n$ en $1 \leq j \leq m$ en $K = \{(i, j) \mid 1 \leq i \leq n \text{ en } 1 \leq j \leq m\}$. We gaan eerst bewijzen dat

$$H = \{\mathcal{A}_{i,j} \mid (i, j) \in K\}$$

een partitie van A is. Laat $a \in A$, dan bestaat er een unieke i, zodat $a \in A_i$. Doordat $B_k = g_k(A_k)$ voor $1 \leq k \leq n$ en $\{B_1, \ldots, B_n\}$ een partitie is, volgt hieruit dat $g_i(a) \in B_i$ en $a \notin g_k^{-1}(B_k)$, voor $k \neq i$.

Er geldt dat $\{\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_m\}$ een partitie van B is, dus bestaat er een unieke j, zodat $g_i(a) \in \mathcal{B}_j$. Dit betekent dat $g_i(a) \in B_i \cap \mathcal{B}_j$ en $a \in \mathcal{A}_{i,j}$. Uit $a \notin g_k^{-1}(B_k)$, voor $k \neq i$, volgt dat $a \notin \mathcal{A}_{k,l}$, met $k \neq i$ en $1 \leq l \leq m$. Merk op dat $g_i(a) \notin \mathcal{B}_l$ als $l \neq j$, wat betekent dat $a \notin \mathcal{A}_{i,l}$ als $l \neq j$. Hieruit volgt dat $\mathcal{A}_{i,j}$ het enige element van H is dat a bevat. Dit betekent dat H een partitie van A is.
Definieer $\mathcal{C}_{i,j} := h_j g_i(\mathcal{A}_{i,j})$, voor $(i,j) \in K$ en laat $P = \{\mathcal{C}_{i,j} \mid (i,j) \in K\}$. We gaan nu bewijzen dat P een partitie van C is.
We tonen eerst aan dat $C = \cup P$.
Laat $c \in C$. Dan bestaat er een j, zodat $c \in C_j$. Hieruit volgt dat $c = h_j(b)$, voor een $b \in \mathcal{B}_j$. Er bestaat een i, zodat $b \in B_i$, wat betekent dat $b = g_i(a)$, voor een $a \in g^{-1}(B_i \cap \mathcal{B}_j) = \mathcal{A}_{i,j}$. Er geldt dus dat $a \in \cup P$ en $C \subset \cup P$. Doordat $g_i(A_{i,j}) \subset \mathcal{B}_j$ geldt er dat $h_j g_i(A_{i,j}) \subset C_j \subset C$, voor $1 \leq i \leq n$ en $1 \leq j \leq m$. Dit betekent dat $\cup P \subset C$ en $C = \cup P$.
We tonen nu aan dat $\mathcal{C}_{i,j} \cap \mathcal{C}_{u,v} = \emptyset$ voor $(i,j), (u,v) \in K$, met $(i,j) \neq (u,v)$.
Neem aan dat $\mathcal{C}_{i,j} \cap \mathcal{C}_{u,v} \neq \emptyset$. Merk op dat $\mathcal{C}_{i,j} \subset C_j$ en $\mathcal{C}_{u,v} \subset C_v$. Doordat $C_k \cap C_l = \emptyset$ als $k \neq l$, moet er gelden dat $j = v$. Hieruit volgt dat

$$h_j^{-1}(\mathcal{C}_{i,j}) \cap h_j^{-1}(\mathcal{C}_{u,v}) = g_i(\mathcal{A}_{i,j}) \cap g_u(\mathcal{A}_{u,v}) \neq \emptyset.$$

Merk op dat $g_i(\mathcal{A}_{i,j}) \subset B_i$ en $g_u(\mathcal{A}_{u,v}) \subset B_u$. Doordat $\{B_1, \ldots, B_n\}$ een partitie is volgt hieruit dat $i = u$. Dit betekent dat $A \sim_G C$. □

Als $U, V \subset X$ en $U \sim_G V$, dan zijn de verzamelingen U en V dus op een bepaalde manier equivalent. Het volgende lemma illustreert dit.

Lemma 9. *Laat X een verzameling, $U, V \subset X$ en G een groep die werkt op X. Neem aan dat $U \sim_G V$. Dan bestaat er een bijectie $f : U \to V$, zodat voor $A \subset U$ geldt dat $A \sim_G f(A)$.*

Bewijs. Uit $U \sim_G V$ volgt dat er voor een $n \in \mathbb{N}$ een partitie $\{U_1, \ldots, U_n\}$ van U, een partitie $\{V_1, \ldots, V_n\}$ en $g_1, \ldots, g_n \in G$ bestaan zodat $g_i(U_i) = V_i$ voor $1 \leq i \leq n$. Definieer nu $f : U \to V$ als volgt

$$f(x) = g_i(x) \text{ als } x \in U_i.$$

Deze functie is goed gedefinieerd doordat $\{U_1, \ldots, U_n\}$ een partitie van U is. Doordat $g_i(U_i) = V_i$ voor $1 \leq i \leq n$ en $\cup_{i=0}^n V_i = V$ is de functie surjectief. Stel nu dat $x, y \in U$ en $f(x) = f(y)$, dan is er een i, zodat $f(x), f(y) \in V_i$. Dit betekent dat $g_i(x) = f(x) = f(y) = g_i(y)$ en

$$x = g_i^{-1} g_i(x) = g_i^{-1} f(x) = g_i^{-1} f(y) = g_i^{-1} g_i(y) = y.$$

Hieruit volgt dat f bijectief is.
Laat $A \subset U$. We gaan bewijzen dat $A \sim_G f(A)$.
Laat $A_i = A \cap U_i$ voor $1 \leq i \leq n$. Er geldt dan dat $\{A_1, \ldots, A_n\}$ een partitie van A is en dat $A_i \subset U_i$ voor $1 \leq i \leq n$. Definieer $\mathcal{A} = \cup_{i=1}^n g_i(A_i)$. De verzameling $\{g_1(A_1) \ldots, g_n(A_n)\}$ is een partitie van $\mathcal{A}$, want

$$g_i(A_i) \cap g_j(A_j) \subset g_i(U_i) \cap g_j(U_j) = \emptyset,$$

voor $1 \leq i, j \leq n$, met $i \neq j$.
Er geldt tevens dat $\mathcal{A} = \cup_{i=1}^n f(A_i) = f(\cup_{i=1}^n A_i) = f(A)$. Dit betekent dat $A \sim_G \mathcal{A} = f(A)$. □

Zoals we al eerder vermeldden is er een verband tussen paradoxale verzamelingen en equideelbaarheid. Uit definitie 11, in combinatie met stelling 9 volgt bijvoorbeeld gelijk het volgende:

Gevolg 2. *Laat X een verzameling, $V \subset X$ en G een groep die werkt op X. Dan geldt er dat V G-paradoxaal is, dan en slechts dan als er disjuncte deelverzamelingen $A, B \subset V$ bestaan, zodat*

$$V \sim_G A \text{ en } V \sim_G B.$$

We kunnen dit gevolg gebruiken om het volgende verband tussen equideelbaarheid en paradoxale groepsacties te bewijzen.

Stelling 13. *Laat X een verzameling, $V, U \subset X$ en G een groep die werkt op X. Neem aan dat $U \sim_G V$. Dan geldt er dat U G-paradoxaal is dan en slechts dan als V G-paradoxaal is.*

Bewijs. Stel dat U G-paradoxaal is, dan volgt uit gevolg 2 dat er verzamelingen $A, B \subset U$ bestaan, zodat $U \sim_G A$, $U \sim_G B$ en $A \cap B = \emptyset$. Uit lemma 9 en $U \sim_G V$ volgt dat er een bijectieve functie $f : U \to V$ bestaat, zodat voor $C \subset U$ geldt dat $C \sim_G f(C)$. Laat $\mathcal{A} := f(A)$ en $\mathcal{B} := f(B)$. Er geldt dan dat $A \sim_G \mathcal{A}$ en $B \sim_G \mathcal{B}$. Dit betekent dat

$$\mathcal{A} \sim_G A \sim_G U \sim_G V$$

en

$$\mathcal{B} \sim_G B \sim_G U \sim_G V,$$

wat betekent dat $\mathcal{A} \sim_G V$ en $\mathcal{B} \sim_G V$. Uit $A \cap B = \emptyset$ volgt dat $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = f(A) \cap f(B) = f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset$. Dit betekent dat V G-paradoxaal is. Met het zelfde argument kan worden aangetoond dat als V G-paradoxaal is er moet gelden dat U G-paradoxaal is. $\square$

Uit gevolg 2 volgt dat we ook kunnen aantonen dat een verzamelingen X G- paradoxaal is, door disjuncte verzamelingen $A, B \subset X$ te vinden zodat $A \sim_G X \sim_G B$. Om dit te kunnen gebruiken, hebben we een manier nodig om te bepalen of er geldt dat $A \sim_G X$. Om deze manier te bepalen hebben we het begrip ordening nodig.

Definitie 12. *Laat X een verzameling en $\sim$ een relatie op X. We noemen $\sim$ een ordening als er geldt dat*

1. *$x \sim x$ voor alle $x \in X$.*
2. *uit $x \sim y$ en $y \sim z$ volgt dat $x \sim z$ voor $x, y, z \in X$.*
3. *uit $x \sim y$ en $y \sim x$ volgt dat $x = y$ voor $x, y \in X$.*

Een voorbeeld van een ordening is $\mathbb{R}$, met als relatie $\leq$. In dit voorbeeld wordt duidelijk waarom we een ordening een ordening noemen, want $\leq$ ordent de elementen van $\mathbb{R}$ bijvoorbeeld van klein naar groot.

Laat $[A]_G = \{B \in \mathcal{P}(X) \mid A \sim_G B\}$ voor $A \in \mathcal{P}(X)$ en $\mathcal{P}(X)/G = \{[A]_G \mid A \in \mathcal{P}(X)\}$. We definiëren op $\mathcal{P}(X)/G$ de relatie $\leq$, zodat voor $[A], [B] \in X/G$ geldt dat $[A]_G \leq [B]_G$ dan en slechts dan als $A \sim_G C$, voor een $C \subset B$. Om de notatie kort te houden noteren we vaak $A \leq B$ in plaats van $[A]_G \leq [B]_G$.
We willen bewijzen dat $\leq$ op $\mathcal{P}(X)/G$ een ordening definieert. In het bewijs hiervan gebruiken we het volgende lemma:

Lemma 10. *Laat X een verzameling en G een groep die werkt op X. Laat $V, U, V', U' \subset X$ zodat $V \sim_G V'$, $U \sim_G U'$, $V \cap U = \emptyset$ en $V' \cap U' = \emptyset$. Dan geldt er dat*

$$V \cup U \sim_G V' \cup U'.$$

Omdat het lemma direct volgt uit definitie 11 geven we het bewijs niet. In deel 3 van stelling 14 volgen we de lijn van het bewijs van theorem 3.5 uit hoofdstuk 3 van [3].

Stelling 14. *De relatie $\leq$ zoals hierboven beschreven is een ordening.*

Bewijs. Merk allereerst op dat de relatie $\leq$ goed gedefinieerd is. We gaan nu controleren of $\leq$ voldoet aan de eisen uit definitie 12.

1. Er geldt dat $A \sim A$, voor $A \in \mathcal{P}(X)$, wat betekent dat $A \leq A$.

2. Neem nu aan dat $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$, zodat $A \leq B$ en $B \leq C$. Er bestaat dan een $\mathcal{B} \subset B$ zodat $A \sim_G \mathcal{B}$ en er bestaat een $\mathcal{C} \subset C$, zodat $B \sim_G \mathcal{C}$. Uit lemma 9 volgt dat er een bijectieve functie $f : A \to \mathcal{B}$ en een bijectieve functie $g : B \to \mathcal{C}$ bestaat, zodat $f(D) \sim_G D$ voor $D \subset A$ en $g(E) \sim_G E$, voor $E \subset B$. Hieruit volgt dat

$$A \sim_G f(A) \sim_G g \circ f(A) \subset C.$$

   Dit betekent dat $A \leq C$.

