UNIVERSITEIT UTRECHT

BACHELORSCRIPTIE WISKUNDE

Over de waardering van Europese en Aziatische opties in een continue-tijdsmodel

Auteur:
Jan WITSCHGE
3978915

Begeleider:
Dr. Karma DAJANI

27 juli 2018

Universiteit Utrecht

Abstract

In dit document behandelen we de vragen 'wat is de waarde van een Europese optie?' en 'wat is de waarde van een Aziatische optie?' Na een introductie over financiële termen behandelen we eerst de wiskundige theorie van *voorwaardelijke verwachtingswaarden*, *stochastische processen*, *martingalen* en *Brownse bewegingen*. Vervolgens gebruiken we deze theorie om een integratiemethode over Brownse bewegingen en martingalen te definiëren in een hoofdstuk over *stochastische calculus*. We hebben nu alle benodigde wiskundige voorkennis. Vervolgens keren we terug naar de financiële theorie en leggen we de theorie achter *hedgen* uit: een beleggingsstrategie waar optiewaardering op is gebaseerd. Hierna bepalen we eerst de waarde van Europese opties. Na dit hoofdstuk behandelen we kort de werking van Aziatische opties. De waarde van een Aziatische optie heeft meestal geen gesloten oplossing en dus zullen we slechts één specifiek geval behandelen die wel een oplossing in gesloten vorm heeft.

Inhoudsopgave

Inleiding

Een financiële optie (of kortweg: optie) is een financieel contract wat de koper het recht geeft om bepaalde activa (zoals aandelen) op een bepaald tijdstip te kopen of te verkopen tegen een vooraf afgesproken prijs. Financiële opties spelen tegenwoordig een belangrijke rol in de financiële wereld. Één van de meest belangrijke gebruiken van opties is hedgen. Hedgen is een investeringsstrategie waarin het financiële risico van een investering zo klein mogelijk wordt gemaakt. Hedgen is als het ware het nemen van een verzekering op een investering om de investeerder in te dekken onzekere toekomstige verliezen. Net als verzekeren is hedgen niet gratis. Met andere woorden, opties zijn niet gratis en dus opties hebben een bepaalde prijs ofwel waarde.

Het doel van dit document is het beantwoorden van de vraag 'wat is de waarde van een optie?' Financiële opties bestaan in vele soorten smaakjes. Twee daarvan zijn Europese opties en Aziatische opties. Meer specifiek geven we antwoord op de vraag 'wat is de waarde van een Europese optie?' Ook behadelen we in het laatste hoofdstuk kort de werking van Aziatische opties. De uitbetaling van een Aziatische optie is gebaseerd rondom een gemiddelde. Er bestaan ook vele soorten gemiddelden zoals onder meer het rekenkundig gemiddelde, gewogen gemiddelden of het meetkundig gemiddelde. We beantwoorden in het laatste hoofdstuk de vraag: 'wat is de waarde van een Aziatische optie gebaseerd op het meetkundig gemiddelde?'

Geschiedenis van het probleem

In de 17e eeuw ontwikkelden de Zwitserse wiskundigen Jacob (1654-1705) en Johann Bernoulli (1667-1748) ([3], p. 390) de basis van de kansrekening. De kansrekening zou later weer de basis vormen voor de financiële wiskunde. Ook ontdekte Jacob Bernoulli in zijn onderzoek naar samengestelde rente Euler's getal als de limiet van $(1+\frac{1}{n})^n$. De Zwitserse wiskundige Leonhard Euler bouwde verder op de ontdekkingen van de gebroeders Bernoulli en hij ontdekte de identiteit

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{r}{n})^n = e^r.$$

Met deze twee ontdekkingen kon de werking van continue samengestelde rente beschreven worden.

De Schotse botanicus Robert Brown (1773-1857)[1] ontdekte met gebruik van een microscoop dat in water drijvende deeltjes stuifmeel een bepaald soort continue willekeurige beweging uitvoeren [10]. Dit soort bewegingen noemen we tegenwoordig Brownse beweging. In 1900 bracht de Franse wiskundige Louis Bachelier (1870-1946)[1] zijn PhD. thesis *De Theorie van Speculatie* uit. Hierin gaf Bachelier de wiskundige basis voor Brownse bewegingen en was hij de eerste die Brownse bewegingen gebruikte voor de studie van optiewaardering. Hierdoor wordt Louis Bachelier gezien als de vader van de moderne financiële wiskunde. De wiskundige beschrijving van Brownse beweging werd later, onafhankelijk van Bachelier, in meer detail beschreven door de Duitse natuurkundige Albert Einstein (1879-1955)[3] bij zijn onderzoek naar de beweging van kleine, in water drijvende deeltjes als gevolg van thermodynamische processen. [10]

In het begin van de 20e eeuw [1] ontwikkelde de Franse wiskunde Henri-Léon Lebesgue (1875-1941) [3] een vorm van integratie die we nu Lebesgue-integratie noemen. Deze manier van integreren is breder inzetbaar dan Riemannintegratie omdat het domein van integratie bij Lebesgue-integratie niet noodzakelijk een deelverzameling van de reële getallen hoeft te zijn. In het begin werd Lebesgue-integratie beschouwd als een onnodig abstracte uitbreiding van Riemannintegratie zonder toepassingen. Echter, in 1933 gebruikte de Russische wiskundige Andrej Kolmogorov (1903-1987) [3] Lebesgue-integratie in een axiomatische behandeling van de kansrekening. Sindsdien is Lebesgue-integratie een standaardbegrip geworden in de formele kansrekening [1]. Wij zullen Lebesgue-integratie dan ook gebruiken voor onze definitie van voorwaardelijke verwachtinswaarden.

In de 20e eeuw ontwikkelde de Japanse wiskundige Kiyoshi Itô (1915-2008)[11] nog een andere manier van integratie. Deze methode van integratie maakt het mogelijk om integralen te evalueren waarbij de integrator een martingaal is. De integraalrekening met dit type integralen wordt tegenwoordig stochastische calculus of Itô-calculus genoemd. Aan de hand van deze nieuwe vorm van calculus ontwikkelde Itô zogenaamde stochastische differentiaalvergelijkingen en ontdekte hij de Itô-formule. Deze Itô-formule is tegenwoordig essentieel voor de theorie van optiewaardering.

