De ontwikkeling van negatieve getallen in Nederland

Femmie Bisschop
5636868

21 januari 2018

Begeleider: dr. S.A. Wepster

1 Voorwoord

Als *Liberal Arts and Sciences*-student die wel een hoofdrichting wiskunde achter de rug heeft, maar geen volledige bachelor, zocht ik een onderwerp voor mijn scriptie waarvoor niet al teveel wiskundevoorkennis vereist was. Aangezien geschiedenis daarnaast in het algemeen mijn interesse heeft, kwam ik zo bij geschiedenis van de wiskunde uit. Hoewel ik eerst over andere onderwerpen nadacht, ben ik blij dat ik door mijn begeleider op het spoor van de negatieve getallen gezet ben. Overigens heb ik ook in de rest van het proces goede begeleiding ontvangen; dank daarvoor. Wat ik met name interessant vond aan dit onderwerp, was dat negatieve getallen enerzijds een abstracte, wiskundige uitvinding zijn, en anderzijds hun weg hebben gevonden naar de volle breedte van de maatschappij. Door de tijd heen hebben negatieve getallen immers plaats gekregen binnen vele deelgebieden van de wiskunde, maar ze zijn ook heel duidelijk herkenbaar in de maatschappij.

Want probeert u zich eens voor te stellen hoe een wereld zonder negatieve getallen eruit zou zien. Temperaturen onder nul en een negatief saldo op uw bankrekening zijn dan verleden tijd. Zo'n wereld zou moeilijkheden opleveren voor ons maatschappelijk leven *en* voor de wetenschap. Wiskundigen zouden een groot deel van al hun theorieën overboord kunnen gooien. Ondanks dit huidige belang van negatieve getallen kenden we in Nederland tot een paar eeuwen terug nog geen enkel negatief getal. In deze scriptie heb ik daarom onderzocht hoe de negatieve getallen in Nederland vanuit niets een belangrijk onderwerp zijn geworden binnen de wiskunde; middels het onderzoeken van wiskundeboeken op de aanwezigheid en omgang met negatieve getallen. Vanwege de aard van dit onderzoek en de daaruit voortvloeiende geringe omvang heb ik die ontwikkeling niet tot in de finesses kunnen onderzoeken en beschrijven; desondanks heb ik geprobeerd een beeld te schetsen.

Enerzijds vormen wiskundeboeken een goede afspiegeling van hoe de auteur denkt over en omgaat met een bepaald fenomeen; anderzijds kan de inhoud van een boek niet volledig aangeven hoe in de betreffende tijd in het algemeen gedacht werd over negatieve getallen. Binnen deze scriptie zal een boek toch in zekere mate als representatief worden gezien voor de tijd waarin het geschreven is. De gekozen onderzoeksmethode kent dus naast voordelen ook een beperking.

Alle cursiveringen die binnen de aangehaalde citaten voorkomen, zijn van de oorspronkelijke auteur overgenomen.

Inhoudsopgave

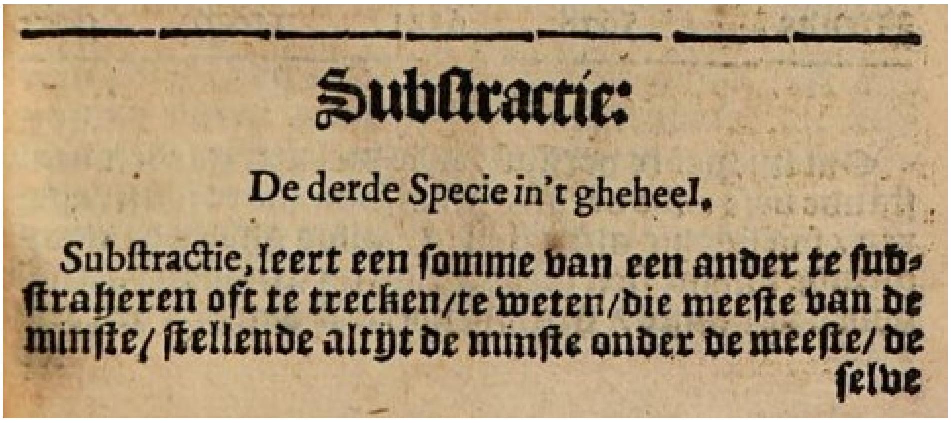
2 Inleiding

Negatieve getallen lijken bepaald geen hogere wiskunde: al op jonge leeftijd maken de meeste Nederlanders er kennis mee. Of deze getallen bestaan en geaccepteerd worden, wordt amper als serieuze vraag beschouwd. Ondanks deze vanzelfsprekendheid waarmee negatieve getallen tegenwoordig omgeven zijn, is de acceptatie ervan niet vanzelf of beter gezegd zeer moeizaam verlopen. Juist die moeizame acceptatie maakt het interessant de ontwikkeling te bestuderen; daarom onderzoek ik in deze scriptie hoe de ontwikkeling van negatieve getallen verloopt in Nederland. Die ontwikkeling wordt gemeten aan de hand van de inhoud van verschillende wiskundeboeken uit de relevante tijdsperiode: vanaf midden 18e eeuw tot en met de eerste decennia van de 19e eeuw. Daarbij worden de wiskundeboeken in hun tijd geplaatst en onderverdeeld naar niveau: sommige boeken zijn van 'wetenschappelijk' niveau, terwijl andere bedoeld zijn voor onderwijs binnen scholen.

Middels de bespreking van twee wiskundeboeken waarin nog geen negatieve getallen voorkomen, wordt eerst duidelijk hoe men omging met situaties waarin negatieve getallen heden ten dage onmisbaar zijn. Daarna kom ik bij het eerste boek waarin wel negatieve getallen staan: *Inleidinge tot de Mathematische Weetenschappen* van A. B. Strabbe. Ook zijn vertaling van het oorspronkelijk Franse boek *Gronden der Algebra* wordt besproken. Vervolgens behandel ik de boeken van Aeneae en Bangma, twee boeken van iets 'lager' niveau, bedoeld voor het onderwijs op scholen. Als laatste komt de verhandeling van De Gelder uit 1814 aan bod waarin hij de ware aard van negatieve getallen toelicht, om zo een eind te maken aan alle verwarring die hij daaromtrent bemerkt in zijn tijd.

Dit onderzoek naar negatieve getallen is zeker niet het eerste. Zo bespreekt Thomaidis enkele historische werken waarin negatieve getallen voorkomen. Het blijkt dat negatieve getallen al terug te vinden zijn bij Descartes, Newton en Napier; vanaf de 17e eeuw. Hoewel negatieve getallen dan al bekend zijn en gebruikt worden, waren ze geenszins onderdeel van een samenhangend mathematisch systeem. Ze spelen ook een andere rol dan *echte* wiskundige concepten; vandaar dat negatieve getallen ook wel benoemd zijn als paramathematisch concept. Thomaidis signaleert daarnaast een duidelijk verband tussen de acceptatie van een nieuw wiskundig concept en het bestaan van problemen waarin dat concept verdienstelijk kan zijn. De problemen geven daarbij een betekenis geven aan het concept. Dit verband gaat volgens hem ook op voor negatieve getallen: hoe meer wiskundigen deze getallen toe kunnen passen voor het oplossen van problemen, hoe sneller ze overgaan tot acceptatie [16, p. 72, 79]. Ook Beckers heeft onderzoek gedaan naar de ontwikkeling en acceptatie van negatieve getallen; ruwweg vanaf de 18e eeuw. Volgens Beckers is er dan inderdaad sprake van bekendheid met negatieve getallen, maar er is nog veel discussie en algemene acceptatie ontbreekt. Daarbij verschilt de manier waarop negatieve getallen vorm krijgen binnen de wiskunde weer per land; duidelijke verschillen zijn te bemerken tussen Frankrijk en Duitsland. In Nederland was in de 18e eeuw amper sprake van onderzoek en de wiskunde richtte zich op toepassingen. Zolang de toepassing maar werkte, keek men niet naar details [6, p. 100, 101, 104]. Met de argumentatie van Thomaidis lijkt het aannemelijk dat negatieve getallen snel geïntroduceerd en geaccepteerd worden in Nederland, als er tenminste toepassingen voor zijn.

Hoewel negatieve getallen momenteel geïntegreerd zijn in de samenleving, is het onder andere voor het onderwijs van belang dat de ontwikkeling en acceptatie ervan onderzocht wordt. Binnen het onderwijs moet het concept nog altijd ieder jaar uitgelegd worden en vanzelf gaat dat niet. Thomaidis heeft op overtuigende wijze beargumenteerd dat het kennen van de geschiedenis van een concept belangrijk is ten eerste voor het verstaan en de juiste uitleg ervan en ten tweede voor het begrijpen van de moeilijkheden die leerlingen hebben met het concept [16, p. 70]. Het onderwijs kan dus baat hebben bij een onderzoek naar de ontwikkeling van negatieve getallen zoals dit.



Subſtractie:

De derde Specie in't gheheel.

Subſtractie, leert een ſomme van een ander te ſub-ſtraheren oft te trecken/te weten/die meeſte van de minſte/ ſtellende altijt de minſte onder de meeſte/ de ſelve

Figuur 1: Stockmans' definitie van aftrekken

3 1589: voordat men negatieve getallen kende

Een ontwikkeling kent altijd een tijd vooraf; zo ook die van de negatieve getallen. In 1589 werd door Bernaert Stockmans een boek geschreven dat tot doel had onderwijzers te leren rekenen, *Een corte ende eenvuldige instructie, om lichtelijken en by hem selven, sonder eenige meester oft onderwijser te leeren cijfferen enz* [12]. De auteur was een van oorsprong Franse schoolmeester, werkzaam in Dordrecht [15, p. 173]. Ruim veertig jaar later en vele drukken verder verschijnt dat boek opnieuw, nu uitgebreid herzien door C.P. Boeye. De titel maakt duidelijk dat dit boek bedoeld is als een laagdrempelig boek; als lezers zijn zeker niet de wiskundigen uit die tijd bedoeld, maar degenen die zonder onderwijzer het 'cijfferen' wilden leren. Uit dit boek blijkt dat negatieve getallen bij deze auteur en in deze tijd nog onbekend waren. Ten eerste is dat te zien bij de uitleg van het aftrekken. Voor deze bewerking moet het kleinste getal onder het grootste gezet worden, zodat de kleinste van de grootste afgetrokken kan worden [12, afbeelding 1][1]. De auteur ziet het blijkbaar niet als mogelijkheid om een groter getal van een kleiner getal af te trekken. Ten tweede blijkt het enkele pagina's later, bij een voorbeeld van het aftrekken. Zoals bij veel voorbeeldopgaven bij het aftrekken het geval is, heeft het te maken met de handelswereld. Er is sprake van een schuld van 9000 gulden en een gedeeltelijke betaling van 7698 gulden. Nadat die getallen onder elkaar gesteld zijn, bestaat de eerste stap erin dat 8 van 0 afgetrokken wordt. Maar, zo schrijft de auteur, dit is onmogelijk. Waar iemand met kennis van negatieve getallen zou zeggen dat dit -8 oplevert, wordt het hier als onmogelijke bewerking gezien. Daaruit valt op te maken dat de auteur geen weet had van een wereld met negatieve getallen. Ook op

[1]Vanwege het ontbreken van paginanummers in het boek ontbreken deze ook in de verwijzing

andere plekken waar negatieve getallen tevoorschijn zouden kunnen komen, zoals bij besprekingen van een schuld, wordt dezelfde benadering gehanteerd. Op basis hiervan kunnen we concluderen dat Stockmans in 1589 waarschijnlijk geen negatieve getallen kende. Boeye, die in 1632 een herziene versie uitbracht, heeft ze evenmin toegevoegd.

4 Meer dan een eeuw later: enige verandering?

Zo'n 160 jaar na de allereerste versie van Stockmans, rond 1750, verschijnt er een rekenboek van Van Olm. Evenals het vorige is ook dit boek bedoeld voor de beginner. Volgens de voorrede is het zelfs geschreven omdat alle andere boeken in dezelfde categorie nog te moeilijk ofwel "te zwaar in bevatting"waren [17, voorrede]. Het *Rekenboek van Jan van Olm* was een populair boek, blijkens de vele herdrukken. Van Olm, die rekenmeester was in Groningen, genoot in zijn omgeving dan ook bekendheid vanwege dit boek [3, p. 80]. De versie die ik geraadpleegd heb, is de zestiende versie uit 1816. In deze uitgave wordt *substractie* omschreven als de bewerking waarbij je een kleiner getal aftrekt van een groter getal. Bewerkingen die een negatief getal opleveren, worden dus nog altijd als niet mogelijk gezien; in 1750 waren negatieve getallen blijkbaar niet zo bekend dat ze in een beginnersrekenboek verschenen. We kunnen concluderen dat men in Nederland in al die jaren tussen *Een corte ende eenvuldige instructie enz.* en het *Rekenboek van Jan van Olm* geen grote vorderingen heeft gemaakt wat betreft negatieve getallen. Verwonderlijk is het wel, dat dit boek tot ver in de 19e eeuw uitgegeven wordt, zonder dat er negatieve getallen toegevoegd worden. Blijkbaar is er dan nog altijd belangstelling voor. Zoals we later zullen zien, zijn negatieve getallen dan al wel bekend. Een verklaring daarvoor zou kunnen liggen in de al eerder aangehaalde cultuur van wiskundebeoefening op dat moment: wiskunde dient om toepassingen te kunnen maken en negatieve getallen kunnen gebruikt worden zonder op genomen te worden in een theoretisch raamwerk [6, p. 101].

