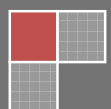


2010

Probleemoplossen in 3 en 4 VWO

Hoe kun je wiskunde leerlingen gevoelig
maken voor heuristiek?

Anne-Marie van Soelen
Corderius college, Meerwegen scholengroep
Amersfoort
28-6-2010



Inhoud

Hoofdstuk 1 Voortraject	4
Zoektocht naar een onderwerp	4
Beginsituatie	5
Gewenste situatie	5
De onderzoeksvraag	6
Hoofdstuk 2 Literatuur	8
Heuristisch wiskunde onderwijs	8
Modelleren en Mathematiseren	8
Probleemoplossen en Polya	10
Hoofdstuk 3 Onderzoeksopzet	11
Kader	11
Lessenopzet	11
Hoofdstuk 4 Resultaten	13
Resultaten verkregen door meting “weerstand tegen heuristiek”	13
Resultaten verkregen door de diagnostische toets	15
Resultaten verkregen door de enquête	16
Samengevat	17
Hoofdstuk 5 Conclusies	19
Cconclusies en reflecties	19
1. Vertrouwen en Motivatie	20
2. Rust en ruimte	22
3. Flexibiliteit: Het antwoord doet er niet toe	23
Kernconclusie	24
Bijlage 1 Lesplanning klas A3B	26
Opgaven 3 VWO	27
Bijlage 2 Lesplanning 4 VWO	31
Opgaven 4 VWO	33
Bijlage 3 Toetsing Heuristiek 3 en 4VWO	36
Twee oefenopgaven in het ‘probleemoplossen’ (3VWO)	36
Reflectie toets Probleemoplossen 3VWO	37
Twee oefenopgaven in het ‘probleemoplossen’ (4VWO)	38

Reflectie toets Probleemoplossen 4VWO	39
Bijlage 4 Meting 3VWO en 4VWO 'Weerstand tegen heuristiek'	40
Resultaten Meting 'Weerstand tegen heuristiek'	42
Bijlage 5 Vragenlijst "Problemen oplossen bij wiskunde"	46
Bijlage 6 Resultaten enquête Heuristiek	48
Vertrouwen	48
Motivatie	48
Waarderen van geleerde onderzoekstechnieken	49
Waarderen van de heuristiek	50
Direct oplossing zien is belangrijk	50

Hoofdstuk 1 Voortraject

Zoektocht naar een onderwerp

Na een paar maanden voor de klas te hebben gestaan als zij-instromer, ontstonden er bij mij een aantal interesses en verwonderingen.

Ik zag in een 4 VWO wiskunde B klas, dat daar leerlingen zaten met een groot gebrek aan wiskundig inzicht. Dit verbeterde niet, nadat ik hen een oplossingstrategie zoals Analyse – Aanpak – Berekenen – Controle (AABC-denkstrategie) had aangereikt. Nog steeds waren er momenten dat deze leerlingen met grote vraagtekens op hun voorhoofd naar een opgave staarden, zonder te weten waar ze moesten beginnen. Zelf heb ik tijdens mijn wiskunde studie mijn analytische vermogen sterk ontwikkeld, waardoor ik bij het oplossen van een wiskundig probleem, op onderzoek ga naar de beste aanpak van het probleem. Ik merkte dat er in de boeken weinig aandacht besteed wordt aan de vaardigheid probleem oplossen. Terwijl dit talent voor mij het beste heeft gebracht op heel veel verschillende plekken in het bedrijfsleven. *Wat zou het aanleren van probleem oplossen de gemiddelde leerling brengen?*

Verder bracht ik tijdens de 4 VWO lessen veel tijd voor het bord voor, veel uitleg gevend over hoe opgaven opgelost konden worden. Maar daar werden de resultaten niet beter van, integendeel. Maar als ik minder ging uitleggen en ze aanmoedigde om zelf te proberen een oplossingsaanpak te zoeken, dan voelde en hoorde ik weerstand en werd toch weer snel de docent of het antwoordenboekje geraadpleegd. *Waarom hadden deze leerlingen zoveel weerstand tegen het zelfstandig kritisch onderzoeken van een(iets lastigere) opgave?*

Daarentegen, in een 3 VWO klas werd een oplossingsstrategie, zoals de AABC strategie, veel beter opgepakt en dit leidde direct tot betere resultaten. Deze leerlingen kon ik ook beter aan het werk zetten en zij pikten de stimulans om te overleggen en op onderzoek te gaan op. *Wat is het verschil tussen leerjaren waardoor een didactiek, toegepast in verschillende klassen, een verschillend rendement heeft qua resultaten?*

In die 3^e klas VWO zag ik grote verschillen in toets uitwerkingen. Eén leerling loste een lineaire ongelijkheid op door middel van een zogenaamde doel-middelen analyse (waarschijnlijk omdat zij niet meer wist hoe je een lineaire ongelijkheid oplost). Een ander rekende alles in zijn hoofd uit en presenteerde slechts het antwoord. Weer een ander ging eerst alle bekende formules en regeltjes in een hoekje van het blad opschrijven, maar zag niet waar die toegepast moesten worden. En tot slot waren er veel leerlingen die niet eens de moeite namen om aan een opgave, die bij voorbaat eruit zag als 'niet te doen', te beginnen en te onderzoeken. *Zouden leerlingen die intuïtief geneigd zijn om onderzoekend wiskundesommen op te lossen, dit over kunnen brengen aan leerlingen die het gevoel hebben dat alleen het antwoord telt?*

Beginsituatie

Zoals hierboven uitgelegd, begon ik als wiskunde docent met een andere verwachting van de motivatie en inzet van leerlingen en daarmee een ander beeld van hoe de interactie met de klas en zou zijn in 3 en 4 VWO.

De praktijk in 4VWO was dat ik gevraagd werd om elke opgave uit te leggen en dat dus ook deed. Dan schreef ik een heel bord vol, hardop nadenkend, met duidelijke uitleg over welke stappen ik nam en de leerlingen namen dat over. De uitleg was gestructureerd en weldoordacht, maar zorgde er in het geheel niet voor dat leerlingen dit konden reproduceren. Integendeel, het leek erop dat hoe harder ik zwoegde, hoe meer zij achterover gingen leunen. Ik hoorde uitspraken als:

- “Ik snap er he-le-maal niks van!”
- “Dit kan ik dus echt niet.”
- “Hoe moet dit dan bij opgave 8, 10, 11 en 14?”
- “Ja, logisch dat u dit kunt, ú heeft wiskunde gestudeerd. Maar dat kan ik niet!”

Eén van mijn zeer ervaren en gewaardeerde jaarlaag collega's vertelde me dat hij eigenlijk heel weinig uitlegde en ik zag hem in de klas ook erg veel zélf achterover geleund zitten. Als snel leerde ik het volgende (misschien enigszins gechargeerd, maar het dekt wel de lading):

“Slechts één van beide partijen kan achteroverleunen, de docent of de klas”

De resultaten van de eerste toets waren schrikbarend (8 onvoldoenden van de 21 leerlingen). Ik begreep dat de slechte aansluiting 3VWO – 4VWO daar ook debet aan is, maar zeker had het iets te maken met de interactie in de klas.

In 3VWO kreeg ik minder vraag om alles uit te leggen, maar wel merkte ik dat leerlingen snel zeiden: “ik heb geen flauw idee hoe ik deze opgave moet beginnen”. Wat ik bijzonder vond was dat leerlingen nu veel vragen stelden over hoe ik zou vinden dat zij (toets-)opgaven zouden moeten beantwoorden. Zelf erover nadenken lukte kennelijk nog niet. Bij de tweede toets over gelijkvormigheid, waar het wiskundig inzicht een grote rol speelt, deed ik wel weer veel opgaven voor en stelde weinig reflecterende vragen aan leerlingen die mij om uitleg vroegen. Van die toets waren de resultaten slecht (11 onvoldoenden van de 26 leerlingen).

Gewenste situatie

Wat ik zou verwachten en hoopte dat zou gebeuren was dat leerlingen niet direct bij de pakken neer zouden zitten bij een moeilijke opgave. Dat ze een klein onderzoekje zouden doen naar de richting van de oplossingsaanpak en dus de richting van het antwoord. In de 4^e klas verweten de kinderen mij de slechte resultaten van de eerste toets. Ik had het niet goed uitgelegd en was nog onervaren. Eén leerling vroeg zich af waarom ik dan toch nog elke keer alles uit ging leggen als ik het boek zo fantastisch vond? Daar had hij een punt. Ik begreep dat ik iets anders moest gaan doen, minder uitleggen in ieder geval, waardoor ik ook gehoor zou geven aan de klacht dat ik vaak lang aan het woord was. Maar ook het zelfstandig werken uit het boek ging niet zonder slag of stoot. Vaak werd bij een lastige opgave direct de theorie of, erger nog, het antwoordenboek erbij gepakt. En in het theorieboek staan veel werkschema's die er soms voor zorgen dat de hersenen minder hard gaan werken. Ik maakte soms zelfs de fout om in een toets minder punten toe te kennen als het geleerde werkschema niet toegepast was! In de 3^e klas waren een paar leerlingen die in de eerste toets

“Lineaire verbanden” een lineaire ongelijkheid met een doel-middelen-analyse oplossen. Kennelijk konden ze het wel, om een andere onderzoekende weg te nemen, als het echt niet anders kon.

Maar wat kunnen leerlingen doen als ze niet weten hoe ze een lastige wiskunde opgave oplossen?

Idealiter denken ze eerst rustig na en onderzoeken ze alle mogelijke oplossingsstrategieën voordat ze de docent of het antwoordenboek erbij halen. En mijn verwachting zou dan zijn dat ze voor dat onderzoek het probleem in ‘eigen’ taal vertalen, zodat het behapbaar wordt. Die eigen taal kan een taal van woorden, visualisaties, getallen, kleine berekeningen of een andere volgorde van redeneren zijn.

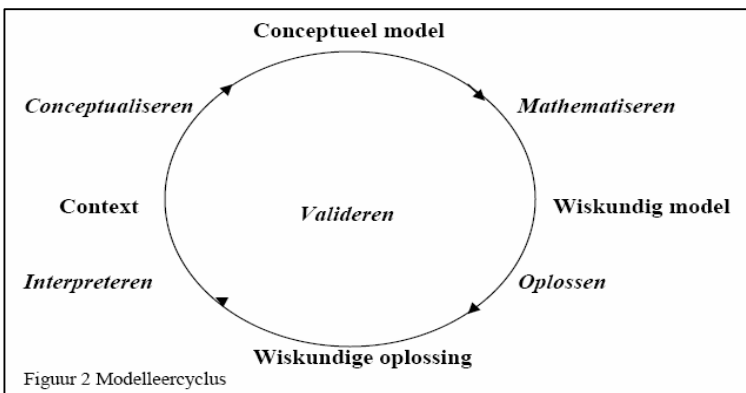
In de literatuur is bovenstaande terug te vinden onder de noemer ‘Heuristiek’ en dit wordt beschreven door Polya, Streun en anderen. Door het toepassen van Heuristiek komt de oplossing misschien nog niet direct in zicht is, maar de oplossingsstrategie wel. De heuristieken van Van Streun zijn beschreven in het volgende hoofdstuk 2 waarin enige resultaten uit mijn literatuurstudie vermeld staan.

De onderzoeksvraag

Ik leerde over het onderzoek van Anne van Streun naar het Heuristisch Wiskunde Onderwijs (HWO). Tijdens zijn promotie (1989) bestudeerde hij de effecten van het leren oplossen van wiskundige problemen, met behulp van heuristische methoden. Een heuristische methode is een methode die kan helpen bij het gericht zoeken naar de oplossing van een probleem, zonder dat het vinden van een oplossing gegarandeerd is.

In de eerste maanden had ik al een aanname gedaan, namelijk dat leerlingen een weerstand hebben tegen zelfstandig en onderzoekend wiskundeopgaven op te lossen. Oftewel, een weerstand tegen heuristiek. De kritische onderzoekende houding die wij docenten graag zien bij kinderen, is zeker niet vanzelfsprekend aanwezig. Kennelijk is in hun hoofden het idee gevormd, dat de antwoorden het allerbelangrijkste zijn. En dat ‘goed wiskunde kunnen’ betekent dat je direct weet welke oplossingsvaardigheid je moet toepassen, zodat je in één ruk naar dat antwoord toe kunt. Verder moet de docent alles uitleggen en kost exploratie van een opgave op de toets veel te veel tijd en levert onvoldoende op.

Ik denk dat het onderwijzen van heuristiek of onderzoekend wiskunde bedrijven tijdens de wiskundelessen onvoldoende belicht wordt in het huidige curriculum, dus de methode en hoe hetop mijn school vorm gegeven wordt. Dus ligt daar een duidelijke rol voor de docent. De heuristiek vormt



één van de fasen in het modelleren (daar vaak mathematiseren genoemd, zie figuur) en ook dit is een onderwerp waarvan ik vind dat er meer aan gedaan zou moeten worden op school. Idealiter zou ik een leerlijn modelleren op willen zetten, maar dit is voor nu

nog een brug te ver.

Daarom zou ik eerst eens willen onderzoeken in hoeverre je in enkele weken de fase van het aanpakken van een probleem zodanig aandacht kunt geven dat leerlingen niet direct terugschrikken van een lastigere wiskunde opgave, waar in eerste instantie erg weinig wiskunde in lijkt te zitten. En misschien krijgen ze er zelfs wel plezier in.

De onderzoeksvraag wordt daarmee:

Wat is ervoor nodig om de weerstand van leerlingen tegen heuristiek te doorbreken?

En, is er verschil in 3VWO en 4VWO?

Hoofdstuk 2 Literatuur

Heuristisch wiskunde onderwijs

Ik ben begonnen met het **proefschrift Heuristisch Wiskunde onderwijs van Anne van Streun** door te lezen. Dit stuk is van 1989, maar desalniettemin tegenwoordig nog goed bruikbaar. Wat ik geleerd heb uit het proefschrift is:

1. Wat is heuristiek en welke heuristische methoden worden onderscheiden?
2. Hoe is het HWO vorm gegeven in het gebruikte lesmateriaal?
3. Welke werkvormen zijn toegepast?
4. Welke vragenlijsten en toetsopgaven zijn aan de leerlingen voorgelegd?
5. Welke samenhangende variabelen zijn onderzocht?
6. Wat waren de resultaten? Hoe hebben de leerlingen het ervaren?

Heuristische methoden uit van Streun:

1. Vertaling naar analytische representatie
2. Vertaling naar grafische voorstelling
3. Systematisch doorrekenen van numerieke voorbeelden
4. Doel-middelen-analyse
5. Inzetten techniek in omgekeerde volgorde
6. Voortzetten van regelmaat in getallenrijen

Modelleren en Mathematiseren

Doordat ik op zoek ging naar ander materiaal waarin ik didactische aanwijzingen zou vinden, vond ik op internet meerdere stukken over **mathematiseren**. Ik las *Mathematiseren, een kern van wiskundige vorming*, opgesteld door André van der Spiegel en *Mathematiseren en Probleem oplossen* van Gert Delaleeuw, pedagogisch vakbegeleider wiskunde, Katholiek Onderwijs Bisdome te Brugge. Uit deze stukken heb ik meer geleerd over het onderwerp modelleren en probleem oplossen, waarbij mathematiseren een fase is in het modelleren:

<u>Stap 1: Exploreren</u>	Probeer het probleem goed te begrijpen.
<u>Stap 2: Mathematiseren</u>	Het probleem wordt wiskundig vertolkt.
<u>Stap 3: Berekenen</u>	Berekening, toepassen van oplossingsvaardigheden
<u>Stap 4: Demathematiseren</u>	de wiskundige oplossing wordt getoetst op haalbaarheid en realiteitswaarde.