Begin jaren zeventig was er een grote doorbraak op het gebied van optiewaardering door het werk *The Pricing of Options and Corporate Liabilities* uit 1973 door de econoom en wiskundige Fischer Black (1938-1995) [15] en econoom Myron Scholes (1941)[16] en het werk *On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates* uit 1974 door de econoom en wiskundige Robert Merton (1944)[16]. Zij ontwikkelde in deze werken een nieuwe methode van optiewaardering die we tegenwoordig het Black-Scholes(-Merton) model noemen. Deze methode van optiewaardering is dezelfde methode die vandaag de dag het meest prominent wordt gebruikt. In 1997 kregen Scholes en Merton voor hun werken de Nobelprijs van de economie uitgereikt (Black was helaas in 1995 al overleden en Nobelprijzen worden niet post mortem uitgereikt). [14]

Voor wie is deze tekst bestemd?

Dit document is geschreven voor wiskunde bachelor studenten met een interesse in financiële wiskunde. Om aan de hoofdtekst te beginnen wordt de lezer geacht een gevorderd verstand te hebben van calculus en kansrekening en basiskennis van verzamelingenleer, maattheorie en Lebesgue-integratie. Als de lezer onvoldoende begrip heeft van calculus of verzamelingenleer raad ik hem aan eerst een boek of cursus over deze onderwerpen te volgen. Ik raad lezers die onvoldoende kennis bezitten over één of meer van de andere genoemde onderwerpen aan om eerst de appendices door te nemen voordat zij aan de hoofdtekst beginnen. Naast deze wiskundige voorkennis is basiskennis over financiële producten (met name financiële opties) en markten aangeraden, maar niet noodzakelijk.

Dankwoord

Ten eerste wil ik graag Dr. Karma Dajani van de Universiteit Utrecht bedanken voor haar begeleiding, geduld en voor haar bereidheid om last minute mijn bachelorscriptie te begeleiden.

Vervolgens wil ik Prof. Dr. Geon Ho Choe van het Korea Advanced Institute of Science and Technology en Prof. Dr. Steven Shreve van de Carnegie Mellon Universiteit bedanken. Hun boeken over dit onderwerp hebben de rode draad gevormd voor mijn onderzoek.

Tenslotte wil ik mijn ouders bedanken voor hun financiële en emotionele steun die ik nodig had om deze bachelor en scriptie te voltooien.

Jan Witschge

1 Elementaire financiën

Voordat we de wiskundige theorie van optiewaardering induiken, moeten we eerst weten wat een optie inhoudt. Bij het waarderen van opties krijgen we ook te maken met andere financiële begrippen. Dit hoofdstuk geeft een overzicht van alle financiële begrippen en voorkennis die we nodig hebben voor het behandelen van de wiskundige analyse van optiewaardering.

1.1 Financiële activa en opties

Om te begrijpen wat een financiële optie inhoudt, moeten we het eerst hebben over het algemenere begrip *financiële activa* (enkelvoud: *financieel actief*). Een financieel actief is niks anders dan een bepaald object met waarde waarin gehandeld kan worden. Financiële activa worden opgedeeld in twee groepen. De eerste groep noemen we *primaire activa*. Deze groep bevat activa die een intrinsieke waarde hebben (lees: objecten die van zichzelf iets waard zijn). Voorbeelden hiervan zijn aandelen in een bedrijf, valuta en grondstoffen zoals aardolie of landbouwproducten. De tweede groep activa bestaat uit activa wiens waarde afgeleid is van een *onderliggend actief* uit de eerste groep. Het zijn financiële contracten die beloftes maken over een toekomstige ruil van primaire activa voor geld. Omdat de waarde van deze activa afgeleid is van zijn onderliggende primaire actief, worden deze activa *derivaten* genoemd (naar het Engelse woord derivatives). Financiële opties behoren tot deze groep derivaten.

Er bestaan verschillende soorten *financiële opties*, vaak vernoemd naar een geografische locatie. Zo bestaan er bijvoorbeeld Europese opties, Amerikaanse opties en Aziatische opties. Om een inleiding te geven in opties behandelen we eerst de meest eenvoudige: *Europese opties* (vanwege hun eenvoud ook wel *vanille opties* genoemd). Een optie is een financieel contract tussen twee groepen: de *koper* en de *schrijver*. Er bestaan twee soorten Europese opties: Europese *callopties* en Europese *putopties*. Een Europese calloptie geeft de koper het recht om op een vooraf bepaalde tijd in de toekomst bepaalde activa te kopen van de schrijver tegen een vooraf bepaalde prijs. De tijd waarop de koper dit recht mag uitoefenen heet de *expiratietijd* en de prijs waartegen dit gebeurt heet de *uitoefenprijs*. Het tijdsinterval tussen het moment waarop de optie ondertekent wordt en de expiratietijd heet de *looptijd*. Het actief dat op de expiratietijd gekocht mag worden heet het *onderliggende actief*. Een Europese putoptie werkt als het ware andersom. Een Europese putoptie geeft de koper van de optie het recht om op de expiratietijd bepaalde activa te verkopen aan de schrijver voor een vooraf bepaalde prijs. Merk op dat opties de koper het recht geeft om activa te (ver)kopen maar niet de verplichting. Tenslotte is het belangrijk om te vermelden dat de koper van een optie bepaalde prijs betaalt aan de schrijver voor de optie. Deze prijs noemen we de *optieprijs* of *optiewaarde*. Kort gezegd is *optiewaardering* niets anders dan het bepalen van optiewaardes.