3. Neem nu aan dat $A, B \in \mathcal{P}(X)$ en er geldt dat $A \leq B$ en $B \leq A$. Er bestaat dan een $\mathcal{B} \subset B$ en $\mathcal{A} \subset A$, zodat $A \sim_G \mathcal{B}$ en $B \sim_G \mathcal{A}$. Uit lemma 9 volgt dat er bijecties $f : A \to \mathcal{B}$ en $g : \mathcal{A} \to B$ bestaan zodat $f(D) \sim_G D$ voor $D \subset A$ en $g(E) \sim_G E$ voor $E \subset \mathcal{A}$. Laat $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ een rij van deelverzamelingen van A, zodat $S_0 = A \backslash \mathcal{A}$ en $S_{n+1} = g^{-1} \circ f(S_n)$ en laat $S = \cup_{n \in \mathbb{N}_0} S_n$. Merk op dat $A \backslash S \subset A \backslash S_0 = A \backslash (A \backslash \mathcal{A}) = \mathcal{A}$. Stel nu dat

$$g(A \backslash S) = B \backslash f(S).$$

Er geldt dan dat

$$A \backslash S \sim_G g(A \backslash S) = B \backslash f(S),$$

en

$$S \sim_G f(S).$$

Uit lemma 10 volgt nu dat

$$A = (A \backslash S) \cup S \sim_G (B \backslash f(S)) \cup f(S) = B.$$

Dit betekent dat $[A]_G = [B]_G$.
Om te bewijzen dat $[A]_G = [B]_G$ hoeven we nu alleen nog te bewijzen dat

$$g(A \backslash S) = B \backslash f(S). \tag{12}$$

We tonen eerst aan dat $g(A \backslash S) \subset B \backslash f(S)$.
Stel dat $y \in g(A \backslash C)$. Dan bestaat er een $x \in A \backslash C$, zodat $y = g(x)$. Merk op dat $x \notin S_n$, voor $n \in \mathbb{N}_0$. Hieruit volgt dat $y \notin g(S_n) = g(g^{-1}(\circ f(S_{n-1}))) = f(S_{n-1})$ voor $n \in \mathbb{N}$. Hieruit volgt dat

$$y = g(x) \in B \backslash \cup_{i=1}^{\infty} f(S_{n-1}) = B \backslash f(\cup_{i=0}^{\infty} S_n) = B \backslash f(S).$$

Neem nu aan dat $x \in B \backslash f(S)$. Er geldt dan dat $x \in B$ en $x \notin f(\cup_{i=0}^{\infty} S_n)$. Dit betekent dat $x \notin \cup_{i=0}^{\infty} f(S_n)$. Doordat g een bijectie is bestaat er een $y \in \mathcal{A}$, zodat $x = g(y)$. Uit $g(y) \notin \cup_{i=0}^{\infty} f(S_n)$, volgt dat

$$y \notin g^{-1}(\cup_{i=0}^{\infty} f(S_n)) = \cup_{i=0}^{\infty} g^{-1} \circ f(S_n) = \cup_{i=1}^{\infty} S_n.$$

Merk op dat $y \in \mathcal{A}$ en $\mathcal{A} = A \backslash (A \backslash \mathcal{A}) = A \backslash S_0$. Hieruit volgt dat

$$y \in (A \backslash S_0) \cap (A \backslash \cup_{i=1}^{\infty} S_n) = A \backslash \cup_{i=1}^{\infty} S_n = A \backslash S.$$

Dit betekent dat $x = g(y) \in g(A \backslash S)$.

$\square$

Het is op het eerste gezicht niet duidelijk wat we er aan hebben als we weten dat $\leq$ een ordening is. Uit eigenschap 3 van definitie 12 volgt dat als voor twee verzamelingen $A, B \subset X$ geldt dat $A \leq B$ en $B \leq A$ er ook geldt dat $A \sim_G B$. In de praktijk blijkt het veel makkelijker te zijn om aan te tonen dat $A \leq B$ en $B \leq A$, dan direct aan te tonen dat $A \sim_G B$. In de volgende paragraaf laten een paar voorbeelden zien waarop dit van toepassing is.

4.3 Voorbeelden

4.3.1 Formulering Banach-Tarski Paradox

Het eerste voorbeeld is een stelling waarvan we eerder in de scriptie hebben belooft dat we hem zouden bewijzen. In hoofdstuk 4.1 hebben we de Banach-Tarski paradox als volgt geformuleerd:

Stelling 15. *Er geldt dat $B_1(0)$, G_{iso}-paradoxaal is.*

We merkten toen op dat we eigenlijk meer wilden eisen. We kunnen met de theorie uit 4.2 de volgende stelling bewijzen, die aantoont dat stelling 8 inderdaad de manier is waarop we de Banach-Tarski paradox willen formuleren.

Stelling 16. *[3, Cor. 3.6, blz. 25] Laat X een verzameling, G een groep die werkt op X en $V \subset X$. Er geldt dan dat V G-paradoxaal is, dan en slechts dan als er $A, B \subset V$ bestaan zodat $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = V$ en $A \sim_G V \sim_G B$.*

Bewijs. Neem aan dat er $A, B \subset V$ bestaan zodat $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = V$ en $A \sim_G V \sim_G B$. Uit gevolg 2 volgt gelijk dat V dan G-paradoxaal is.
Neem nu aan dat V G-paradoxaal is. Uit gevolg 2 volgt dan dat er disjuncte deelverzamelingen $A, B \subset V$ bestaan, zodat $V \sim_G A$ en $V \sim_G B$. Er geldt dat $B \subset V \backslash A$. Uit $V \sim_G B$ volgt dat $V \leq V \backslash A$. Er geldt ook dat $V \backslash A \sim_G V \backslash A \subset V$, wat betekent dat $V \backslash A \leq V$. Doordat $\leq$ een ordening is op $\mathcal{P}(X)/\sim_G$, volgt hieruit dat $[V]_G = [V \backslash A]_G$ en dus dat $V \sim_G V \backslash A$. Laat nu $\mathcal{B} = V \backslash A$. Dan geldt er dat $A \cap \mathcal{B} = \emptyset$, $A \cup B = V$, $A, \mathcal{B} \subset V$ en $A \sim_G V \sim_G \mathcal{B}$. Dit betekent dat A en $\mathcal{B}$ de gezochte verzamelingen zijn. ☐

Dit betekent dat als $B_1(0)$ G_{iso}-paradoxaal is er meteen geldt dat we de stukken waarin we $B_1(0)$ verdelen zo kunnen kiezen dat ze heel $B_1(0)$ vormen en als ze worden samengevoegd, om twee bollen te vormen, niet overlappen.

4.3.2 Cirkel en vierkant

We gaan nu met behulp van stelling 14 laten zien dat het vierkant $V := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max(|x|, |y|) \leq 1\}$ en de cirkel $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y)\| \leq 1\}$ geldt dat $V \sim_{T_2} C$ (De definitie van T_2 wordt in definitie 13 gegeven). We geven eerst de definitie van T_2, vervolgens tonen we aan dat $V \sim_{T_2} C$ en tot slot laten we zien hoe de stukken waarin we V en C verdelen er uitzien.
We beginnen met drie definities

Definitie 13. *Laat $n \in \mathbb{N}$. Definieer de functie $\varphi_{a,b} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, voor $a \in \mathbb{R}$ en $b \in \mathbb{R}^n$, met $\varphi_{a,b} = ax + b$. We definiëren*

$$T_n := \{\varphi_{a,b} \mid a \in \mathbb{R} - \{0\}, b \in \mathbb{R}^n\}.$$

De vermenigvuldiging van T_n is samenstelling van functies.

Definitie 14. *Laat $X \subset \mathbb{R}^n$ het inwendige van X definiëren we als volgt*

$$X^\circ := \cup\{A \subset X \mid A \text{ is een open verzameling}\}.$$

Definitie 15. *Zij X een metrische ruimte, $x \in X$ en $\delta > 0$. We definiëren de bol rond x met straal δ als*

$$B_\delta(x) := \{y \in X \mid d(x, y) \leq \delta\}.$$

Als we willen benadrukken dat $x \in X$, dan noteren we de bol ook met $B_\delta^X(x)$.

We bewijzen nu de volgende stelling:

Stelling 17. *[3, Cor. 3.7, blz. 26] Laat $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ begrensde verzamelingen met een niet leeg inwendige, dan geldt er dat $X \sim_{T_n} Y$.*

Bewijs. Doordat $X^\circ, Y^\circ \neq \emptyset$ en X°, Y° open zijn bestaan er $\delta_x, \delta_y > 0$, $x \in X$ en $y \in Y$, zodat $B_{\delta_x}(x) \subset X$ en $B_{\delta_y}(y) \subset Y$. Doordat X, Y begrensd zijn, bestaan er $R_X, R_Y \in \mathbb{R}$, zodat $X \subset B_{R_X}(0)$ en $Y \subset B_{R_Y}(0)$. Beschouw nu de functies $\varphi_{\delta_x,x} \circ \varphi_{\frac{1}{\mathbb{R}_Y}}, \varphi_{\delta_y,y} \circ \varphi_{\frac{1}{\mathbb{R}_X}} \in T_n$. Er geldt dan dat

$$\varphi_{\delta_x,x} \circ \varphi_{\frac{1}{\mathbb{R}_Y}}(Y) \subset \varphi_{\delta_x,x} \circ \varphi_{\frac{1}{\mathbb{R}_Y}}(B_{R_Y}(0)) = \varphi_{\delta_x,x}(B_1(0)) = B_{\delta_x}(x) \subset X.$$

Hieruit volgt dat $Y \sim_{T_n} \varphi_{\delta_x,x} \circ \varphi_{\frac{1}{\mathbb{R}_Y}}(Y) \subset X$, wat betekent dat $Y \leq X$. Met een zelfde redenering kan worden aangetoond dat $X \sim_{T_n} \varphi_{\delta_y,y} \circ \varphi_{\frac{1}{\mathbb{R}_X}}(X) \subset Y$, wat betekent dat $Y \leq X$. Uit $Y \leq X$ en $X \leq Y$ volgt met deel 3 van stelling 14 dat $X \sim_{T_n} Y$. $\square$

Doordat $V, C \subset \mathbb{R}^2$ allebei begrensd zijn en een niet leeg inwendige hebben geldt er dat $V \sim_{T_2} C$.
We gaan nu kijken hoe de stukken waarin we V en C verdelen er uitzien. Dit doen we door te kijken naar het bewijs van het derde deel van stelling 14. Als we de notatie van dit bewijs aanhouden, dan geldt er in dit geval dat $A = C$, $B = V$, $\mathcal{A} = \frac{1}{\sqrt{2}}V$, $\mathcal{B} = C$ en geldt voor de functies dat $f : C \to V$ wordt geven door $f(x) = x$ en $g : \mathcal{A} \to V$, door $g(x) = \sqrt{2}x$. Het is gemakkelijk na te gaan dat er inderdaad geldt dat $f(A) = \mathcal{B}$, $g(\mathcal{A}) = B$ en $A \sim_{T_2} \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \sim_{T_2} B$. We willen nu de verzameling S uit deel 3 van stelling 14 bepalen, zodat we de kunnen bepalen hoe de verzamelingen, $A \backslash S$, $g(C \backslash S) = B \backslash f(S)$ en $f(S)$ er uitzien.
Merk op dat