5 Strabbe en zijn kijk op negatieve getallen

Het volgende boek dat we hier bespreken, is het boek *Inleidinge tot de mathematische weetenschappen* van A. B. Strabbe. In het begin wordt de eerste stap van het aftrekken beschreven als het plaatsen van het grootste getal boven het onderste. Daarna trek je de getallen van elkaar af. Een groter getal van een kleiner getal afhalen lijkt dus, ook hier, een onmogelijkheid te zijn, afgaand op deze omschrijving. Maar lezen we verder in het boek, dan wordt gebruik gemaakt van negatieve getallen alsof ze vanzelfsprekend zijn. Vanwege deze inconsequentie zal ik bij dit boek en tevens bij de auteur ervan iets uitgebreider stilstaan. Niet alleen boeken zijn immers van belang, ook de auteurs ervan en hun maatschappelijke positie. Daarom zal ik kort ingaan op de persoon Arnoldus Bastiaan Strabbe, waarbij ik hoofdzakelijk gebruik maak van de scriptie die S. Ruiter over hem heeft geschreven: 'De onvermoeide arbeid van Arnoldus Bastiaan Strabbe'.

5.1 Arnoldus Bastiaan Strabbe

Strabbe werd in 1741 in Zwolle geboren en hij was op jonge leeftijd al erg actief. Zo was hij boekhouder op enkele kantoren en gaf les als wiskunde-onderwijzer. Op negentienjarige leeftijd (!) bracht hij twee vertalingen uit, namelijk *Gronden der algebra* en *Beginzelen der géométrie*. Beide boeken waren oorspronkelijk in het Frans geschreven door A. C. Clairaut.

Gedurende zijn leven was Strabbe zeer actief in het maatschappelijke veld. Hij werd gevraagd om leiding te nemen over het tijdschrift *Oeffenschool der mathematische weetenschappen*. Dit tijdschrift bevatte onder meer wiskundige vraagstukken, die opgelost en vervolgens ingediend konden worden door de lezers. Mede opdat ook mensen zonder wiskundekennis de wiskundige vraagstukken op konden lossen, schreef Strabbe de boeken *Gronden der meetkunst* en *Inleidinge tot de mathematische weetenschappen*. Nadat dit tijdschrift opgeheven werd vanwege een tekort aan belangstelling, nam Strabbe het initiatief tot oprichting van een genootschap ter bevordering van de wiskunde in de samenleving. Dit genootschap kon dan ook een tijdschrift uitgeven. In 1778 werd zo het Genootschap der Mathematische Weetenschappen opgericht, tegenwoordig nog bekend onder de naam 'Koninklijk wiskundig genootschap'. Na vele jaren secretaris te zijn geweest, vertrok Strabbe in 1804 uit het bestuur ervan; deels vanwege onenigheid. Hij bleef werken uitgeven, met als onderwerpen boekhoudkunde, sterrenkunde, geschiedenis en verschillende deelgebieden van de wiskunde zoals algebra, fluxierekening, geschiedenis van de wiskunde en laagdrempelige vermakelijkheden. Voor een deel waren dit vertalingen, maar de lijst bevat ook eigen werken. In 1805 overleed Arnoldus Bastiaan Strabbe [10].

5.2 Nader onderzoek: *Inleidinge tot de mathematische weetenschappen*

Nu we de persoon Strabbe beter hebben leren kennen, zal ik stilstaan bij het boek *Inleidinge tot de mathematische weetenschappen*. Het volledige boek is in twee delen uitgegeven in de periode 1770-1772 en is pas later samengevoegd in één band verschenen. Deel I en II geven beiden een inleiding op zowel de arithmetica als de algebra, waarbij deel II van hoger niveau is dan deel I.

5.2.1 Deel I

Optellen en aftrekken Het eerste gedeelte van deel I gaat over de arithmetica, wat Strabbe in de inleiding heeft omschreven als "de Weetenschap, die in de getallen alle noodige vergelykingen leert maaken, om de betrekkingen daar door te ontdekkenöok wel "de Weetenschap der getallen"[14]. In het gedeelte over arithmetica worden naast de al benoemde aftrekking, ook de andere drie elementaire bewerkingen gedefinieerd en behandelt Strabbe breuken. Na een kleine 50 pagina's over de arithmetica gaat Strabbe verder met de algebra. Hij ziet dit als volgt: ëene Weetenschap om Wiskunstige Waarheden te ontdekken, en waar door men, met behulp van Letteren en Tekenen, alles wat vindbaar is uit kan rekenen"[14, p. 48]. Strabbe begint met een uitleg van variabelen en symbolen,[2] waarbij hij het volgende zegt over het minteken:

> "− beteekent *Minus* of *min*, en is eigentlyk het teken van Aftrekking, of *Substractio*; (...) a − b is a *min* b, of het getal, verbeeld door b, moet van het getal, verbeeld door a, afgetrokken worden."[14, p. 48]

Een tweetal pagina's later staat:

> "het Teken dat de grootheden saamenvoegt, behoort tot die grootheid, welke het Teken onmiddelyk volgt. (...) zo ook in a − b + c behoort het Teken − tot de grootheid b."[14, p. 50]

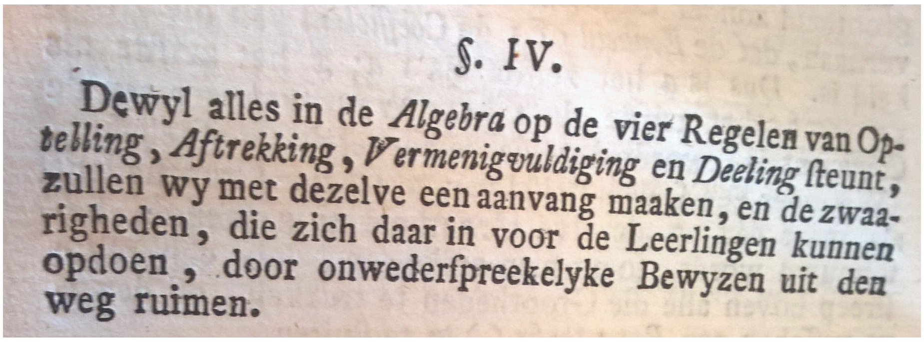
Het plusteken mag echter weggelaten worden,

> "want het Teken + is een *Bevestigend* Teken, en dus onderstelt men met reden, dat alle Weezentlyke (*Positieve*) Grootheden het zelve zyn toegedaan; doch het Teken − een *Ontkennend* Teken zynde, kan nooit weg gelaaten worden; maar moet altoos geplaatst worden, voor de grootheid waar toe het behoort."[14, p. 50]

[2]Eerder gebruikte Strabbe geen symbolen om bewerkingen aan te duiden, slechts de omschrijvingen ervan.

Naast dat hier duidelijk wordt hoe Strabbe de plus- en mintekens ziet, lezen we hier enkele benamingen die hij gebruikt voor positief en negatief. Door het hele boek gebruikt Strabbe wezenlijk, positief, stellig of bevestigend om positieve getallen aan te duiden en ontkennend of negatief voor negatieve getallen. Daarnaast valt de geringe uitleg en definiëring van nieuwe begrippen op, zeker in vergelijking met de huidige, 'strenge' manier van wiskundebeoefening. Dat moet echter voor het belangrijkste deel geplaatst worden binnen de tijd, zoals ook Beckers aangeeft in zijn beschrijving van negatieve getallen in Lacroix' tekstboek [6]. Juist in Nederland diende een wiskundige theorie voor zijn toepassingen. Dat gold ook voor de negatieve getallen; de regel dat min keer min plus geeft, was een truc die je moest volgen om een goed resultaat te krijgen en werd ook zo uitgelegd. Zo werd fundamentele problematiek omtrent de aard van negatieve getallen verborgen door de didactische methode die gebruikt werd [6, p. 101, 102].

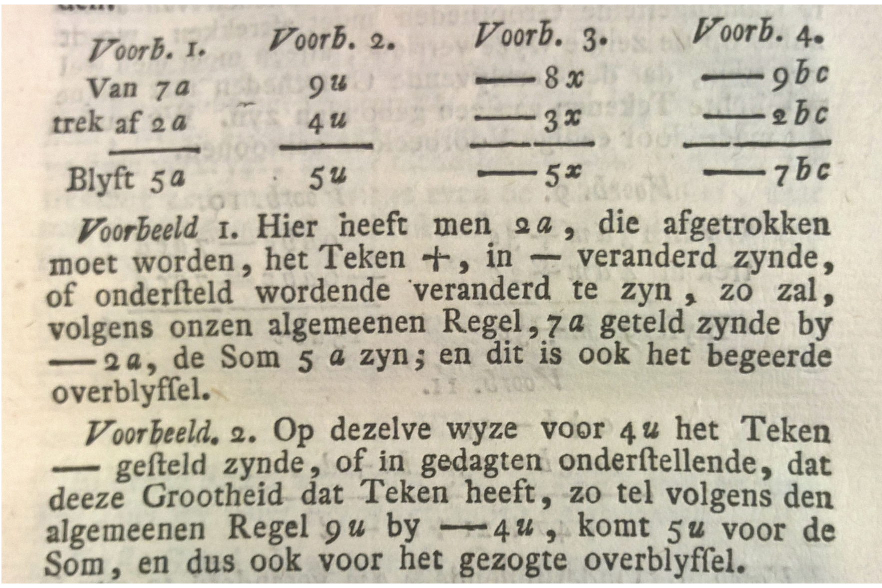
Bovenstaande citaten zijn in overeenstemming met hoe we tegenwoordig tegen het minteken aankijken. Het heeft twee betekenissen; het minteken kan een operatie weergeven of negativiteit aanduiden. De plaats waar Strabbe het minteken introduceert, lijkt vreemd. In de betekenis van het minteken als symbool van het aftrekken lijkt er niet voldoende verschil te zijn tussen arithmetica en algebra om het minteken pas in te voeren bij de algebra. Wel geldt dat het minteken voordelen heeft ten opzichte van het uitschrijven van de bewerking, maar die voordelen zijn er zowel in de algebra als in de arithmetica. Kan de verklaring dan gevonden worden in de betekenis van het minteken als aanduiding voor de negativiteit van een getal? Tegenwoordig hebben we negatieve getallen zowel in de arithmetica als in de algebra, maar Strabbe zou daar anders over gedacht kunnen hebben. Ik zal hier later nog op terug komen.


§. IV.

Dewyl alles in de *Algebra* op de vier Regelen van Optelling, *Aftrekking*, *Vermenigvuldiging* en *Deeling* ſteunt, zullen wy met dezelve een aanvang maaken, en de zwaarigheden, die zich daar in voor de Leerlingen kunnen opdoen, door onwederſpreekelyke Bewyzen uit den weg ruimen.

Figuur 2: Strabbe legt binnen de algebra zaken opnieuw uit die ook al binnen de rekenkunde uitgelegd zijn

Vervolgens behandelt Strabbe hoe men binnen de algebra moet optellen. Daar benoemt hij drie gevallen. In het eerste geval zijn de variabelen en de



Voorb. 1.	Voorb. 2.	Voorb. 3.	Voorb. 4.
Van 7*a*	9*u*	— 8*x*	— 9*bc*
trek af 2*a*	4*u*	— 3*x*	— 2*bc*
Blyft 5*a*	5*u*	— 5*x*	— 7*bc*

Voorbeeld 1. Hier heeft men 2*a*, die afgetrokken moet worden, het Teken +, in — veranderd zynde, of onderſteld wordende veranderd te zyn, zo zal, volgens onzen algemeenen Regel, 7*a* geteld zynde by — 2*a*, de Som 5 *a* zyn; en dit is ook het begeerde overblyſſel.

Voorbeeld. 2. Op dezelve wyze voor 4*u* het Teken — geſteld zynde, of in gedagten onderſtellende, dat deeze Grootheid dat Teken heeft, zo tel volgens den algemeenen Regel 9*u* by — 4*u*, komt 5*u* voor de Som, en dus ook voor het gezogte overblyſſel.