Stel dat je een Europese calloptie hebt gekocht die je het recht geeft om op de expiratietijd een aandeel RDSA in Royal Dutch Shell te kopen voor €30. Stel vervolgens dat het aandeel RDSA op de expiratietijd €35 waard is. Dan heb je op de expiratietijd dus €5 winst. Deze winst noemen we in de financiële wereld de *uitbetaling* van de optie. Ook Europese putopties hebben een uitbetaling. Stel bijvoorbeeld dat je een Europese putoptie hebt gekocht dat je het recht geeft om op de expiratietijd een aandeel RDSA in Royal Dutch Shell te verkopen voor €35 en dat het aandeel RDSA tijdens de expiratietijd €30 waard is. Dan heb je wederom een uitbetaling van €5. De uitbetaling van een optie kan niet negatief zijn. Keer bijvoorbeeld terug naar het voorbeeld met de Europese calloptie van een aandeel RDSA met uitoefenprijs €30. Stel dat de prijs van een aandeel RDSA op de expiratietijd €25 waard is. Als je de optie uitoefent dan maak je inderdaad €5 verlies. Echter, herinner je dat je niet verplicht bent om de optie uit te oefenen. In dat geval heb je geen winst noch verlies en dus is de uitbetaling €0. Het is tenslotte belangrijk om op te merken dat de uitbetaling los staat van de prijs die je de schrijver hebt betaald om de optie te schrijven. Met dit in gedachten definiëren we, na wat notatie, de *uitbetalingsfunctie*.

Notatie 1.1. Zij X een verzameling. Voor een vast element $x \in X$ en een functie $f : X \to \mathbb{R}$ definiëren we de notatie

$$f^+(x) := \max\{f(x), 0\}.$$

Opmerking. Merk op dat $f^+(x)$ dus niet het maximum is van 0 en alle mogelijke uitkomsten voor f, $f(X)$. Dat wil zeggen $f(x)^+ = \max\{f(x), 0\} \neq \max\big(\{f(x) \in \mathbb{R} | x \in X\} \cup \{0\}\big)$.

Definitie 1.1 (Uitbetalingsfunctie). Zij S_t de waarde van het onderliggende actief van een calloptie met uitoefenprijs K ten tijde van tijdstip t. Dan definiëren we de *uitbetalingsfunctie* van de calloptie als

$$C_t := (S_t - K)^+.$$

Zij S_t nu de waarde van het onderliggende actief van een putoptie met uitoefenprijs K ten tijde van tijdstip t. Dan definiëren we de *uitbetalingsfunctie* van de calloptie als

$$P_t := (K - S_t)^+.$$

Opmerking. In dit document zal S_t, indien gegeven in een financiële context, altijd de waarde van het onderliggende actief van een optie tijdens tijdstip t betekenen.

Opmerking. Gegeven is een Europese calloptie met expiratietijd T en uitoefenprijs K. Wat is dan de waarde van de calloptie op zijn expiratietijd T? Afhankelijk van of $S_T - K$ positief is of niet, levert de optie je op tijdstip T $S_T - K$ op of niks. De calloptie levert je ten tijde van T dus $(S_T - K)^+$ op. De waarde V_T van de calloptie op dat moment is dan dus $V_T = C_T = (S_T - K)^+$. Op vergelijkbare wijze is de waarde V_T^P van een Europese putoptie met uitoefenprijs K en expiratietijd T tijdens zijn expiratietijd gelijk aan $V_T^P = P_T = (K - S_T)^+$. In dit document zullen V_t en V_t^P, indien gegeven in een financiële context, altijd de waarde van een bepaalde calloptie en een bepaalde putoptie respectievelijk tijdens tijdstip t betekenen.

1.2 Rente en financieel risico

Stel dat je een moeilijke studie volgt, zeg wiskunde. Hierdoor heb je geen tijd voor een baantje en dus moet je puur van een magere studielening leven. Daar bovenop woon je op kamers en je huisbaas is een cynische huisjesmelker die veel te veel huur vraagt voor je kamer. Het resultaat is dat je niet rond kan komen van je studielening alleen. Als noodoplossing vraag je aan je ouders of je wat geld van hun kan lenen. Je ouders strijken over hun hart en lenen je het geld. Wat gebeurt er? Laten we aannemen dat als jij je studie afmaakt, je een goede baan zal vinden en genoeg geld verdient om je ouders weer terug te betalen. Aan de andere kant nemen we aan dat als jij je studie niet afmaakt, je geen goede baan kan krijgen en je je ouders nooit terug zal kunnen betalen. Je ouders lopen hierdoor het *financiële risico* dat ze het uitgeleende geld kwijt zijn. Geon Ho Choe ([1], p. 3) definieert financieel risico als: “de mogelijkheid op blootstelling van het leiden van onzekere verliezen in de toekomst”.

Het geld wat je van je lieve ouders leent is rentevrij. In de financiële wereld wordt er echter vrijwel altijd rente betaald over leningen. Het kan echter voorkomen dat de lener niet in staat is om de lening met rente terug te betalen. Een geldschieter loopt dus financieel risico bij het lenen van geld. We gaan er in ons model echter vanuit dat er een rentetarief bestaat waarin de geldschieter geen risico loopt. We noemen dit rentetarief r het *risicovrije rentetarief.* Als we in dit document met een rentetarief werken, dan gaan we altijd uit van het risicovrije rentetarief.

Het heffen van risicovrije rente moet als volgt worden beschouwd. Stel dat je een bepaald actief bezit. Als de waarde van het actief stijgt aan de hand van het risicovrije rentetarief, dan betekent dat dat je de waarde van het actief optimaal belegd zonder jezelf bloot te stellen aan financieel risico. Het heffen van de risicovrije rentetarief betekent dus niet per sé dat je geld uitleent en hier r rente per tijdseenheid over vraagt. Het betekent dat je de waarde van je activa optimaal belegd zonder financieel risico te lopen. We gaan er in dit document van uit dat de waarde van elk risicovrij actief aan de hand van het risicovrije rentetarief in waarde stijgt. Het zou immers sub-optimaal zijn om minder dan het risicovrije rentetarief over het risicovrije actief te heffen. Daarnaast geldt, als er over een risicovrij actief een hoger rentetarief dan het risicovrije rentetarief zou worden geheven, dan is het actief niet meer risicovrij. Misschien vraag je jezelf nu af: "het heffen van risicovrije rente, wat betekent dat eigenlijk precies?"We zullen de rest van deze paragraaf aan die vraag wijden.