Uit de stukken over mathematiseren kwam de volgende *heuristiek* aan bod:

1. Het maken van een tekening om de situatie en de samenhang te verduidelijken
2. Het formuleren van een hypothese of vermoeden, al enigszins rekening houdend met de vastgestelde wiskundige relaties
3. Het vermoeden toetsen op een getallenvoorbeeld
4. Herformuleren van het probleem in eigen woorden of vereenvoudigen
5. Formuleren van deelproblemen
6. Het vergelijken van dit probleem met een bekend probleem.

Uit bovenstaande stukken heb ik veel tips voor het didactische leerproces opgedaan:

1. Alleen door geregeld problemen te verwerken te krijgen, zullen leerlingen leren om probleemoplosser te worden. Begin met kleine stappen en begeleiding, om de motivatie erin te houden. Leerlingen niet direct met complexe problemen confronteren. Kies voor een geleidelijk groeiende leerweg.
2. De docent moet als probleemoplosser ervaren worden. Denkstappen moeten transparant gemaakt worden, met inbegrip van het missen en gissen, het uitproberen, etc.. We hebben het dus over een leerproces, waar de docent *actief* bij betrokken is.
3. Het is zinvol de leerlingen met meerdere oplossingen en oplossingswegen te confronteren bij problemen.
4. Succeservaring wekt vertrouwen in het eigen kunnen.
5. Laat leerlingen inzicht krijgen in hun manier van aanpakken en van leren, door te reflecteren op het oplossingsproces. Reflectieve vragen zijn:
 - a. Wat wilde ik precies bereiken?
 - b. Hoe is het proces verlopen? Wat vind ik er zelf van?
 - c. Welke problemen deden zich voor en hoe kan ik dit positief bezien?
 - d. Welke oplossingen, alternatieven zijn er?
 - e. Wat heb ik ervan geleerd?
6. Geef leerlingen feedback over het proces.
7. Het heeft geen zin om mathematiseren in een korte intensieve periode te onderwijzen, beter is het te werken met bijvoorbeeld het 'probleem van de week, van de maand' etc..

Probleemoplossen en Polya

In het wiskunde vakdidactiek handboek voor de universiteiten Eindhoven, Delft en Twente vond ik veel meer aanwijzingen voor de docent tijdens het leren van probleem oplossen:

- Wees geduldig; het zelf werken aan problemen door leerlingen kost tijd en kan alleen maar succes hebben als je ze die tijd gunt. Dit betekent dat er maar al te vaak minder gedaan wordt dan de docent zich had voorgesteld. Het kan gebeuren dat deze zijn/haar irritatie daarover laat blijken of dat hij/zij zich voorneemt het dan de volgende keer maar weer zelf te doen.
- Wees open voor andere oplossingswegen: Soms zijn docenten geneigd alleen oog te hebben voor hun eigen aanpak en laten ze weinig ruimte voor alternatieve oplosmethodes waar leerlingen mee komen, ook al zijn die correct. Ook dat is natuurlijk niet erg stimulerend.
- Met de woorden van Polya:
 - *Sta geruime tijd toe voor denken, analyseren en experimenteren.*
 - *Laat de tijdsdruk op dergelijke momenten zo klein mogelijk zijn en voorkom een te sterke succes-oriëntering.*
 - *Wees ontvankelijk voor vragen en wees geduldig.*
 - *Zorg voor een juiste motivatie:*
 - benadruk de betekenis en het belang van het oplossen van het probleem,*
 - verzeker een zekere mate van succes,*
 - bereid voor op noodzakelijke moeilijkheden en frustraties,*
 - geef leuke/ongewone/relevante problemen (bijvoorbeeld ook puzzels of schijnbare tegenstellingen).*
 - *Concentreer je op enkele problemen en behandel deze grondig.*
 - *Wijs de leerlingen op heuristieken en laat ze zien hoe ze zichzelf vragen kunnen stellen.*
 - *Leg de nadruk op flexibiliteit en variatie bij het oplossen van problemen.*
 - *Benadruk de oplossingsmethode, niet de oplossing zelf.*
 - *Concentreer je erg op leesvaardigheid van de leerlingen.*
 - *Geef de leerlingen regelmatig problemen om zelf op te lossen.*
 - *Laat de leerlingen hun oplossingen logisch en ordelijk opschrijven.*
- Heuristieken als *het in eigen woorden formuleren en opschrijven van de opgave, het maken van een tekening en het erbij schrijven van de gegevens, het invullen van concrete waarden voor een parameter of het bekijken van een speciaal geval, het opzoeken van de relevante theorie en verwante opgaven*, leveren vaak een waardevolle bijdrage tot het oplossingsproces. Het zijn bovendien dingen die de docent een leerling kan laten doen zonder dat de oplossing al bij voorbaat weggegeven wordt. Slaagt een leerling er met dit soort aanwijzingen in de oplossing te vinden, dan ervaart hij/zij dat terecht voor een groot deel als eigen prestatie.
- Soms is achteraf wat makkelijker te zien dat er ook handiger oplosmethodes denkbaar waren. Bovendien geeft het nog eens bezien van de gebruikte aanpak vaak een beter inzicht in waar de opgave nu eigenlijk om draaide, en wordt het daardoor makkelijker om later vergelijkbare opgaven te maken.

Hoofdstuk 3 Onderzoeksopzet

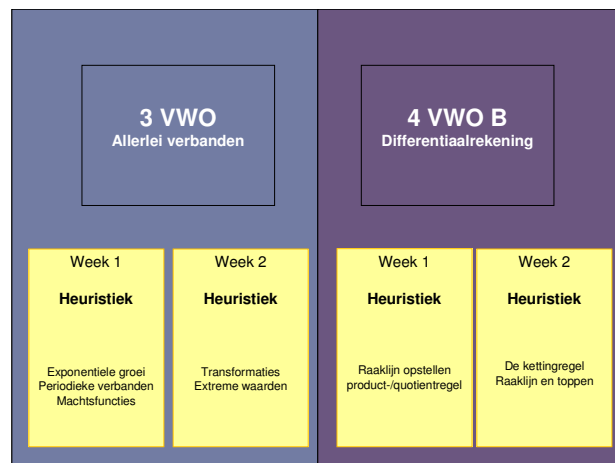
Kader

Over het onderwerp heuristisch wiskunde onderwijs is een rijk proefschrift verschenen van Anne van Streun. In het proefschrift wordt uitgelegd dat het materiaal is aangepast, aangevuld met geschikte probleemopgaven. De methode getal & Ruimte, welke op het Corderius gebruikt wordt, biedt veel oefening aan de leerlingen, waarbij de opgaven veelal gebaseerd zijn op de wiskunde begrippen en technieken die geleerd zijn. Toegepaste opgaven vindt men bij een aantal hoofdstukken in de laatste paragraaf en in de gemengde opgaven. Maar nergens wordt expliciet aandacht besteed aan het aanpakken van problemen of het modelleren van een situatie, die daarna met wiskundige technieken opgelost kan worden. Een aantal opgaven blijkt na enig aanpassen wel bruikbaar voor de heuristische wiskunde. Om de lessen in het probleemoplossen vorm te geven, zullen dus een opgaven ontwikkeld moeten worden. Dit heeft als consequentie dat de leerlingen tijdens de les minder zullen kunnen werken aan de opgaven uit het boek, zoals in de studiewijzer gepland.

De klassen die onderdeel uitmaken van het onderzoek zijn een 3^e klas Atheneum, A3B (25 leerlingen) en een 4^e klas VWO wiskunde B (20 leerlingen). Het onderzoek zal plaats vinden tijdens de laatste 2 weken van mei en de eerste week van juni.

Tijdens die weken is A3B bezig met 2 hoofdstukken: Hoofdstuk 7 “Allerlei verbanden” en Hoofdstuk 8 “Informatieverwerking” en 4VWO behandelt Hoofdstuk 7 “Differentiaalrekening”.

Deze onderwerpen zullen dus ingebed moeten worden in het heuristisch wiskunde onderwijs. In de figuur is te zien welke verschillende onderwerpen met deze planning aan bod komen bij de lessenseries. Na afloop van elke lessenserie en na een toetsing, leg ik de leerlingen een korte vragenlijst voor over hoe hun ervaringen zijn geweest.



Lessenopzet

Beide klassen hebben 4 uren wiskunde in de week. Iedere lessenserie bevat minimaal 8 lessen en zal beginnen met een introductie in de heuristische leerstrategie. Tijdens elke les wil ik in ieder geval één opgave behandelen die bij het heuristisch wiskunde onderwijs hoort. Verder is de les doordrenkt van het lesgeven volgens deze leerstrategie, met de correcte invulling van de didactische docentenrol die daarbij hoort. Het geleerde zal getoetst worden door een diagnostische toets aan het eind van de lessenserie. Tot slot, vraag ik aan het einde van de lessenserie de leerlingen naar hun mening, middels een enquête.

Voor een planning van de lessenserie, zie de bijlage 1.

Introductie van de lessenserie

Tijdens de introductie van de lessenserie wordt uitgelegd wat de kern van heuristiek en probleemoplossen is, wat er verwacht wordt van de leerlingen, welke winst er voor de leerlingen te behalen is en wat de rol van de docent is (en wat niet).

Lesplan

Iedere les één of twee opgaven, die voldoen aan de criteria.

Criterium: Wiskundige kennis kan pas worden toegepast nadat er een *transformatie* van de opgave is gedaan.

Veel papier uitdelen, uitwerking van de opgaven op papier. Veel zelfstandig werken, weinig uitleg door de docent. Vragen van leerlingen beantwoorden met vragen. Puzzels en andere problemen voorschotelen. Verbinding met het Realistic Mathematics Education (Realistisch Wiskunde Onderwijs). Verbinding met modelleren en mathematiseren. Wees geduldig, geef ruimte aan de leerlingen. Controle met de realiteit achteraf (demathematiseren). Afronding les: welke heuristieken hebben jullie toegepast deze les? Proberen om verschillende heuristieken aan bod te laten komen.

Diagnostische toets

Een of twee opgaven, gevraagd volgens een manier die aansluit bij de heuristische onderwijs variant.

1. Verwacht wordt dat een kladblaadje helemaal volgeschreven wordt. Met schetsen en duidelijke transformatie van de opgave.
2. Veel onderzoek en proberen.
3. Duidelijke controle achteraf?

Meting 'weerstand tegen heuristiek'

In een aantal klassen wordt de aanname dat leerlingen een weerstand tegen heuristiek hebben, geverifieerd middels een vragenlijstje.

Enquête

Kort, verduidelijkend, in de taal van de leerlingen. Elementen in de enquête:

- Angst en moeilijkheid: zorgt deze werkwijze voor minder paniek als ik niet direct uit een opgave kom? Vind ik wiskunde hierdoor makkelijker en voel ik me zekerder?
- Plezier en motivatie: is wiskunde leuker geworden?
- Vergelijking met de normale gang van zaken, normale lessen: wat is er anders dan bij de andere lessen? Wat doet de docent anders? En hoe bevalt dat?
- Wat verandert dit aan de toekomst? Wat heb ik hiervan geleerd?
- Past deze stijl bij mij? Zal ik dit vaker toepassen?

Hoofdstuk 4 Resultaten

In dit hoofdstuk zal ik resultaten beschrijven, die op drie manieren verkregen zijn:

1. de resultaten uit de meting 'weerstand tegen heuristiek' in alle klassen,
2. de resultaten van de diagnostische eindtoets in mijn beide klassen en
3. de enquête uitslag.

Resultaten verkregen door meting "weerstand tegen heuristiek"

In de 3^e en de 4^e klas zijn er 3 parallelklassen en de leerlingen uit deze klassen hebben een kleine enquête ingevuld met de vragen:

1. Als ik een wiskunde opgave niet kan oplossen, dan probeer ik: Schets, Getallenvoorbeeld, Vorige som, Terugredeneren, Niets, anders, nl.:
2. Als ik hulp zoek bij een wiskunde opgave, dan raadpleeg ik: Docent, Medeleerling, Boek, Antwoordenboek, Anders, nl.:

De ruwe en gevisualiseerde resultaten zijn terug te vinden in bijlage 4.

Helaas heb ik deze enquête pas na de beide lessenseries kunnen afnemen, waardoor de antwoorden van mijn eigen klassen niet echt meer tot een nulmeting mogen behoren. Wel leuk is het om het verschil te zien met andere klassen. Daarom maak ik twee soorten samenvattingen uit de resultaten, namelijk:

1. Gebruiken de andere klassen (zonder mee te hebben gedaan aan mijn onderzoek) veel heuristieken? En
2. Wat zijn de verschillen tussen mijn klassen en de andere klassen?

3VWO klassen

Gebruikte heuristiek in andere klassen:

1. Getallenvoorbeeld wordt veel minder gebruikt dan schets, vorige som en terugredeneren.
2. Een lastige opgave vergelijken met een bekend probleem (Vorige som) en terugredeneren is relatief populair.
3. Weinig leerlingen zeggen 'niets' te doen.
4. Er worden vele andere heuristieken gebruikt, zoals de theorie nog een keer goed doorlezen.
5. Hulp wordt voornamelijk gezocht bij de docent en het antwoordenboekje is (gelukkig) het minst populair.

Gebruikte heuristiek eigen klas:

1. Schets en terugredeneren is populair
2. Relatief hoog percentage zegt 'niets' te doen.

3. Weinig alternatieven worden genoemd.
4. Leerlingen gaan graag te rade bij hun klasgenootjes.

Samengevat: Ik vind het niet tegenvallen wat leerlingen in andere 3VWO klassen zeggen te gebruiken aan onderzoeksmiddelen als ze er niet uitkomen. Dan vooral zie ik het vergelijken met een vorige som of een bekend probleem en het terugredeneren (aan de hand van een antwoordenboek?). Ook vermelden ze veel andere zinvolle onderzoekstechnieken, goed lezen, iets proberen, logisch nadenken. Het echte gebruik van een antwoordenboek valt mee, volgens de enquête. Mijn eigen klas grijpt daar sneller naar. Ook zijn er in mijn eigen klas veel mensen die zeggen bij de buurman of – vrouw te rade gaan of niets te doen.

4VWO klassen

Gebruikte heuristiek parallelklassen:

1. Getallenvoorbeeld is populairder dan schets of vorige som
2. Aan de hand van voorbeelden, uitwerkingen, antwoordenboekjes terugredeneren is erg populair
3. Nog relatief veel leerlingen zeggen ‘niets’ te doen als ze het niet meer weten.
4. Als ik antwoordenboekje en uitwerkingen optel, dan is dit de meest gezochte hulp, daarna de docent.

Gebruikte heuristiek eigen klas:

1. Schets wordt veel gebruikt, daarna terugredeneren
2. Minder leerlingen dan in parallelklassen zeggen ‘niets’ te doen
3. Docent is niet populair als vraagbaak, antwoordenboekje en uitwerkingen veel meer, daarna de theorie in het boek en de medeleerling.