Figuur 3: Hoe Strabbe de bewerking aftrekken typologisch weergeeft en uitlegt

tekenen gelijk, bijvoorbeeld $2a+3a$. Men moet in zo'n geval de coëfficiënten optellen, de variabelen erachter zetten en het teken, dat beide grootheden gemeenschappelijk hebben, ervoor zetten. Een voorbeeld is: $-8y + -2y = -10y$.[3] Strabbe ziet dit klaarblijkelijk als voorbeeld van een optelling. In het tweede geval worden optellingen behandeld waarin de "letteren, die de Grootheid verbeelden", ofwel de variabelen, gelijk zijn en het teken verschillend is [14, p. 53]. Men moet dan het kleinste getal onder het grootste getal zetten, de onderste van de bovenste aftrekken en het teken van de grootste coëfficiënt ervoor zetten. Een voorbeeld is $12pna - 7pna = -5pna$.[4] Het derde geval behandelt ten slotte de optellingen waarin verschillende variabelen worden opgeteld, bijvoorbeeld $-8d + -3k = -8d - 3k$.

Na het optellen komt Strabbe tot het uitleggen van aftrekken en dat is zeer nauw verwant met optelling. Hij definieert aftrekken namelijk als het veranderen van alle tekenen van de grootheden die afgetrokken moeten worden, waarna de regels voor optelling toegepast moeten worden. Men moet van een bevestigend teken een ontkennend teken maken en vice versa. Daarna heeft men een van de gevallen die bij optelling behandeld is en moeten de regels behorende bij dat geval toegepast worden. Zo is $27ms$ min $-5ms$ na verandering van het teken van datgene wat we aftrekken, namelijk $5ms$, ge-

[3]Typografisch worden beide getallen onder elkaar weergegeven en verschijnt de som onder een streep; + en − verschijnen dus niet achter elkaar; zie ook de afbeelding.

[4]Merk op dat Strabbe *pna* als variabele gebruikt en zo in zekere zin zelfs drie variabelen noemt, waar wij meestal voor enkel x, y of z kiezen als dat voldoet.

lijk aan $27ms$ plus $5ms$. We veranderen immers het teken en tellen dan op in plaats van af te trekken. Omdat we gelijke variabelen en gelijke tekenen hebben, passen we de regels van geval één bij optelling toe. Het optellen van de coëfficiënten geeft 32 en het plaatsen van de variabelen levert $32ms$. Het teken was bevestigend en hoeft zodoende niet per se toegevoegd te worden.

Bij het aftrekken binnen de algebra verandert Strabbe dus de min van het aftrekken in een plus door een kunstgreep toe te passen, namelijk het veranderen van het teken van het getal wat afgetrokken moet worden. Het enige wat er dan daadwerkelijk gebeurt is het veranderen van een min als symbool voor aftrekken in een symbool voor de negativiteit van een getal. Hij behandelt deze methode als een regel die na uitvoeren het juiste antwoord geeft, zonder aan te tonen dat de methode correct is.

We zagen eerder dat Strabbe het teken dat hier een verandering van betekenis ondergaat, omschrijft. Het minteken werd *gedefinieerd* als teken van substractie. Toch gaat Strabbe later aftrekken definiëren aan de hand van een verandering van ditzelfde teken. Deze verwarrende cirkelredenatie zal voor zijn lezers bepaald geen duidelijkheid gegeven hebben met betrekking tot de verschillende betekenissen van het minteken.[5]

Ten eerste het geven van een methode voor het aftrekken die de betekenis van een minteken verandert zonder dit uit te leggen of te benoemen en ten tweede de verwarrende definities van het minteken en de bewerking aftrekken, roepen de vraag op of Strabbe de verschillende betekenissen van het minteken goed heeft onderscheiden. We hoeven dan niet alleen bij Strabbe te blijven, maar kunnen ons ook afvragen of en op welke manieren betekenissen van het minteken in de afgelopen eeuwen gescheiden werden en hoe daarmee om wordt gegaan wanneer die betekenissen aangeleerd worden in het onderwijs.

Gemeene Rekenkunst Na een flink aantal voorbeelden geeft Strabbe een manier om de correctheid van een opgave te controleren. Hij benoemt daarbij dat dezelfde methode eerder is gebruikt, namelijk bij de "gemeene Rekenkunst"[14, p. 59]. Wat Strabbe hier aan het doen is, namelijk optellen en aftrekking binnen de algebra, valt volgens hem blijkbaar niet onder de algemene rekenkunde, vrij vertaald. De meest vanzelfsprekende betekenis van 'algemene rekenkunde' lijkt de arithmetica te zijn, omdat hij die hiervoor heeft behandeld.[6] Tijdens een zoektocht naar de manier waarop Strabbe

[5] Bewijzen en definiëren hebben voor Strabbe daarbij niet de betekenis zoals die er tegenwoordig is, omdat de wiskunde veel minder streng is. Zo stelt De Gelder vijftig jaar later nog dat een definitie helder en herkenbaar moet zijn [6, Voetnoot 8, p. 105].

[6] Inderdaad kan Strabbes betekenis van het begrip wel iets meer omvatten of iets minder, maar in ieder geval maakt terugzoeken duidelijk dat hij binnen de arithmetica dezelfde methode gebruikt; arithmetica maakt volgens Strabbe deel uit van de algemene rekenkunde.

negatieve getallen ziet, roept dat de vraag op of het bijzondere van de algebra misschien is dat daar negatieve getallen zijn, die niet *wezenlijk* zijn en binnen de algemene rekenkunde ofwel arithmetica niet bestaan. Dat zou ook verklaren waarom Strabbe bij de behandeling van de arithmetica niet over het mogelijk negatieve van een getal rept, terwijl hij er bij de algebra opeens zonder meerdere uitleg vanuit gaat dat een getal negatief kan zijn.

In de voorrede schrijft Strabbe over het gedeelte over algebra: "vervolgens geeven wy eene duidelyke verklaaring der Tekenen, die tot de Stelkundige oplossingen moeten dienen" [14]. Met 'Tekenen' worden + en − aangeduid.[7] Strabbe zegt hier dus dat deze tekenen nuttig zijn om stelkundige ofwel algebraïsche oplossingen te geven. Erkent hij negatieve getallen alleen binnen de algebra omdat ze daar tot oplossingen van vergelijkingen leiden die anders onopgelost waren gebleven?

Als dat juist is, zou het tevens duidelijk maken waarom Strabbe negatieve getallen pas vrij laat, bij het gedeelte over algebra, introduceert. We zagen al eerder dat het geen vanzelfsprekende plek leek. Tegelijkertijd lijkt onwaarschijnlijk dat Strabbe niet bewust gekozen zou hebben voor deze plek, aan het begin van het gedeelte over algebra. Wanneer hij niet wist hoe negatieve getallen toe te passen bij arithmetica, zou hij binnen de algebra hetzelfde probleem moeten hebben. Bovendien kan niet gezegd worden dat hij onduidelijk is over hoe het minteken gebruikt moet worden bij het rekenen: afgezien van enige omslachtigheid in definities en het ontbreken van een bewijs van de regels, zijn de regels niet onduidelijk op papier gezet en geven ze juiste antwoorden. Wanneer Strabbe niet meteen aan het begin negatieve getallen had willen opvoeren, zou het logischer lijken om het wat later binnen de arithmetica te doen, maar ze in ieder geval niet weg te laten uit de arithmetica. Daarentegen geeft de opvatting dat negatieve getallen alleen bestaan binnen de algebra, *wel* een goede verklaring voor Strabbes keuze om negatieve getallen te introduceren aan het begin van het gedeelte over algebra.

Misschien zelfs belangrijker dan wat ik hiervoor beschreef, zou de genoemde hypothese ook verklaren waarom Strabbe aftrekken binnen de arithmetica definieert als een kleiner getal van een groter getal afhalen. Als Strabbe negatieve getallen inderdaad alleen toelaat binnen de algebra, is het binnen de arithmetica inderdaad niet mogelijk om een groter getal van een kleiner af te trekken. We zien dat het aannemelijk lijkt dat Strabbe negatieve getallen niet toelaat in de arithmetica, omdat we dan een heel aantal zaken kunnen verklaren die eerst onverklaarbaar leken.

[7] Zoals we zagen, kunnen deze tekenen volgens Strabbe zowel positiviteit of negativiteit aanduiden als een operatie aangeven.

Vermenigvuldigen Ondertussen gaat Strabbe onvermoeid verder met het vermenigvuldigen. Net als op veel plaatsen geeft hij hier een gevallenonderscheiding. In het eerste geval zijn de tekenen gelijk. Vermenigvuldig dan eerst de coëfficiënten, ën voeg dan de letteren naast malkanderen, zonder eenige afscheiding, daar nevens, zo heeft men maar het Teken + daar voor te stellen, om het begeerde *Product* te verkrygen"[14, p. 65]. Het tweede geval behandelt de voorbeelden waarin de tekens voor de getallen die vermenigvuldigd worden, verschillend zijn. Men volgt dan het voorgaande, maar stelt een − voor het product, in plaats van een +. Het derde geval is van toepassing wanneer men iets wil vermenigvuldigen dat samengesteld is, bijvoorbeeld x vermenigvuldigen met $a + 2b$. Dan vermenigvuldigt men met ieder getal afzonderlijk en past daarbij de voorgaande regels toe.

De wiskundige juistheid is buiten twijfel; de gevallenonderscheiding lijkt misschien enigszins omslachtig. Maar dat schijnt nu eenmaal Strabbes favoriete methode te zijn, om welke reden dan ook. In ieder geval zijn we nu zover dat we weten dat Strabbe in zoverre bekend is met negatieve getallen dat hij er elementaire berekeningen uitvoeren kan, wat we niet verwacht hadden toen hij aftrekken definieerde als een kleiner getal van een groter getal aftrekken.

Schulden en gereede penningen Ter afsluiting van een hoofdstuk stelt Strabbe zich dan toch tot doel om uitleg te geven over negatieve getallen, specifieker gezegd: aan te tonen waarin het wezenlijk onderscheid tussen bevestigende en ontkennende getallen ligt. Tevens wil hij uitleggen waarom gelijke tekenen een positief getal geven na vermenigvuldiging en ongelijke tekenen een negatief getal. Hij begint met te zeggen dat men in het algemeen negatieve getallen als schuld kan zien en positieve als "gereede Penningen", ofwel als beschikbaar geld [14, p. 69]. Als voorbeeld stelt hij twee personen die hun schulden en bezittingen samenvoegen. Wanneer de ene persoon meer schulden heeft dan bezittingen, zal hij uiteindelijk een schuld overhouden, ofwel hij bezit een ontkennende grootheid. Samenvoegen met bezittingen van een ander persoon zorgt ervoor dat de som minder is dan de bezittingen van de tweede persoon. Het kan zelfs gebeuren dat de som "ten eenemale ontkennende zal bevonden te worden"[14, p. 70].

Strabbe gebruikt hier handel en geld als voorbeeld om negatieve getallen uit te leggen. Juist handel kan een aanleiding zijn voor het rekenen met negatieve getallen. Waar gehandeld wordt, zijn schulden en daar zijn negatieve getallen handig om schuld weer te geven in een boekhouding. Hoe langer men die negatieve getallen kent, hoe abstracter men erover kan denken en hoe meer men het idee van een schuld los kan laten. Strabbe lijkt negatieve getallen en een schuld dicht bij elkaar te zetten; hij benoemt in ieder geval niet heel duidelijk dat hij hier een willekeurig voorbeeld bespreekt en zegt daarentegen dat men negatieve getallen in het algemeen "maar als schuld aan te merken heeft"[14, p. 69]. Dat zou erop kunnen wijzen dat Strabbe negatieve getallen nog met name als schuld ziet en het fenomeen minder abstract benadert. Maar ook kan hier een didactische onderbouwing zijn: deze perceptie staat dichtbij zijn van wiskundekennis verstoken lezers.

Wortelloze getallen Binnen dit gedeelte over algebra wordt verder uitgelegd hoe men moet rekenen met gebroken getallen en variabelen en met wortelloze getallen; bijvoorbeeld $\sqrt{7}$. Voor Strabbe is er dus een categorie getallen waarvan geen wortel bestaat; het getallensysteem van Strabbe bevat blijkbaar geen irrationale getallen. Natuurlijke getallen zijn overduidelijk wel een bestaande categorie. Rationale getallen erkent hij ook; Strabbe heeft ze binnen de arithmetica behandeld en doet dat hier weer.