Er zijn verschillende manieren om rente te heffen over een lening. Stel, jij leent iemand €100 uit die hij je over een jaar terug moet betalen. Stel dat je hier aan het einde van het jaar eenmalig 5 procent rente voor vraagt. Dan krijg je aan het einde van het jaar $100 \cdot 1.05 =$ €105.00 terug en maak je dus €5 winst. Leningen zoals deze waar slechts één keer rente over wordt geheven heet *enkelvoudige rente*. Stel nu dat je in plaats van één keer 5 procent rente, ieder half jaar 2.5 procent rente vraagt. Je ontvangt dan in totaal $100 \cdot 1.025^2 \approx$ €105.06 en maakt dus €5.06 winst. Het tweede halfjaar wordt er dus rente geheven op de rente van het eerste halfjaar. Deze manier van renteheffing waarin rente op rente wordt geheven heet *samengestelde renteheffing*. Stel vervolgens dat je nu iedere maand $\frac{5}{12}$ procent rente vraagt. Je ontvangt dan in totaal $100 \cdot (1 + \frac{5}{12 \cdot 100})^{12} \approx$ €105.12 en maakt dus €5.12 winst. Merk op dat, naarmate je op deze wijze steeds vaker rente vraagt, je winst steeds hoger wordt. Het volgende lemma bewijst de algemeenheid hiervan.

Lemma 1.1. Zij r een positief reëel getal en $n < N$ een paar positieve gehele getallen. Dan geldt

$$(1 + \frac{r}{n})^n < (1 + \frac{r}{N})^N.$$

Bewijs. Ik bewijs eerst dat $\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{r}{n+1}\right)^{n+1}$ geldt voor elke positieve $n \in \mathbb{N}$ en zal dit later veralgemeniseren. Uit het binomium van Newton volgt

$$\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{r}{n}\right)^k \text{ en } \left(1 + \frac{r}{n+1}\right)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \left(\frac{r}{n+1}\right)^k.$$

Merk op dat de eerste twee termen van deze sommen gelijk zijn. De $(n+1)$-de term van de rechter som is positief. Het is dus voldoende om te bewijzen dat

$$\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{r}{n}\right)^k < \sum_{k=2}^{n} \binom{n+1}{k} \left(\frac{r}{n+1}\right)^k.$$

geldt. Ik kan de termen één voor één met elkaar vergelijken. Het is dan dus voldoende om te bewijzen dat voor $2 \leq k \leq n$

$$\binom{n}{k} \left(\frac{r}{n}\right)^k < \binom{n+1}{k} \left(\frac{r}{n+1}\right)^k.$$

geldt. Er geldt

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{k} \left(\frac{r}{n+1}\right)^k &= \left(\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}\right) \left(\frac{r}{n+1}\right)^k \\ &= \left(\frac{n!}{k!(n-k)!}\right) \left(\frac{n+1}{n+1-k}\right) \left(\frac{r}{n+1}\right)^k \\ &= \binom{n}{k} \left(\frac{n+1}{n+1-k}\right) \left(\frac{r}{n+1}\right)^k. \end{aligned}$$

We kunnen nu dus in de ongelijkheid $\binom{n}{k}\left(\frac{r}{n}\right)^k < \binom{n}{k}\left(\frac{n+1}{n+1-k}\right)\left(\frac{r}{n+1}\right)^k$ aan beide kanten de binomiaalcoëfficiënt $\binom{n}{k}$ elimineren. Het is dan voldoende om te bewijzen dat

$$\left(\frac{r}{n}\right)^k < \left(\frac{n+1}{n+1-k}\right) \left(\frac{r}{n+1}\right)^k$$

en dus

$$\left(\frac{1}{n}\right)^k < \left(\frac{n+1}{n+1-k}\right)\left(\frac{1}{n+1}\right)^k$$

geldt. Het bewijs voor $\left(1+\frac{r}{n}\right)^n < \left(1+\frac{r}{n+1}\right)^{n+1}$ is nu dus rond als we kunnen bewijzen dat $1 < \left(\frac{n+1}{n+1-k}\right)\left(\frac{1}{n+1}\right)^k\left(\frac{1}{n}\right)^{-k}$, oftewel $0 < \left(\frac{n+1}{n+1-k}\right)\left(\frac{1}{n+1}\right)^k\left(\frac{1}{n}\right)^{-k} - 1$ geldt. Na wat algebra volgt

$$\left(\frac{n+1}{n+1-k}\right)\left(\frac{1}{n+1}\right)^k\left(\frac{1}{n}\right)^{-k} - 1 = \frac{n^k-(n+1)^k+k(n+1)^{k-1}}{(n+1-k)^{k-1}}.$$

De noemer $(n+1-k)^{k-1}$ is positief voor $2 \leq k \leq n$. Het is dus voldoende om te bewijzen dat de teller $n^k-(n+1)^k+k(n+1)^{k-1}$ positief is. Uit het binomium van Newton volgt nu

$$\begin{aligned}
n^k-(n+1)^k+k(n+1)^{k-1} &= n^k - \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}n^i + k\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}n^i \\
&= n^k - \binom{k}{k}n^k - \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}n^i + \sum_{i=0}^{k-1}\frac{k!}{i!(k-i-1)!}n^i \\
&= \sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{k!}{i!(k-i-1)!} - \binom{k}{i}\right)n^i \\
&= \sum_{i=0}^{k-1}(k-i-1)\binom{k}{i}n^i > 0.
\end{aligned}$$

We hebben nu dus aangetoond dat de vergelijking $\left(1+\frac{r}{n}\right)^n < \left(1+\frac{r}{n+1}\right)^{n+1}$ geldt voor alle $n \geq 2$. Het geval $n = 1$ tonen we handmatig aan.