Samengevat: Ik vind het bij dit leerjaar wel tegenvallen wat leerlingen in andere 4VWO klassen zeggen te gebruiken aan onderzoeksmiddelen als ze er niet uitkomen. Het terugredeneren is nog wel het meeste populair en dit gebeurt toch voornamelijk aan de hand van een antwoord dat uit het antwoordenboek/uitwerkingenboek/theorieboek voorbeeld komt. Uitwerkingen bekijken wordt erg vaak genoemd. Ook het getallenvoorbeeld wordt veel gebruikt, maar een schets maken juist heel weinig. Geen andere zinvolle onderzoekstechnieken worden genoemd. De verschillende hulpmiddelen worden evenveel aangesproken. Mijn eigen klas is niet echt gecharmeerd van mijn uitleg en vraagt veel uitleg bij mensen van buiten, zoals familieleden en bekenden.

Resultaten verkregen door de diagnostische toets

3VWO

Opvallend zijn de volgende zaken (zie bijlage ...)

1. Door de opzet van multiple choice vragen, wordt er heel veel terug geredeneerd, met behulp van getallen.
2. Er worden veel schetsen (tijdslijnen) gemaakt bij opgave 1 , maar nog relatief te weinig bij opgave 2 over het bergwandelen, waar het echt nodig is om de opgave goed te begrijpen.
3. Er zijn veel leerlingen zonder (goed) antwoord bij opgave 2 en deze leerlingen zijn direct de visueel minderen van de klas.
4. Bij opgave 1 worden bijna geen getallenvoorbeelden gebruikt, bij 2 veel meer, maar deze opgave leent zich er meer voor.
5. Bar weinig controle!

4VWO

Opvallend zijn de volgende zaken (zie bijlage ...)

1. Ze vonden de opgave 1 erg moeilijk, doordat:
 - Er geen motivatie bij een aantal leerlingen is om de opgave te onderzoeken
 - Er een gemis is aan overzicht (formules voor oppervlakte versus inhoud)
 - Leerlingen blijven lang hangen in het differentiëren en algebraïsch maximum bepalen.
2. Er wordt erg weinig gecontroleerd met behulp van een getallenvoorbeeld. Eén leerling doet dit wel, zij is de minste van het stel en onderzoekt hoe groot de oppervlakte van het materiaal is, bij 2 verschillende waarden van de straal r .

Resultaten verkregen door de enquête

In de enquête zijn in totaal 20 vragen gesteld, die geclusterd kunnen worden in 5 thema's:

1. Vertrouwen
2. Motivatie
3. Waarderen van de geleerde onderzoekstechnieken
4. Waarderen van de heuristiek
5. Je moet het antwoord direct zien

De enquête en de staafdiagrammen met de resultaten zijn te vinden in bijlage 5.

Vertrouwen

Het algemene beeld dat uit de resultaten spreekt is dat de leerlingen in zowel 3 als 4 VWO redelijk vertrouwen hebben in heuristiek en wiskunde.

De leerlingen in beide klassen vinden zichzelf gemiddeld slecht (of goed) vinden in verhaaltjessommen en niemand in deze klassen is het echt oneens met de stelling dat rustig nadenken loont

Als je kijkt naar wat ze uitspreken over hun houding ten opzichte van het vak wiskunde dan vinden ze dat ze best vragen durven te stellen, het veelal oneens zijn met de stelling dat ze wel nooit iets van wiskunde zullen begrijpen en ze het grotendeels oneens zijn met het feit dat ze voor wiskunde toetsen zenuwachtiger zijn dan voor andere toetsen.

Verschillen tussen klassen zijn er ook. Opvallend zijn de volgende zaken:

- 3VWO leerlingen zeggen meer vragen te durven stellen,
- In 4VWO zijn leerlingen zenuwachtiger voor wiskunde toetsen en ze zeggen iets slechter te zijn in verhaaltjessommen.

Dit laatste is te begrijpen, aangezien ze voor wiskunde B hebben gekozen, waar de opgaven veel abstracter en minder concreet zijn.

Motivatie

Geen van de leerlingen uit zowel 3 als 4 VWO zegt wiskunde echt als een hobby te zien. Ze zijn niet geneigd (op een enkeling na) om vooruit te lezen in het wiskundeboek. Er zijn er weinigen die in hun vrije tijd puzzeltjes of wiskundige spelletjes spelen. Samengevat, er is weinig echt enthousiasme voor wiskunde te bespeuren.

Als we kijken naar het plezier dat ze krijgen door een probleem te onderzoeken: 3VWO is gematigd negatief (met wel enkelen die het echt leuk vinden) en 4VWO spreekt zich neutraal uit over het leuke aan werken aan een probleem.

Waarderen van de geleerde onderzoekstechnieken

De leerlingen van zowel 3 als 4 VWO staan positief tegenover het gebruik van een schets, maar zien minder waarde in het achteraf controleren of het gebruik van een getallenvoorbeeld. De klassen

vinden dat ze altijd al lastige opgaven onderzocht hebben, waarbij 3VWO iets meer vindt dat ze dat altijd al deden.

Opvallende verschillen tussen klassen zijn de volgende:

- 4VWO is uitgesprokener over de waarde van een schets dan 3VWO
- 3VWO waardeert het getallenvoorbeeld iets meer dan 4 VWO.

Waarderen van de heuristiek

Het algemene beeld is dat het repeterende in de oefensommen geen meerwaarde heeft voor beide klassen en ze zijn beide vrij neutraal over sommen met denkwerk, maar lichte tendens richting echt hekel hebben aan dergelijke sommen (vooral in 3VWO). Als je een vergelijking trekt tussen affiniteit met oefensommen of denksommen dan levert dit een lichte voorkeur voor denksommen op, ook weer uitgesproken door beide klassen. Maar, men is erg positief in de voldoening bij het oplossen van een moeilijk denkprobleem!

Een duidelijk verschil is te zien in de vraag over formules en regels: 4VWO zegt meer dan 3VWO (redelijk neutraal) dat formules/regels de hoofdzaak zijn bij wiskunde. Dit is goed te verklaren, ook weer door hun keuze voor wiskunde B, waarbij vaak regeltjes erg belangrijk zijn om tot een exact antwoord te komen. Deze uitspraak geeft meteen aan dat ze niet inzien dat wiskundige opgaven ook opgelost kunnen worden zonder gebruik te maken van de wiskundige regeltjes.

Direct oplossing zien

Alle klassen vinden dat ze weten dat ze niet snel de moed moeten opgeven, als ze niet direct de oplossing van de vraag zien (of de weg er naartoe).

3VWO (gematigd positief) zegt meer gehad te hebben aan de geleerde onderzoekstechnieken en te weten hoe ze een probleem aan moeten pakken dan 4VWO (neutraal). Daarentegen is 4VWO lichtelijk positiever over de uitkomst van puzzelen en proberen (proberen van DOGS) dan 3VWO. Eigenlijk is deze uitkomst explicieter dan de uitkomst van de eerste vraag.

Samengevat

Meting 'weerstand tegen heuristiek'

Mijn aanname dat 3VWO leerlingen weinig opgaven onderzoeken was ongegrond. In de enquête geven ze zelf aan veel onderzoekstechnieken te gebruiken en ze presenteren ook een aantal alternatieve heuristieken. In mijn eigen klas wordt eigenlijk alleen de schets en het terugredeneren vaak genoemd, weinig alternatieven, zelfs nadat de lessenserie over heuristiek is geweest. Mijn klas is een Atheneum klas, de andere 2 klassen zijn gymnasium klassen en dit kan het verschil wellicht voor een deel verklaren.

In 4VWO wordt erg weinig onderzocht, zo geven ze zelf aan. Erg veel uitwerkingen, veel antwoordenboek, of theorieboek, weinig visualisatie van de som d.m.v. een schets. Mijn eigen klas gebruikt helemaal veel uitwerkingen en zegt weinig te rade te gaan bij mij als docent.

Met de meting 'weerstand tegen heuristiek' is toch mijn aanname dat mijn eigen leerlingen weinig doen aan een opgave onderzoeken gevalideerd.

D-toets

In 3VWO is erg veel teruggedeneerd, met behulp van getallenvoorbeelden en ook opgaven onderzocht door getallen in te vullen. Ze gebruiken wel vaak een schets, maar relatief weinig bij de tweede opgave, waar de schets de weg tot het goede antwoord is. Er wordt niets gecontroleerd.

In 4VWO is weinig motivatie te bespeuren om deze opgave zelfstandig te onderzoeken, veel antwoorden zijn van elkaar overgenomen. Ook zie je dat de leerlingen blijven hangen op het differentiëren en als ze daar niet uitkomen, dan is niets anders meer mogelijk. Er wordt ook hier niets gecontroleerd, op één leerling na, die met behulp van getallen kijkt of het minimum van opgave 1b echt op die plek ligt.

Enquête

De resultaten over 'Vertrouwen' (in eigen wiskunde of heuristiek) geven een neutraal beeld, geen sterke uitschieters. 3VWO zegt meer vragen te durven stellen, 4VWO is nerveuzer voor wiskunde toets en slechter in verhaaltjessommen. Ik vind dat hieruit toch een iets positiever beeld ontstaat over het vertrouwen dat 3VWO heeft in zichzelf bij wiskunde en heuristiek.

Bij 'Motivatie' lijkt 4VWO iets enthousiaster dan 3VWO te zijn over hoe leuk het werken aan een probleem is, terwijl er in 3VWO een paar leerlingen zijn die dit echt leuk vinden, zo geven ze aan. Voor geen van de klassen geldt dat ze wiskunde als een grote hobby beschouwen.

Welke 'geleerde onderzoekstechnieken' zijn er te bespeuren? Men is positief over het gebruik van een schets, minder populair zijn het getallenvoorbeeld en de controle achteraf. 4VWO geeft meer aan iets geleerd te hebben.

Wat vinden ze van 'heuristiek'? Bij het kiezen uit twee kwaden (oefensommen of sommen met veel denkwerk) is er meer affiniteit voor sommen met denkwerk. Leerlingen uit beide klassen ervaren veel voldoening bij het oplossen van dergelijke opgaven. 4VWO vindt regels en formules de hoofdzaak bij wiskunde.

4VWO is enigszins zekerder ervan dat zij na puzzelen en proberen toch op een oplossing kunnen komen, ook al was die oplossing niet direct in beeld.

Hoofdstuk 5 Conclusies

In dit hoofdstuk beschrijf ik conclusies voor de korte termijn. Verwerkt in dit hoofdstuk, en dus overall tussendoor leesbaar, zijn de aanbevelingen voor de lange termijn, vooral voor mezelf tijdens mijn toekomstige lespraktijk. Maar ook andere docenten kunnen iets opsteken van de weg die ik afgelegd heb. De conclusies zijn opgebouwd aan de hand van de resultaten, welke in het vorige hoofdstuk uitvoerig aan bod zijn gekomen:

1. de resultaten uit de meting 'weerstand tegen heuristiek' in alle klassen,
2. de resultaten van de diagnostische eindtoets in mijn beide klassen en
3. de enquête uitslag.

Mijn kernconclusie over wat daarvoor nodig is volgt in de laatste paragraaf.

Cconclusies en reflecties

In korte tijd is het moeilijk, maar niet onmogelijk om enig (klein) resultaat te boeken. Een grote invloed wordt gevormd door de relatie die de klas en de docent met elkaar hebben. Daarnaast speelt natuurlijk het proces van jaren dat leerlingen hebben doorgemaakt op het gebied van wiskunde en kritisch onderzoeken een rol. Tot slot is de duur van de lessenserie zodanig kort dat de periode waarin het plaatsvindt van belang. In deze kernconclusie reflecteer ik op mijn eigen rol en probeer ik vast te stellen welk effect die rol heeft gehad op het leerproces tijdens de lessenserie.

De hypothetische weerstand tegen heuristiek die leerlingen zouden bezitten, zoals in mijn onderzoeksvraag geformuleerd, is geen natuurlijke weerstand. Dit is een weerstand die gegroeid is tijdens het leerproces van de jaren ervoor en tijdens het leerjaar dat ze met mij hebben doorgemaakt. In dat licht bezien, heb ik zelfs een grote rol (gehad) in de vorming van die weerstand. Hoe ik ben, mijn karakter, mijn kwaliteiten, maar zeker ook valkuilen zorgen voor een interactie met de klas en de leerlingen én zorgen voor een bepaald rendement in het leren van de wiskunde. En bij een spannend 'anders' onderwerp zoals probleem oplossen en onderzoeken is het effect nog groter.

Mijn relatie met 3VWO en 4VWO is erg verschillend. En als ik lees in de reflectie die ik elke dag geschreven heb over de lessen in 3 en 4VWO tijdens de lessenserie, dan zie ik grote verschillen in wat er gebeurt in beide jaren. Die verschillen zijn in veel van de gevallen terug te brengen tot

1. **Het *vertrouwen* en de mogelijkheid tot *motivatie* die de docent (ik) krijgt van de klas**
2. **De *ruimte* die leerlingen ervaren om tijd en energie in dit (nieuwe) onderwerp te steken**
3. **De *flexibiliteit* om anders te denken door de leerlingen: het antwoord is niet belangrijk.**

Toelichting over deze 3 onderwerpen volgt:

1. Vertrouwen en Motivatie

Ik las al in de literatuur dat de docent een duidelijke voorbeeldrol dient in te nemen, als het gaat om onderzoekend wiskunde bedrijven. Dat betekent dat lastige opgaven niet bij voorbaat door mij uitgekauwd moeten zijn, ook ik moet soms de tijd nemen om iets uit te zoeken en het **vertrouwen** hebben dat ik op een oplossing kom, zelfs terwijl ik voor het bord sta. Door kwetsbaarheid uit te stralen en aan te geven dat het in het geheel geen schande is, omdat een onderzoek met vallen en opstaan gaat, hoop je leerlingen mee te nemen in dat proces en te leren de moed niet te snel te laten zakken. Als je dat vertrouwen uitstraalt en meegeeft aan hen, dan gaan ze geruster aan de slag met die moeilijke opgave. Paniek bij niet direct een antwoord kun je relativeren doordat de heuristiek geen antwoord garandeert, maar je juist meer zekerheid geeft over de oplossingsstrategie.

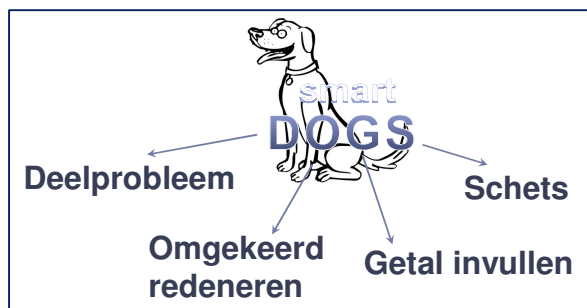
Het vertrouwen geven en kwetsbaarheid uitstralen is niet overal even goed gelukt. Het is me in 4VWO nog niet gelukt om volkomen onvoorbereid aan een opgave te beginnen, samen met de leerlingen. Het samen zoeken durf ik niet aan, daar voel ik me nog niet zeker genoeg voor, maar erger nog, dat zit niet in mijn aard. Ik ben altijd al erg perfectionistisch geweest, wil de zaken onder controle hebben en dat kan niet als je als startende docent, in een lastig leerjaar als 4VWO wiskunde B, onvoorbereid een pittige opgave wil onderzoeken. Want dat is waar de heuristiek nu juist geen garanties over geeft: het vinden van een oplossing. En lastig genoeg zit dat wel in mijn systeem verwerkt, dat ik vroeg of laat wel op een antwoord moet komen. Dus kan ik wel roepen 'dat ik ook maar een mens ben' maar dat is meteen mijn brevet van onvermogen tot 'loslaten' van mijn perfecte manier van wiskundejuf. Wellicht dat als ik meer grip krijg op hoe moeilijk de wiskunde voor leerlingen eigenlijk is, kan ik ze minder gaan uitleggen, meer samen gaan zoeken en relaxter zijn.