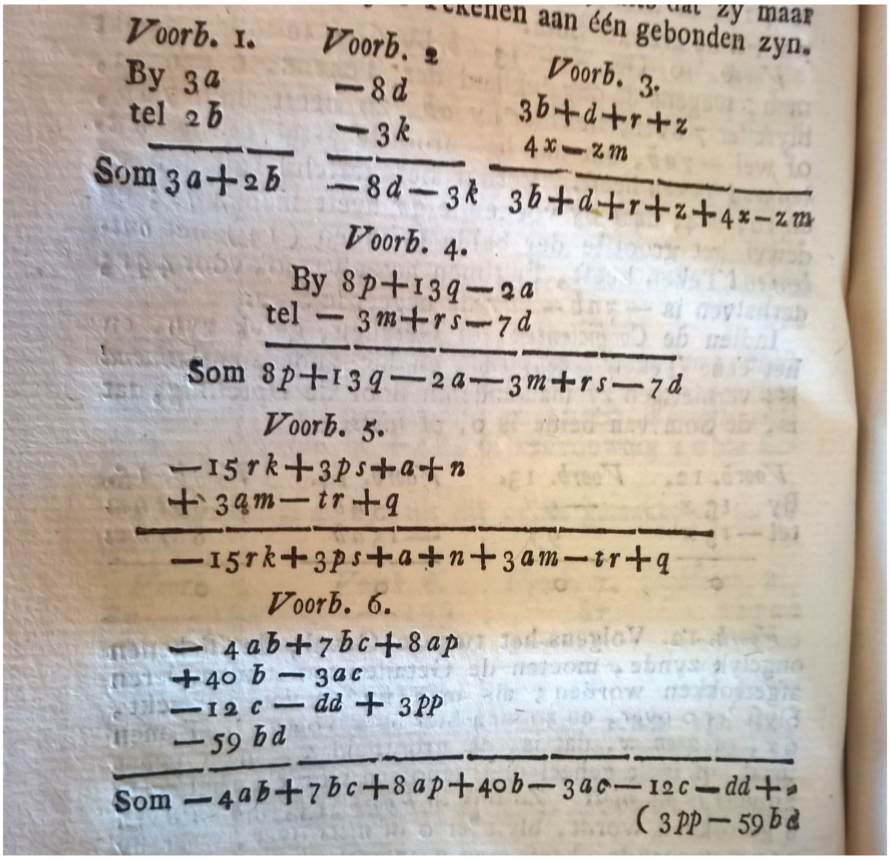
5.2.2 Deel II

Deel II heeft de titel *Gronden der algebra, of vervolg der inleidinge tot de mathematische wetenschappen* meegekregen. Als we deel II doorbladeren, zien we her en der negatieve getallen: hun bestaan kan niet ontkend worden. Ik zal nu eerst voor een van de hypotheses die hierboven gesteld is, onderzoeken of deze nog steeds geldt en vervolgens een poging doen iets af te leiden uit de manier waarop Strabbe in dit deel omgaat met negatieve getallen.

Een beknopt samenstel Op de voorpagina valt het volgende te lezen: "Behelzende een beknopt saamenstel van de eerste Beginselen der Algemeene Rekenkunde"[14]. Deel II geeft dus een beknopt overzicht van de algemene rekenkunde. Voorheen opperde ik dat Strabbe negatieve getallen slechts accepteert binnen de algebra omdat ze daar tot oplossingen leiden. Binnen de 'gemeene Rekenkunst' ofwel arithmetica zouden ze volgens hem niet voorkomen.[8] Echter, Deel II bevat algebra *en* geeft volgens Strabbe een overzicht van de algemene Rekenkunde. Blijkbaar zijn die twee toch niet verschillend. Of moeten we concluderen dat Strabbe niet zulke strakke definities hanteert? Eerder benoemde ik dat Strabbe binnen de algebra zegt dat hij iets herhaalt wat hij eerder behandeld had binnen de algemene rekenkunde. De algebra valt dus niet onder de algemene rekenkunde. Daarnaast blijkt in de voorrede van deel II dat Strabbe wel onderscheid maakt tussen de algemene rekenkunde en de algebra ofwel stelkunde. Hij geeft aan dat hij zijn leerlingen het fraaie en nuttige van de algemene bewerkingen in wil scherpen, want "[h]et is daar door, dat de Stelkundigen in een kort bestek zo veele zaaken begrypen, als de gemeene Wiskunstenaars in geen groot boek zouden kunnen doen"[14].

[8] Onder 'Gemeene Rekenkunst' heb ik geconcludeerd dat Strabbe dezelfde betekenis geeft aan de algemene rekenkunde als aan de arithmetica.

Hoewel Strabbe met 'gemeene Wiskunstenaars' niet per se hen hoeft te bedoelen die arithmetica beoefenen, is dat in de context mijns inziens wel de verklaring die het meest voor de hand ligt. Hoe dan ook kan gesteld worden dat Strabbe hier opnieuw de algebra onderscheidt van de rest van de wiskunde. Ik concludeer dat Strabbe het begrip 'algemene rekenkunde' in verschillende betekenissen gebruikt. Wat op de voorpagina van deel II staat, ontkracht daarom niet mijn hypothese dat Strabbe negatieve getallen alleen erkent in de algebra.



...kenen aan één gebonden zyn.

Voorb. 1.
By $3a$
tel $2b$
Som $3a+2b$

Voorb. 2.
$-8d$
$-3k$
$-8d-3k$

Voorb. 3.
$3b+d+r+z$
$4x-zm$
$3b+d+r+z+4x-zm$

Voorb. 4.
By $8p+13q-2a$
tel $-3m+rs-7d$
Som $8p+13q-2a-3m+rs-7d$

Voorb. 5.
$-15rk+3ps+a+n$
$+3am-tr+q$
$-15rk+3ps+a+n+3am-tr+q$

Voorb. 6.
$-4ab+7bc+8ap$
$+40b-3ac$
$-12c-dd+3pp$
$-59bd$
Som $-4ab+7bc+8ap+40b-3ac-12c-dd+3pp-59bd$

Figuur 4: Optellen binnen de algebra

Verwarring In het tweede hoofdstuk behandelt Strabbe de 'onbepaalde voorstellen' van Diophantus. Hoewel hij weet dat vele wiskundigen in zijn tijd ze als "te onvrugtbaar aanmerken", zijn ze volgens Strabbe van groot belang. Immers, "hoe verborgener de ontbinding van een *Problema*, (...) hoe belangryker en waardiger het moet schynen, als men tot de ontbinding gekomen is"[14, voorrede].

Vraagstuk 2 houdt in "[t]wee getallen te vinden, welker vermenigvuldigde gelyk is aan vyftien maal haar verschil"[14, p. 11]. Omdat dan geldt $xy = 15x - 15y$, komt Strabbe uit op $x = \frac{15y}{15-y}$. Hij vervolgt met te stellen:

> "Hier uit ziet men nu ligtelyk, dat y kleiner moet zyn, als 15; want, zo $y = 15$ was, zou de Breuk $\frac{15y}{15-y}$ onëindig groot zyn, gelyk wy op een andere plaats zullen doen zien; en zo y grooter als 15 was, zou $15-y$, en dus ook $\frac{15y}{15-y}$, eene ontkennende grootheid zyn, het geen tegen de vraag strydig is, om dat daar in geen andere, als bevestigende, of stellige, grootheden ondersteld worden."[14, p. 11, 12]

Strabbe benoemt hier dat het in strijd is met de opgave dat y negatief is. Het argument dat hij daarbij geeft, gaat als volgt: de opgave veronderstelt geen andere grootheden dan positieve. In de vraag werd echter alleen gesproken over het vinden van twee getallen en werd niets vereist over de positiviteit of negativiteit ervan; het lijkt erop dat Strabbe van een getal aanneemt dat het positief is, tenzij uitdrukkelijk benoemd wordt dat het negatief kan zijn.

Na wat verdere berekingen uitgevoerd te hebben, onderzoekt Strabbe de grootheid x. Deze zal:

> "boven dien stellig zyn; want zo als $15-y$ grooter als 0, en kleiner als 15 is, zal $\frac{225}{15-y}$ grooter als $\frac{225}{15}$, of 15, zyn, en by gevolg kan $\frac{225}{15-y}-15$, of x, geene ontkennende waarde hebben."[14, p. 12, 13]

Uit het aannemen van de positiviteit van y leidt Strabbe hier af dat x positief moet zijn. Dat is vreemd. Immers, als we zijn argument voor de positiveit van y gebruiken, dan moet x vanzelf ook al positief zijn. Vanwaar dan toch dit rekenkundige argument?

De volgende opgave maakt bepaald niet duidelijker hoe Strabbe eisen in opgaven formuleert. We lezen: "Vraag 4. *Welke zyn de Waarden van x en y in de Vergelykinge* $8x - 5y = 9$". Uit deze opgave "blykt, dat de waarde van y willekeurig kan genomen worden, zo in heele getallen als Breuken, dewyl in 't Voorstel daar omtrent geen bepaaling gemaakt wordt"[14, p. 13, 14].

Waar volgens Strabbe in de vorige opgave een objectieve omschrijving geen ruimte laat voor negatieve getallen, ziet hij in deze opgave met een vergelijkbaar objectieve omschrijving blijkbaar een mogelijkheid om het antwoord in *breuken* te geven. Dat maakt duidelijk dat Strabbe niet altijd even nauwkeurig is in het formuleren van zijn opgaven. Uit het eerste voorbeeld kunnen we dan ook niet zomaar concluderen dat Strabbe moeite had met negatieve getallen; hetzelfde formuleringsprobleem zien we immers bij breuken. Wel blijft het vreemd dat hij in de vorige opgave eerst stelt dat we op zoek zijn naar positieve x en y en daarna uit de positiviteit van y af gaat leiden dat x positief is.

Maar hoe verder we het boek doorbladeren, hoe duidelijker Strabbe wordt. Zo staat in vraag 19: "*Men begeert drie heele, en stellige, getallen te vinden, zodanig dat (...)*"[14, p. 39]. Vanaf hier zegt Strabbe in de meeste gevallen expliciet naar welke type getal gezocht moet worden. Wanneer hij het niet benoemd, geeft zijn uitwerkingen in de meeste gevallen zowel negatieve als positieve antwoorden. Helemaal vanzelfsprekend is dat nog niet voor Strabbe zelf, want in plaats van te vragen naar hele getallen, vraagt hij af en toe naar "*heele getallen, zo stellige, als ontkennende*"[14, p. 128].[9]

Cardanovergelijkingen Na de diophantische vergelijkingen behandelt Strabbe cardanovergelijkingen. Dit zijn vergelijkingen van de vorm $x^3 + ax = b$, waarvoor *de formule van Cardano* een oplossingsmethode geeft. Cardano zelf onderscheidde vier gevallen van dit type vergelijking; hij liet niet toe dat variabelen zowel een negatieve als een positieve grootheid aan kunnen duiden. Strabbe benoemt deze "vier gedaanten":

$$x^3 + ax = b$$

$$x^3 + ax = -b$$

$$x^3 - ax = b$$

$$x^3 - ax = -b$$

Hij doorziet dat deze gevalsonderscheiding niet noodzakelijk is: "Dewyl nu deeze gedaanten alleenlyk in de Tekenen verschillen, zal de Oplossing van één deezer Gevallen, die van alle de anderen aanwyzen, door alleen op de Tekens te letten."[14, p. 133]. Strabbe ziet blijkbaar in dat een van de vergelijkingen oplossingen voor alle vier gedaanten geeft. Toch was dat niet zo vanzelfsprekend dat hij het benoemen van de vier gevallen onnodig acht. Enerzijds kan dat te maken hebben met hoe duidelijk hij dat zelf vond, anderzijds met een verwachting van Strabbe dat zijn lezers deze expliciete tussenstap nodig hadden.

Hierna werkt hij uit hoe een dergelijke vergelijking moet worden opgelost. Overigens komt Strabbe hierbij niet uit op complexe getallen. In de stap waar hij eigenlijk op een wortel van een negatief getal uit zou moeten komen, neemt hij namelijk een minder algemene stap. Daardoor komt hij alleen op positieve wortels uit. Hoe Strabbe over negatieve wortels denkt, is echter

[9] Ik heb een poging gedaan om te onderzoeken of er misschien een andere reden kan zijn voor Strabbe om de variabelen als positief te veronderstellen; bijvoorbeeld vanwege de aard van het voorstel of anderszins. Het lijkt echter niet in strijd met het voorstel om negatieve antwoorden te verkrijgen. Strabbe zou daarnaast aan andere bronnen ontleend kunnen hebben dat negatieve getallen binnen dit voorstel niet mogelijk zijn. Hij heeft in ieder geval Clairaut gelezen en vertaald, zoals we hierna zullen zien; maar bij hem is in zijn boek *Gronden der Algebra* niets terug te vinden omtrent het veronderstellen van de positiviteit van een getal.

wel op een andere plek te lezen. Daar komt hij uit op twee wortels van negatieve getallen en twee van positieve getallen, waarvan "de beide eersten *verdigte* wortelen zyn [14, p. 132]. Uiteindelijk erkent hij de twee wortels van negatieve getallen niet als oplossing van de vergelijking. Toch schrijft Strabbe de wortel van een negatief getal op; helemaal onbekend was het concept niet voor hem.[10]

In de rest van het boek worden voorbeelden behandeld en uitwerkingen gegeven. Daarbij zijn Strabbes berekeningen niet altijd even helder en vanzelfsprekend, maar met negatieve getallen lijkt er weinig mis te gaan.