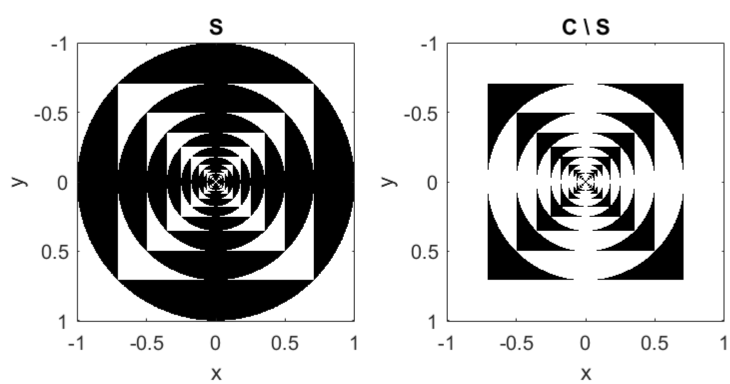
$$S_0 = A \backslash \mathcal{A} = C \backslash \frac{1}{\sqrt{2}} V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\| \leq 1, \max(|x|,|y|) > \frac{1}{\sqrt{2}}\}.$$

Er geldt dat $S_{n+1} = g^{-1} \circ f(S_n) = \frac{1}{\sqrt{2}} S_n$. Hieruit volgt dat

$$S_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}^n}, \max(|x|,|y|) > \frac{1}{\sqrt{2}^{n+1}}\}.$$

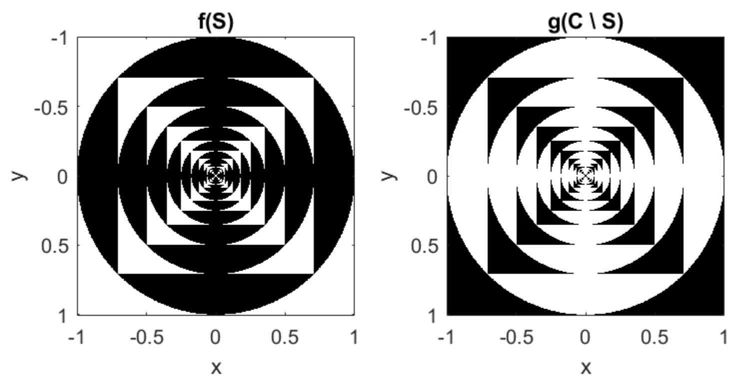
Dit betekent dat

$$S = \cup_{n \in \mathbb{N}_0} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}^n}, \max(|x|,|y|) > \frac{1}{\sqrt{2}^{n+1}}\}.$$



Figuur 3: Afbeelding van S en $C \backslash S$

In figuur 3 hebben met behulp van MATLAB de verzamelingen S en $C\backslash S$ weergegeven. De verzamelingen worden weergegeven door het zwart in de afbeelding. In dit figuur is al te zien waarom er ook geldt dat $V = g(C\backslash S) \cup S$. Er geldt namelijk dat $g(C\backslash S) = \sqrt{2}(C\backslash S)$ en $f(S) = S$, wat betekent $C\backslash S$ door g precies wordt afgebeeld op het wit in het figuur van S. In figuur 4 hebben we de verzamelingen $f(S)$ en $g(C\backslash s)$ weergegeven en is te zien dat er inderdaad geldt dat $f(S) \cup g(C\backslash S) = V$. We zien nu de kracht van stelling 14, De functies f en g waren makkelijk om te bepalen, terwijl de verzameling S en $G\backslash S$ zonder stelling 14 niet makkelijk te vinden zijn.



Figuur 4: Afbeeelding van $f(S)$ en $g(C\backslash S)$

4.3.3 Vrije groepen

In dit voorbeeld laten we een toepassing van stelling 16 zien. We gaan de constructie die we in deze stelling gebruiken toepassen op de paradoxale groep uit lemma 7. In lemma 7 definieerden we de verzamelingen $U_\sigma, U_{\sigma^{-1}}, U_\mu, U_{\mu^{-1}} \subset W_{\{\mu,\sigma\}}$. Er geldt dat

$$U_\sigma = \{x_1^{n_1} \ldots, x_k^{n_k} \in W_{\{\mu,\sigma\}} \mid x_1 = \sigma, k \in \mathbb{N}, n_1 > 0\}$$

en

$$U_{\sigma^{-1}} = \{x_1^{n_1} \ldots, x_k^{n_k} \in W_{\{\mu,\sigma\}} \mid x_1 = \sigma, k \in \mathbb{N}, n_1 < 0\}.$$

Op dezelfde manier zijn U_μ en $U_{\mu^{-1}}$ gedefinieerd. We hebben aangetoond dat deze verzamelingen disjunct zijn en dat er geldt dat $W_{\{\mu,\sigma\}} = U_\sigma \cup \sigma U_{\sigma^{-1}} = U_\mu \cup \mu U_{\mu^{-1}}$.

Er geldt dat

$$U_\sigma \cup U_{\sigma^{-1}} \cup U_\mu \cup U_{\mu^{-1}} = W_{\{\mu,\sigma\}} - \{e\}$$

en

$$U_\sigma \cap \sigma U_{\sigma^{-1}} = U_\mu \cap U_{\mu^{-1}} = \emptyset \tag{13}$$

We gaan aantonen dat er verzamelingen $C, D \subset W_{\{\mu,\sigma\}}$ bestaan, zodat $C \cup D \cup U_\sigma \cup U_{\sigma^{-1}} = W_{\sigma,\mu}$, $C \cup \mu D = W_{\{\mu,\sigma\}}$ en $C \cap D = \emptyset$.

Uit $W_{\{\mu,\sigma\}} = U_\mu \cup \mu U_{\mu^{-1}}$ en $U_\mu \cap U_{\mu^{-1}} = \emptyset$, volgt dat $W_{\{\mu,\sigma\}} \sim_{W_{\{\mu,\sigma\}}} U_\mu \cup U_{\mu^{-1}}$. Hieruit volgt dat $W_{\{\mu,\sigma\}} \leq W_{\{\mu,\sigma\}} \backslash (U_\sigma \cup U_{\sigma^{-1}})$ en $W_{\{\mu,\sigma\}} \backslash (U_\sigma \cup U_{\sigma^{-1}}) \leq W_{\{\mu,\sigma\}}$, wat betekent dat

$$W_{\{\mu,\sigma\}} \backslash (U_\sigma \cup U_{\sigma^{-1}}) \sim_{W_{\{\mu,\sigma\}}} W_{\{\mu,\sigma\}}.$$

We gaan nu met behulp van deel 3 van stelling 14 kijken via welke partitie van $W_{\{\mu,\sigma\}} \backslash (U_\sigma \cup U_{\sigma^{-1}})$ deze equivalentie geldt. We houden de notatie van deel 3 van stelling 14 aan. Er geldt dat $A = W_{\{\mu,\sigma\}} \backslash (U_\sigma \cup U_{\sigma^{-1}})$, $B = W_{\{\mu,\sigma\}}$, $\mathcal{A} = U_\mu \cup U_{\mu^{-1}}$ en $\mathcal{B} = A$. In dit geval wordt $f : A \to \mathcal{B}$ gegeven door $f(x) = x$. In lemma 7 hebben we bepaald dat $g : \mathcal{A} \to B$ wordt gegeven door

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{als} \quad x \in U_\mu \\ \mu x & \text{als} \quad x \in U_{\mu^{-1}} \end{cases}$$

Hieruit volgt dat $g^{-1} : B \to \mathcal{A}$ wordt gegeven door

$$g^{-1}(x) = \begin{cases} x & \text{als} \quad x \in U_\mu \\ \mu^{-1} x & \text{als} \quad x \notin U_{\mu^{-1}} \end{cases}$$

We gaan nu $S = \cup_{i \in \mathbb{N}_0} S_i$ uit deel 3 van stelling 14 bepalen.

Er geldt dat $S_0 = A \backslash \mathcal{A} = \{e\}$ en dat

$$S_{n+1} = g^{-1} \circ f(S_n) = g^{-1}(S_n) = \mu^{-1} S_n,$$

voor $n \in \mathbb{N}$. Hieruit volgt dat $S = \{\mu^{-n} \mid n \in \mathbb{N}_0\}$. In stelling 14 hebben we aangetoond dat

$$S \sim_{W_{\{\mu,\sigma\}}} f(S),$$

$$A \backslash S \sim_{W_{\{\mu,\sigma\}}} g(A \backslash S)$$

en

$$f(S) \cup g(A \backslash S) = W_{\{\mu,\sigma\}}.$$

Doordat f de identiteit is, is het duidelijk hoe S wordt afgebeeld op $f(S)$. We gaan nu kijken wat g doet met A en gebruiken dit om C en D te definiëren. Er geldt dat

$$g(A \backslash S) = g((W_{\mu,\sigma} \backslash (U_\sigma \cup U_{\sigma^{-1}})) \backslash S) = g(U_\mu \cup (U_{\mu^{-1}} \backslash S)) = g(U_\mu) \cup g(U_{\mu^{-1}} \backslash S).$$

Merk op dat g op U_μ de identiteit is en dat g op $U_{\mu^{-1}} \backslash S$ wordt gegeven door $g(x) = \mu x$. Dit betekent dat f op S en g op U_μ wordt gegeven door de identiteit. Definieer nu $C := U_\mu \cup S$ en $D := U_{\mu^{-1}} \backslash S$. Er geldt dat $C \cap D = \emptyset$ en dat $C \cup D \cap (U_\sigma \cup U_{\sigma^{-1}}) = \emptyset$. Uit vergelijking 13 volgt dat

$$C \cap \mu D = (U_\mu \cup S) \cap \mu (U_{\mu^{-1}} \backslash S) = (U_\mu \cup S) \cap (\mu U_{\mu^{-1}} \backslash S) \subset U_\mu \cap \mu U_{\mu^{-1}} = \emptyset.$$

Er geldt tevens dat

$$C \cup \mu D = (U_\mu \cup S) \cup \mu (U_{\mu^{-1}} \backslash S = U_\mu \cup S \cup (\mu U_{\mu^{-1}} \backslash S) = U_\mu \cup \mu U_{\mu^{-1}} = W_{\{\mu,\sigma\}}.$$

Dit betekent dat $V := C \cup D$ en $W := U_\sigma \cup U_{\sigma^{-1}}$ verzamelingen uit stelling 16 zijn zodat $V \cup W = W_{\{\mu,\sigma\}}$, $V \cap W = \emptyset$ en $V \sim_{W_{\{\mu,\sigma\}}} W_{\{\mu,\sigma\}} \sim_{W_{\{\mu,\sigma\}}} W$.