De 3^e klas is veel extroverter dan de 4^e. Daar worden meer vragen gesteld, maar wordt het ook beter geaccepteerd als ik een fout maak voor het bord. Tijdens de D-toets was de klas enthousiast in tweetallen aan het werk, zonder dat ik dit expliciet had voorgesteld. In de 4^e klas zaten ze of omgedraaid naar anderen, om het antwoord te horen of stil in een hoekje te werken.

Vaak hebben leerlingen moeite met het nemen van de eerste stap (3VWO: "geen flauw idee hoe ik moet beginnen!"), zelfs al gaat het slechts om onderzoeken. Dus heb ik een anagram bedacht, een geheugensteuntje, waar alle eerste letters van de meest gebruikte heuristieken in voor kwamen: DOGS. Met dit anagram onthielden ze makkelijker welke manieren van onderzoeken (of zogezegd 'puzzelen') er zijn, wat extra vertrouwen opleverde.

Dit geheugensteuntje werd in beide klassen aangenomen, maar in 3VWO werd het echt omarmd. Daar zag ik zelfs leerlingen die het in hun schrift inplakten en als ik een opgave

behandelde voor het bord, dan riepen leerlingen: "Oh, maar mevrouw, dat doe je toch met DOGS?" In de 4^e klas heb ik het anagram altijd een beetje kinderachtig gevonden en dat zal ook wel effect gehad hebben. Maar daar riep ook niemand hardop door de klas, dat hij/zij wist met welke van de DOGS technieken je de opgaven kon aanpakken...



Als achteraf, na bespreking van een opgave, blijkt dat de buurman een andere oplossingsroute heeft genomen, dan betekent het niet per definitie dat wat jij hebt fout is. Dus, overbrengen dat ook hier geldt: 'meerdere wegen leiden naar Rome'.

Dit werd in 3VWO goed ontvangen. Maar daar had ik ook al tijdens toetsen alternatieve uitwerkingen van een opgave gezien. Ik heb meegemaakt dat in 4VWO tijdens de opgave 'dagkaarten van NS' leerlingen verontwaardigd mij gingen verbeteren, omdat zij een andere uitwerking hadden gehad. Na deze verontwaardiging ontkracht te hebben, begreep ik dat 4VWO wiskunde B leerlingen het liefste één werkwijze leren en zo wordt het soms ook in de methode gepresenteerd.

Motiverende uitspraken, zoals 'dat deze opgave door iedereen in de klas op te lossen moet zijn', helpen altijd. Ik heb ook ervaren dat als je dit in een iets ander jasje giet. Namelijk: "Degene die als eerste een slimme tip kan geven over wat de volgende stap in het onderzoeken van dit moeilijke denkprobleem moet zijn, verdient een groot compliment." Als dan 1 leerling begint met een goeie tip en de rest ervaart dat het dus niet zo moeilijk is, gaat de hele klas enthousiast aan de slag. Dus, de ervaring van een (deel van de) oplossing bij een moeilijk probleem heeft een groter motivatie effect dan de ervaring van een complete oplossing bij een eenvoudiger probleem.

Dit werkte trouwens beter in 3VWO dan in 4VWO. 3VWO leerlingen werden bijvoorbeeld bij de opgave 'Matthijs en studeren' helemaal enthousiast en actief, nadat 2 leerlingen klassikaal een steengoede tip hadden gegeven die voor de oplossing zou kunnen zorgen. In 4VWO was en is een deel van de klas niet te inspireren voor iets anders dan huiswerk maken en worden ze niet snel warm van een groot compliment van mij. Ook hier weer: als ze mij alleen maar gelikt en vlot de moeilijkste opgaven in een handomdraai op het bord zien uitwerken, dan zullen ze niet verwachten dat ik echt trots op ze ben, als ze een opgave 'eindelijk' ook goed doen. Of, dan is alles zo moeilijk dat ze dit ook wel niet zullen kunnen maken. Toch waren er leerlingen die positief waren in de enquête over het plezier dat ze beleven aan het oplossen van een probleem. Ik denk dat ik de lat vaak te hoog heb gelegd.

Erg eenvoudig, maar met groot effect is motivatie door beloning. Deel eens een paar mini-marsjes uit aan leerlingen met een slimme vraag of opmerking en de klas gaat aan de slag! Nooit gedacht dat het zo zou werken.

Ook dit werkte beter in de 3^e dan in de 4^e klas. Maar, onverwacht genoeg, werkte het ook in 4VWO! Snoep werkt altijd...

Wat nog beter werkt dan de motivatie door de docent, is de motivatie door succeservaring. Dit begint met dat de leerling succes bij mij scoort, doordat ik hem/haar prijs met de goeie opmerking, maar sorteert pas echt effect bij een zelf opgeloste moeilijke wiskunde opgave. De beste succeservaring is wanneer een leerling merkt dat de geleerde technieken hem daadwerkelijk iets opleveren, waar hij bij alle domeinen in de wiskunde baat bij heeft.

Bij een stel redelijk slimme extraverte jongens blijkt de lastige opgave 'dagkaarten van NS' een effect te hebben, waarbij het een prestigezaak wordt om hem op te lossen. Te makkelijke opgaven motiveren 4VWO wiskunde B in het geheel niet. Ook een opgave die 'anders' is, worden ze niet echt warm van, zoals de opgave over het gedrag van een functie. Al vaak heb ik verwijten gekregen, dat ik met mijn onervarenheid, dingen op een andere en dus onhandige en verwarrende manier uitleg. Ik

vermoed dat een aantal 4VWO leerlingen mijn onderzoek ook hebben gezien als iets raars, iets anders en dus verwarrend en afleidend van wat werkelijk belangrijk is om te leren voor je toets. Dit was terug te zien in de enquête bij de vraag of formules en regels de hoofdzaak vormen bij wiskunde en die mening hadden toch een flink aantal in 4VWO.

Bij de D-toets was wel motivatie te merken in de 4^e, maar vooral bij die leerlingen die na flinke inzet en aandacht van mijn kant het beter bij wiskunde waren gaan doen en bij de extraverte leerlingen, die met mij in gesprek gingen. Met deze kinderen had ik een band gekregen. Bij diegenen waarmee ik die band niet opgebouwd had, bespeurde ik een gesteun van: "nu dit weer..."

In 3VWO was het effect van succeservaring enorm. Ik heb daar leerlingen die normaliter niet zo sterk zijn in wiskunde zien opbloeien. De D-toets werd ook heel aardig gemaakt.

2. Rust en ruimte

Leerlingen ervoeren de 2 a 3 weken heuristiek vaak als toevoeging op hun zeer volle schema. Het is erg lastig om ze enthousiast te krijgen voor een onderwerp waar ze het nut toch al moeilijk van inzien, als daar de ruimte en de tijd eigenlijk niet voor bestaat. Ik had al gelezen dat het scheppen van de rust en ruimte voor een optimaal resultaat in een 'onzeker' onderwerp als heuristiek van belang was, maar heb dit ook duidelijk ervaren in de les.

Ik schreef al eerder dat het nodig is om extra opgaven te bedenken en die in de studiewijzer te verwerken. In de 3^e klas heb ik de **studiewijzer** zelf kunnen aanpassen naar mijn eigen wensen. Daardoor moesten in eerste instantie de leerlingen meer huiswerk thuis maken, maar ik heb een aantal opgaven weggelaten en ook zoveel mogelijk opgaven uit het boek (enigszins aangepast) gebruikt. Vaak kreeg ik de vraag, of dergelijke vragen ook op de toets zouden voorkomen en ook 'waarom we niet gewoon het hoofdstuk deden, net als andere klassen'. Dan moest ik ze dus echt uitleggen dat het verschil niet groot was. De studiewijzer in de 4^e klas hoefde ik niet aan te passen, maar wel kregen leerlingen uiteindelijk meer werk, helaas. Vooral doordat ik tijdens de les veel bezig was met probleem oplossen, met zelfbedachte opgaven.

Daardoor bleef het huiswerk voor thuis soms liggen en dit verwijt kreeg ik van leerlingen terug in de enquête. Bewust heb ik één of twee lessen overgeslagen met heuristiek, omdat het onderwerp van die les meer te maken had met het oefenen van basistechnieken. Ik heb tussendoor ook één les gebruikt voor de voorbereiding van een toets van het vorige hoofdstuk en die wisseling werd me niet in dank afgenomen.

Wel is het mijn stelligste overtuiging dat leerlingen **alle tijd** moeten krijgen tijdens de les om zelfstandig aan een complex probleem te sleutelen. Desnoods zijn ze een hele les met slechts 1 opgave bezig te onderzoeken. In de 3^e klas gebeurde het wel eens dat leerlingen lange tijd samen bezig waren en dat kon ik dan ook laten gebeuren. Ik vond dit erg moeilijk om in 4 VWO zo in gang te zetten, omdat in deze korte tijd leerlingen aan me bleven trekken voor wat betreft de uitleg, of niet te enthousiasmeren waren, of stiekem toch met hun huiswerk bezig waren.

Er is dus veel meer voor nodig om een sfeer van 'lekker samen onderzoeken en elkaar helpen' te creëren. En die sleutel ligt voor een groot deel bij mij. Als je de rust echt ervaart, dan neem je ook nog de tijd om een opgave te controleren. Dit gebeurde helaas bij beide klassen erg weinig, zie ook de enquête en de D-toetsen. Waar ik blij verrast over was, was dat ik bij een latere toets in 4VWO

leerlingen zag, die bewust de afgeleide van een functie met behulp van de Grafische Rekenmachine gingen controleren.

Ik ontdekte dat, hoe tegennatuurlijk dat ook voor mij is, de leerlingen het snelst de nieuwe techniek van onderzoeken leerden, als ik **de leerlingen zelf de ruimte gaf** op het gebied van de weg naar de oplossing. Dus niet er bovenop hangen, maar ze lekker samen laten werken en bijna niet te reageren op hun verzoeken om uitleg.

Dit vond ik moeilijk!! Controle is in deze het aller-slechtste.

3. Flexibiliteit: Het antwoord doet er niet toe

De weg er naartoe wel! Ik bereikte veel meer door het stellen van **inspirerende vragen over die te nemen weg**, dan door het geven van het werkelijke antwoord (dat vaak op het puntje van mijn tong lag).

Toch vond ik de periode veel en veel te kort om echt een duidelijk effect van mijn 'afstandelijkheid' te bespeuren. Maar, belangrijker, voor mijzelf is vaak het antwoord ook nog erg belangrijk. Anders zou ik mijn lessen niet zo grondig voorbereiden. Wat ik echt heb nagelaten te doen is reflecteren op de gebruikte aanpak bij een opgave. Dit wordt genoemd: regulerende technieken. Samen terugkijken: hoe hebben we het nu eigenlijk aangepakt, wat ging goed, wat kon beter? Graag ga ik dit proberen toe te passen in de jaren die komen, want het is mijn volste overtuiging (mits kort en krachtig gedaan) dat leerlingen het meeste leren van terugkijken naar wat ze gedaan hebben. En dan zullen ze ook pas echt de waarde van controleren (zie enquête) in gaan zien.

Ook ben ik ervan overtuigd dat het boek onvoldoende ondersteunt in het doceren van heuristiek. Daarom heb ik een flink aantal problemen ontworpen of overgenomen, in aanvulling op het boek. Deze opgaven waren **interessante, complexe verhaaltjessommen**, waarbij de translatie van de opgave, of mathematisering, nodig was.

Gelukkig bleek (Enquête) dat ze dit soort opgaven (en puzzelen en proberen – enquête) ook wel kunnen waarderen. Ik denk ook dat daar veel motivatie door ontstaat.

Naast de extra opgaven hebben we in 3 en 4 VWO een paar keer een **'boek dicht' onderzoek** gedaan.

Dit werkt goed, op het moment dat we nog niet te ver in een nieuw onderwerp of hoofdstuk zitten. Het lijkt wel alsof, als je verder bent in de stof, het boek ze gepakt heeft en het bijna onmogelijk voor ze wordt om die 'bijbel' aan de kant te leggen.

Kernconclusie

Ik heb erg veel geleerd van dit Praktijk gericht Onderzoek. Het belangrijkste dat ik geleerd heb is (opnieuw) dat de klas is als een spiegel voor de docent. En in mijn geval betekent het dat ik moet gaan proberen om mijn perfectionisme te laten varen en meer ontspannen voor de klas komen te staan. Zelfs al is het een klas met een bepaalde sfeer en klassencultuur, waar ik onzeker van kan worden. Hoe meer ik mezelf kan zijn, met volkomen acceptatie van mezelf, hoe beter de interactie met een klas zal zijn en hun acceptatie van mij. En in het geval van heuristiek, hoe beter de voorbeeldrol van de docent wordt.

Mijn eerste onderzoeksvraag was: ***Wat is ervoor nodig om de weerstand van leerlingen tegen heuristiek te doorbreken?***

De antwoorden op deze vraag zijn:

1. ***Vertrouwen en motivatie bij de klas en de leerlingen, overgenomen van de docent***
2. ***Rust en ruimte voor de leerlingen, tijdens het leren van iets heel nieuws en anders dan de 'traditionele' wiskunde met regels en formules.***
3. ***Een omarmde principe: het antwoord is niet belangrijk.***

Het mag duidelijk zijn uit voorgaande reflecties dat in elk van deze 3 maatregelen mijn rol van docent en relatie met de klas cruciaal is. Ik kan nog zoveel vertrouwen, motivatie en rust uitstralen, als ze mij daar niet in accepteren en geloven, is het effect minimaal. Dat het antwoord niet van belang is, is ook iets dat ze door mij moeten gaan geloven en naar moeten gaan werken.

Dus voeg ik aan bovenstaand lijstje toe:

4. ***De rol van de docent en de relatie met de klas.***

De tweede onderzoeksvraag was:

Is er verschil in 3VWO en 4VWO?

Het was mijn vermoeden dat het leeftijdsverschil, of anders gezegd, de ontwikkeling van het puberbrein in verschillende leeftijdsfasen, ervoor zorgde dat het effect van het onderzoek verschillend was in de 3^e en de 4^e klas. Dit heeft ongetwijfeld een invloed, net als het verschil in tempo en abstract niveau in de leerjaren en andere verschillen. Maar, groter is de invloed van de interactie tussen klas en docent.

Om toch nog andere verschillen in beeld te brengen volgt mijn typering van de beide klassen:

A3B	4VWO
<p>Veel extraverte leerlingen, gezellige klas, wiskunde A en B leerlingen nog door elkaar, onderwerpen door elkaar (H8 allerlei verbanden) en dus succeservaring op verschillende onderwerpen, midden in de puberteit en sensitief, 3^e leerjaar niet extreem hoog werktempo, groot gevecht in begin van het jaar nodig gehad voor acceptatie, veel individuele gesprekken met leerling/ouders gehad, intensieve begeleiding wiskunde C/A/B/D keuze, steeds betere cijfers, steeds betere relatie</p> <p>Grote acceptatie van de docent</p>	<p>Kleinere klas, veel introverte leerlingen, weinig contact met de leerlingen (ook door eigen onzekerheid), wiskunde B, dus hoog niveau, 4^e leerjaar erg hoog werktempo, onderwerp differentiaalrekening, dus eenzijdig onderwerp en succeservaring in één wiskundedomein, slechte resultaten, gedurende het hele jaar sterke parallelklassen met ervaren wiskundedocenten voor de klas, wel poging gedaan tot gesprek met de klas, maar weinig reactie, verder in de puberteit, meer zelfstandig.</p> <p>Geen grote acceptatie van de docent</p>

Ik zal moeten wennen aan het feit dat elke klas weer anders is en dat het me niet altijd zal lukken om een ontspannen, geaccepteerde verhouding met iedere klas en elke leerling te krijgen. Ik denk dat met dit voornemen al heel veel gewonnen is. Daarnaast zie ik, als ik teruglees veel aanknopingspunten om de heuristiek 'aan de man te brengen' tijdens de wiskundelessen. Ik ga me verdiepen in hoe ik heuristiek meer nog dan dit jaar in mijn lessen een plek kan geven en wat ervoor nodig is om steeds meer aandacht te gaan geven in ons curriculum aan probleem oplossen en misschien zelfs modelleren.