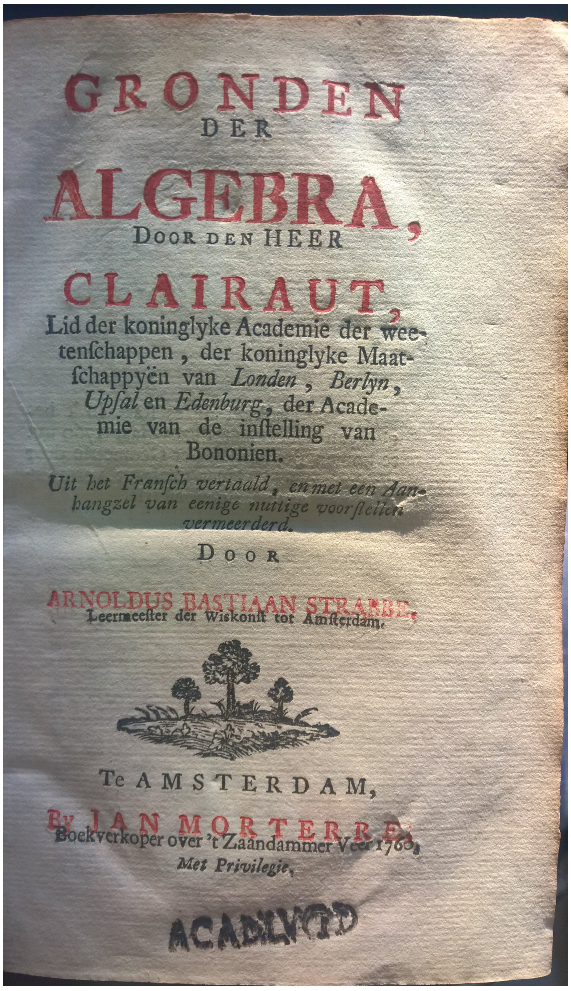
Concluderend: *Inleidinge tot de Mathematische Weetenschappen*
Alleen al in dit boek zien we een hele ontwikkeling omtrent de negatieve getallen. We begonnen immers met Strabbes definitie van aftrekken: "stel het kleinste Getal onder het grootste"[14, p. 8]. Een groter getal van een kleiner getal aftrekken blijkt hier voor Strabbe niet mogelijk en negatieve getallen daarom evenmin. Het boek eindigt echter met berekeningen waar negatieve getallen een wezenlijk onderdeel van uitmaken.

Strabbe heeft negatieve getallen in dit boek vrij laat en niet heel duidelijk geïntroduceerd en uitgelegd, zeker niet als we bedenken dat het een beginnersboek betreft. De onduidelijke introductie moet waarschijnlijk grotendeels verklaard worden vanuit de manier van wiskundebeoefening in die tijd. Zelf weet hij in ieder geval wel wat negatieve getallen zijn en hij kan er ook mee rekenen; daarin gaat weinig mis, hoewel zijn uitwerkingen soms verwarring geven. Het is echter wel de vraag in hoeverre hij beide betekenissen van het minteken als operatie en als aanduiding voor negativiteit heeft onderscheiden. Bij zijn definiëring van de bewerking aftrekken leken die twee door elkaar te lopen. Daarnaast geeft Strabbe in dit boek veel aanleiding om te denken dat hij negatieve getallen alleen als bestaand zag in de algebra en niet in de arithmetica.

5.3 Strabbes vertaling: *Gronden der Algebra*

Voordat Strabbe *Inleidinge tot de Mathematische Weetenschappen* schreef, had hij al een boek over algebra vertaald uit het Frans. Dit boek is geschreven door Alexis Claude Clairaut en uitgegeven in 1746. Clairaut was een wetenschapper van niveau en onderhield correspondenties met de belangrijkste wiskundigen in zijn tijd, zoals Euler. Naast *Élémens d'algèbre* gaf hij

[10] Overigens lezen we in *Gronden der Algebra*, een boek dat Strabbe vertaald heeft voordat hij *Inleidinge tot de Mathematische Weetenschappen* schreef, eenzelfde benadering. Negatieve wortels bestaan in zoverre dat ze opgeschreven kunnen worden, maar gelden niet per se als antwoord.



GRONDEN
DER
ALGEBRA,
DOOR DEN HEER
CLAIRAUT,
Lid der koninglyke Academie der weetenſchappen, der koninglyke Maatſchappyën van *Londen*, *Berlyn*, *Upſal* en *Edenburg*, der Academie van de inſtelling van Bononien.

Uit het Franſch vertaald, en met een Aanhangzel van eenige nuttige voorſtellen vermeerderd.

DOOR
ARNOLDUS BASTIAAN STRABBE,
Leermeeſter der Wiskonſt tot Amſterdam.

Te AMSTERDAM,
By JAN MORTERRE,
Boekverkoper over 't Zaandammer Veer 1760,
Met Privilegie.

Figuur 5: Het titelblad van *Gronden der Algebra*

nog een didactisch werk uit, *Élémens de géométrie*. In beide werken heeft Clairaut zich als doel gesteld de lezer zoveel mogelijk zelf de theorie te laten ontwikkelen, hoewel hij probeert te zorgen dat zij niet de misstappen hoeven te maken die de eerste uitvinders wel hebben gemaakt [9].

Strabbes vertaling van *Élémens d'algèbre* kwam uit in 1760; tien jaar voordat zijn *Inleidinge tot de Mathematische Weetenschappen* uitkwam. Strabbe vertaalt *Gronden der Algebra* niet alleen, maar voegt ook nog een flink aantal opgaven toe. Bij enkele daarvan geeft hij ook een uitwerking. De inhoud van het boek is van belang, enerzijds omdat zo duidelijk wordt welke voorkennis Strabbe opgedaan heeft tijdens het vertalen van dit boek en anderzijds omdat dit boek in 1760 in Nederland verscheen en aangeeft welk beeld van negatieve getallen men in Nederland via de bestaande boeken verkreeg.


LIX.

Men zal hier uyt wel haast, als alge-meene grondregelen hebben konnen aanmerken, dat

+	gedeeld door	+	voortbrengt.	+
+		−		−
−		+		−
−		−		+

Figuur 6: De rekenregels met plus en min worden gezien als grondregels van de algebra

Clairaut gaat ervan uit dat zijn lezers enige voorkennis hebben en in ieder geval kennis hebben van de arithmetica, zo wordt duidelijk uit zijn voorrede. Hij is bekend met negatieve getallen en veronderstelt dat men weet wat zij inhouden. Clairaut zal niet te lang stilstaan bij het bewijzen van de rekenregels die betrekking hebben op negatieve getallen. Immers,

> “[d]eeze grondregel welke dezelve bevat, dat twee *Negative* grootheden voor haar vermenigvuldigde een *Positieve* grootheyd voortbrengen, is byna altyd de klip van de een en de anderen."[13, p. 4]

Het aantonen van de basisregel ‘min keer min is plus’ is nog niet zo eenvoudig. Of Clairaut zelf een duidelijk bewijs had, wordt niet helemaal duidelijk. In ieder geval zal hij daar niet teveel aandacht aan schenken, öm te vermyden van ‘er op te vervallen” [13, p. 4].[11]

Hoewel Clairaut al voorkennis veronderstelt, introduceert hij toch kort de symbolen, ook het minteken:

> "het teeken −, dat min genoemd word, om gedagtig te doen zyn,

[11]Ik heb, hoewel slechts zeer kort, vergelijkend onderzoek voor de Franse editie en de vertaalde versie van Strabbe en daarbij weinig verschillen gevonden. Het kan van belang zijn om iets dergelijks grondiger te doen; opmerkelijke verschillen kunnen veel duidelijk maken over of Strabbe hetzelfde denkt als Clairaut of op sommige punten afwijkt. Daarnaast kan het nuttig zijn om Strabbes eigen werk, *Inleidinge tot de Mathematische Weetenschappen*, te vergelijken met *Gronden der Algebra*, om te achterhalen in hoeverre hij de inhoud van zijn eigen boek ontleend heeft aan de vertaling.

> dat de grootheyd voor welke het geplaatst is, van de voorgaande moet weggenomen worden."[13, p. 5]

Hier wordt alleen de betekenis van het minteken als operatie uitgelegd en niet de betekenis van het aanduiden van negativiteit. Pas een heel stuk later, op pagina 46, valt er iets te lezen over de tweede betekenis. Negatieve getallen worden echter ook daar niet duidelijk gedefinieerd, maar verwerkt in een bijzin. Deels zal dat komen omdat Clairaut voorkennis van de arithmetica veronderstelt. Toch blijft het vreemd dat Clairaut het minteken als symbool voor de bewerking aftrekken wel definieert en het minteken als symbool voor negativiteit van een getal niet. Het eerste lijkt nog eerder basiskennis te zijn dan het tweede, te meer daar Clairaut zich op andere plaatsen juist sterk aanpast aan de lezer die nog weinig weet van negatieve getallen. Het weinige dat Clairaut zegt over het minteken als symbool voor negativiteit, geeft een beginner ook weinig helderheid en begrip van een negatief getal. Negatieve getallen worden namelijk omschreven als "diegeene, die het teken $-$ voor aan hebben"[13, p. 46]. Clairauts definiëring van het minteken kan deze definitie van een negatief getal echter helemaal niet aan; het minteken was het symbool voor aftrekking en hield in dat een getal van het voorgaande getal afgetrokken moest worden, maar bij een negatief getal hoeft er geen voorgaand getal te zijn.

Clairaut behandelt bij het uitleggen van de bewerking vermenigvuldigen eerst een vermenigvuldiging met een positieve grootheid,

> om dat men zig gemeenlyk niet gewend om een *Negative* grootheyd als alleen bestaande aan te merken [13, p. 4]

Bij de tweedegraadsvergelijkingen kiest hij zijn eerste voorbeeld van een het oplossen van een tweedegraadsvergelijking met zorg:

> [I]k hebbe het van die natuur verkoozen, om voor deszelfs beyde oplossingen twee *Positive* getallen voort te brengen. (...) Ik hebbe 'er aldus meede gehandeld, uyt vreeze dat de aanvangers, welke niet gaarne de *Negative* wortelen als waare Oplossingen aanmerken, niet meenden dat het *Voorstel* weezentlyk maar eene oplossing hadde. [13, p. 8, 9]

Wat Clairaut hier in de voorrede schrijft, is hij blijkbaar weer vergeten wanneer hij het onderwerp zelf gaat bespreken. Aan het begin behandelt hij namelijk alleen algemene gevallen, waarvan niet gezegd kan worden of ze positief dan wel negatief zijn.

Hoewel het voorlaatste citaat zo gelezen kan worden dat Clairaut zelf niet gewoon is om een negatieve grootheid op zichzelf te beschouwen, is het waarschijnlijker dat hij zich hier aanpast aan äanvangersöfwel de beginners. Later in het boek wordt een negatieve grootheid vaak genoeg op zichzelf staand beschouwd; Clairaut kan er blijkbaar wel omgaan. In het laatste citaat zien we dat hij zich opnieuw aanpast aan zijn onervaren lezers.

Volgens Clairaut kan een variabele zowel een positief als een negatief getal voorstellen. Bij de cardanovergelijkingen zou hij dus ook geen onderscheid gemaakt hebben in vier gevallen, wat Strabbe evenmin doet in zijn boek. Clairaut legt uit "dat een eenige en zelve Formule, met behulp der tekenen meer en min, alle wortelen der Vergelyking kan uytdrukken" [13, p. 15].

Clairaut ziet negatieve getallen als mogelijke oplossingen voor een vergelijking. Maar hoe interpreteer je een negatief getal wanneer je een praktisch probleem oplost via een algebraïsche vergelijking?

> Zoo men nu het gebruyk zoekt, dat men van de Negative waarde maaken moet, zal men bevinden, als men zich herinnerd, het geen men (I Deel Art, LXIII.) over deeze waardens in de Vergelykingen van de eerste *Magt* gezien heeft; dat dezelve in eens zin met de eerste strydig genomen moet worden. [13, p. 151, 152]

> den Leezer geraakt terzelver tyd om de natuur der *Negative* oplossingen der voorstellen te kennen; hy leerd deeze zoo nuttige Waarheid, dat als men in een oplossing geraakt om het *Negative* te vinden, het zelve in een zin genomen moet worden, stydig aan die geene, volgens welke men het zelve, in het uytdrukken der Conditien van het *Voorstel*, gebruykt hadde. [13, p. 7]

Het is wat cryptisch verwoord, maar als we voorstel LXIII nazoeken, wordt duidelijk dat Clairaut bedoelt dat het minteken weggelaten kan worden in een antwoord op een praktisch vraagstuk. Hij behandelt hieromtrent een vraagstuk over twee bronnen, die met een bepaalde snelheid water leveren. Er wordt gevraagd naar het tijdstip waarop er een bepaalde hoeveelheid water in beide bronnen samen zit. Bij het oplossen van de algebraïsche vergelijkingen behorend bij het vraagstuk, komt Clairaut op een negatief getal. Zijn interpretatie is dan dat er blijkbaar enerzijds water uitgenomen wordt en anderzijds water bijkomt. Deze interpretatie geeft inderdaad een mogelijke oplossing. Mijns inziens is die echter niet zo consistent, omdat bronnen die water leveren, niet zomaar water kunnen opnemen. Daarbij is het niet in alle gevallen zo dat een negatieve oplossing van een praktisch vraagstuk om te zetten is naar een praktische oplossing.