5 Hausdorff paradox

In dit hoofdstuk gaan we de volgende stelling bewijzen

Stelling 18 (Hausdorff paradox)**.** *Er bestaat een aftelbare verzameling $M \subset S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$ zodat $S^2 \backslash M$ $SO3$-paradoxaal is.*

Deze stelling wordt de Hausdorff paradox genoemd. We gebruiken de Hausdorff paradox in het volgdende hoofdstuk om de Banach-Tarski paradox te bewijzen.
In dit hoofdstuk lichten we eerst toe wat de groepsactie van $SO3$ op S^2 is, vervolgens bewijzen we dat $SO3$ een vrije ondergroep met twee generatoren heeft, tonen we de Hausdorff paradox aan en leggen we uit waarom het een paradox is. Aan het eind van het hoofdstuk kijken we of we de Hausdorff paradox ook in hogere dimensies kunnen bewijzen. Het deel van dit hoofdstuk tot definitie 17 is gebasseerd op hoofdstuk 2 uit [3].
In stelling 18 wordt de groepsactie van $SO3$ op S^2 gegeven door de functie $\phi : SO3 \to S_{S^2}$, met $\phi(A)(x) = Ax$, voor $x \in S^2$. We bewijzen nu het volgende

Lemma 11. *De functie ϕ definieert een groepsactie van $SO3$ op S^2.*

Bewijs. Laat $A \in SO3$. We tonen eerst aan dat $\phi(A)$ goed gedefinieerd is. Er geldt dat

$$\|Ax\| = \sqrt{\langle Ax, Ax\rangle} = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \|x\|$$

voor alle $x \in X$.
Merk op dat voor alle $x \in X$ geldt dat $\phi(A) \circ (A^{-1})(x) = AA^{-1}x = x$ en $\phi(A^{-1})\phi(A)(x) = A^{-1}Ax = x.$, wat betekent dat $\phi(A)$ bijectief is. Laat $A, B \in SO3$, dan geldt er dat

$$\phi(A)(\phi(B)(x)) = ABx = \phi(AB)(x)$$

voor alle $x \in SO3$. Dit betekent dat

$$\phi(A) \circ \phi(B) = \phi(AB).$$

□

Voor we kunnen aantonen dat $SO3$ een vrije ondergroep heeft, hebben we eerst de volgende definitie nodig.

Definitie 16. *Laat X een verzamelingen en $w = x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k} \in W_X$. We definiëren de grootte van w als $n_1 + \dots + n_k$, waar k de lengte van het woord is.*

Lemma 12. *[3, Th. 2.1, blz. 15] Laat $\mu, \sigma \in SO3$, met*

$$\mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Er geldt dat μ, σ een vrije groep voortbrengen.

Bewijs. Merk op dat

$$\mu^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ -\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Uit stelling 4 volgt dat het voldoende is om te bewijzen dat voor iedere $w \in W_{\{\mu,\sigma\}}$ geldt dat $w \neq e_{SO3}$. Merk op dat er geldt dat $w = e_{SO3}$ dan en slechts dan als $\mu^{-1}w\mu = e_{SO3}$. Dit betekent dat het voldoende is om voor $w \in W_{\{\mu,\sigma\}}$ met $w = x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k}$, met $k \in \mathbb{N}$, $x_k = \mu$ en $n_k \in \mathbb{N}$ aan te tonen dat $w \neq e_{SO3}$. Het is voor deze w voldoende om aan te tonen dat $w(1,0,0)^T = \frac{1}{3^m}(x, y\sqrt{2}, z)^T$, met $x, y, z \in \mathbb{Z}$ en y niet deelbaar door drie. Er geldt dan namelijk dat $w \neq id$.

We gaan eerst met inductie over de grootte van de woorden in $w \in W_{\{\mu,\sigma\}}$, met $w = x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k}$, met $k \in \mathbb{N}$, $x_k = \mu$ en $n_k \in \mathbb{N}$, aantonen dat x, y, z gehele getallen zijn en tonen daarna aan dat y niet deelbaar is door 3.
Laat eerst $k = 1$. Er geldt dan dat $w = \mu$. Er geldt dat

$$\mu(1,0,0)^T = \frac{1}{3}(1, \sqrt{2}(2), 0)^T. \tag{16}$$

Wat betekent dat $w(1,0,0)^T$ de vereiste vorm heeft.

Neem nu aan dat voor alle woorden w met grootte k, die op μ eindigen, geldt dat $w(1,0,0)^T = \frac{1}{3^m}(x, y\sqrt{2}, z)^T$, met $x, y, z \in \mathbb{Z}$. Als $\omega \in W_X$ en de grootte van ω $k+1$ is, dan bestaat er een $\omega_0 \in W_X$, met grootte k, zodat $\omega = \mu^{\pm 1}\omega_0$ of $\omega = \sigma^{\pm 1}\omega_0$. We tonen de stelling aan voor $\omega = \mu\omega_0$ en $\omega = \sigma\omega_0$, de andere gevallen kunnen op een vergelijkbare manier gecontroleerd worden. Merk op dat er $x, y, z \in \mathbb{Z}$ bestaan, zodat $\omega_0(1,0,0)^T = \frac{1}{3^m}(x, y\sqrt{2}, z)^T$, met $x, y, z \in \mathbb{Z}$ en $m \in \mathbb{N}$. Hieruit volgt dat

$$\omega(1,0,0)^T = \mu(x, \sqrt{2}y, z)^T = \frac{1}{3^{m+1}}(x - 4y, \sqrt{2}(2x + y), 3z)^T,$$

of

$$\omega(1,0,0) = \sigma(x, \sqrt{2}, z)^T = \frac{1}{3^{m+1}}(3x, \sqrt{2}(y - 2z), 4y + z)^T.$$

In beide gevallen heeft $w(1,0,0)$ de gewenste vorm.

We gaan nu aantonen dat voor $w(1,0,0)^T = \frac{1}{3^m}(x, \sqrt{2}y, z)^T$ met $m \in \mathbb{N}_0$ en $x, y, z \in \mathbb{Z}$ geldt dat y niet deelbaar is door 3. Dit doen we opnieuw met inductie over de grootte van de woorden in $W_{\{\mu,\sigma\}}$, waar we nog steeds alleen kijken naar $w \in W_X$, met $w = x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k}$, met $k \in \mathbb{N}$, $x_k = \mu$ en $n_k \in \mathbb{N}$. Als $k = 1$ de lengte van een woord w is, dan geldt er dat $w = \mu$. Uit vergelijking 16 volgt dat $w(1,0,0)$ in dit geval de vereiste vorm heeft. Als $k = 2$, dan geldt er dat $w = \sigma^{\pm 1}\mu$ of $w = \mu^2$. We controleren of voor $w = \sigma\mu$ en $w = \mu^2$ er geldt dat $w(1,0,0)$ de vereiste vorm heeft, het andere geval kan op dezelfde manier gecontroleerd worden. Er geldt dat

$$\sigma\mu(1,0,0)^T = \mu(\frac{1}{3}(1, \sqrt{2}(2), 0)^T) = \frac{1}{9}(3, \sqrt{2}(2), 8)^T.$$

en

$$\mu^2(1,0,0)^T = \sigma(\frac{1}{3}(1, \sqrt{2}(2), 0)^T) = \frac{1}{9}(-7, \sqrt{2}(4), 0)^T.$$

Doordat 2 en 4 niet deelbaar zijn door drie heeft $w(1,0,0)$ de vereiste vorm.

Neem nu aan er een $k \geq 2$ zodat voor alle $0 < n \leq k$ en woorden met $w \in W_{\{\mu,\sigma\}}$ met grootte n die, op μ eindigen, geldt dat $w(1,0,0) = \frac{1}{3^m}(x, \sqrt{2}y, z)^T$, met $m \in \mathbb{N}$ en $x, y, z \in \mathbb{Z}$. Laat $w \in W_{\{\mu,\sigma\}}$ een woord van grootte $k+1$. Er geldt dan dat $w = av$, waar a een woord met groote 2 is en v een woord met grootte $k - 1$ is. Uit de inductie hypothese volgt dat $v(1,0,0)^T = \frac{1}{3^m}(x, \sqrt{2}(y), z)^T$, met $m \in \mathbb{N}$, $x, y, z \in \mathbb{Z}$ en y niet deelbaar door 3. Er geldt dat $a = \mu^{\pm 2}$, $a = \mu^{\pm_1 1}\sigma^{\pm_2 1}$, $a = \sigma^{\pm_1 1}\mu^{\pm_2 1}$ of $a = \sigma^{\pm 2}$.
We behandelen eerst het geval $a = \mu^{\pm}\mu^{\pm}$. Merk op dat

$$\mu^{\pm 1}v(1,0,0)^T = \mu^{\pm 1}(\frac{1}{3^m}((x, \sqrt{2}y, z)^T) = (\frac{1}{3^{m+1}}(x, \mp 4y, \sqrt{2}(\pm 2x + y), 3z)^T := \frac{1}{3^{m+1}}(a, \sqrt{2}b, c)^T. \tag{17}$$

Er geldt dat $\mu^{\pm 1}w$ een woord is met grootte k is, wat betekent dat $x \pm 4y$ niet deelbaar is door 3. Uit 17 volgt dat

$$w(1,0,0)^T = \mu^{\pm 1}\mu^{\pm 1}v(1,0,0)^T = \mu^{\pm 1}(\frac{1}{3^{m+1}}(a, \sqrt{2}b, c)^T) = \frac{1}{3^{m+2}}(a \mp 4b, \sqrt{2}(\pm 2a + b), 3c)^T.$$

Er geldt dat

$$\pm 2a + b = 2(\pm(x \mp 4y) + b) = \pm 2x - 8y + b = -9y + 2b.$$

Merk op dat $-9y$ delbaar is door 3, maar b niet en dientengevolge $2b$ niet, wat betekent dat $-9y+2b$ niet deelbaar is door 3. Met een vergelijkbare redenering kan het geval $a=\sigma^{\pm 2}$ worden bewezen.
We behandelen nu het geval $a=\sigma^{\pm'}\mu^{\pm}$. Uit vergelijking 17 volgt dat

$$w(1,0,0)=\sigma^{\pm'}\mu^{\pm}v(1,0,0)^T=\sigma^{\pm'}(\frac{1}{3^{m+1}}(a,\sqrt{2}(b),c)^T)=(3a,\sqrt{2}(b\mp' 2c),\pm' 4b+c)^T.$$

Dit betekent dat $b\mp 2c=b\mp 6z$. We hadden reeds opgemerkt dat uit de inductie hypothese volgt dat b niet deelbaar is door 3. Doordat $6z$ wel deelbaar is door 3 volgt hieruit dat $b\mp 6z$ niet deelbaar is door 3. Met een vergelijkbare redenering kan het geval $a=\mu^{\pm'}\sigma^{\pm}$ worden bewezen.

□

We kunnen nu stelling 18 bewijzen.

Stelling 19. *[3, Th.2.3, blz.18] Er bestaat een aftelbare verzameling $M\subset S^2$ zodat $S^2\backslash M$ $SO3$-paradoxaal is.*

Bewijs. Laat μ en σ de rotaties uit lemma 12 en beschouw $W_{\{\mu,\sigma\}}$. Uit lemma 7 volgt dat $W_{\{\mu,\sigma\}}$ paradoxaal is. Stel dat er een aftelbare verzameling $M\subset S^2$ bestaat, zodat voor alle $w\in W_{\{\mu,\sigma\}}\subset SO3$ en $x\in S^2\backslash M$ geldt dat $w(x)\neq x$ en $w(x)\in S^2\backslash M$. Uit stelling 10 volgt dan dat $S^2\backslash M$ $W_{\{\mu,\sigma\}}$-paradoxaal is, wat betekent dat $S^2\backslash M$ $SO3$-paradoxaal is.
Hieruit volgt dat we, om de stelling te bewijzen, moeten laten zien dat er inderdaad een aftelbare verzameling $M\subset SO3$ met de gevraagde eigenschappen bestaat.
Laat $w\in W_{\{\mu,\sigma\}}-\{e\}$. Dan geldt er dat $w\in SO3$. Uit stelling 5 volgt dat w een rotatie is rond een lijn l_w door de oorsprong. De vaste punten van w liggen op de lijn l_w. Een lijn door de oorsprong heeft 2 snijpunten met S^2. Dit betekent dat w precies twee punten vaste punten $V_w,-V_w\in S^2$ heeft. Beschouw de verzameling

$$M:=\{\pm V_w\mid w\in W_{\{\mu,\sigma\}}\}.$$

Doordat $W_{\{\mu,\sigma\}}$ een aftelbare verzameling is, geldt er dat M een aftelbare verzameling is. We tonen nu aan dat M de gevraagde eigenschappen heeft.
Laat $x\in S^2\backslash M$. We tonen eerst aan dat $w(x)\neq x$, voor alle $w\in W_{\{\mu,\sigma\}}$.
Stel dat er een $w\in W_{\{\mu,\sigma\}}$ is zodat $w(x)=x$. Dan volgt hieruit dat $x=\pm V_w$ en $x\in M$, wat tot een tegenspraak leidt.
We tonen nu aan dat $w(x)\in S^2\backslash M$ voor alle $w\in W_{\{\mu,\sigma\}}$.
Stel dat er een $w\in W_{\{\mu,\sigma\}}$ bestaat, zodat $w(x)\notin S^2\backslash M$. Er geldt dan dat $w(x)\in M$, wat betekent dat er een $\phi\in W_{\{\mu,\sigma\}}-\{e\}$ bestaat, zodat $\phi(w(x))=w(x)$. Hieruit volgt dat $w^{-1}\phi w(x)=x$. Doordat $\phi\neq e$, geldt er dat $w^{-1}\phi w\neq e$. Dit betekent dat $x=V_{w^{-1}\phi w}$, waaruit volgt dat $x\in M$. Dit leidt tot een tegenspraak, want $x\in S^2\backslash M$.