Ik dank Joke Daemen hartelijk voor het feit dat zij mij zo duidelijk een spiegel heeft voorgehouden. Dankzij haar reflecties is mij helder geworden waar de kern van mijn conclusies en ontwikkeling ligt.

Anne-Marie van Soelen

28 juni 2010

Bijlage 1 Lesplanning klas A3B

Les	Datum	Opgaven	Onderwerp	lesonderdelen
1	18/5	55 t/m 57 (huiswerk + G.O. 29, 30)	<ul style="list-style-type: none"> Intro Probleemoplossen Translaties 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Introductie heuristiek, incl voorbeeld opgave met probleemoplossen, <u>exponentieel #3</u> 2. <u>Translaties #1</u>: Boek dicht onderzoek
2	20/5	58 t/m 65	<ul style="list-style-type: none"> Extreme waarden in geval van translatie, toegelicht met een schets 	<ol style="list-style-type: none"> 1. <u>Translaties #2</u> : extreme waarden van $x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 1$, toewerken naar $f(x) = 7(x - 2)^2 - 3$? (58) 2. <u>Translaties #4</u> : bal wegtrappen
3	20/5	Start Gemengde Opgaven Maken G.O. 31, 32, 33 (thuis evt 29, 30)	<ul style="list-style-type: none"> Exponentiele groei 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Terugkomen <u>exponentieel #3</u>: Matthijs en studeren. 2. <u>Exponentieel #1</u>: konijnen
4	21/5	Maken G.O. 34, 35 Thuis 36, 37, 38, 39	<ul style="list-style-type: none"> Periodieke verbanden 	<ol style="list-style-type: none"> 1. <u>Periodiek #1</u>: Stijn wil uit het reuzenrad springen. 2. <u>Periodiek #2</u>: Periode reuzenrad 3. (<u>Periodiek #2</u>: Vuurtoren, uitgekleed)
1	25/5	G.O. (40) 41 t/m 43	<ul style="list-style-type: none"> Machten Translaties Extreme waarden bij translatie 	<ol style="list-style-type: none"> 1. G.O. 36 machten en <u>Exponentieel #2</u>: machten 2. <u>Translaties #5</u> : +c, top op x-as.
2	27/5	Afronding Heuristiek	D-toets en enquête	<p>Twee opgaven: periodiek en exponentieel/extreme waarden</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. <u>Exponentieel #4</u>: kip in/uit koelkast 2. <u>Translaties #3</u>: symmetrie en top OF <u>Extremes waarden en Machten #1</u>: berg wandelen
3	27/5	Laatste les	<ul style="list-style-type: none"> Vragen 	Laatste vragen voor de toets

Opgaven 3 VWO

1. Translaties #1 'Boek dicht' onderzoek: Onderzoeken van verschil

$$f(x) = x^2 \text{ en } g(x) = (x-2)^2 \text{ en } k(x) = (x+2)^2.$$

- Onderzoek verschil $f(x) = x^2$ en $g(x) = x^2 - 4x + 4$ met schets en tabel
- Schets de functies f, g en k zonder rekenmachine.
- Grafiek van $0,1x^3$ wordt verschoven:
 - 3 omlaag
 - 15 naar rechts
 - 7 naar links
 - 2 omhoog

Wat is de beeldgrafiek? Toetsen met een getal invullen, schets maken etc..

2. Translaties #2 'Boek dicht' onderzoek: Onderzoeken wat de extreme waarden zijn bij $f(x) = a(x-b)^2 + c$. Onderzoek naar symmetrie en schatting van top, voordat theorie bekend is.

- Beginnen met eenvoudige functie: $x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 1$
- Daarna vergelijken met $x^2 - 4x + 2 = (x-2)^2 - 2$
- En met $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$ Of net andersom?

3. Translaties #3: Voor tweedegraads functie f geldt $f(-4)=3$ en $f(2)=3$.

Wat kunnen de coördinaten v/d top zijn?

4. Translaties #4 (opgave 60 omgevormd) Rob trapt een bal weg, vanaf de grond dus op hoogte 0, de bal komt maximaal 4,50 meter hoog en hij komt op 30 meter weer op de grond.

- Wat is de formule die bij de baan van de bal hoort?

Klaas trapt even ver, maar de bal zit overal twee keer zo hoog.

- Geef de formule van de baan van de bal bij Klaas.

5. Translaties #5: Een aantal parabolen heeft een vergelijking van de vorm $y = x^2 - 8x + c$. Eén van die parabolen heeft de top op de x-as liggen. Welke waarde heeft c dan?

6. Extreme waarden en Machten #1: Loes is wiskundige en is tijdens haar vakantie in de bergen aan het wandelen. Vandaag beklimt ze de Monte Rosa. Ze weet dat ze na 1,5 uur lopen op een plateau op 850 meter hoogte uitkomt, waar ze even kan uitrusten van de steile klim.

Daarna zal de klim weer verder gaan. Deze berg is steiler dan de Monte Verde die ze de dag ervoor beklommen had. Ze heeft gisteren haar wandeling geschetst op papier en er een functie $f(x)$ bij bepaald. De vorm van die berg was te formuleren in een machtsfunctie met macht 6. Welke van onderstaande functies past het beste bij de vorm van de Monte Rosa?

- a. $f(x) = -x^8 + 5$
 - b. $5(x - 1,5)^7 + 0,85$
 - c. $-4(x - 1,5)^7 + 0,85$
 - d. $5(x + 1,5)^5 + 0,85$
7. Exponentiele groei #1: Konijnen vermenigvuldigen zich, met 2 begonnen, 4 weken draagtijd, gemiddeld nest van 5 konijnen.
- a. Wat is de groeifactor per $T =$ draagtijd periode?
 - b. Hoeveel konijntjes zijn er na 16 weken?
 - c. Wat is de groeifactor per $t = 8$ weken?
 - d. Hoeveel konijntjes zijn er gemiddeld na 11 weken?
8. Exponentiele groei #2: Welke van de beweringen hieronder is juist:
- a. $2^3 \cdot 2^4 = 2^7$
 - b. $2^3 + 2^4 = 2^7$
 - c. $2^3 \cdot 2^4 = 4^7$
 - d. $2^3 \cdot 2^4 = 2^{12}$
 - e. $2^3 + 3 \cdot 2^3 = 4 \cdot 2^3$

9. Exponentiele groei #3: Matthijs en studeren

Matthijs is 12 jaar. Zijn peetoom Eddy voorziet dat hij 4 jaar universitaire studies gaat volgen en wil zijn steentje bijdragen. Welk bedrag moet peetoom Eddy nu opzij zetten tegen een rentepercentage van 3 % zodat hij Matthijs vanaf zijn 18e verjaardag tot en met zijn 21^e verjaardag telkens 2500 EUR kan geven?



10. Exponentiele groei #4: Een bacteriekolonie gedijt goed op een stukje kipfilet, dat een paar uur in de boodschappentas buiten de koelkast blijft liggen. Op $t=0$ zijn er 200 bacteriën en dat aantal groeit met 120% elke twee uur.
- a. Bepaal de groeifactor per uur, in 2 decimalen. Stel een formule op voor de groei van het aantal bacteriën per uur.

Na 3 uur, worden de boodschappen in de koelkast gelegd en daarna groeit het aantal bacteriën per uur nog steeds exponentieel, maar nu met 25% ieder uur. Na een aantal uren in de koelkast wordt gemeten dat er nu 5000 bacteriën op het stukje kipfilet zitten.

- b. Hoeveel bacteriën zouden er op de kip zitten na 10 uur als die direct in de koelkast gelegd zou zijn?
- c. Hoe lang heeft in bovenstaande situatie de kip in de koelkast gelegen?

11. **Periodiek #1:** Stijn zit in een reuzenrad op de kermis. Het reuzenrad heeft diameter van 16 meter, met de as op 9 meter hoogte. Na 8 seconde na beginnen met draaien zit Stijn op 9 meter hoogte. Na 62 seconden te hebben gedraaid, valt de stroom uit. Onderzoek of Stijn veilig uit het reuzenrad kan springen. Ga uit van een veilige hoogte van 2,5 meter en beargumenteer je antwoord.

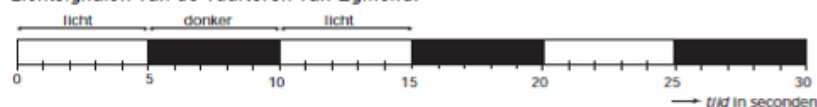
12. **Periodiek #2:** Op de kermis staan een minirad en een reuzenrad. Het minirad draait in een periode van 30 seconde één keer rond. Het reuzenrad heeft een langere periode. Op $t=0$ stapt Linde in het reuzenrad en Floor in het minirad. Na precies 4,5 minuut zijn ze allebei weer tegelijk beneden. Hoe groot is de periode van het reuzenrad?

13. **Periodiek #3:** Een vuurtoren zendt 's nachts lichtsignalen uit waardoor schepen hun plaats kunnen bepalen. Iedere vuurtoren doet dat op een eigen manier. Het uitzenden van lichtsignalen is een periodiek verschijnsel.

Hieronder zie je vier voorbeelden van lichtsignalen van verschillende vuurtorens. Bij een witte rechthoek kunnen de schepen het lichtsignaal zien en bij een zwarte rechthoek is het donker.



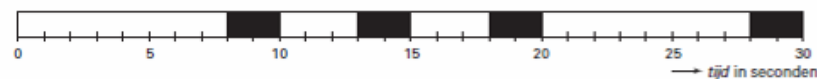
Lichtsignalen van de vuurtoren van Egmond.



Lichtsignalen van één van de vuurtorens van IJmuiden.



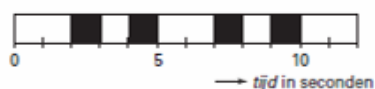
Lichtsignalen van de vuurtoren van Noordwijk.



Lichtsignalen van de vuurtoren van Schouwen.

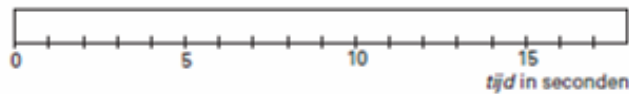
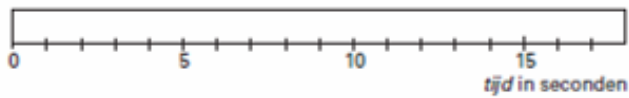
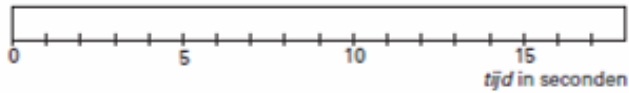


Hieronder zie je de lichtsignalen die een andere vuurtoren uitzendt. Deze vuurtoren zendt lichtsignalen van twee en één seconden uit.

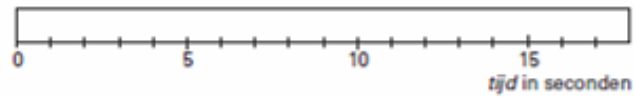


- Hoeveel seconden duurt één periode van deze vuurtoren?
- Theo beweert dat deze vuurtoren in één minuut 25 lichtsignalen uitzendt. Laat zien dat Theo ongelijk heeft.
- Weer een andere vuurtoren zendt drie lichtsignalen in een periode van negen seconden uit. Teken op het blad twee periodes van de lichtsignalen die bij deze vuurtoren zouden kunnen horen.

Deze drie tekeningen zijn om te proberen:



Deze tekening is definitief:



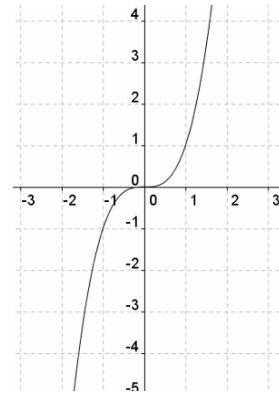
Bijlage 2 Lesplanning 4 VWO

Les	Datum	Opgaven	Onderwerp	lesonderdelen
1	18/5	1 t/m 6	<ul style="list-style-type: none"> Intro Probleemoplossen Concept afgeleide Productregel/ quotientregel 	<ol style="list-style-type: none"> Introductie heuristiek, incl voorbeeld opgave met probleemoplossen, Opgave afgeleide en differentiequotient: geneesmiddelen <u>Afgeleide machtsfunctie #1</u> <u>Productregel #1</u>: boek dicht onderzoek
2	20/5	Voorbereiding toets H 6 goniometrie		
3	21/5	7 t/m 15	<ul style="list-style-type: none"> Herhaling quotientregel Afgeleide x^n gehele n 	<ol style="list-style-type: none"> <u>Quotiëntregel #1, opgave 8</u>
4	21/5	16 t/m 20	<ul style="list-style-type: none"> Afgeleide x^n gebroken n Raaklijnen start 	<ol style="list-style-type: none"> Afgeleide machtsfunctie #2: $y=x$ (afgeleide x^n hele n) Afgeleide en raaklijn #1: goederentrein
1	25/5	21 t/m 24	<ul style="list-style-type: none"> Raaklijnen Snelheid 	<ol style="list-style-type: none"> Basistechnieken ax^n en differentieren. Opg 23 raaklijnen opp ΔOAB Opgave 24, Opgave met snelheden
2	27/5	25 t/m 28	<ul style="list-style-type: none"> Kettingregel 	<ol style="list-style-type: none"> Raaklijnen, afgeleide gebroken, wortel functie $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ Kettingregel #1: Boek dicht onderzoek: Eenvoudige samengestelde functies
3/4	28/5	29 t/m 35	<ul style="list-style-type: none"> Kettingregel + product-/quotientregel 	<ol style="list-style-type: none"> Opgave Luuk: Man op loopband op Schiphol, hoe snel verandert afstand? Opgave 29b uit boek: ketting functie met horizontale raaklijn. Bereken coördinaten van dat punt. Afgeleide principe en toppen #3: gedrag

				4. Opgave afgeleide en toppen Dagkaarten NS
1	01/6	36 t/m 40	• Extreme waarde $f'=0$	1. Afgeleide en toppen #1: vuurpijl 2. Opgave Joke? Kaarsen branden 3. Afgeleide en toppen #2: $f'(x)=x(x-1)(x+2)$
2	03/6		• D-toets en enquête	4. Raaklijn #1: evenwijdige raaklijnen, $x=k$? OF 5. Opgave oppervlakte minimaliseren Groenteblik 6. Examenopgave brandstofverbruik

Opgaven 4 VWO

1. Afgeleide machtsfunctie #1: Gegeven is de functie $f(x)=x^3$. Wat is de steilheid in het punt (1,1)?
2. Productregel #1 'boek dicht' onderzoek: bepaal de afgeleide van de volgende functies:
 - a. $x = 1 \cdot x \rightarrow 1 = 0 + 1$
 - b. $x^2 = x \cdot x \rightarrow 2x = x + x, x \rightarrow 1$
 - c. $x^3 = x \cdot x^2 \rightarrow 3x^2 = x^2 + 2x^2$
 - d. $6x^2 = 3x \cdot 2x \rightarrow 12x = 6x + 6x = 3 \cdot 2x + 3x \cdot 2$
 - e. $(x+2)(x+3) = x^2 + 5x + 6 \rightarrow 2x + 5 = (x+2) + (x+3)$
 - f. $x = x^2 \cdot x^{-1} \rightarrow 1 = 2 \cdot 1 = 2x \cdot x^{-1} + x^2 \cdot -x^{-2}$



Kom door het onderzoeken tot een algemene formulering van de afgeleide van het product van 2 functies.