Clairaut blijkt negatieve getallen wel te kennen en kan er ook mee rekenen. Ook denkt hij na over de praktische betekenis van een negatief getal. Het is daarnaast mogelijk dat Strabbe deels aan dit boek heeft ontleend dat negatieve getallen alleen bestaan binnen de algebra. De titel is immers *Gronden der Algebra* en er komen negatieve getallen in voor. Een dergelijke hypothese blijft echter giswerk en met zekerheid kan het dus niet gesteld worden.

6 Reekenboek voor de Nederlandsche Jeugd

In 1797 komt het *Reekenboek voor de Nederlandsche Jeugd* uit, geschreven door Hendrik Aeneae en uitgegeven door de Maatschappij tot Nut van 't Algemeen. Dit boek was relatief populair, met name voor onderwijzers en had veel aandacht voor de praktijk en toepassingen van de wiskunde. Het begrip van de wiskunde en het bewijs van een stelling stonden daarbij meer centraal dan leren rekenen zelf; iets wat door sommigen als nieuwlichterij werd beoordeeld [4, p. 72, 74]. Rekenen wordt uitgelegd door een dialoog weer te geven tussen een docent en een leerling, die duidelijk bovengemiddeld intelligent is. Nadat het optellen en het vermenigvuldigen aan de orde gekomen zijn, legt de docent uit hoe een getal van een ander getal afgetrokken moet worden.[12] Vervolgens worden enkele voorbeelden behandeld, waarin telkens een kleiner getal van een groter getal afgehaald wordt; er is geen voorbeeld te vinden waarbij een groter getal van een kleiner getal afgetrokken wordt. Naar aanleiding van die uitleg merkt deze intelligente leerling op dat er nu telkens een kleiner getalmerk (ofwel een van de cijfers binnen een getal) van een groter getalmerk afgetrokken is, bijvoorbeeld $3209 - 14$. Het lijkt niet waarschijnlijk dat de leerling hier vraagt naar een bewerking waarin een groter getal van een kleiner getal afgetrokken wordt. Desondanks maakt dit duidelijk dat negatieve getallen niet volledig te vermijden zijn met een definitie van aftrekken als een kleiner getal van een groter getal afhalen. Binnen zo'n bewerking kan je namelijk genoodzaakt zijn een groter *getalmerk* van een kleiner getalmerk af te halen. Inderdaad kan dat worden opgelost door een eenheid van het linkse getalmerk te 'lenen'. Als iemand dit echter wil problematiseren, zijn er bewerkingen te bedenken waarbij de definitie niet afdoende is. Daarnaast is de stap van 'een groter getalmerk van een kleiner getalmerk afhalen' naar een 'groter getal van een kleiner getal afhalen' niet heel groot. De gebruikte definitie blijkt niet per se afdoende om negatieve getallen buiten het zicht te laten.

Verder legt Aeneae uit wat het minteken is; en dat is zeker een vernieuwing. Symbolen en variabelen lijken meer iets te zijn wat tegelijk met de algebra opkomt. In de boeken van Stockmans en Van Olm, die aan het begin besproken zijn, komt het minteken niet voor en ook Strabbe introduceert het pas wanneer hij de algebra bespreekt; de bewerking aftrekken werd dan geformuleerd in de tekst en niet weergegeven door een minteken. Een andere verwijzing naar de negativiteit van een getal is in het volgende citaat te lezen:

> Bij voorbeeld, als men vraagt naar het verschil tussen 8 en 5, zo

[12] Het verbaasde me dat hier afgeweken wordt van de traditionele volgorde: optellen en aftrekken eerst, daarna vermenigvuldigen en delen. Opvallend is dat De Gelder in zijn *Allereerste gronden der cijferkunst, opgesteld ten gebruike der scholen en kollegiën* eenzelfde volgorde hanteert.

> zal dit gevonden worden door 8 van 5, of 5 van 8, af te trekken, als wanneer men zal zien dat 'er in het eerste geval 3 te kort komen, of dat 'er in het laatste 3 over schieten; 't welk toont, dat het verschil tussen deze beide getalen 3 is, of dat 8 en 5, met elkanderen vergeleken zijnde, 3 van elkanderen verschillen. [1, p. 78]

Het grotere getal 8 van het kleinere getal 5 afhalen, lijkt hier mogelijk te zijn. Daar wordt betekenis aan gegeven met het begrip verschil. Aeneae lijkt de bewerking aftrekken op te vatten binnen absolute waarden: $8 - 5$ is voor hem gelijk aan $|8 - 5|$. Dat biedt weer een geheel ander perspectief op negatieve getallen en de mogelijkheid tot het vermijden ervan. De vraag ontstaat tevens of meer auteurs het aftrekken in verband brengen met het nemen van de absolute waarde.

In de rest van het boek komen negatieve getallen of een aanzet in de richting ervan, niet voor. Het is mogelijk dat Aeneae zelf niet bekend is met dit relatief nieuwe concept, maar het kan ook een didactische keuze geweest zijn. Mogelijk is zelfs dat negatieve getallen hier niet voorkomen omdat Aeneae een rekenboek schrijft en geen algebra behandelt; dan zou Strabbe niet de enige zijn die de rekenkunde en de algebra onderscheidt. Daarnaast blijkt uit *Reekenboek voor de Nederlandsche Jeugd* dat een tekstboek voor scholen geen negatieve getallen hoefde te bevatten en toch populair kon worden. Want zoals we eerder zagen, kreeg dit boek voldoende bekendheid en werd het zelfs als nieuwlichterij beoordeeld.

7 Inleiding tot de algebra, ten dienste van de scholen

Niet alleen Strabbe, ook Obbe Sikkes Bangma schreef boeken voor het Wiskundig Genootschap. Hij werd gevraagd om een inleiding op de algebra te schrijven. Hoewel hij eerst nee zei, ging hij toch aan het schrijven om te onderzoeken of hij erin kon slagen om in de geest van het genootschap te schrijven [2, voorrede]. Nadat het genootschap dit schrijven goedkeurde, schreef Bangma het boek *Inleiding tot de algebra, ten dienste van de scholen.* Zijn werk kwam uit in 1811; na Strabbes overlijden.

Bangma zelf was onderwijzer en tevens eerste secretaris en redacteur van het Wiskundig Genootschap. Daarnaast had hij contacten in universitaire kringen en had hij veel contact met Jacob de Gelder, wiens werk ik later nog zal bespreken [7, p. 37].

Het boek begint met een verklaring van wat algebra inhoudt en een "verklaring van deze teekens en zinnebeeldige voorstellingen"die binnen de algebra gebruikt worden [2, p. 1]. Het minteken wordt daarbij op de volgende manier gedefinieerd:

> Als een getal a van een ander getal b afgetrokken moet worden, duidt men het overschot aan door $b - a$. Het teken $-$, dat men voor het afgetrokkende getal a stelt, wordt *minus* genoemd [2, p. 2].

Van de betekenis van het minteken als aanduiding van negativiteit, wordt niet gerept.

Enige pagina's later onderbouwt en benoemt Bangma het volgende: "$b - (a - c) = b - a + c$"[2, p. 10]. Vervolgens stelt hij dat a ook 0 kan zijn; in dat geval krijgt men "$b - (-c) = b + c$"[2, p. 12]. En uit dit gegeven volgt dat "*een af te trekken getal a, of $-c$, in de formule, die het overschot te kennen zal geven, een ander teken moet hebben, als voor de substractie* [2, p. 12]. Bangma beschouwt hier het getal $-c$; negatieve getallen bestaan blijkbaar op zichzelf.

Bangma kan het minteken blijkbaar ook gebruiken als symbool voor negativiteit van een getal; er hoeft immers niet per se een getal voor het minteken te staan. Strikt genoemen zou dat met zijn definitie wel moeten, omdat het dan aangeeft dat een getal van een ander afgetrokken wordt. Zonder dat andere getal heeft een minteken dan eigenlijk geen inhoud. Bangma lijkt deze inconsistentie echter niet op te merken en ziet blijkbaar geen verschil tussen de twee betekenissen.

Dat hij wel weet heeft van negatieve getallen, lijkt het volgende voorbeeld bij optellen en aftrekken aan te duiden. "Addeer $7a - 8bc$ bij $3bc - 19a$; komt $-12a - 5bc$"[2, p. 11]. De uitkomst die Bangma geeft, is waarschijnlijk negatief. Hoewel de variabelen ook negatief kunnen zijn, met als gevolg dat het uiteindelijke antwoord positief wordt, is dat niet waarschijnlijk. Dat blijkt uit een later gedeelte waar hij meer gevallen onderscheidt dan nodig omdat hij een variabele niet negatief laat zijn.

Na het optellen en aftrekken komt Bangma bij het vermenigvuldigen. Hij behandelt het geval waarin $a - b$ vermenigvuldigd wordt met p. De uitkomst is dan te vinden "door het getal $a - b$ zo menigmaal tot zichzelf te adderen, als nodig is, om hetzelve p maal te hebben; in welk geval men voor de som zal hebben $pa - pb$ [2, p. 14].[13] Daarna behandelt Bangma $(p - q)(a - b)$. Men kan de uitkomst verkrijgen

> door eerst het getal $a - b$ te nemen p malen, waar door men verkrijgen zal $pa - pb$; vervolgens q malen, waar door men verkrijgen zal $qa - qb$; en trekken deze laatste uitkomst van de eerste af; zoo heeft men $pa - pb - qa + qb$ voor de uitkomst van $p - q$ malen $a - b$ [2, p. 14].

Bangma geeft dus aan hoe men moet vermenigvuldigen door deze bewerking op te vatten als een aantal malen optellen. Het vraagstuk kan dan opgelost worden met wat Bangma eerder heeft behandeld en wat we hierboven ook gezien hebben. Dezelfde methode zagen we eerder bij Strabbe. Regels voor het optellen en aftrekken zijn in het algemeen inderdaad eenvoudiger te begrijpen, onder andere omdat ze dichter bij het dagelijks leven staan.

Uit al dit voorgedragene blijkt nu volgens Bangma:

> dat men door p malen a niet anders verstaan moet, dan het getal a, p malen herhaald, als wanneer men verkrijgt pa; dat men door p malen $-b$ niets anders verstaan moet, dan het getal $-b$, p malen herhaald, als wanneer men verkrijgt $-pb$; dat men door $-q$ malen a niets anders verstaan moet, dan het getal a, q malen afgetrokken, in welk geval men verkrijgt $-qa$; dat men door $-q$ malen $-b$ niets anders verstaan moet, dan het getal $-b$, q malen afgetrokken, in welk geval men verkrijgt qb; en dus, als multiplicator en multiplicandum eenerlei teeken hebben, is de uitkomst altijd positief; maar een van beide positief en de andere negatief zijnde, zoo is de uitkomst negatief. [2, p. 15]

Tegen de wiskundige juistheid van bovenstaande wil ik geen woord inbrengen, maar dat Bangma hier de woorden positief en negatief gebruikt alsof ze

[13] Of Bangma de gebruikte variabelen als geheel en positief beschouwt, wordt niet duidelijk. Het lijkt erop dat ze wel positief zijn, omdat Bangma expliciet een minteken toevoegt wanneer het getal negatief wordt.

bekend zijn, roept verbazing op. Het construct van een getal waar een min voor staat is door Bangma al niet geïntroduceerd, hoewel hij er wel mee omgaat alsof het bekend zou zijn. Daar is echter nog iets bij voor te stellen; men kan het getal waarvan afgetrokken wordt nul stellen. Dat een getal positief of negatief kan zijn en wat dat inhoudt, lijkt me echter zeker een uitleg behoeven. Bangma schrijft voor scholen; zijn lezers hebben zeer weinig voorkennis en leren een nieuw gebied. Daarenboven heeft hij in het begin zaken uitgelegd die eenvoudiger zijn dan de negativiteit of positiviteit van een getal.

Wat we eerder al zagen, zowel bij Strabbe als Clairaut, zien we hier opnieuw. Het lijkt erop dat ook Bangma negatieve getallen zonder al teveel bezwaar opgeneemt in zijn getallensysteem en ermee rekenen kan, maar dat er tegelijkertijd niet echt stilgestaan wordt bij hun betekenis.

Bangma gaat in ieder geval verder met het inleiden van de algebra. Hij komt bij het behandelen van tweedegraadsvergelijkingen. Hij onderscheidt dan twee vormen, namelijk

$x^2 + ax = b$

$x^2 - ax = b$

"waar in a en b bekende en x het onbekende getal beteekent, zijn vierkants vergelijkingen, of vergelijkingen van den tweeden graad" [2, p. 99]. Als hij de mogelijke oplossingen voor x uitwerkt, blijft hij beide gevallen onderscheiden. Ontbinden en uitwerken geeft voor de eerste vergelijking $x = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4b}$. Daarna voert hij een soortgelijke berekening uit voor de tweede vergelijking, met als resultaat $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4b}$.