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{r}{1}\right)^1 &= 1+r \\
\left(1+\frac{r}{2}\right)^2 &= 1+2\frac{r}{2}+\frac{r^2}{4} = 1+r+\frac{r^2}{4} > 1+r.
\end{aligned}$$

De vergelijking $\left(1+\frac{r}{n}\right)^n < \left(1+\frac{r}{n+1}\right)^{n+1}$ geldt dus voor elk positief geheel getal n. Er geldt dus $\left(1+\frac{r}{1}\right)^1 < \left(1+\frac{r}{2}\right)^2 < \ldots$ en dus is de vergelijking $\left(1+\frac{r}{n}\right)^n < \left(1+\frac{r}{N}\right)^N$ geldig voor elk paar positieve gehele getallen $n < N$.

■

Een geldschieter wil natuurlijk een zo hoog mogelijke winst. Daarom wil je het aantal keer dat je rente heft zo groot mogelijk maken, i.e. je wilt het geleende geld maal de limiet $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{r}{n})^n$ terug ontvangen. Bestaat deze limiet? Of divergeert het bedrag dan naar oneindig? Keer terug naar het voorbeeld waarin je iemand €100 uitleent. Laten we het geval beschouwen dat je, in plaats van elke maand $\frac{5}{12}$ procent rente vraagt, elke dag $\frac{5}{365}$ procent rente vraagt. Je ontvangt dan in totaal $100 \cdot (1+\frac{5}{365\cdot 100})^{365} \approx$ €105.13. Je heft nu ongeveer 30 keer zo vaak rente dan wanneer je eens per maand rente zou heffen. Het verschil is echter na afronding maar één cent. Het lijkt er dus op dat de limiet $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{r}{n})^n$ inderdaad convergeert.

Stelling 1.1 (Euler). Zij r een positief reëel getal. Dan geldt

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{r}{n})^n = e^r.$$

Bewijs. Er geldt $e^r = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{r^k}{k!}$. We moeten dus aantonen dat $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{r}{n})^n = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{r^k}{k!}$. Uit het binomium van Newton volgt

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{r}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{r}{k}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{n!}{k!(n-k)!}\right)\left(\frac{r}{k}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{n!}{n^k(n-k)!}\right)\left(\frac{r^k}{k!}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n-(k-1)}{n}\frac{r^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{n}1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{r^k}{k!}.
\end{aligned}$$

Als we nu de limiet nemen verkrijgen we

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{r^k}{k!}.$$

Merk op dat voor elke $k\in\mathbb{N}$ de term $1(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{k-1}{n})\frac{r^k}{k!}$ kleiner is dan 1. Merk ook op dat deze term steeds kleiner wordt naarmate k stijgt. Uit Beppo Levi's monotone convergentiestelling volgt dan dat we het somteken en limietteken mogen verwisselen. Er geldt dan dus

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{r^k}{k!}. &= \sum_{k=0}^{\infty}\lim_{n\to\infty}1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{r^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^k}{k!} \\
&= e^r.
\end{aligned}$$

In de een-na-laatste stap maken we gebruik van het feit dat $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n} = \ldots = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{k-1}{n} = 0$ omdat $1,\ldots,k-1$ allemaal eindig zijn terwijl n oneindig nadert.

∎

De constante e wordt *Euler's getal* genoemd, vernoemd naar de wiskundige Leonhard Euler (1707-1783) ([3], p. 406) die de bovenstaande stelling ontdekte ([5] , p. 156). De constante e is echter ontdekt door de wiskundige Jacob Bernoulli (1654-1705) ([3] , p. 390) tijdens zijn onderzoek naar samengestelde rente. Hierin bewees hij dat de bovenstaande limiet divergeerde voor het speciale geval wanneer $r = 1$ ([3], p. 393). Dit leverde het resultaat $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n \approx 2.71828$ wat leidde tot de ontdekking van de constante e. Het is trouwens opmerkenswaardig dat Euler wiskunde studeerde onder Jacob Bernoulli's broer: Johann Bernoulli (1667-1748) ([3], p. 390).

Als je een bedrag B uitleent en op deze manier rente heft, dan ontvang je na één jaar dus Be^r. Deze manier van samengesteld rente heffen heet *continue samengestelde rente*. We gaan er in dit document van uit dat rente altijd continu samengesteld wordt geheven. Het volgende gevolg beschrijft het terug te ontvangen bedrag na een willekeurige tijd.

Gevolg 1.1. Stel dat een geldschieter iemand een bedrag B uitleent en daar continue samengestelde rente op heft met rentetarief $r > 0$. Het terug te ontvangen bedrag na een periode t (in jaren) is dan Be^{rt}.

1.3 Optiewaardering

De koper van een optie betaalt de schrijver een bepaalde premie voor de optie. Maar hoeveel premie moet de schrijver vragen voor het schrijven van de optie? Herinner je dat opties activa zijn en dus een bepaalde waarde hebben. De premie bestaat dan uit deze waarde en meestal wordt daar nog een bepaalde commissie bij opgeteld voor het schrijven van de optie. Hieruit volgt de belangrijke vraag: *hoeveel is een optie waard*? Dit is de centrale vraag van dit document. Het bepalen van de waarde van een optie heet *optiewaardering*.

Een verzameling van activa van een bepaalde belegger heet een *portefeuille*. Beleggers zijn over het algemeen risicomijdend. Het financiële risico van een portefeuille kan theoretisch gezien geëlimineerd worden. Het elimineren van het financiële risico in een portefeuille heet *hedgen*. Optiewaardering is gebaseerd op het hedgen van een bepaald soort portefeuille. In hoofdstuk 6 zullen we dieper ingaan op portefeuilles en hedgen.

Zoals eerder vermeld hebben opties een looptijd en een expiratietijd. Tijdens de looptijd fluctueert de waarde van de onderliggende activa. Tijd is dus een belangrijke factor in elk wiskundig model voor optiewaardering. We onderscheiden deze modellen in twee soorten groepen: *discrete-tijdsmodellen* en *continue-tijdsmodellen*. Stel dat een optie looptijd $[0, T] \subset \mathbb{R}$ heeft. In een discrete-tijdsmodel wordt het interval $[0, T]$ opgedeeld in tijdstippen $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T$. Vervolgens wordt uitsluitend gekeken naar de waarde van de onderliggende activa op deze $n + 1$ tijdstippen. In continue-tijdsmodellen wordt rekening gehouden met de constante fluctuatie van de waarde van de onderliggende activa gedurende de looptijd $[0, T]$. Simpel gezegd: in discrete-tijdsmodellen kies je een aantal representatieve tijdstippen uit en de rest gooi je weg, in continue-tijdsmodellen wordt rekening gehouden met elk tijdstip. Natuurkundige discussies over Plancktijden daargelaten, tijd is een continu fenomeen. Daarom zullen we in dit document een continue-tijdsmodel gebruiken.