□

Deze stelling betekent dat er disjuncte verzamelingen $A_1,\ldots,A_n,B_1,\ldots,B_n\subset S^2\backslash M$ en $g_1\ldots g_n,h_1,\ldots h_m$ bestaan, zodat $S^2\backslash M=\cup_{i=1}^n g_i(A_i)=\cup_{i=1}^m h_i(B_i)$. Intuïtief verwachten we dat de verzamelingen $A_1,\ldots,A_n,B_1,\ldots,B_n$ een bepaald oppervlakte op de bol hebben. Dit oppervlakte zou niet moeten veranderen als je de verzameling roteert. Uit de Hausdorff paradox lijkt te volgen dat dit gebeurd, wat de reden is dat het een paradox genoemd wordt. In hoofdstuk 7 gaan we dieper in op de gevolge van deze stelling voor maattheorie.
Merk op dat de Hausdorff paradox sterk lijkt op de Banach-Tarski paradox. In dit geval is de paradox echter dat de oppervlakte van $S^2\backslash M$ verdubbeld lijkt te kunnen worden. In het hoofdstuk 6 laten we zien dat we stelling 18 ook kunnen bewijzen voor S^2 in plaats van $S^2\backslash M$ en bewijzen we de Banach-Tarski paradox.

We kunnen ons afvragen of we wat we in dit hoofdstuk bewezen hebben ook voor hogere dimensies kunnen bewijzen. Om te beschrijven wat we hiermee bedoelen hebben we eerst de volgende definitie nodig

Definitie 17. *Laat $n\in\mathbb{N}$. Er geldt dan dat*

$$SOn=\{A\in\mathbb{R}^{n\times n}\mid A \textit{ is orthogonaal en } \det(A)=1\}.$$

We kunnen de stellingen nu als volgt formuleren

Stelling 20. *Er bestaan $\rho_1, \rho_2 \in SOn$, zodat ρ_1 en ρ_2 een vrije groep voortbrengen.*

Stelling 21. *Laat $n \geq 2$. Er bestaat een aftelbare verzameling $M \subset S^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ zodat $S^n \backslash M$ $SOn+1$-paradoxaal is.*

Stelling 20 volgt gelijk uit het volgende lemma.

Lemma 13. *Laat $n \geq 3$, dan bestaat er een isomorfisme van $SO3$ naar een deelverzameling van SOn*

Bewijs. Laat

$$W_n := \{ \begin{pmatrix} A & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in SOn \mid A \in SO3\}.$$

De definitie van W geeft gelijk een functie $L_n : SO3 \to W_n$, waarvan gecontroleerd kan worden dat het inderdaad een isomorfisme is. $\square$

Uit dit lemma volgt direct dat SOn voor $n \geq 2$ een vrije ondergroep voortgebracht door 2 elementen heeft, die wordt gegeven door $L_n(W_{\{\mu,\sigma\}})$. De voortbrengers van deze vrije ondergroep zijn $L_n(\mu)$ en $L_n(\sigma)$. We kunnen niet op dezelfde manier als bij de Hausdorff paradox deze vrije ondergroep gebruiken om stelling 21 te bewijzen. In het volgende hoofdstuk bewijzen we het volgende lemma (lemma 17).

Lemma 14. *Er geldt dat S^2 $SO3$-paradoxaal is.*

We gaan dit lemma gebruiken om stelling 21 te bewijzen. We moeten eerst echter nog een ander lemma bewijzen.

Lemma 15. *Laat $M := \{(1, 0, \ldots, 0)^T, (-1, 0, \ldots, 0)^T\}$. Dan bestaat er een $g \in SO3$, zodat $g^n(M) \cap M = \emptyset$ voor $n \in \mathbb{N}$*

Bewijs. Laat $A_\theta \in \mathbb{R}^{n \times n}$, met

$$A_\theta := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & & & \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Er geldt dan dat $A_\theta \in SOn$. Merk op dat

$$A_\theta(1, 0, 0, 0)^T = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0, \ldots, 0)^T \text{ en } A_\theta(-1, 0, \ldots, 0)^T = -(\cos(\theta), \sin(\theta), 0, \ldots, 0)^T.$$

Er geldt dat $|\cos(\theta)| = 1$ en $|\sin(\theta)| = 0$ dan en slechts dan als $\theta = \pi k$, met $k \in \mathbb{Z}$. Hieruit volgt dat $A(\theta)(M) \cap M \neq \emptyset$, dan en slechts dan als $\theta = \pi k$, met $k \in \mathbb{Z}$. Laat

$$V := \{\frac{k}{m}\pi \mid k \in \mathbb{N}_0 \text{ en } m \in \mathbb{N}\}.$$

Merk op dat V een aftelbare verzameling is. Dit betekent dat $[0, 2\pi)\backslash V \neq \emptyset$. Laat $\theta_0 \in [0, 2\pi)\backslash V$. We gaan aantonen dat voor deze θ_0, A_{θ_0} de gevraagde eigenschap heeft.
Er geldt dat $A_{\theta_0}^k = A_{k\theta_0}$ voor $k \in \mathbb{N}$. Stel dat $A_{m\theta_0}(M) \cap M \neq \emptyset$ voor een $m \in \mathbb{N}$. Er geldt dan dat $m\theta_0 = \pi k$, voor een $k \in \mathbb{N}$. Hieruit volgt dat $\theta_0 = \frac{k}{m}\pi$. Dit betekent dat $\theta_0 \in V$, wat tot een tegenspraak leidt. Dus heeft $A_{\theta_0} \in SOn$ de gevraagde eigenschap. $\square$

We kunnen nu stelling 21 bewijzen, we bewijzen zelfs dat we S^n $SOn+1$-paradoxaal is.

Stelling 22. *[3, Th. 5.1, blz. 53] Voor $n \geq 3$ geldt er dat S^n $SOn+1$-paradoxaal is.*

Bewijs. We bewijzen de stelling met inductie over n. Uit lemma 17 volgt dat de stelling waar is voor $n = 2$. Stel nu dat de stelling waar is voor een $n \geq 2$. Als S^n $SOn+1$-paradoxaal is, dan bestaan er disjuncte deelverzamelingen $A_1, \dots, A_k, B_1, \dots, B_m \subset S^n$ en $g_1, \dots, g_k, h_1, \dots, h_n \in SOn+1$, zodat

$$S^n = \cup_{i=1}^k g_i(A_i) = \cup_{i=1}^m h_i(B_i).$$

Definieer

$$g_i' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_i \end{pmatrix}$$

voor $1 \leq i \leq k$ en definieer h_i' voor $1 \leq i \leq m$ op dezelfde manier. Er geldt dat $g_1, \dots, g_k, h_1, \dots, h_m \in SOn+2$. Laat $M = \{(1, 0, \dots, 0)^T, (-1, 0, \dots, 0)^T\} \subset S^{n+1}$ en

$$A_i' = \{(x_1, \dots, x_{n+2})^T \in S^{n+1} \backslash M \mid \frac{(x_2 \dots, x_{n+2})^T}{\|(x_2 \dots, x_{n+2})^T\|} \in A_i\}$$

voor $1 \leq i \leq k$ en definieer B_i' op dezelfde manier. Merk op dat $A_1', \dots, A_n', B_1', \dots, B_n' \subset S^{n+1} \backslash M$ disjuncte verzamelingen zijn. We gaan nu aantonen dat $S^{n+1} \backslash M = \cup_{i=1}^k g_i'(A_i') = \cup_{i=1}^m h_i'(B_i')$, wat betekent dat $S^{n+1} \backslash M$ $SOn+2$-paradoxaal is.
We tonen eerst aan dat $g_i'(A_i) \subset S^{n+1} \backslash M$, voor $1 \leq i \leq k$. Laat $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in A_i$. Dan geldt er dat $|x_1| \neq 1$. Hieruit volgt dat voor $(y_1, \dots, y_{n+1})^T := g_i'((x_1, \dots, x_{n+1})^T)$ geldt dat $y_1 = x_1$, wat betekent dat $|y_1| \neq 1$ en $(y_1, \dots, y_{n+1})^T \in S^{n+1} \backslash M$.
We tonen nu aan dat $S^{n+1} \backslash M \subset \cup_{i=0}^n g_i'(A_i)$.
Laat $x \in S^{n+1} \backslash M$. Dan geldt er dat $x = (x_1, y)^T$, met $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ en $y \neq 0$. Hieruit volgt dat $\frac{y}{\|y\|} \in S^n$. Uit $S^n = \cup_{i=1}^k g_i(A_i)$, volgt dat er een $1 \leq i \leq k$ en een $z \in A_i$ bestaan, zodat $\frac{y}{\|y\|} = g_i(z)$. Definieer $v := (x_1, z\|y\|)^T$. Er geldt dat

$$\|v\| = \sqrt{x_1^2 + \|z\|y\|\|^2} = \sqrt{x_1^2 + \|y\|^2\|z\|^2} = \sqrt{x_1^2 + \|y\|^2} = \|(x_1, y)^T\| = 1.$$

Dit betekent dat $v \in S^{n+1}$. Merk op dat $\frac{z\|y\|}{\|z\|y\|\|} = \frac{z}{\|z\|} = z \in A_i$. Hieruit volgt dat $v \in A_i'$. Er geldt nu dat

$$g_i'(v) = g_i'((x_1, z\|y\|))^T = (x_1, \|y\|g_i(z))^T = (x_1, \frac{y}{\|y\|}\|y\|)^T = (x_1, y)^T = x.$$

Dit betekent dat $S^{n+1} \backslash M = \cup_{i=1}^k g_i(A_i)$. Met een zelfde redenering kan worden aangetoond dat $S^{n+1} \backslash M = \cup_{i=1}^m h_i(B_i)$.
We gaan nu aantonen dat er geldt dat $S^{n+1} \backslash M \sim_{SOn+2} S^{n+1}$.
Laat $g := A_{\theta_0} \in SOn+2$ de rotatie uit lemma 15. Definieer $H = \cup_{i=0}^\infty g^i(M)$. Er geldt dat

$$g(H) = g(\cup_{i=0}^\infty g^i(M)) = \cup_{i=1}^\infty g^i(M) = H \backslash M.$$

Dit betekent dat $H \sim_{SOn+2} H \backslash M$. Doordat er ook geldt dat $S^{n+1} \backslash H \sim_{SOn+2} S^{n+1} \backslash H$, mogen we lemma 10 gebruiken, wat betekent dat

$$S^{n+1} = (S^{n+1} \backslash H) \cup H \sim_{SOn+2} (S^{n+1} \backslash H) \cup g(H) = (S^{n+1} \backslash H) \cup (H \backslash M) = S^{n+1} \backslash M.$$

Er geldt nu dat $S^{n+1} \backslash M$ $SOn+2$-paradoxaal is en dat $S^{n+1} \backslash M \sim_{SOn+2} S^{n+1}$. Uit lemma 13 volgt nu dat S^{n+1} $SOn+2$-paradoxaal is. $\square$

6 De Banach-Tarski Paradox

6.1 De Banach-Tarski Paradox

In dit hoofdstuk geven we het bewijs van de Banach-Tarski paradox en bewijzen we een gevolg van de paradox. We gaan eerst aantonen dat S^2 $SO3$-paradoxaal is, vervolgens tonen we aan dat $B_1(0) - \{0\}$ $SO3$-paradoxaal is en bewijzen we de Banch-Tarski paradox. We volgen de lijn van het bewijs zoals het in hoofdstuk 3 uit [3] wordt gegeven.