Wanneer a voor een willekeurige variabele wordt genomen, kan a zowel positief als negatief zijn. De twee bovenstaande vergelijkingen komen dan op hetzelfde neer. Bangma heeft dat blijkbaar niet ingezien; waarschijnlijk doorgrondde hij negatieve getallen en het rekenen ermee niet volledig.

Hoewel hij niet alle mogelijke vormen van derde- en vierdegraadsvergelijkingen langsgaat, presenteert Bangma er wel een lijstje van. Het opvallende is echter dat hij daarbij alleen de positieve vormen geeft en geen onderscheidingen maakt met mintekens zoals hierboven. De door hem opgesomde rij van gevallen is daarom alleen volledig wanneer de variabelen negatief mogen zijn. Bangma blijkt niet altijd consequent te zijn, aangezien we bij de tweedegraadsvergelijkingen zagen dat hij een variabele als positief veronderstelde.

Vierdegraadsvergelijkingen lost Bangma overigens nergens op, behalve wanneer ze eenvoudig om te schrijven zijn naar een tweedegraadsvergelijking. Dergelijke vergelijkingen zijn een speciale vorm van een algemene vergelijking, waar hij even later toe komt: $x^{2m} \pm ax^m = b$ [2, p. 122]. Nog steeds staat hier echter een $\pm$, terwijl er ook een plus had kunnen staan.

Nadat Bangma heel andere zaken zoals arithmetische verhoudingen heeft behandeld, benoemt hij dat de gegeneraliseerde tweedegraadsvergelijking $x^2 + ax = b$ naast de eerder gevonden oplossing $x = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + 4b)}$ ook $x = -\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + 4b)}$ kan geven. Immers, "de kwadraatwortel uit een voorgesteld getal, 9 bij voorbeeld, zoo wel -3 als +3 zijn kan" zo kan ook de wortel van deze opgave een negatief en positief antwoord geven [2, p. 198].

Er zijn echter vergelijkingen waarvoor geen oplossing is, bijvoorbeeld $x^2 - 10x = -34$. Men krijgt dan $x = 5 + \sqrt{-9}$ en $x = 5 - \sqrt{-9}$.

> maar wat is de kwadraatwortel uit -9, immers niet $+3$ noch -3; want $(+3)^2$ zoo wel als $(-3)^2$ geeft 9 en niet -9; daarom zegt men, dat de waarden van x in de vergelijking $x^2 - 10x = -34$ onmogelijk zijn, en dat het voorstel, het welk tot deze vergelijking aanleiding heeft gegeven, onmogelijk is. [2, p. 199]

Complexe getallen lijken voor Bangma nog een stap te ver, hoewel het een mogelijkheid blijft dat hij ze weglaat omdat zijn lezers daar niet aan toe zijn. In de huidige onderwijsboeken wordt immers van negatieve wortels ook gezegd dat ze onmogelijk zijn? In beide gevallen wordt benoemd dat complexe getallen 'onmogelijk' zijn; dat is anders dan ze weg te laten en zou erop kunnen duiden dat de auteur wel kennis heeft van het concept.

8 Proeve over den Waren Aard van den Positieven of Negatieven Toestand der Grootheden in de Stelkunst

In 1814 schrijft Jacob de Gelder een boek dat het resultaat is van een grondig onderzoek naar wat negatieve getallen precies zijn en welk bestaansrecht ze hebben. Het boek bestaat in twee hoofddelen; een verklaring van de aard van positieve en negatieve getallen en een poging om te laten zien wat negatieve getallen betekenen in de meetkunde. Ik behandel hier alleen het eerste deel. Steeds was de positieve of negatieve toestand van een getal immers een steen des aanstoots voor beginnende leerlingen; het onderwerp was door twijfelingen omgeven; de gevoelens met betrekking tot zijn ware hoedanigheid waren verdeeld, zelfs onder de meest vooraanstaande wiskundigen [8, voorrede, p. 5, 6]. Vanuit de ogen van De Gelder was dit de situatie in 1814; 54 jaar nadat Strabbes vertaling van *Gronden der Algebra* uitgegeven werd, inclusief negatieve getallen. De Gelder zelf behoorde zeker tot die vooraanstaande wiskundigen; hoewel hij zelf nooit aan een universiteit had gestudeerd, was hij lange tijd hoogleraar en heeft hij een prominente plaats ingenomen binnen Nederland door het ontwerpen van een nieuw plan voor het wiskundeonderwijs; wat ook uitgevoerd is[5]. Uit het boek blijkt, dat De Gelder vooral vanuit de waarheid van de regels aantonen wil dat de regels "natuurlijk"verklaarbaar zijn. Hij neemt dus niet de positie in van iemand die onderzoekt of iets, in dit geval de regenregels omtrent negatieve getallen, waar is; maar neemt als uitgangspunt dat bepaalde zaken waar zijn en laat dat vervolgens zien [4, p. 49].

8.1 Over de aard van positief en negatief

Negatieve getallen *bestaan*, dat wordt in ieder geval duidelijk uit De Gelders proeve. Maar hoe ze precies bestaan en waarin en op welk gebied is minder eenvoudig te achterhalen. In het onderstaande citaat legt De Gelder uit wat het negatief zijn van een getal inhoudt.

> elk getal x is dus altijd als het verschil van twee getallen $a - b$ denkbaar: is dit verschil bepaalbaar, zoo als de formule het aanwijst, dan bestaat het in de daad *stellig* en *positievelijk*; maar moet het in eene tegenstelde rangorde bepaald, dat is, moet a van b afgetrokken worden, dan is het *negatief*. (...) het woord *negatief* drukt alleen uit, *dat het verschil der getallen a en b, in eene omgekeerde orde, als door de formule $a - b$ wordt aangewezen, bepaald moet worden.* [8, p. 23, 24] [14]

[14] Hoewel ik geen plaats vond waar De Gelder het expliciet benoemt, lijkt hij zonder dat

§. 7. In deze proeve zullen wij.

1°. *Den aard, de hoedanigheid, beteekenis en behandeling der poſitieve en negatieve grootheden, uit derzelver oorſprong, dat is, uit het zuiver begrip der Stelkunst en hare bedoeling, afleiden en verklaren.*

2°. *Overeenkomſtig die verklaring, opgeven, wat de poſitieve en negatieve grootheden, zoo als de algemeenheid der Stelkunst dezelve doet ontſtaan, in de toepasſing dezer kunst op de Meetkunst, met betrekking tot het begrip van ruimte en plaats in dezelve, eigenlijk genomen zijn, en welk eene beteekenis zij in deze wetenſchap, overeenkomſtig deze gronden, moeten verkrijgen.*

De beſchouwing dezer twee eerſte hoofdzaken, zal ons telkens aanleiding geven, om de voornaamſte zwarigheden en bedenkingen, door D'ALEMBERT en CARNOT, tegen de poſitieve en negatieve grootheden ingebragt, uit den weg te ruimen, of liever, om aan te toonen, dat zij, naar onze wijze van de zaak voor te ſtellen, zonder kracht en waarde zijn.

Figuur 7: Uitleg van De Gelder over de inhoud van zijn werk

Een negatief getal wordt gedefinieerd aan de hand van de mogelijkheid om het te schrijven als twee getallen die van elkaar afgetrokken worden, waarbij het eerste kleiner is dan het tweede. Het bestaat niet zozeer op zich, maar slechts als resultaat van een bewerking. "Vermits men nu in de Stelkunst de algemeene getallen als afgetrokkene getallen denkt"[8, p. 25]. Ten minste, dat is het geval binnen de algebra, ofwel stelkunde; deze woorden zijn synoniemen.

De Gelder onderscheidt duidelijk de twee betekenissen van het minteken als teken dat een operatie weergeeft en als teken dat de negativiteit van een getal aanduidt. Deze twee moeten ook niet verward worden, dat zou een geheel verkeerd begrip geven [8, p. 39, 48]. Toch vat hij de negativiteit van een getal sterk op in samenhang met twee getallen die van elkaar afgetrokken worden. We zagen al dat dat het middel is om negatieve getallen te definiëren, maar een negatief getal bestaat zelfs niet zonder die samenhang: "zoodat, wanneer een getal niet kan gedacht worden, als het resultaat, of als de waarde van $a - b$, er geen onderscheid van positieven of negatieven toestand bestaan kan."[8, p. 48]. Het blijft onduidelijk wanneer een getal niet gedacht kan worden als resultaat van zekere $a - b$, maar het lijkt erop dat De Gelder de mogelijkheid van zo'n situatie ziet. Het positieve of negatieve van een getal is dan slechts een toestand van dat getal en is dus niet inherent verbonden aan het getal zelf en zijn aard. In ieder geval duidt De Gelder met positief en negatief geen verschillende soorten getallen, maar twee onderscheiden en regelrecht tegenover elkaar staande omstandigheden of toestanden van de wijze waarop een getal begrepen kan worden, namelijk vanuit zijn ontstaan uit de algemene formule $a - b$ [8, p. 48].

Daarbij omschrijft De Gelder aftrekken als volgt:

> Dat een positief of negatief getal van een ander getal af te trekken, niet anders is, dan dit positieve of negatieve getal met zijn tegengesteld teeken met dit andere getal, waarvan het moet afgetrokken worden, te vereenigen.

8.2 Wel negatief, niet minder dan nul

Verrassend is hoe De Gelder het concept negatieve getallen ziet.

> Naar onze wijze van verklaren, is, in eenen eigenlijken en stelligen zin, $-a$ niet een getal a van *nul* afgetrokken, en gevolgelijk $-a$ niet minder dan nul: dit zijn wij met de Heeren D'ALEMBERT en CARNOT volkomen eens. Men heeft, wel is waar, deze oneigenlijke wijze van zeggen gebezigd, zonder genoegzaam te ver-

te stellen, a en b als positief te zien

> klaren, in welken zin dezelve moet verstaan worden: dan, wij kunnen bezwaarlijk gelooven, dat het den eerste uitvinderen der Stelkunst immer in de gedachte kan opgekomen zijn, in ernst te gelooven, dat er, in eenen letterlijken zin, grootheden minder dan nul zouden bestaan [8, p. 30]

Zo blijkt maar weer hoe verschillend men kan denken over eenzelfde concept: volgens De Gelder zijn negatieve getallen geen getal wat van nul afgetrokken is en dientengevolge zijn negatieve getallen ook niet minder dan nul. Hoogstwaarschijnlijk komt dit voort uit een nog altijd letterlijke interpretatie; van niets kun je immers niets afhalen. Deze omschrijving van negatieve getallen raakt direct aan wat De Gelder verstaat onder het concept getal: hij vat het op als een grootheid en vereenzelvigt het met een aantal, bijvoorbeeld een aantal knikkers. Hij betoogt dan ook dat 'minder dan nul' slechts een spreekwijze is. Hoewel de grondleggers van de algebra deze wijze van spreken wel hebben gebruikt, kan De Gelder niet geloven dat ze werkelijk zouden hebben gemeend dat er grootheden bestaan die minder dan nul zijn. In het gedeelte wat volgt na dit citaat, maakt hij aannemelijk dat zo'n wijze van spreken gebruikt wordt binnen de algebra; in het algemeen en binnen de wiskunde, reken- en stelkunde, wordt bij gebrek aan woorden vaker gebruik gemaakt van oneigenlijke wijzen van zeggen, bij gebrek aan woorden.

Aan dit werk van De Gelder met deze interpretatie van negatieve getallen werd in binnen- en buitenland aandacht gegeven; De Gelder ontving zelfs veel lof en verkreeg invloed onder Nederlandse wiskundigen als gevolg van het schrijven van dit boek [6, p. 108]. Hoewel het op de hedendaagse wiskundige vreemd overkomt, was dat absoluut niet het geval voor De Gelders tijdgenoten.

8.3 Negatieve getallen alleen binnen de stelkunst?

Hoewel De Gelder in zijn boek veel zaken expliciet vermeldt en het duidelijk wordt hoe hij negatieve getallen zien, blijft de vraag nog staan op welke gebieden negatieve getallen bestaan. Voorheen bracht het lezen van Strabbes boek mij tot het idee dat hij negatieve getallen alleen erkent binnen de algebra of stelkunde. Verbazingwekkend genoeg is dat bij De Gelder precies hetzelfde. Hij geeft veel aanleiding om te veronderstellen dat negatieve getallen alleen bestaan binnen de stelkunde. Hieronder citeer ik enkele zinnen waarin die aanleiding expliciet terug te vinden is.

> Vermits men nu in de Stelkunst de algemeene getallen als afgetrokkene getallen denkt, zijn er ook slechts twee algemeene woorden mogelijk. [8, p. 25]

Zoals we hierbven zagen, zijn getallen *binnen de stelkunde* op te vatten als afgetrokkene getallen, ofwel voortkomend uit de algemene formule $a - b$. Negatieve getallen worden, zoals we hierboven zagen, precies hetzelfde gedefinieerd: als afgetrokkene getallen. Getallen in de stelkunst en negatieve getallen worden De Gelder dus met dezelfde woorden omschreven; ze lijken dus te overlappen.