2 Voorwaardelijke verwachtingswaarden

In dit hoofdstuk behandelen we het begrip *voorwaardelijke verwachtingswaarde*. De voorwaardelijke verwachtingswaarde is een uitbreiding van het begrip verwachtingswaarde. We hebben de voorwaardelijke verwachtingswaarde nodig voor onze behandeling van martingalen in het volgende hoofdstuk.

In paragraaf 2.1 behandelen we de voorwaardelijke verwachtingswaarde gegeven een gebeurtenis. Vervolgens behandelen we in paragraaf 2.2 de voorwaardelijke verwachtingswaarde gegeven een σ-algebra. In paragraaf 2.3 leidden we wat eigenschappen van de voorwaardelijke verwachtingswaarden af. Tenslotte behandelen we in paragraaf 2.4 de voorwaardelijke verwachtingswaarde gegeven een stochast.

2.1 Voorwaardelijke verwachtingswaarde gegeven een gebeurtenis

In stelling C.2 hebben we bewezen dat de voorwaardelijke kans een kansmaat is. Daarom kunnen we hier ook een verwachtingswaarde op definiëren. Deze zullen we de *voorwaardelijke verwachtingswaarde* noemen.

Definitie 2.1 (Voorwaardelijke verwachtingswaarde gegeven een gebeurtenis). Zij X een stochast en A een gebeurtenis, beide gedefinieerd op de kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. We definieren de *voorwaardelijke verwachtingswaarde* X gegeven de gebeurtenis A als

$$\mathrm{E}[X|A] := \frac{\int_A X \,\mathrm{d}\,\mathrm{P}}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\mathrm{E}[\mathbf{1}_A X]}{\mathrm{P}(A)}$$

Intuïtief gezien moet de voorwaardelijke verwachtingswaarde als volgt worden opgevat. Zij X een stochast op een kansexperiment met uitkomstenruimte Ω. Als je van tevoren al weet dat de uitkomst ω bevat is in de gebeurtenis $A \subset \Omega$, dan is de verwachtingswaarde $\mathrm{E}[X|A]$ de verwachte waarde van X rekening houdend met dit feit dat de uitkomst ω bevat is in de gebeurtenis A.

2.2 Voorwaardelijke verwachtingswaarde gegeven een σ-algebra

Beschouw het kansexperiment waarin twee zuivere dobbelstenen worden geworpen. Je werpt ze echter niet tegelijkertijd: je werpt eerst één dobbelsteen, evalueert de uitkomst en tenslotte werp je een tweede dobbelsteen. Zij X de uitkomst van de eerste worp, Y de uitkomst van de tweede worp en $Z = X + Y$ de som van de twee worpen. Voor de eerste worp kan de som Z alle waarden in $\{1, ..., 12\}$ aannemen. Stel dat de uitkomst van de eerste worp $X = 1$ is. Je weet dan dat de de som Z alleen nog maar de waarden $\{2, ..., 7\}$ aan kan nemen. Je weet dus dat de informatie van de eerste worp X invloed heeft op de uitkomst van de som Z. Dit betekent dat tussen de eerste en de tweede worp in, de informatie van de eerste worp X invloed heeft op de verwachte uitkomst van de som Z. Ik zal dit illustreren.

Er geldt $\mathrm{E}[Z] = \mathrm{E}[X+Y] = \mathrm{E}[X] + \mathrm{E}[Y]$ omdat de twee worpen X en Y onafhankelijk van elkaar zijn. De verwachtingswaarde van de worpen X en Y zijn duidelijk aan elkaar gelijk omdat beide uitkomsten een enkele waarde uit $\{1, ..., 6\}$ met kans $\frac{1}{6}$ aannemen. Dus geldt $\mathrm{E}[Z] = 2\,\mathrm{E}[X] = \frac{2}{6}(1 + 2 + ...6) = 7$. Merk op dat de verwachtingswaarde $\mathrm{E}[Y]$ dus $3\frac{1}{2}$ is. Stel nu dat de uitkomst van de eerste worp 1 is. De verwachte uitkomst van de soms Z is nu gelijk aan $\mathrm{E}[Z|X=1] = 1 + \mathrm{E}[Y] = 4\frac{1}{2} \neq \mathrm{E}[Z]$.

Je weet al voor de eerste worp dat de uitkomst van de eerste worp X invloed gaat hebben op de verwachtingswaarde van Z. Je weet echter nog niet hoe: de uitkomst van X is willekeurig en dus is de verwachtingswaarde van Z gegeven X willekeurig. In tegenstelling tot de voorwaardelijke verwachtingswaarde gegeven een gebeurtenis is de voorwaardelijke verwachtingswaarde van Z gegeven X is dus een stochast in plaats van een reële waarde.

Je kan het probleem ook als volgt opvatten. De uitkomstenruimte van dit kansexperiment is $\Omega := \{1, ..., 6\} \times \{1, ..., 6\}$. Zij $\mathcal{F}$ de σ-algebra $\mathcal{P}(\Omega)$. De informatie van de uitkomst van de eerste worp kunnen we opslaan in een deel-σ-algebra van $\mathcal{F}$. Merk op dat de uitkomst $X = 1$ overeenkomt met de gebeurtenis $A_1 := \{(1,1), ..., (1,6)\} \in \mathcal{F}$. Op vergelijkbare wijze komen de uitkomsten $X = 2, ..., 6$ overeen met de gebeurtenissen $A_2 := \{(2,1), ..., (2,6)\}, ..., A_6 := \{(6,1), ..., (6,6)\} \in \mathcal{F}$. Alle informatie van de eerste worp kan dus opgeslagen worden in de deel-σ-algebra gegenereerd door de gebeurtenissen $A_1, ..., A_6$:

$\sigma(A_1, ..., A_6) \subset \mathcal{F}$. We kunnen de verwachtingswaarde van Z gegeven X nu dus ook opvatten als de verwachtingswaarde van Z gegeven de informatie uit de deel-σ-algebra $\sigma(A_1, ..., A_6) \subset \mathcal{F}$.