Voor we de Banach-Tarski paradox kunnen bewijzen, moeten we eerst nog een paar hulpstellingen aantonen.

Lemma 16. *[3, Th. 3.9, blz. 27] Laat $M = \{\pm V_w \mid w \in W_{\{\mu,\sigma\}}\}$ de verzameling uit stelling 18 en l een lijn door de oorsprong zodat $l \cap M = \emptyset$. Noteer de functie die een rotatie rond l met een hoek θ voorstelt met L_θ. Dan bestaat er een $\theta \in [0, 2\pi)$, zodat $L_{n\theta}(M) \cap M = \emptyset$ voor $n \in \mathbb{N}$.*

Bewijs. Merk op dat er een orthogonale basis van $\mathbb{R}^3$ bestaat, zodat L_ϕ, voor $\phi \in \mathbb{R}$ wordt gegeven door

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt dat $L_\phi \in SO3$ voor $\phi \in \mathbb{R}$. Laat $m \in M$ en definieer

$$F := \{\theta \in \mathbb{R} \mid \text{er bestaat een } n \in \mathbb{N} \text{ zodat } L_{n\theta}(m) \in M \text{ voor een } m \in M\}.$$

We claimen dat deze verzameling aftelbaar is. Doordat de verzameling M aftelbaar is, geldt er dat de verzameling

$$H = \{(i, j) \in M \times M \mid \text{ Er bestaat een } \theta \in [0, 2\pi) \text{ zodat } L_\theta(i) = j\} \subset M \times M$$

aftelbaar is. Laat $m, d \in M$ en stel dat er een $\theta \in [0, 2\pi)$ bestaat, zodat $L_\theta(m) = d$. Dan is deze θ uniek, want als er een $\phi \in [0, 2\pi)$ bestaat, zodat $L_\phi(m) = d$, dan volgt hieruit dat $L_\phi^{-1} L_\theta(m) = L_\phi^{-1} L_\phi(m) = m$. Dit betekent dat $L_\phi = L_\theta$ en $\phi = \theta + 2\pi k$,voor een $k \in \mathbb{Z}$.

Doordat als $d, m \in M$ en er een $\theta \in [0, 2\pi)$ bestaat zodat $L_\theta(m) = d$, deze θ uniek is, bestaat er een unieke functie $f : H \to [0, 2\pi)$, zodat $L_{f(i,j)}(i) = j$. Laat $F' = f(H)$, dan geldt er dat F' aftelbaar is. Hieruit volgt dat

$$F'' = \{\theta + 2\pi k \mid \theta \in F', k \in \mathbb{Z}\}$$

aftelbaar is. Merk op dat

$$F = \{\frac{\theta}{n} \mid \theta \in F'', n \in \mathbb{Z}\},$$

dus is F aftelbaar. Merk op dat het interval $[0, 2\pi)$ overaftelbaar veel elementen heeft. Hieruit volgt dat $[0, 2\pi)\backslash F \neq \emptyset$. Kies nu een $\theta \in [0, 2\pi)\backslash F$. We gaan aantonen dat dit de gezochte θ is. Stel dat dat er een $n \in \mathbb{N}$ bestaat, zodat $L_{n\theta}(M) \cap M \neq \emptyset$. Dan bestaan er $m_1, m_2 \in M$, zodat $L_{n\theta} m_1 = m_2$. Dit betekent dat $n\theta \in F''$ en $\theta \in F$, wat tot een tegenspraak leidt.

□

Lemma 17. *[3, Th.3.9, blz. 27] Er geldt dat S^2 $SO3$-paradoxaal is.*

Bewijs. Laat M de verzameling uit stelling 18. Er geldt dan dat $S^2\backslash M$ $SO3$-paradoxaal is. Stel dat er zou gelden dat $S^2 \sim_{SO3} S^2\backslash M$. Uit stelling 13 volgt dan direct dat S^2 $SO3$-paradoxaal is. Dit betekent dat het voldoende is om te bewijzen dat $S^2 \sim_{SO3} S^2\backslash M$.
Laat l de lijn en $\theta \in [0, 2\pi)\backslash F$ de hoek uit lemma 16 . Merk op dat er geldt dat

$$L_{n\theta}(M) \cap L_{m\theta}(M) = L_{n\theta}(M \cap L_{(m-n)\theta}(M)) = L_n\theta(\emptyset) = \emptyset,$$

voor $m, n \in \mathbb{N}$, met $n < m$.
Definieer $\mathcal{F} = \cup_{n\in\mathbb{N}_0} L_{n\theta}(M)$. Er geldt nu dat $S^2 = S^2\backslash\mathcal{F} \cup \mathcal{F}$. Doordat

$$L_\theta(\mathcal{F}) = L_\theta(\cup_{n\in\mathbb{N}_0} L_{n\theta}(M)) \cup_{n\in\mathbb{N}_0} L_{(n+1)\theta}(M) = \cup_{n\in\mathbb{N}} L_{n\theta}(M) = \mathcal{F} - M,$$

volgt hieruit dat

$$S^2 - M = (S^2 - \mathcal{F}) \cup (\mathcal{F} - M) = id(S^2 - \mathcal{F}) \cup L_\theta(\mathcal{F}) \sim_{SO3} (S^2 - \mathcal{F}) \cup \mathcal{F} = S^2.$$

Dit betekent dat $S \sim_{SO3} S\backslash M$. □

Lemma 18. *[3, Cor. 3.10, blz. 27] Er geldt dat $B_1(0) - \{0\}$ SO3 paradoxaal is.*

Bewijs. In lemma 17 hebben we bewezen dat S^2-SO3 paradoxaal is. Dit betekent dat er disjuncte verzamelingen $A_1, \ldots, A_n, B_1, B_m \subset S^2$ en $g_1, \ldots, g_n h_1, \ldots h_m \in SO3$ bestaan, zodat

$$S^2 = \cup_{i=1}^n g_i(A_i) = \cup_{i-1}^m h_i(B_i).$$

Definieer $A_i' := \{\lambda a \mid \lambda \in (0,1], a \in A_i\}$ en $B_j := \{\lambda b \mid \lambda \in (0,1], b \in B_j\}$ voor $1 \le i \le n$ en $1 \le j \le m$, Merk op dat $A_1', \ldots, A_n', B_1', \ldots, B_m' \subset B_1(0)$ disjunct zijn. We tonen aan dat $\cup_{i=1}^n g_i(A_i) = B_1(0) - \{0\}$. Merk op dat $\cup_{i=1}^n g_i(A_i) \subset B_1(0) - \{0\}$. Laat $x \in B_1(0)$ en laat $\tilde{x} = \frac{x}{\|x\|}$. Dan geldt er dat $\tilde{x} \in S^2$, wat betekent dat er een $1 \le i \le n$ bestaat, zodat $\tilde{x} \in g_i(A_i)$. Merk op dat $\|x\| \in (0,1]$. Hieruit volgt dat $x = \|x\|\tilde{x} \in g_i(A_i')$, want $g_i \in SO3$ is lineair. Dit betekent dat $x \in \cup_{i=1}^n g_i(A_i')$ en $S^2 = \cup_{i=1}^n g_i(A_i')$. Met een zelfde argument kan worden aangetoond dat $S^2 = \cup_{i=1}^m h_i(B_i')$. □

We kunnen nu de Banach-Tarski paradox bewijzen

Stelling 23 (Banach-Tarski Paradox)**.** *[3, Cor.3.10, blz. 27] Er geldt dat $B_1(0)$ G_{iso}-paradoxaal is.*

Bewijs. Stel dat er geldt dat $B_1(0) \sim_{G_{iso}} B_1(0) - \{0\}$. Doordat $B_1(0) - \{0\}$ $SO3$-paradoxaal is, geldt er ook dat $B_1(0) - \{0\}$ G_{iso}-paradoxaal is en volgt uit stelling 13 dat $B_1(0)$ $SO3$-paradoxaal is. Dit betekent dat het voldoende is om aan te tonen dat $B_1(0) \sim_{G_{iso}} B_1(0) - \{0\}$.
Laat $p = (0, 0, \frac{1}{3})^T$ en l_p een lijn die door p gaat, maar niet door de oorsprong gaat. Voor $\theta \in \mathbb{R}$ noteren we de rotatie rond l_p met een hoek θ met L_θ. Merk op dat $L_\theta \in G_{iso}$ voor $\theta \in \mathbb{R}$. Er geldt dat $L_\theta(B_{\frac{1}{2}}((0, 0, \frac{1}{3})^T) \subset B_1(0)$, voor $\theta \in \mathbb{R}$, wat betekent dat $L_\theta(0) \in B_1(0)$. We gaan aantonen dat er een $\theta \in [0, 2\pi)$ bestaat, zodat $L_{n\theta}(0) \neq 0$ voor $n \in \mathbb{N}$.
Voor $\theta \ge 0$ geldt dat $L_\theta(0) = 0$ dan en slechts dan als $\theta = 2\pi k$, met $k \in \mathbb{N}_0$. Laat $N = \{\frac{k}{m} 2\pi \mid k \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{N}\}$. Er geldt dat N een aftelbare verzameling is. Hieruit volgt dat $[0, 2\pi)\backslash N \neq \emptyset$. Kies een $\theta_0 \in [0, 2\pi)\backslash N$. We gaan aantonen dat deze θ_0 de gevraagde eigenschappen heeft. Stel dat er een $n \in \mathbb{N}$ bestaat zodat $L_{n\theta_0}(0) = 0$. Dan geldt er dat $n\theta_0 = 2\pi k$ voor een $k \in \mathbb{N}$. Dit betekent dat $\theta_0 = \frac{k}{n} 2\pi \in N$, wat tot een tegenspraak leidt. Definieer nu de verzameling $D = \{L_{n\theta_0}(0) \mid n \in \mathbb{N}_0\}$. Er geldt dat $D \subset B_1(0)$ en

$$L_{\theta_0}(D) = \{L_{(n+1)\theta_0}(0) \mid n \in \mathbb{N}_0\} = \{\{L_{n\theta_0}(0) \mid n \in \mathbb{N}\} = D - \{0\}.$$

Dit betekent dat $D \sim_{G_{iso}} D - \{0\}$. Doordat $B_1(0)\backslash D \sim_{G_{iso}} B_1(0)\backslash D$, volgt uit lemma 10 dat

$$B_1(0) = (B_1(0)\backslash D) \cup D \sim_{G_{iso}} (B_1(0)\backslash D) \cup (D - \{0\}) = B_1(0) - \{0\}.$$

□

We hebben nu de stelling bewezen waarvan we aan het begin van de scriptie belooft hadden dat we hem zouden bewijzen. Een vraag die de stelling echter gelijk oproept, is of de stelling alleen waar is voor een bol, of dat er bijvoorbeeld ook geldt dat een massieve kubus G_{iso}-paradoxaal is. De volgende stelling blijkt te gelden

Stelling 24. *Laat $A, B \subset \mathbb{R}^3$ begrensde verzamelingen met een niet leeg inwendige. Er geldt dan dat $A \sim_{G_{iso}} B$.*

Een direct gevolg van deze stelling is het volgende:

Gevolg 3. *Laat $A \subset \mathbb{R}^3$ een begrensde verzameling met een niet leeg inwendige, er geldt dan dat A G_{iso}-paradoxaal is.*

Hoewel stelling 24 er onschuldig uitziet, volgen er dingen uit die intuïtief niet lijken te kunnen. De stelling zegt bijvoorbeeld dat we een bol ter grootte van een zandkorrel in eindig veel stukken kunnen snijden, die we op zo'n manier kunnen samenvoegen dat ze een bol ter grootte van de aarde vormen. Dit is zeer tegen intuïtief, want we zouden verwachten dat als we een zandkorrel in stukken snijden en die stukken anders samenvoegen, het volume niet verandert. In hoofdstuk 7 gaan we hier dieper op in en gaan we met behulp van maattheorie laten zien wat de gevolgen van de Banach-Tarski paradox zijn.