> Wij houden de negatieve getallen en grootheden voor een der schoonste hulpmiddelen der Stelkunst (...) zij bestaan in deze kunst noodzakelijk. [8, p. 69]

> Neemt men a en b beide als positief, dan zal, daar men hier het gewone geval der Rekenkunst heeft, wel niemand twijfelen, dat hier ook het quotiënt als positief moet gedacht worden. [8, p. 44]

Dit laatstgenoemde citaat is genomen uit een uitleg over delen met positieve en negatieve getallen. Als zowel teller als noemer positief zijn, dan heb je te maken met het gewone geval van de rekenkunde. Zodra er sprake een negatieve teller of noemer, behoort de opgave niet meer tot de rekenkunde, maar tot de stelkunde; slechts negatieve getallen maken iets tot onderdeel van de stelkunde. Tegenwoordig zouden we daarentegen zeggen dat het behoren tot de algemene rekenkunde niet afhangt van de positiviteit of negativiteit van het getal.

Nadat "de gronden en hoofdregels van het bepalen der teekens + en − in de stelkundige formulen" behandeld zijn, volgen alle andere regels uit

> de hier afgeleide en betoogde beginselen. (...) Wij gaan dan, daar ons oogmerk niet is, eene geheele verhandeling over de Stelkunst te schrijven, alle deze afgeleide regels met stilzwijgen voorbij. [8, p. 46]

De regels die te maken hebben met + en −, worden voorbijgegaan, *want* de auteur wil geen verhandeling van de stelkunde geven. De regels omtrent + en − lijken hier gelijkgesteld te worden aan de regels van de stelkunde; alsof ze specifiek binnen de stelkunde gelden en niet algemeen, op de diversiteit van wiskundige gebieden.

> Het blijkt dan (...) dat de ware en zuivere Theorie der zoogenaamde positieve en negatieve grootheden of getallen, voor zoo verre die, buiten eenige toepassing, in de zuivere Stelkunst gebezigd worden, in het volgend gering aantal grondstellingen, waarvan de volgende onmiddelijk uit de voorgaande voortvloeien, begrepen zijn. [8, p. 47]

Hierna legt hij de grondstellingen uit, waarin de theorie van positieve en negatieve getallen samengevat wordt, voorzover die ontoegepast in de zuivere stelkunde gebruikt wordt. Het gaat dus om theorie die gebruikt wordt in de zuivere stelkunst, niet om iets wat in het algemeen binnen de wiskunde gebruikt wordt, rekenkunde inbegrepen. Wel is voor De Gelder, blijkens dit citaat, mogelijk om negatieve getallen buiten de stelkunde toe te passen.

Via het neerschrijven van bovenstaande zinnen en meer aanwijzingen in de rest van zijn boek, laat Jacob de Gelder hoogstwaarschijnlijk zien dat hij negatieve getallen ziet als onderdeel van de stelkunde, wat geen plaats heeft binnen de rekenkunde. Voor Strabbe lijkt hetzelfde te gelden. Waar een dergelijk onderscheid vandaan zou moeten komen, is niet helemaal duidelijk. Het zou ermee te maken kunnen hebben dat een negatief getal wordt aangeduid door er een minteken voor te plaatsen. Mintekens waren geen gemeengoed in de rekenkunde; Stockmans en Van Olm beschreven de bewerking. In de boeken die ik onderzocht heb, worden mintekens veelal met de algebra of stelkunde geassocieerd. De stelkunde ofwel algebra wordt immers door veel auteurs van de bestudeerde boeken beschreven als een gebied van de wiskunde waar gebruik wordt gemaakt van symbolen en tekens; de zaken worden abstracter weergegeven en het minteken kan daarbij helpen. Als het minteken daadwerkelijk alleen gebruikt werd binnen de algebra, zou dat een verklaring kunnen geven voor het gegeven dat ook negatieve getallen alleen binnen de algebra voorkomen.

9 Concluderend

In deze scriptie heb ik een poging gedaan om de ontwikkeling van negatieve getallen in Nederland te beschrijven. Voordat men het concept negatieve getallen kende binnen de wiskunde, werd aftrekken gedefinieerd als een kleiner getal van een groter getal afhalen; men kwam met zo'n definitie niet in aanraking met negatieve getallen. Daarnaast werd schuld niet weergegeven door een minteken voor een getal te plaatsen, maar geformuleerd in de taal. Ten minste vanaf 1760, het jaar waarin Strabbes vertaling van *Gronden der Algebra* gedrukt is, was dit niet meer vanzelfsprekend. Clairaut kende negatieve getallen en rekent er in zijn boek veelvuldig mee. Hoewel een introductie en afdoende beschrijving van dit nieuwe concept ontbreekt, is er met deze vertaling toch een boek beschikbaar in Nederland waarin beschreven staat wat de regels omtrent het rekenen met negatieve getallen zijn. In 1770-72 schrijft Strabbe vervolgens zelf een boek, *Inleidinge tot de Mathematische Weetenschappen*. Dit boek bestaat uit een inleiding tot de arithmetica en een inleiding tot de algebra. Negatieve getallen komen in dit boek voor, maar slechts in het tweede deel. Hoewel er af en toe bevreemdende opgaven of omschrijvingen voorkomen, blijkt uit het tweede deel dat Strabbe de rekenregels voor negatieve getallen beheerst.

Het bestuderen van de werken van Strabbe gaf aanleiding tot twee punten. Als eerste is dat de mate waarin Strabbe onderscheid maakt tussen de verschillende betekenissen die het minteken kan hebben: als teken binnen het aftrekken en als aanduiding van een negatief getal. Strabbe introduceert het minteken in de eerste betekenis en geeft vervolgens aan dat het minteken ook bij een getal kan horen. In de laatste situatie duidt het minteken een negatief getal aan, maar het wordt zijdelings vermeld en geenszins onderscheiden van de eerste betekenis. Dat is opnieuw te zien aan de manier waarop Strabbe de bewerking aftrekken definieert. Maar de belangrijkste van de twee punten of hypotheses is wel dat Strabbe een onderscheid lijkt te maken tussen de rekenkunde en de algebra. Binnen de rekenkunde wordt met cijfers gerekend en komen onder andere de vier basisoperaties, machten, wortels en verhoudingen aan de orde; de algebra voegt daaraan variabelen zoals x, y en z en tekens toe. Alleen wanneer Strabbe bezig is met algebra, gebruikt hij minteken in de betekenis als het aanduiden van een negatief getal. Dat is de aanleiding geweest om te veronderstellen dat Strabbe negatieve getallen niet acht te bestaan binnen de rekenkunde.

In deze scriptie is er niet lang stilgestaan bij de implicaties van een dergelijk onderscheid tussen algebra en rekenkunde; wat het onderscheid precies inhoudt, wie het wel of juist niet maakten, waar een verschil in opvattingen over de rekenkunde en de algebra uit voortkomt, hoe het geëindigd is en wat de gevolgen zijn van zo'n onderscheid, bijvoorbeeld op het gebied van een bredere acceptatie van negatieve getallen, buiten de algebra. Een verder onderzoek naar deze zaken zou zomaar interessante resultaten op kunnen leveren.

Bij De Gelder zien we de hypothese van een onderscheid tussen rekenkunde en algebra bevestigd, aangezien hij in zijn onderzoek naar de ware aard van negatieve getallen vaak benoemt dat hij bezig is met een fenomeen in de algebra. Wat daarnaast opviel in zijn boek, was dat hij negatieve getallen wel erkent, maar ze niet als minder dan nul ziet. Als laatste bleek uit het werk van De Gelder dat in die tijd een discussie op gang komt over zaken die eerst voor waar aangenomen werden: waarom negatieve getallen geaccepteerd zouden moeten worden en waarom het vermenigvuldigen van twee negatieve getallen een positief getal zou geven. Daarbij besteedt De Gelder vele pagina's aan het interpreteren van negatieve getallen binnen de meetkunde, terwijl hij negatieve getallen tegelijkertijd lijkt te zien als een fenomeen dat slechts bestaat binnen de algebra. Hangt dit samen met een overstap van negatieve getallen binnen de algebra naar een erkenning van de algemeenheid van negatieve getallen? Dat brengt ons bij iets wat ook verder onderzoek vereist: wanneer werden negatieve getallen algemeen geaccepteerd en bekend en op welke gronden gebeurde dat? Daarbij moet er rekening mee worden gehouden dat wiskundigen iets heel anders kunnen verstaan onder negatieve getallen dan wij terwijl ze er op dezelfde manier kunnen rekenen als tegenwoordig gebeurt; een voorbeeld daarvan zagen we bij De Gelder.

Naast het wiskundige werk van wetenschappers is in deze scriptie ook gekeken naar twee wiskundeboeken voor scholen; om ook te onderzoeken wanneer negatieve getallen op een 'lager niveau' bekend werden. In *Inleiding tot de algebra, ten dienste van de scholen*, geschreven door Bangma en uitgegeven in 1811, komen negatieve getallen wel voor; in het *Reekenboek ten dienste van de scholen* uit 1797 nog niet. Negatieve getallen lijken binnen het onderwijs enerzijds iets later bekend te worden, anderzijds is een aantal van twee boeken te gering om dit daadwerkelijk te kunnen stellen. In verband met de opkomende discussie over de acceptatie van negatieve getallen onder wetenschappers komt de vraag op of deze weifelende houding ten opzichte van negatieve getallen gevolgen gehad heeft voor hoe in het onderwijs omgegaan werd met negatieve getallen.

Referenties

[1] Aeneae, H. (1797). *Reekenboek voor de Nederlandsche Jeugd.* Leiden: D. du Mortier en Zoon, en Deventer: J.H. de Lange.

[2] Bangma, O.B. (1811). *Inleiding tot de algebra, ten dienste van de scholen.* Amsterdam: P.G. en N. Geysbeek, op de Leliegracht bij de Keizersgracht.

[3] Beckers, D. en Kool, M. (2004). *De Cijfferinghe (1604): Het rekenboek van de beroemde schoolmeester.* Hilversum: Verloren.

[4] Beckers, D.J. (2003). *"Het despotisme der Mathesis"* Hilversum: Verloren.

[5] Beckers, D.J. (1996). Jacob de Gelder en de Wiskundige Ideologie in Nederland (1800-1840) *GEWINA/TGGNWT, 19*(1), 18-28.

[6] Beckers, D.J. (2000). Positive Thinking. Conceptions of Negative Quantities in the Netherlands and the Reception of Lacroix's Algebra Textbook [Penser positivement. Conception des nombres négatifs aux Pays-bas et réception du traité d'algèbre de Lacroix]. *Revue d'histoire des mathématiques, 6*(1), 95-126.

[7] Beckers, D.J. (2001). "Untiring Labor Overcomes All!"The History of the Dutch Mathematical Society in Comparison to Its Various Counterparts in Europe. *Historia Mathematica*, 28, 31-47.

[8] Gelder, J. de (1814). *Proeve over den Waren Aard van den Positieven of Negatieven Toestand der Grootheden in de Stelkunst* 's Gravenhage en Amsterdam: de gebroeders Cleef.

[9] Gillispie, C. C. (1975). *Dictionary of scientific biography.* New York: Charles Scribner's Sons.

[10] Ruiter, S. *De onvermoeide arbeid van Arnoldus Bastiaan Strabbe.* Universiteit Utrecht, 2015.

[11] Stammetz, J. L. (1740). *Volkoomen Wiskundig Woordenboek.* Leiden: Coenraad Wishoff en Georg Jacob Wishoff, Coenr. Zoon.

[12] Stockmans, B. (1632). *Een corte ende eenvuldige instructie, om lichtelijken en by hem selven, sonder eenige meester oft onderwijser te leeren cijfferen, enz. Hier zijn ooc bygevoecht de differentien van de corenmaten der voornaamste steden in Hollant, 't Sticht, enz.* Van nieus oversien ende verbetert door C.P. Boeye, Amstelredam: Hendrick Laurentsz, Boeck-vercooper op 't Water in 't Schrijf-boeck.

[13] Strabbe, A.B. (1760). *Gronden der Algebra.* Amsterdam: J. Morterre, Boekverkoper over 't Zaandammer Veer.

[14] Strabbe, A.B. (1770). *Inleidinge tot de mathematische weetenschappen of gemeenzaame leerwyze der arithmetica of algebra.* Amsterdam: J. Morterre.

[15] Struik, D.J. en Muller, J.W. (1931). *Het woord 'millioen' in oude Nederlandsche rekenboeken.* Leiden: E.J. Brill.

[16] Thomaidis, Y. (1993). Aspects of negative numbers in the early 17th century. *Science and Education, 2*(1), 69-86.

[17] Van Olm, J. (1816). *Rekenboek van Jan van Olm.* Groningen: N. Veenkamp en J. Groenewolt, zestiende druk.

[18] WNT, I. (2007). *Woordenboek der Nederlandsche taal.*