Hoe is de voorwaardelijke verwachtingswaarde van Z gegeven $\sigma(A_1, ..., A_6)$ nu een stochast? Zij $\omega := (X, Y) \in \Omega$ de uitkomst van de twee worpen. Noteer de voorwaardelijke verwachtingswaarde van Z gegeven $\sigma(A_1, ..., A_6)$ als $\mathrm{E}[Z|\sigma(A_1, ..., A_6)]$. De voorwaardelijke verwachtingswaarde van Z gegeven $\sigma(A_1, ..., A_6)$ is dan een afbeelding $\mathrm{E}[Z|\sigma(A_1, ..., A_6)] : \Omega \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $\mathrm{E}[Z|\sigma(A_1, ..., A_6)](\omega) := \mathrm{E}[Z|A_i]$ waarin $i \in 1, ...6$ zodanig is dat de uitkomst ω een element is van de gebeurtenis A_i. Daarnaast is de afbeelding $\mathrm{E}[Z|\sigma(A_1, ..., A_6)]$ ook $\sigma(A_1, ..., A_6)$-meetbaar en dus een stochast. Met dit voorbeeld in gedachten definieer ik eerst de voorwaardelijke verwachtingswaarde gegeven een deel-σ-algebra.

Definitie 2.2 (Voorwaardelijke verwachtingswaarde gegeven een σ-algebra). Zij X een integreerbare stochast op de kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ en $\mathcal{G}$ een deel-σ-algebra van $\mathcal{F}$. Een stochast $\mathrm{E}[X|\mathcal{G}] : \Omega \to \mathbb{R}$ heet de *voorwaardelijke verwachtingswaarde* van X gegeven de deel-σ-algebra $\mathcal{G}$ indien hij voor elke gebeurtenis $A \in \mathcal{G}$ voldoet aan de vergelijking

$$\int_A \mathrm{E}[X|\mathcal{G}] \,\mathrm{d}\,\mathrm{P} = \int_A X \,\mathrm{d}\,\mathrm{P}. \tag{1}$$

In de bovenstaande definitie definiëren we de verwachtingswaarde van een stochast X gegeven deel-σ-algebra $\mathcal{G}$ als een stochast $\mathrm{E}[X|\mathcal{G}]$ die voldoet aan vergelijking 1 voor elke gebeurtenis $A \in \mathcal{G}$. Op dit moment hebben we het bestaan en uniciteit van zo'n functie echter nog niet aangetoond. Voor een bewijs hier van verwijs ik de lezer naar ([1], p. 79-80).

2.3 Eigenschappen van de voorwaardelijke verwachtingswaarde

Intuïtief gezien kan je een deel-σ-algebra $\mathcal{G}$ opvatten als informatie. De voorwaardelijke verwachtingswaarde van een stochast X gegeven $\mathcal{G}$ kan je dus intuïtief gezien opvatten als de verwachte waarde van X rekening houdend met de informatie uit $\mathcal{G}$. Hieronder volgen enkele eigenschappen de voorwaardelijke verwachtingswaarde van een stochast X gegeven een σ-algebra.

Stelling 2.1. Zij X en Y integreerbare stochasten op kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ en $\mathcal{G}$ een deel-σ-algebra van $\mathcal{F}$. Dan gelden de volgende eigenschappen.

i) *(Lineariteit)* Er geldt $\mathrm{E}[aX + bY|\mathcal{G}] = a\,\mathrm{E}[X|\mathcal{G}] + b\,\mathrm{E}[Y|\mathcal{G}]$ voor elke constanten $a, b \in \mathbb{R}$.
ii) *(Verwachting van verwachting)* Er geldt $\mathrm{E}\big[\,\mathrm{E}[X|\mathcal{G}]\big] = \mathrm{E}[X]$.
iii) *(Het bekende eruit halen)* Als XY integreerbaar is en X $\mathcal{G}$-meetbaar is, dan geldt $\mathrm{E}[XY|\mathcal{G}] = X\,\mathrm{E}[Y|\mathcal{G}]$.
iv) *(Onafhankelijkheid)* Als $\sigma(X)$ en $\mathcal{G}$ onafhankelijk zijn geldt $\mathrm{E}[X|\mathcal{G}] = \mathrm{E}[X]$.
v) *(Opstapeling)* Zij $\mathcal{H}$ een deel-σ-algebra van $\mathcal{G}$. Dan geldt $\mathrm{E}\big[\,\mathrm{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}\big] = \mathrm{E}[X|\mathcal{H}]$.
vi) *(Positiviteit)* Als X non-negatief maar eindig is voor alle uitkomsten ω, dan geldt $E[X|\mathcal{G}](\omega) \geq 0$ voor alle uitkomsten ω.
vii) *(Verwachting zonder voorkennis)* Zij $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Dan geldt $\mathrm{E}[X|\mathcal{F}_0] = \mathrm{E}[X]$.