Voor we het bewijs van stelling 24 kunnen geven, moeten we eerst het volgende lemma bewijzen

Lemma 19. *Laat X een verzameling, G een groep die werkt op X en $A \subset X$. Als A G-paradoxaal is, dan bestaat er voor alle $n \in \mathbb{N}$ een partitie $\{A_1, \dots, A_n\}$, zodat $A_i \sim_G A$ voor $1 \leq i \leq n$.*

Bewijs. We bewijzen de stelling met inductie over n. Voor $n = 1$ is de stelling duidelijk waar, want $\{A\}$ kan als partitie gekozen worden.
Neem nu aan dat de stelling waar is voor een $n \in \mathbb{N}$. Er geldt dan dat er een partitie $\{A_1, \dots, A_n\}$ van A bestaat, zodat $A_i \sim_G A$. Doordat A G-paradoxaal is en er geld dat $A \sim_G A_n$, volgt uit stelling 13 dat A_n G-paradoxaal is. Uit stelling 16 volgt nu dat er verzamelingen $B, C \subset A_n$ bestaan, zodat $B \cup C = A_n$, $B \cap C = \emptyset$ en $C \sim_G A_n \sim_G B$. Dit betekent dat

$$B \sim_G A_n \sim_G A \qquad \text{en} \qquad C \sim_G A_n \sim_G A.$$

Doordat $\sim_G$ een equivalentie relatie is volgt hieruit dat $B \sim_G A$ en $C \sim_G A$. Hieruit volgt dat

$$\{A_1, \dots, A_{n-1}, B, C\}$$

een partitie van A is bestaande uit $n+1$ verzamelingen zodat $V \sim_G A$, voor $V \in \{A_1, \dots, A_n, B, C\}$. $\square$

We kunnen nu het bewijs van stelling 24 geven.

Stelling 25. *[3, Th. 3.11, blz. 29] Laat $A, B \subset \mathbb{R}^3$ begrensde verzamelingen met een niet leeg inwendige. Er geldt dan dat $A \sim_{G_{iso}} B$.*

Bewijs. Doordat $\leq$ een ordening is, is het voldoende om aan te tonen dat $A \leq B$ en $B \leq A$. We tonen eerst aan dat dat $B \leq A$. Doordat A een niet leeg inwendige heeft, bestaat er een $a \in A$ en een $\delta > 0$, zodat $B_\delta(a) \subset A$. Doordat B begrensd is, bestaat er een $R > 0$, zodat $B \subset B_R(0)$. Merk op dat voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $B_\delta(x) \sim_{G_{iso}} B_\delta(a)$. Beschouw de verzameling $\{B_\delta(x) \mid x \in B_R(0)\}$. Merk op dat deze verzameling een overdekking is van $B_R(0)$. Doordat $B_R(0)$ compact is, heeft deze overdekking een eindige deeloverdekking, die we noteren met $\{U_1, \dots, U_n\}$. Merk op dat dit tevens een deeloverdekking is van B. Definieer de functie $g : B \to \mathbb{N}$, met $g(x) = \min\{i \in \{1, \dots, n\} \mid x \in U_i\}$ en laat $V_i = g^{-1}(i)$. Merk op dat $V_i \subset U_i$ voor $1 \leq i \leq n$. Er geldt dat $\{V_1, \dots, V_n\}$ een partitie van B is. Uit lemma 19 volgt dat er een partitie $\{A_1, \dots, A_n\}$ van $B_\delta(a)$ bestaat, zodat $A_i \sim_{G_{iso}} B_\delta(a)$. Hieruit volgt dat $A_i \sim_{G_{iso}} U_i$, voor $1 \leq i \leq n$. Uit lemma 9 volgt dat er voor $1 \leq i \leq n$ een bijectieve functie $f_i : U_i \to A_i$ bestaat, zodat $f_i(V) \sim_{G_{iso}} V$, voor $V \subset U_i$. Definieer nu $S_i := f_i(V_i)$ voor $1 \leq i \leq n$ en $S := \cup_{i=1}^n S_n$. Er geldt dan dat $\{S_1, \dots, S_n\}$ een partitie van S is, $\{V_1, \dots, V_n\}$ een partitie van B is en $V_i \sim_{G_{iso}} S_i$, voor $1 \leq i \leq n$. Dit betekent dat $S \sim_{G_{iso}} B$. Uit $S \subset A$ volgt dat $B \leq A$.
Met een vergelijkbaar argument kan worden aangetoond dat $A \leq B$.

$\square$

6.2 De Banach-Tarski Paradox in hogere dimensies

In dit deel van het hoofdstuk laten we zien dat de stellingen uit hoofdstuk 6.1 voor een deel ook waar zijn in $\mathbb{R}^n$ voor $n \geq 3$.
We beginnen met een definitie

Definitie 18. *Laat $n \in \mathbb{N}$, met $n \geq 3$, We definiëren de groep*

$$G^n_{iso} := \{f \in (\mathbb{R}^n)^{(\mathbb{R}^n)} \mid f \text{ is een isometrie.}\}.$$

De vermenigvuldiging op G^n_{iso} wordt gegeven door samenstelling van functies.

We hebben eerder al aangetoond dat voor $n \geq 3$ geldt dat S^n $SOn+1$-paradoxaal is. Met vrijwel hetzelfde bewijs als het bewijs van lemma 18 kan het volgende lemma worden bewezen

Lemma 20. *Er geldt dat $B_1^{\mathbb{R}^n}(0) \subset \mathbb{R}^n$ $SOn+1$-paradoxaal is.*

We kunnen hiermee de volgende stelling bewijzen

Stelling 26. *Er geldt dat $B_1^{\mathbb{R}^n}(0)$ G^n_{iso}-paradoxaal is voor $n \geq 3$.*

Bewijs. Laat $n \in \mathbb{N}$, met $n \geq 3$. Het is voldoende om aan te tonen dat $B_1^{\mathbb{R}^n}(0) \sim_{G^n_{iso}} B_1(0) - \{0\}$. Uit stelling 13 volgt dan, doordat $B_1(0) - \{0\}$ G^n_{iso}-paradoxaal is, dat $B_1(0)$ G^n_{iso}-paradoxaal is.
Laat $v = (\frac{1}{3}, 0, \dots, 0)^T$. Laat $g \in SOn+1$ de g uit lemma 15. Definieer $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, zodat $T(x) = x - v$. Merk op dat $T \in G^n_{iso}$. We gaan nu aantonen dat voor de functie $T^{-1}gT : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, geldt dat $(T^{-1}gT)^n(0) \neq 0$, voor $n \in \mathbb{N}$. Er geldt dat

$$(T^{-1}gT)^n(0) = T^{-1}g^nT(0).$$

Merk op dat $T^{-1}(g^nT(x)) = 0$ dan en slechts dan als $gT(x) = -v$. Merk op dat $T(0) = -v$. Dit betekent dat $T^{-1}g^nT(0) = 0$ dan en slechts dan als $g^n(-v) = -v$. Laat $u = (1, 0, \dots, 0)^T$. Als $g^n(-v) = -v$, dan geldt er, doordat g lineair is, dat $g^n(-u) = -u$. We hebben in lemma 15 aangetoond dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt dat $g^n(-u) \neq -u$. Dit betekent dat $T^{-1}g^nT(0) \neq 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.
Merk op dat

$$T^{-1}g^nT(B_{\frac{1}{3}}^{\mathbb{R}^n}(v)) = T^{-1}g^n((B_{\frac{1}{3}}^{\mathbb{R}^n}(0)) = T^{-1}((B_{\frac{1}{3}}^{\mathbb{R}^n}(0)) = B_{\frac{1}{3}}^{\mathbb{R}^n}(v). \tag{18}$$

Definieer $H = \{T^{-1}g^nT(0) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Uit vergelijking 18 volgt dat $H \subset B_1^{\mathbb{R}^n}(0)$. Er geldt dat

$$T^{-1}gT(H) = \{T^{-1}g^nT(0) \mid n \in \mathbb{N} - \{0\}\} = H - \{0\}.$$

Doordat $T^{-1}gT \in G^n_{iso}$ volgt hieruit dat $H - \{0\} \sim_{G^n_{iso}} H$. Er geldt ook dat $B_1^{\mathbb{R}^n}(0) \backslash H \sim_{G^n_{iso}} \backslash H$, wat betekent dat we lemma 10 mogen gebruiken en er geldt dat

$$B_1^{\mathbb{R}^n}(0) = (B_1^{\mathbb{R}^n}(0)\backslash H) \cup H \sim_{G^n_{iso}} (B_1^{\mathbb{R}^n}(0)\backslash H) \cup (H - \{0\}) = B_1^{\mathbb{R}^n}(0) - \{0\}.$$

□

We hebben nu de Banach-Tarski praradox ook bewezen voor hogere dimensies. De volgende stelling blijkt ook te gelden in hogere dimensies.

Stelling 27. *Laat $n \geq 3$ en $A, B \subset \mathbb{R}^n$ begrensde verzamelingen met een niet leeg inwendige. Er geldt dan dat $A \sim_{G^n_{iso}} B$.*

Bewijs. Het bewijs gaat op dezelfde manier als het bewijs van stelling 24. □

Dit betekent dat het volgende gevolg ook geldt:

Gevolg 4. *Zij $A \subset \mathbb{R}^n$ een begrensde verzameling met een niet leeg inwendige, dan geldt er dat A G^n_{iso}-paradoxaal is.*

7 Gevolgen van de paradox

In dit hoofdstuk gaan we kijken naar de gevolgen van de Banach-Tarski paradox. In het bijzonder kijken we naar de gevolgen van de paradox voor maattheorie.
We herhalen eerst de belangrijkste begrippen uit maattheorie. Definitie 19, 20 en 21 zijn afkomstig uit hoofdstuk 1.1 en 1.2 van [5].

Definitie 19. *Laat X een verzameling. We noemen een verzameling $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ een σ-algebra op X, als $\mathcal{A}$ aan de volgende eisen voldoet:*

1. *$X \in \mathcal{A}$*
2. *Als $A \in \mathcal{A}$, dan geldt er dat $X \backslash A \in \mathcal{A}$.*
3. *Als $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ een rij is zodat $(A_i) \in \mathcal{A}$, voor $i \in \mathbb{N}$, dan geldt er dat $\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$.*

Definitie 20. *Laat X een verzameling en $\mathcal{A}$ een σ-algebra op X. We noemen het paar $(X, \mathcal{A})$ dan een meetbare ruimte*

Definitie 21. *Laat $(X, \mathcal{A})$ een meetbare ruimte. We noemen een functie $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ een maat als:*

1. *Er geldt dat $\mu(\emptyset) = 0$.*
2. *Voor een rij $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ van disjuncte verzamelingen in $\mathcal{A}$ geldt dat $\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.*

We noemen μ een eindig additieve maat als μ voldoet aan eis 1 en er voor een eindige rij $A_1, \ldots A_n$ van disjuncte deelverzamelingen in $\mathcal{A}$ geldt dat $\mu(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$.
Als $(X, \mathcal{A})$ een meetbare ruimte is en $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ een maat, dan noemen we $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte.