3. Quotiëntregel #1, opgave 8: Gegeven is functie $f(x) = \frac{2x-5}{x^2-4}$. De grafiek van f snijdt de y -as in het punt a en de x -as in het punt B . Onderzoek langs algebraïsche weg of de volgende bewering waar is: 'De raaklijn k van de grafiek in A snijdt de grafiek in B '.
4. Kettingregel #1 'boek dicht' onderzoek: bepaal de afgeleide van de volgende functies:
 - a. $x^6 = (x^3)^2 \rightarrow 6x^5 = 2x^3 \cdot 3x^2$
 - b. $4x^2 = (2x)^2 \rightarrow 8x = 2 \cdot 2x \cdot 2$
 - c. $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2 \rightarrow 2x+6 = 2(x+3) \cdot 1$

Herken je het deel tussen haakjes van de oorspronkelijke functie in de afgeleide. Schrijf de afgeleide eens om tot die vorm waarin dat deel weer te zien is. Bijvoorbeeld:

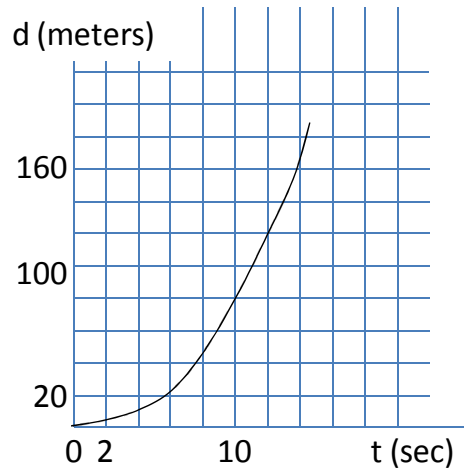
$$\text{Neem } f(x) = (x^4)^2 = x^8, \quad f'(x) = 8x^7 = 2 \cdot \underline{x^4} \cdot 4x^3$$

5. Afgeleide en raaklijn principe #1: De goederentrein trekt op vanuit stilstand. De afgelegde weg $d(t)$ in meters is een functie van de tijd t in seconden.

De grafiek van $d(t)$ is in de figuur getekend. Op het tijdstip $t=10$ raakt de achterste wagon los en rijdt nog 3 seconden met dezelfde snelheid door. Daarna remt hij af.

- a. Teken in het assenstelsel vanaf het moment $t=10$ een mogelijke grafiek van de verdere beweging van die achterste wagon. Licht de grafiek toe met een verhaaltje.

- b. Schat de snelheid van de trein op het moment dat de wagon losschiet.
6. Afgeleide en toppen #1: Een vuurpijl wordt verticaal omhoog geschoten. De hoogte s in meters na t seconden wordt vastgelegd door de formule $s=10t-t^2$. Marieke staat naar het vuurwerk te kijken vanaf haar dakterras en moet over een flatgebouw van 21 meter hoog heen kijken.



- a. Onderbouw met een tekening dat Marieke de vuurpijl ziet.
- b. Zo ja, hoeveel seconden kan zij van de vuurpijl genieten?
7. Afgeleide en toppen #2: Gegeven is de functie met als afgeleide $f'(x)=x(x-1)(x+2)$. Voor welke waarde(n) van x heeft f een top?
8. Afgeleide principe en toppen #3: Van een differentieerbare functie f met domein $[a, b]$ is $f'(2)=0$. Op het interval $[a, b]$ is het tekenverloop van $f'(x)$ gegeven.

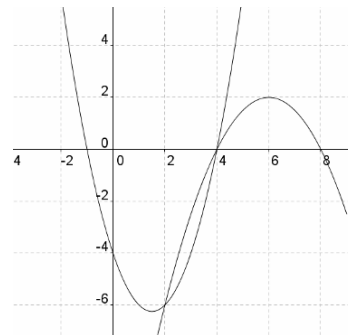
$f(x)$	-----	0	++++++
x	a	2	b

Beschrijf het gedrag van f als x toeneemt van a naar b .

9. Opgave afgeleide en toppen #4: De Nederlandse Spoorwegen levert aan grote bedrijven en instellingen in voorverkoop (ongestempelde) dagkaarten tegen een gereduceerde prijs. Jaarlijks wordt die reductie opnieuw vastgesteld. De NS heeft ontdekt, dat de jaarlijkse verkoop aan een bepaalde universiteit sterk afhangt van de hoogte van de reducties. Bij een reductie van 10 euro op de volle prijs van 75 euro van een dagkaart eerste klas worden 5000 dagkaarten per jaar afgenomen. Voor elke euro, dat de prijs verder zakt, worden ruw geschat 100 dagkaarten per jaar meer verkocht.

Bij welke gereduceerde prijs van een dagkaart is volgens dit model de opbrengst van de NS maximaal?

10. Raaklijnen #1: Gegeven zijn de functies f en g met $f(x)=-0,5x^2+6x-16$ en $g(x)=x^2-3x-4$. De grafieken van f en g zijn in het assenstelsel getekend. De lijn $x=k$ snijdt de grafiek van f in A en de grafiek van g in B .



Voor welke waarde van k lopen de raaklijnen aan de grafieken van f en g in de punten A en B evenwijdig?

11. Afgeleide machtsfunctie #2: De grafiek van $f(x)=x^3-3x^2+ax+b$ raakt de lijn $y=x$ in de oorsprong $(0,0)$. Bereken a en b .

12. Opgave afgeleide en differentiequotiënt: Een patiënt krijgt eenmalig 500 mg van een bepaald geneesmiddel toegediend. De hoeveelheid geneesmiddel in zijn lichaam neemt dagelijks exponentieel af met 15 %.

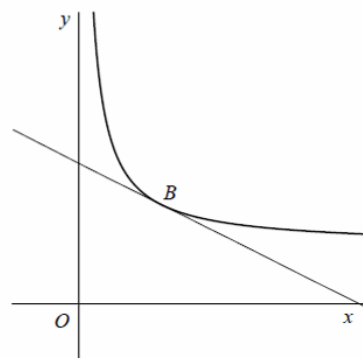


Met welke snelheid (uitgedrukt in mg per uur) wordt het geneesmiddel direct na inname in het lichaam afgebroken? En wat is die snelheid precies 1 dag later?

13. Raaklijnen, afgeleide gebroken functie: De functie $f(x)$ is gegeven door $f(x) = \frac{1}{x} + 1$ met $x > 0$.

De raaklijn aan de grafiek van f in een punt B heeft een richtingscoëfficiënt van $-\frac{1}{2}$.
Zie figuur 2.
Bereken exact de x -coördinaat van punt B in deze situatie.

figuur 2



14. Zoals opgave 12, met $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$, (dus $f'(x) = \frac{x+1}{2x\sqrt{x}}$), raaklijn aan de grafiek in een punt A heeft een richtingscoëfficiënt van $\frac{3}{4\sqrt{2}}$. Bereken exact de formule voor de raaklijn.

15. Differentiëren quotiëntregel, examenopgave Brandstofverbruik
16. Optimaliseren opgave uit 5VWO wiskunde A boek: minimaliseren van hoeveelheid materiaal benodigd voor een **groenteblik**, bij een gegeven inhoud, als functie van de straal r .

Bijlage 3 Toetsing Heuristiek 3 en 4VWO

Twee oefenopgaven in het 'probleemoplossen' (3VWO)



Maak deze opgaven met behulp van de onderzoeksmethoden DOGS, die je geleerd hebt. Laat je uitwerkingen zien op een *kladblaadje* en lever dat kladblaadje ook in.

Alleen antwoorden worden niet geaccepteerd.

Veel plezier met puzzelen!!

1. BACTERIEKOLONIE

Een bacteriekolonie gedijt goed op een stukje kipfilet, dat een paar uur in de boodschappentas buiten de koelkast blijft liggen. Het aantal bacteriën groeit dan met 120% elk uur.

Na 3 uur, worden de boodschappen in de koelkast gelegd en daarna groeit het aantal bacteriën per uur nog steeds exponentieel, maar nu met 25% ieder uur. Na 5 uur in de koelkast wordt gemeten dat er nu 3600 bacteriën op het stukje kipfilet zitten.

Hoeveel bacteriën zaten er op het stukje kipfilet op $t=0$?

- a. 36 b. 111 c. 604 d. 7

2. BERGWANDELEN

Loes is wiskundige en is tijdens haar vakantie in de bergen aan het wandelen. Vandaag beklimt ze de Monte Rosa. Ze weet dat ze na 1,5 uur lopen op een plateau op 850 meter hoogte uitkomt, waar ze even kan uitrusten van de steile klim. Daarna zal de klim weer verder gaan. Deze berg is steiler dan de Monte Verde die ze de dag ervoor beklommen had. Ze heeft gisteren haar wandeling geschetst op papier en er een functie $f(x)$ bij bepaald. De vorm van die berg was te formuleren in een machtsfunctie met macht 6. Welke van onderstaande functies past het beste bij de vorm van de Monte Rosa?

- e. $f(x) = -x^8 + 5$ b. $5(x-1,5)^7 + 0,85$ c. $-4(x-1,5)^7 + 0,85$ d. $5(x+1,5)^5 + 0,85$

EINDE

Reflectie toets Probleemoplossen 3VWO

Opgave 1 Bacteriekolonie

terug redeneren	Maxime, Bart, Laura, Marten
Eigen woorden herhalen	Maxime, Laura, Marten, tijs (verkeerd overgenomen), Robin (verkeerd, maar formule goed!), Bart deW (totaal 8 uur)
Schets (tijdlijn)	Marjelle, Michelle, Lianne, Bart, Laura, Inez, Elsemieke, Rutger, Marten, Daphne, Tijs, Robin, Mayke, rik
Met getallen rekenen	Maxime, Michelle, Marjelle, Lianne, Bart, Inez & Elsemieke (lineair), Daphne, Menno (lineair), daniel s, anna, mayke, rik
Met getallen onderzoeken	Marten (+controle als antw niet voorkomt), Bart de W (1,025)
Alleen berekening	Elise, Menno, mark
Klad doorstrepen	Elise, Marten, Bart de W, elliot, manon
Alleen antwoord	Elliot
Geen/fout antwoord	Manon, Menno, Robin, tijs, michelle

Opgave 2 Bergwandelen

Eigen woorden herhalen	Maxime, Bart (ze staat even stil), Tijs (ze neemt rust), Robin (stukje rust = stukje recht), Bart de W (Monte Rosa)
Schets	Maxime, Michelle, Lianne, Bart (schets van $-x^8$, met tabel), Laura (schets van c), Inez, Elsemieke, Marten, Tijs & Robin (verschuiven), Daniel deV, daniel s (wat is een plateau?) Mark (Monte Rosa en Monte Verde geschetst), Manon, Anna
Bekend probleem	Maxime (Schets van standaard grafiek), Rutger (a is dalparabool en d heeft te lage macht) Marten (top bij $a(x-p)^n+q$ geeft negatieve tijd)
Terug redeneren	Lianne, Bart (ant b of d), Daniel de V, Tijs, Laura, rutger Bart de W (d kan niet want dan ligt de top in de grond..?), daniel s
Met getallen onderzoeken	Bart, Inez, Elsemieke, Daniel deV(waarde $x=1$ invullen in b en c/d: welke steiler), daniel s ($x=1.5$, 2 invullen) Rutger (getal in overgebleven antwoorden invullen), Daphne ($t=1,5$ invullen), mark ($850/1.5=566\frac{2}{3}$ m/u, 1.5^6 en 0.85^6), mayke
Stelselmatig onderzoeken/redeneren	elliot
Geen schets	Daphne, Bart de W, elliot, Menno, mayke
Geen/fout antwoord	Mayke, rik, Menno, daphne, Elise, michelle,

Two oefenopgaven in het 'probleemoplossen' (4VWO)

Maak deze opgaven met behulp van de onderzoeksmethoden DOGS, die je geleerd hebt. Laat je uitwerkingen zien op een *kladblaadje* en lever dat kladblaadje ook in.

Alleen antwoorden worden niet geaccepteerd. Veel plezier met puzzelen!!



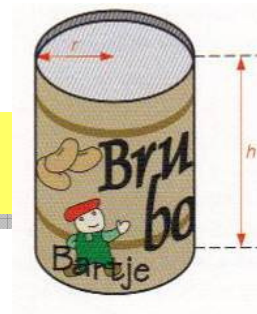
1. GROENTEBLIK

Een groenteblik heeft een inhoud van 1 liter (= 1000 cm³). We gaan onderzoeken bij welke afmetingen van zo'n blik het benodigde materiaal minimaal is. Stel de hoogte is h cm en de straal is r cm. Zie figuur.

- a. Toon aan dat de totale oppervlakte van het materiaal dat nodig is voor het blik gelijk is

$$\text{aan: } O = 2\pi \cdot r^2 + \frac{2000}{r}$$

Van een cirkel is de oppervlakte = $\pi \cdot r^2$
omtrek = $2\pi \cdot r$

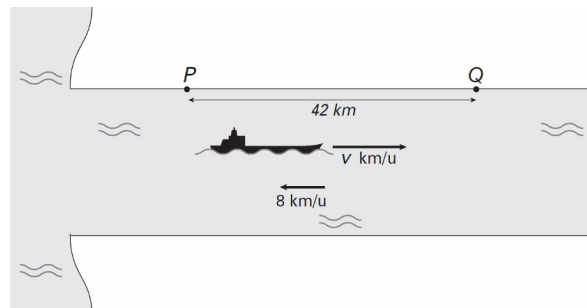


- b. Bereken algebraïsch bij welke afmetingen van het blik het benodigde materiaal minimaal is. Rond af op mm.

2. BRANDSTOFVERBRUIK

Een schip maakt een tocht over een rivier van P naar Q en terug. De afstand tussen P en Q is 42 km. Van P naar Q vaart het schip tegen de stroom in (stroomopwaarts); op de terugreis vaart het met de stroom mee (stroomafwaarts).

De snelheid van het schip ten opzichte van de wal hangt af van de stroomsnelheid van het water en van de snelheid v van het schip ten opzichte van het water; hierbij is v in km/u. De stroomsnelheid van het water is 8 km/u. Zie de figuur, waarin de tocht van P naar Q is weergegeven. Veronderstel $v = 20$.



- a. Toon aan dat de tocht van P naar Q en terug dan 5 uur duurt.

Het brandstofverbruik B op het deel van de tocht stroomopwaarts hangt af van de vaartijd T (in uren) en van de snelheid v (in km/u) van het schip ten opzichte van het water. Er geldt: $B = T \cdot v^3$

Voor het deel van de tocht stroomopwaarts geldt: $B = \frac{42v^3}{v-8}$.

- b. Toon deze laatste formule aan.

- c. Bereken algebraïsch bij welke waarde van v het brandstofverbruik minimaal is voor het deel van de tocht stroomopwaarts.

Reflectie toets Probleemoplossen 4VWO

Opgave 1 Groenteblik a

terug redeneren	Isabella + timo, mirjam+ronald (vanuit het antwoord dan $2\pi rh=2000/r$)
Eigen woorden herhalen	Zohra (je moet van cm^3 naar cm^2 , opp nodig), melanie (je wilt naar cm^2), Fleur (inhoud = h.opp 'rondje'), Heleen, emma, Marit, peter, paul, anna (duidelijk inhoud vs opp) William+harmen (je hebt 2 rondjes, dus...)
Schets	Zohra, melanie, Julia+thijs, isabella+timo, fleur, heleen, emma, Marit, mirjam+ronald,
Met getallen rekenen	
Met getallen/voorbeeld onderzoeken	Zohra ($(5x).x^2$, cm^2 naar cm^3), melanie (idem)
controle	Julia+thijs ($h=1.29$ bij $r=15.7?$), emma, mirjam (berekent antwoord r)
Geen/fout antwoord	Zohra, isabella + timo, fleur

Opgave 1 Groenteblik b oppervlakte minimaliseren

Eigen woorden herhalen	Niels (wanneer is $2\pi r^2+2000/r$ het kleinst), Julia+Thijs (top \rightarrow afgeleide =0)
Schets (formule)	William+Harmen(Vierkant h bij $2\pi r = 1000?$, dalparabool
Met getallen/voorbeeld onderzoeken	Zohra ($(5x).x^2$, cm^2 naar cm^3), Marit (hoe groot is opp bij $r=2$ en $r=5$)!!
Geen/fout antwoord	Niels, zohra,

Opgave 2 Brandstofverbruik

Eigen woorden herhalen	Heleen (PQ=42km)
Schets	melanie
Goed antwoord	Menno (2a)

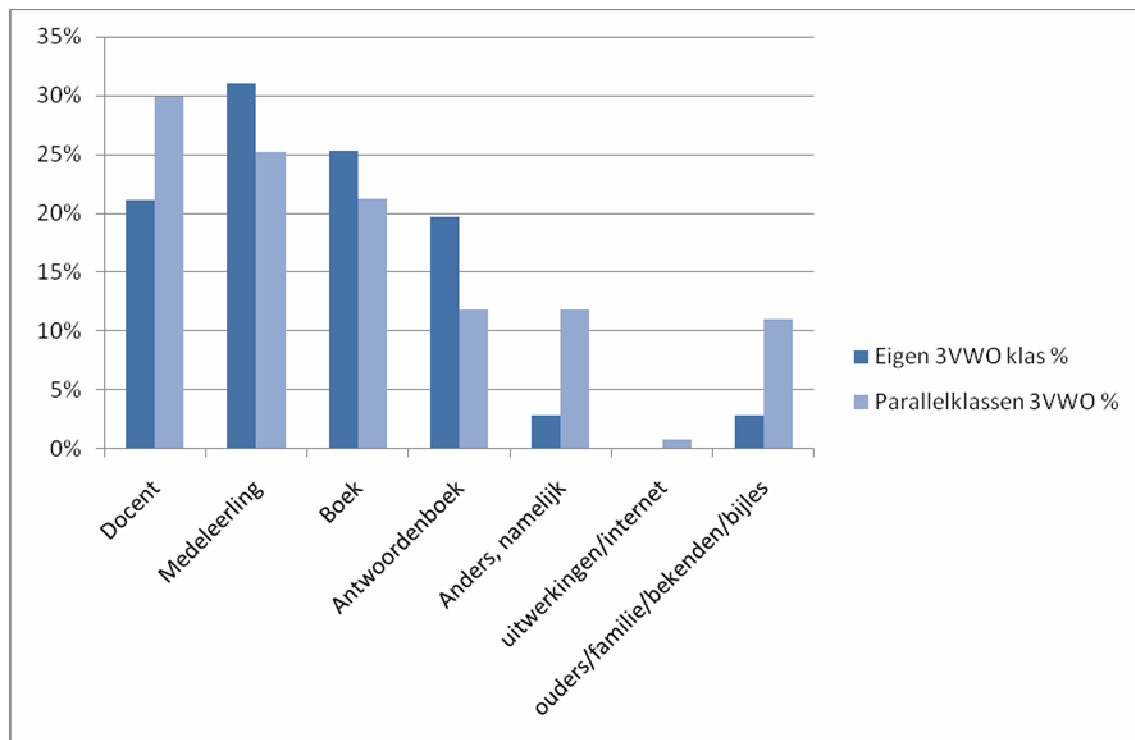
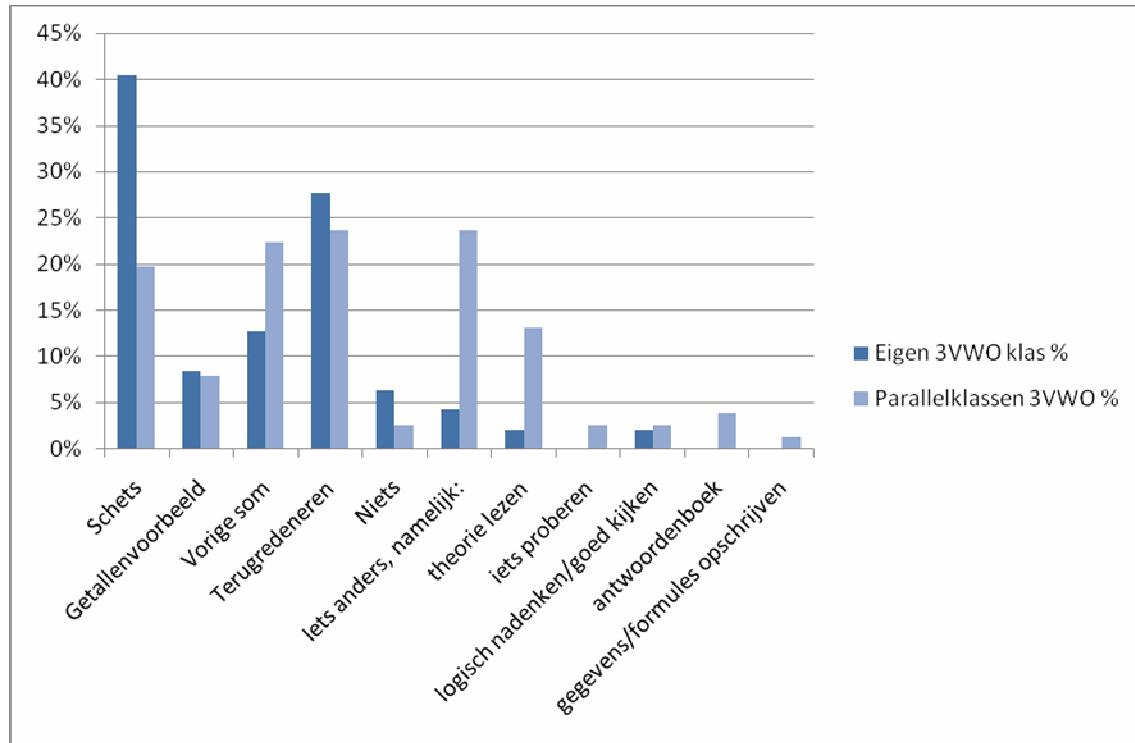
Bijlage 4 Meting 3VWO en 4VWO 'Weerstand tegen heuristiek'

Wil je de moeite nemen om de volgende vragen te beantwoorden? **Dankjewel!**
Meerdere antwoorden zijn mogelijk.

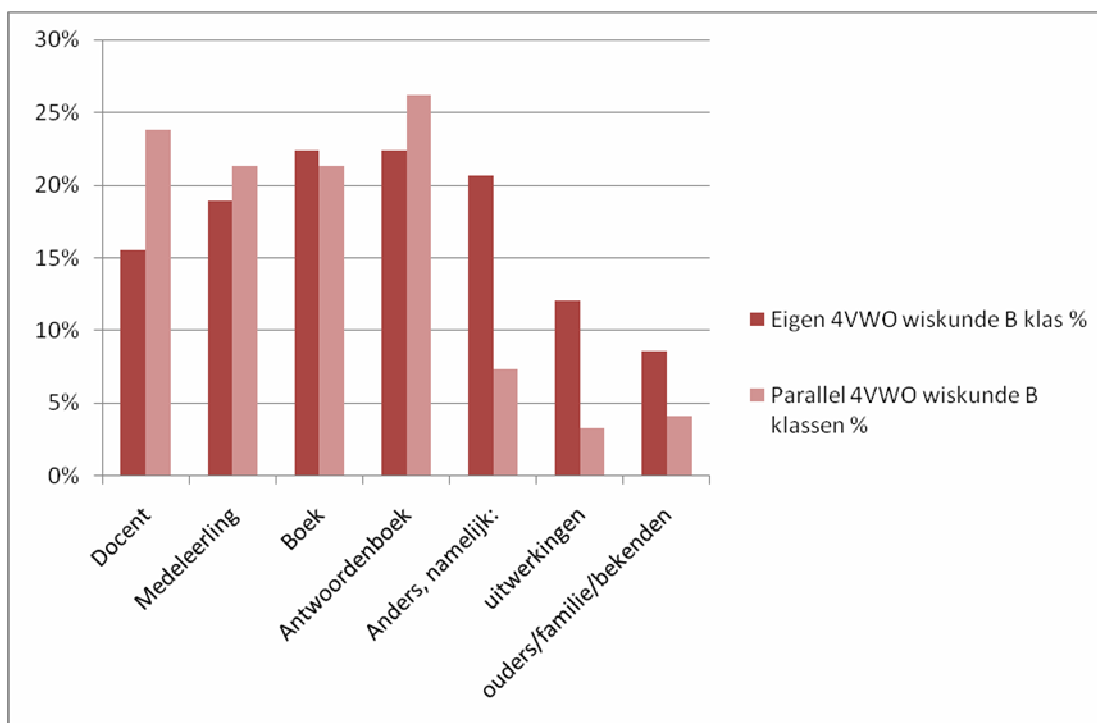
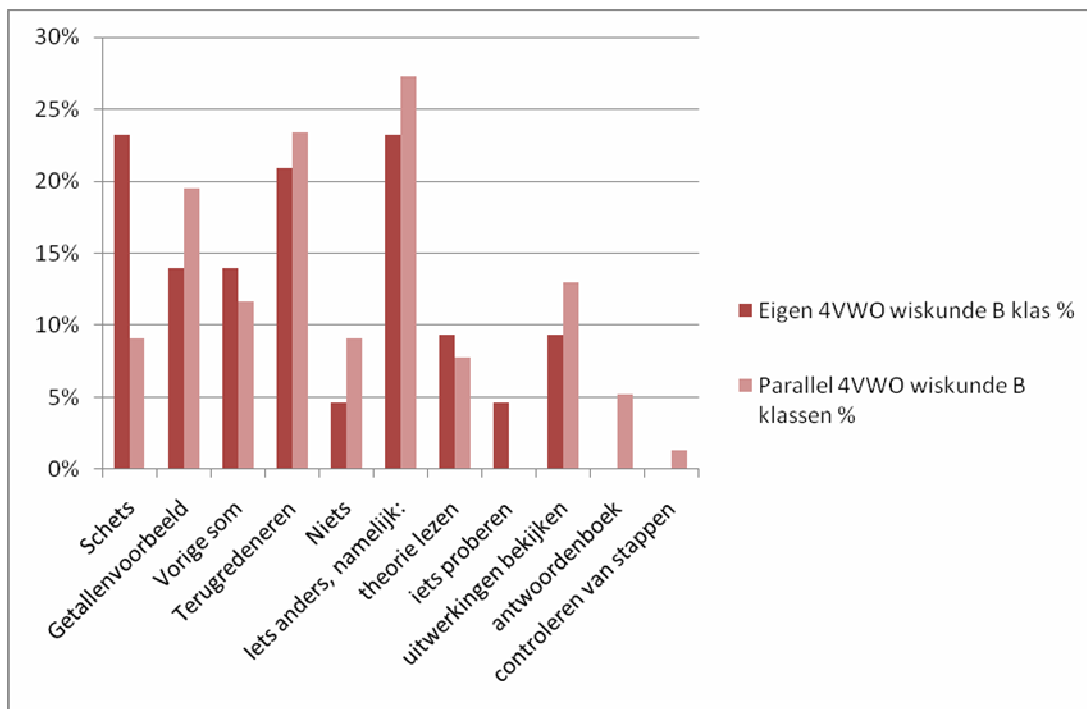
<p>Als ik een wiskunde opgave niet kan oplossen, dan probeer ik:</p>	<ul style="list-style-type: none"> <input type="checkbox"/> een schets <input type="checkbox"/> een getallenvoorbeeld <input type="checkbox"/> een vorige som <input type="checkbox"/> terugredeneren <input type="checkbox"/> niets <input type="checkbox"/> anders, nl. ...
<p>Als ik hulp zoek bij een wiskunde opgave, dan raadpleeg ik:</p>	<ul style="list-style-type: none"> <input type="checkbox"/> De docent <input type="checkbox"/> Een medeleerling <input type="checkbox"/> Het boek <input type="checkbox"/> Het antwoordenboek <input type="checkbox"/> Anders, nl.