Laat $(X, \mathcal{A})$ een meetbare ruimte en $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ een maat. Het idee achter de definities is dat μ een functie is die aan deelverzamelingen van X een volume toekent. De verzamelingen waaraan μ een volume kan toekennen zijn de verzamelingen in de σ-algebra $\mathcal{A}$. Een voorbeeld van een σ-algebra op X is $\mathcal{P}(X)$. In eerdere hoofdstukken hebben we het vaak gehad over functies waarvan we intuïtief zouden verwachten dat ze volume behouden. We hebben nu de taal om precies uit te drukken wat we hiermee bedoelen.

Definitie 22. *Laat $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte en laat G een groep die werkt op X. We noemen een maat G-invariant als voor $A \in \mathcal{A}$ en $g \in G$ geldt dat $g(A) \in \mathcal{A}$ en*

$$\mu(g(A)) = \mu(A).$$

We gaan nu kijken naar het verband tussen verzamelingen die G-paradoxaal zijn en G-invariante maten. We bewijzen eerst het volgende lemma

Lemma 21. *[3, 2.5, blz.18] Zij $(X, \mathcal{P}(X), \mu)$ een maatruimte en G en groep die werkt op X. Neem aan dat μ G-invariant is, $\mu(U) < \infty$ en dat $U \subset X$ G-paradoxaal is. Er geldt dan dat $\mu(U) = 0$.*

Bewijs. Uit stelling 16 volgt dat er $A, B \subset U$ bestaan, zodat $A \cap B = \emptyset$ en $A \sim_G U \sim_G B$. Hieruit volgt dat er $n \in \mathbb{N}$, een partities $\{A_1, \ldots, A_n\}$ van A, een partitie $\{U_1, \ldots, U_n\}$ van U en $g_1, \ldots, g_n \in G$ bestaan, zodat $g_i(A_i) = U_i$. Uit eigenschap 2 van een maat volgt nu dat

$$\mu(U) = \mu(\cup_{i=1}^{n} U_i) = \sum_{i=0}^{n} \mu(U_i).$$

Doordat μ G-invariant is, geldt er dat

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(U_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(g_i(A_i)) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i).$$

Uit eigenschap 2 van een maat volgt vervolgens dat

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \mu(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \mu(A).$$

Dit betekent dat $\mu(U) = \mu(A)$. Met een zelfde argument kan worden aangetoond dat $\mu(U) = \mu(B)$. Uit eigenschap 2 van een maat volgt nu dat

$$\mu(U) = \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) = 2\mu(U),$$

waaruit volgt dat $\mu(U) = 0$. □

Het bovenstaande bewijs is ook geldig als $(X, \mathcal{P}(X))$ een meetbare ruimte is en μ een eindig additieve maat is.
Met behulp van dit lemma kunnen we kijken naar wat de gevolgen van de Banach-Tarski paradox zijn.

Stelling 28. *Laat $n \geq 3$ en $(\mathbb{R}^n, \mathcal{P}(\mathbb{R}^n))$ een meetbare ruimte. Er bestaat geen eindig additieve, G^n_{iso}-invariante maat $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$, zodat $\mu([0,1]^n) = 1$.*

Bewijs. Neem aan dat er wel een eindig additieve, G^n_{iso}-invariante maat $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$, zodat $\mu([0,1]^n) = 1$. Merk op dat $[0,1]^n$ een begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ is met een niet leeg inwendige. Uit gevolg 4 volgt dat $[0,1]^n$, G^n_{iso}-paradoxaal is. Met lemma 21 zien we dat $\mu([0,1]^n) = 0$. Dit leidt tot een tegenspraak, dus bestaat er niet zo'n maat μ. □

Als $n = 3$, dan betekent deze stelling dat er geen manier bestaat om aan alle deelverzamelingen van $\mathbb{R}^3$ een volume toe te kennen, zodat het volume van een kubus met zijden van 1, 1 is. Als we naar het bewijs van de bovenstaande stelling kijken, dan valt op dat we eigenlijk alleen gebruikt hebben dat de verzamelingen waarin we $[0,1]^3$ verdelen in de σ-algebra liggen. Hieruit volgt dat als er een σ-algebra op $\mathbb{R}^3$ en een maat $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ bestaat die eindig additief en G_{iso} invariant is en voldoet aan de vergelijking $\mu([0,1]^3) = 1$, minimaal 1 van de verzamelingen waarin we $[0,1]^3$ verdelen niet in $\mathcal{A}$ moet liggen. Dit betekent dat we geen volume aan die verzameling toe kunnen kennen. Merk op dat we hiermee niet bedoelen dat de verzameling een volume van 0 heeft, maar echt bedoelen dat we geen volume aan de verzameling kunnen toekennen.
Dit is de rede dat we, met functies die intuïtief volume zouden moeten behouden, toch een verdubbeling van het volume kunnen bewerkstelligen. Een deel van de stukken waarin we de kubus verdelen heeft namelijk geen volume, wat betekent dat je ook niet kan zeggen dat het volume van die stukken behouden blijft als er een $g \in G_{iso}$ op werkt. Bij de Banach-Tarski paradox is met de stukken waarin we de bol verdelen hetzelfde aan de hand.

We hebben nu gekeken naar het bestaan van maten op $\mathbb{R}^n$. We kunnen ons afvragen of er op S^n, voor $n \geq 3$, misschien wel een eindig additieven $SOn+1$-invariante maat bestaat. Het volgende blijkt te gelden:

Stelling 29. *Laat $n \geq 3$ en $(S^n, \mathcal{P}(S^n))$ een meetbare ruimte. Dan bestaat er geen eindig additieve $SOn+1$ invariante maat $\mu : \mathcal{P}(S^n) \to [0, \infty]$, zodat $\mu(S^n) = c$, met $c > 0$.*

Bewijs. Neem aan dat er wel zo'n maat μ bestaat. We hebben in stelling 22 aangetoond dat er geldt dat S^n $SOn+1$-paradoxaal is. Uit lemma 21 volgt dat er moet gelden dat $\mu(S^n) = 0$. Dit leidt tot een tegenspraak, dus bestaat zo'n maat μ niet. □

We hebben in de stelling als extra eis gesteld dat $\mu(S^n) = C$ voor $C > 0$. Deze eis hebben we gesteld, omdat er intuïtief zou moeten gelden dat S^n een eindig oppervlakte heeft. Er kan tevens worden opgemerkt dat de maatruimte $(S^n, \mathcal{P}(S^n), \mu)$, met $\mu(X) = 0$ voor $X \in \mathcal{P}(S^n)$, welliswaar een maat op S^n definieert, maar niet een heel zinvolle maat is.

We hebben nu gekekenen naar de gevolgen van de Banch-Tarski paradox in maattheorie. We gaan nu nog kort kijken naar wat het betekent dat we in het bewijs van de Banach-Tarski paradox het keuzeaxioma hebben gebruikt.
We hebben laten zien dat we een massieve bol in eindig veel stukken kunnen snijden, die we vervolgens zo kunnen samenvoegen dat de stukken 2 massieve bollen vormen. In dit hoofdstuk hebben we laten zien dat dit mogelijk is, doordat een deel van de stukken waarin we de bol verdelen geen volume heeft. Het zou buitengewoon interessant zijn om te zien hoe een verzameling waaraan we geen volume kunnen toekennen eruit ziet. Toch hebben we in de scriptie geen afbeelding bijgevoegd. Dit komt doordat we bij het maken van de stukken waarin we de bol verdelen, het keuzeaxioma hebben gebruikt. We hebben het keuzeaxioma

gebruikt in het bewijs van stelling 10, waar we het gebruikte om een functie te definiëren die uit iedere equivalentieklasse van $\sim$ één element kiest. We weten van deze functie echter alleen dat hij bestaat en niet welke elementen er gekozen worden. Dit heeft er in het bewijs van de Banach-Tarski paradox toe geleidt dat we wel weten dat de stukken waarin we de bol verdelen bestaan, maar niet kunnen zeggen hoe ze eruit zien. Dit is een rede waarom je de Banach-Tarski paradox in de praktijk niet kan toepassen. Het bewijs vertelt namelijk alleen dat de stukken bestaan, maar zegt niet hoe ze eruit zien.

8 Conclusie

In deze scriptie hebben we de Banach-Tarski paradox bewezen. Om de Banach-Tarski paradox te bewijzen hebben we eerst onze kennis van groepen en SOn vergroot. Vervolgens hebben we de begrippen paradoxaal en equideelbaar geïntrodcueerd en hebben we laten zien hoe deze begrippen met elkaar samenhangen. Deze kennis hebben we gebruikt om de Hausdorff paradox te bewijzen, waarmee we uiteindelijk de Banach-Tarski paradox konden bewijzen. Vervolgens hebben we laten zien dat uit de Banach-Tarski paradox volgt dat er geen eindig additieve G_{iso}-invariante maat $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^3) \to [0, \infty]$ op $\mathbb{R}^3$ bestaat zodat $\mu([0, 1]^3) = 1$.

9 Bronnen

1. M.A. Armstrong, Groups and Symmetry, Springer, 1988, ISBN 0-387-96675-7
2. M. reid and B. Szendröi, Geometry and topology, Cambridge university press, 2005, ISBN 978-0-521-61325-5
3. S. Wagon, The Banach-Tarski Paradox, Camebridge university press, 1985, ISBN 978-0-521-45704-0
4. Set, Models and proofs, I. Moerdijk en J. Van Oosten, Springer, 2018, ISBN 978-3-319-92413-7
5. D. Cohn, Measure Theory, Birkhäuser, 2013, ISBN 978-1-4614-6955-1

Vanaf hoofdtuk 4 houden we de conventie aan dat als een bewijs van een stelling/lemma gebaseerd is op een bewijs uit een bron, we in de stelling/lemma met rechte haken naar de bron verwijzen.

10 Notatie

Hieronder staat een lijst waarin we van een deel van de notatie die we gebruiken de definitie geven.

1. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.
2. $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
3. $\mathcal{P}(X)$ is de machtsverzameling van X.
4. $\|.\|$ is de Euclidiche norm.
5. $d(x, y) = \|x - y\|$, tenzij anders vermeld.
6. $\cup A = \cup_{a \in A} A$.
7. $W_X =$ de groep van alle gereduceerde woorden in X. Zie vergelijking 3.
8. $SOn = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A \text{ is orthogonaal en } \det(A) = 1\}$.
9. $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| \leq 1\}$.
10. $A \sim_G B$ betekent dat A en B G-equideelbaar zijn. Zie definitie 11.
11. $A \leq B$ betekent dat er een $C \subset B$ bestaat zodat $A \sim_G C$.
12. $B_\delta^X(x) = \{y \in X \mid d(y, x) \leq \delta\}$.
13. $G_{iso}^n = \{f \in (\mathbb{R}^n)^{(\mathbb{R}^n)} \mid f \text{ is een isometrie.}\}$.
14. $G_{iso} = G_{iso}^3$.
15. $A^\circ = \cup\{U \subset A \mid U \text{ is open }\}$.
16. $S_X = \{f \in X^X \mid f \text{ is een bijectie}\}$.