Resultaten Meting 'Weerstand tegen heuristiek'

3VWO klassen



4VWO klassen



Ruwe data Meting Weerstand Heuristiek 3VWO	Eigen	Eigen	3VWO	Parallelklassen	Parallelklassen	3VWO andere
	3VWO klas	3VWO klas %	eigen totaal	3VWO	3VWO %	totaal
Schets	19	40%	47	15	20%	76
Getallenvoorbeeld	4	9%	47	6	8%	76
Vorige som	6	13%	47	17	22%	76
Terugredeneren	13	28%	47	18	24%	76
Niets	3	6%	47	2	3%	76
Iets anders, namelijk:	2	4%	47	18	24%	76
	47			76		
theorie lezen	1	2%	47	10	13%	76
iets proberen		0%	47	2	3%	76
logisch nadenken/goed kijken	1	2%	47	2	3%	76
antwoordenboek				3	4%	76
gegevens/formules opschrijven				1	1%	76
Docent	15	21%	71	38	30%	127
Medeleerling	22	31%	71	32	25%	127
Boek	18	25%	71	27	21%	127
Antwoordenboek	14	20%	71	15	12%	127
Anders, namelijk	2	3%	71	15	12%	127
	71			127		
uitwerkingen/internet		0%	71	1	1%	127
ouders/familie/bekenden/bijles	2	3%	71	14	11%	127

Ruwe data Meting Weerstand Heuristiek 4VWO	Eigen 4VWO	Eigen 4VWO wiskunde B klas %	4VWO eigen totaal	Parallel 4VWO klassen	Parallel 4VWO wiskunde B klassen %	Parallel 4VWO totaal
	Schets	10	23%	43	7	9%
Getallenvoorbeeld	6	14%	43	15	19%	77
Vorige som	6	14%	43	9	12%	77
Terugredeneren	9	21%	43	18	23%	77
Niets	2	5%	43	7	9%	77
Iets anders, namelijk:	10	23%	43	21	27%	77
	43			77		
theorie lezen	4	9%	43	6	8%	77
iets proberen	2	5%	43			
uitwerkingen bekijken	4	9%	43	10	13%	77
antwoordenboek				4	5%	77
controleren van stappen				1	1%	77
Docent	9	16%	58	29	24%	122
Medeleerling	11	19%	58	26	21%	122
Boek	13	22%	58	26	21%	122
Antwoordenboek	13	22%	58	32	26%	122
Anders, namelijk:	12	21%	58	9	7%	122
	58			122		
uitwerkingen	7	12%	58	4	3%	122
ouders/familie/bekenden	5	9%	58	5	4%	122

Bijlage 5 Vragenlijst “Problemen oplossen bij wiskunde”

Vragenlijst – deel 1	Mee eens	Grotendeels mee eens	Grotendeels mee oneens	Mee oneens
Ik heb geleerd/ontdekt/gemerkt,...				
..., dat ik bij een wiskundig probleem vaak verder kom met de oplossing, als ik eerst even een schetsje maak.	1	2	3	4
..., dat ik niet zo goed ben in verhaaltjessommen (toepassingen).	1	2	3	4
..., dat ik weinig plezier heb aan het maken van veel dezelfde oefensommen.	1	2	3	4
..., dat werken aan een probleem en zoeken naar het juiste antwoord soms erg leuk is.	1	2	3	4
..., hoe ik een probleem moet aanpakken, als ik de oplossingsmethode niet meteen zie.	1	2	3	4
..., dat ik – nadat ik een oplossing gevonden heb – vind dat het niet nodig is om nog eens na te gaan of het klopt.	1	2	3	4
..., dat ik graag eerst een getallenvoorbeeld doorreken voordat ik met een formule of functie ga werken.	1	2	3	4
..., dat ik eerst rustig ga nadenken over een probleem, voordat ik het probeer op te lossen.	1	2	3	4
..., dat bij wiskunde de formules en regels niet de hoofdzaak zijn.	1	2	3	4
..., dat ik een hekel heb aan sommen met veel denkwerk	1	2	3	4
..., om niet direct de moed op te geven, als ik niet verder kom met een opgave.	1	2	3	4
..., dat ik bij een nieuw probleem, na wat puzzelen en proberen, meestal wel op een oplossingsmethode kom.	1	2	3	4
..., dat het mij voldoening geeft, als ik een moeilijk probleem zelf heb opgelost.	1	2	3	4

..., dat ik tot nu toe lastige wiskunde opgaven niet echt heb onderzocht.	1	2	3	4
---	---	---	---	---

Vragenlijst - deel 2	Erg mee eens	Mee eens	Mee oneens	Erg mee oneens
In mijn vrije tijd maak ik wel eens puzzeltjes of doe ik spelletjes die iets met wiskunde te maken hebben.	1	2	3	4
Ik durf best vragen te stellen tijdens de wiskundelessen.	1	2	3	4
Wiskunde zal <u>niet</u> gauw een hobby van me worden.	1	2	3	4
Ik denk dat ik van wiskunde nooit veel zal begrijpen.	1	2	3	4
Voor wiskunde toetsen ben ik zenuwachtiger dan voor andere toetsen.	1	2	3	4
Ik lees wel eens een stukje vooruit in mijn wiskundeboek.	1	2	3	4

Wil je nog iets opschrijven over de lessen over het 'probleem oplossen' en wat je daarvan vond, dan kan dat hieronder.

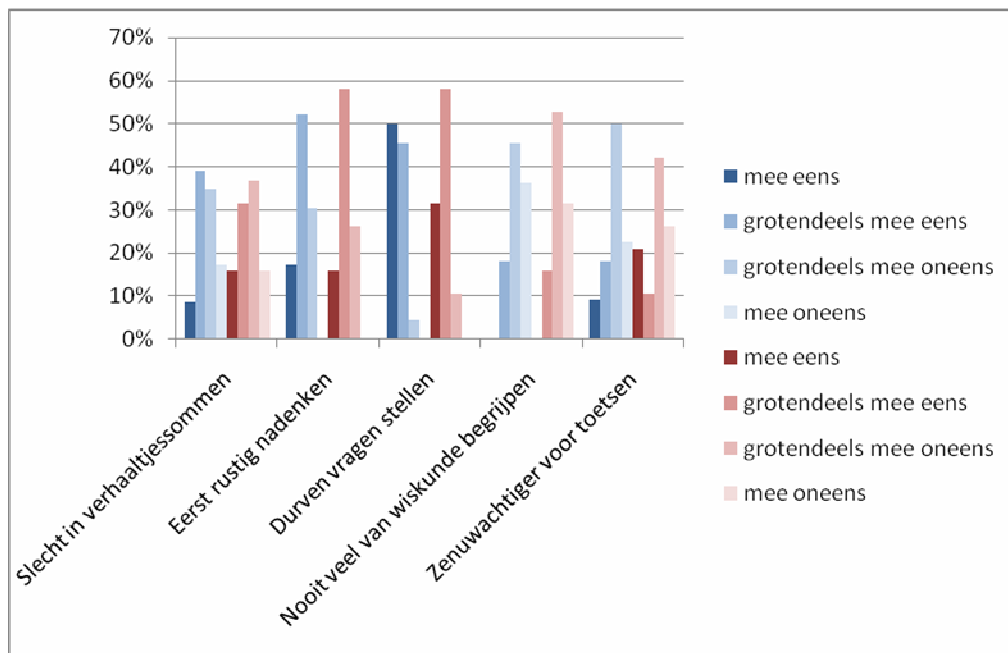
Bijlage 6 Resultaten enquête Heuristiek

In onderstaande grafieken staan de resultaten van de enquête vertoond.

Voor alle staafdiagrammen hieronder geldt: In het blauw (eerste 4 kolommen) zijn de resultaten van **3VWO**, in het rood (tweede 4 kolommen) de resultaten van **4VWO**.

Vertrouwen

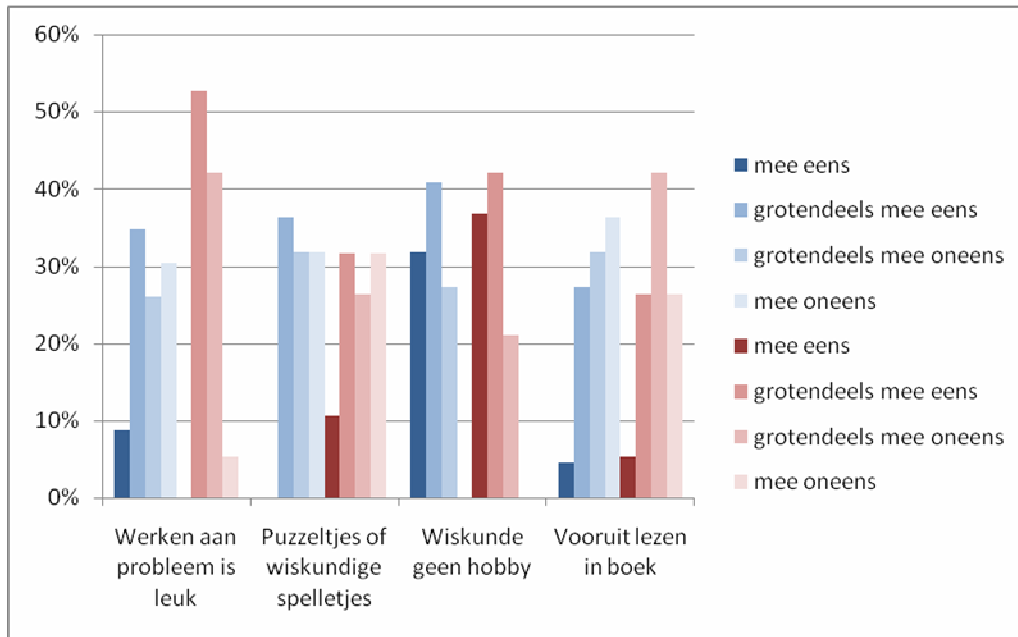
In onderstaande staafdiagram zijn de resultaten te zien van de vragen die betrekking hadden op het thema 'Vertrouwen' (vragen 2, 8, 16, 18 en 19). De eerste 2 vragen gaan over het vertrouwen en de zekerheid die leerlingen hebben bij typische probleem opgaven, waar ze moeten onderzoeken, de laatste 3 vragen gaan over hun vertrouwen in het vak wiskunde in het algemeen.



Figuur 1. Vertrouwen

Motivatie

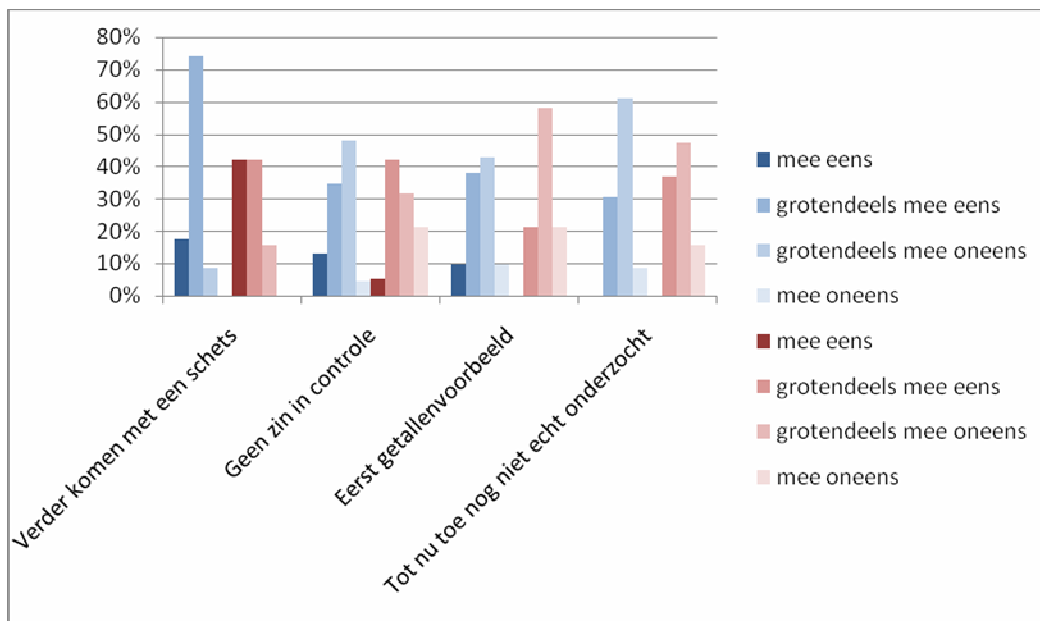
In onderstaande staafdiagram zijn de resultaten te zien van de vragen die betrekking hadden op het thema 'Plezier en motivatie' (vragen 4, 15, 17 en 20). De eerste vraag gaat over plezier in heuristiek, de laatste 3 vragen gaan over plezier in wiskunde in het algemeen.



Figuur 2. Motivatie

Waarderen van geleerde onderzoekstechnieken

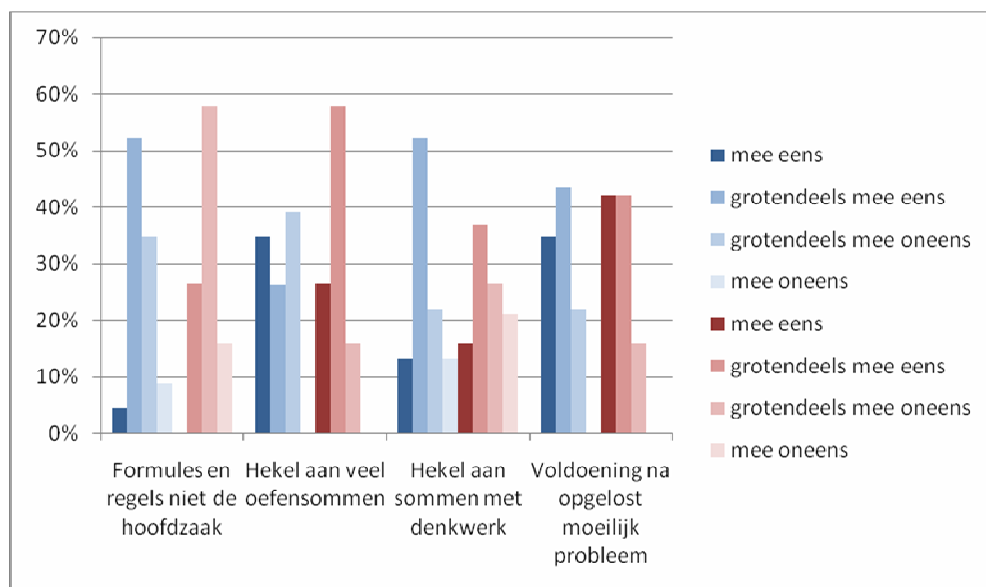
In onderstaande staafdiagram zijn de resultaten te zien van de vragen die betrekking hadden op het thema 'Geleerde onderzoekstechnieken' (vragen 1, 6, 7, en 14). De eerste 3 vragen gaan over het waarderen van een schets, een controle of een getallenvoorbeeld. De laatste vraag gaat over het beeld van de leerlingen of ze echt iets anders geleerd hebben de laatste 3 weken tijdens de lessenserie.



Figuur 3. Geleerde onderzoekstechnieken.

Waarderen van de heuristiek

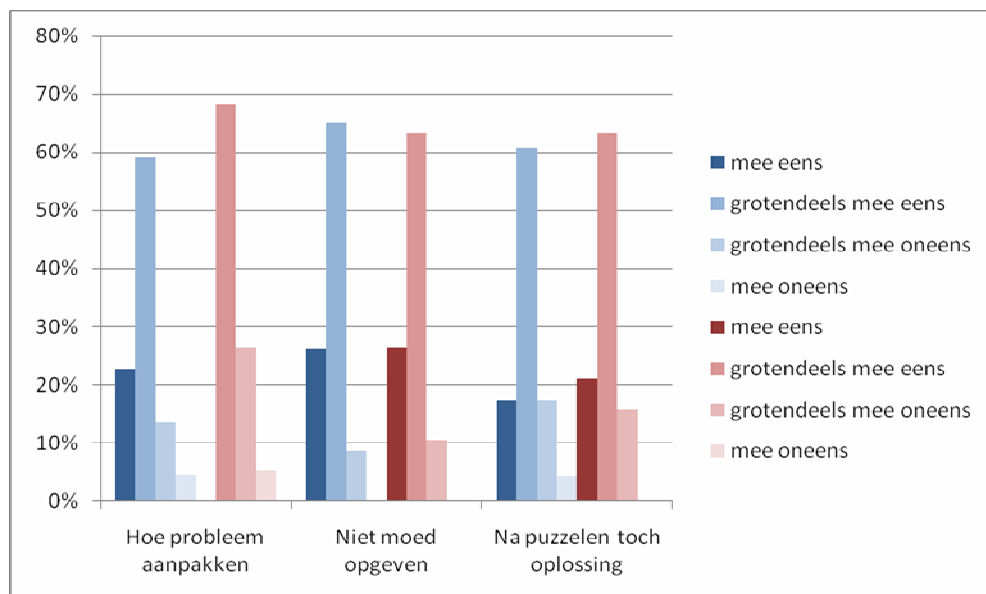
In onderstaande staafdiagram zijn de resultaten te zien van de vragen die betrekking hadden op het thema 'Waarderen van heuristiek' (vragen 9, 3, 10, 13).



Figuur 4. Waarderen van heuristiek

Direct oplossing zien is belangrijk

In onderstaande staafdiagram zijn de resultaten te zien van de vragen die betrekking hadden op het thema 'Direct oplossing zien' of 'de oplossing is belangrijk'(vragen).



Figuur 5. Direct oplossing zien is belangrijk