Bewijs.

i) Uit definitie 2.2 en de lineariteit van de Lebesgue-integraal volgt dat voor elke gebeurtenis $A \in \mathcal{G}$ de volgende vergelijkingen gelden:

$$\begin{aligned}
\int_A a\,\mathrm{E}[X|\mathcal{G}] + b\,\mathrm{E}[Y|\mathcal{G}] \,\mathrm{d}\,\mathrm{P} &= a \int_A \mathrm{E}[X|\mathcal{G}] \,\mathrm{d}\,\mathrm{P} + b \int_A \mathrm{E}[Y|\mathcal{G}] \,\mathrm{d}\,\mathrm{P} \\
&= a \int_A X \,\mathrm{d}\,\mathrm{P} + b \int_A Y \,\mathrm{d}\,\mathrm{P} \\
&= \int_A aX + bY \,\mathrm{d}\,\mathrm{P}.
\end{aligned}$$

Uit deze vergelijkingen en definitie 2.2 volgt nu dat de stochast $a\,\mathrm{E}[X|\mathcal{G}] + b\,\mathrm{E}[Y|\mathcal{G}]$ de verwachtingswaarde is van de stochast $aX + bY$ gegeven $\mathcal{G}$.

ii) Uit de definitie van de verwachtingswaarde volgt

$$\mathrm{E}\big[\,\mathrm{E}[X|\mathcal{G}]\big] = \int_\Omega \mathrm{E}[X|\mathcal{G}]\,\mathrm{d}\,\mathrm{P}.$$

Omdat Ω in $\mathcal{G}$ zit, volgt uit definitie 2.2

$$\int_\Omega \mathrm{E}[X|\mathcal{G}]\,\mathrm{d}\,\mathrm{P} = \int_\Omega X\,\mathrm{d}\,\mathrm{P} = \mathrm{E}[X].$$

v) Uit definitie 2.2 volgt dat voor elke gebeurtenis $A \in \mathcal{H}$ de volgende vergelijking geldt:

$$\int_A \mathrm{E}\big[\,\mathrm{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}\big]\,\mathrm{d}\,\mathrm{P} = \int_A \mathrm{E}[X|\mathcal{G}]\,\mathrm{d}\,\mathrm{P} = \int_A X\,\mathrm{d}\,\mathrm{P}.$$

Hierbij maken we in de tweede stap gebruik van het feit dat als A in $\mathcal{H}$ zit, A zeker in $\mathcal{G}$ zit omdat $\mathcal{H}$ een deel-σ-algebra is. In het bijzonder geldt dus voor alle $A \in \mathcal{H}$

$$\int_A \mathrm{E}\big[\,\mathrm{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}\big]\,\mathrm{d}\,\mathrm{P} = \int_A X\,\mathrm{d}\,\mathrm{P} = \int_A \mathrm{E}[X|\mathcal{H}]\,\mathrm{d}\,\mathrm{P}$$

en dus is aan de definitie van $\mathrm{E}[X|\mathcal{H}]$ voldaan.

vii) Zij $A \in \sigma(X)$. Dan geldt $\mathrm{P}(A \cap \emptyset) = \mathrm{P}(\emptyset) = 0 = \mathrm{P}(A) \cdot 0 = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(\emptyset)$ en $\mathrm{P}(A \cap \Omega) = \mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A) \cdot 1 = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(\Omega)$. De σ-algebra's $\sigma(X)$ en $\mathcal{F}_0$ zijn dus onafhankelijk. Uit eigenschap iv) (onafhankelijkheid) van deze stelling volgt dan $\mathrm{E}[X|\mathcal{F}_0] = \mathrm{E}[X]$.

De bewijzen van eigenschappen iii), iv) en vi) gaan voorbij het bereik van dit boek. Voor een bewijs hiervan verwijs ik de lezer naar [2] voor eigenschappen iii) en iv) of [1] voor alle drie eigenschappen.

■

2.4 Voorwaardelijke verwachtingswaarde gegeven een stochast

We sluiten dit hoofdstuk af met de definitie van de verwachtingswaarde van een stochast X gegeven een andere stochast Y.

Definitie 2.3 (Voorwaardelijke verwachtingswaarde gegeven een stochast). Zij X en Y twee stochasten op de kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. De *voorwaardelijke verwachtingswaarde* van X gegeven Y is gedefinieerd als

$$\mathrm{E}[X|Y] := \mathrm{E}[X|\sigma(Y)].$$

Merk op dat, omdat $\mathrm{E}[X|Y]$ gelijk is aan de verwachtingswaarde van X gegeven de σ-algebra $\sigma(Y)$, alle eigenschappen uit stelling 2.1 ook van toepassing zijn de verwachtingswaarde van een stochast X gegeven een stochast Y.

3 Stochastische processen en martingalen

De waarde van een optie is afhankelijk van de prijs van de onderliggende financiële activa (zoals bijvoorbeeld aandelen). Markten zijn niet absoluut te voorspellen. Dit betekent dat de prijs van een aandeel tot op zekere hoogte willekeurig is en dus als stochast opgevat kan worden. De prijs van een aandeel fluctueert van tijd tot tijd en dus is de prijs van een aandeel een tijdsafhankelijke stochast. Een tijdsafhankelijke stochast noemen we een *stochastisch proces*. In dit hoofdstuk zullen we stochastische processen en verwante begrippen behandelen.

In ons financiële model nemen we aan dat de waarde van een onderliggend actief een stochastisch proces volgt dusdanig dat de verwachte toekomstige waarde van het actief even groot is als de huidige waarde van het actief. Dergelijke stochastische processen noemen we *martingalen*. We sluiten het hoofdstuk af met de theorie van martingalen.

3.1 Stochastische processen

Zij X_t de prijs van één aandeel SPCX in het bedrijf Space$X$ op een toekomstig tijdstip t. De toekomstige waarde van een aandeel is nooit honderd procent nauwkeurig te bepalen en dus, tot op zekere hoogte, willekeurig. De waarde X_t is dus op te vatten als een stochast. Aandelen hebben op verschillende tijden een verschillende waarde. De stochast X_t is dus afhankelijk van het tijdstip t. We kunnen de waarden van het aandeel SPCX bijhouden voor een tijdsperiode $[0, T]$ en ze opslaan in een verzameling $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$. Zo een verzameling van tijdsafhankelijke stochasten X_t heet een *stochastisch proces*. De volgende definitie beschrijft dit begrip precies.

Definitie 3.1 (Stochastisch Proces). Gegeven is een kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ en een indexverzameling $I \subset \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$. We noemen een verzameling van stochasten $\{X_t\}_{t\in I} := \{X_t | t \in I\}$ geïndexeerd door de verzameling I een *stochastisch proces*. Indien I aftelbaar is noemen we $\{X_t\}_{t\in I}$ een *discrete-tijd* stochastisch proces. Indien I overaftelbaar is noemen we $\{X_t\}_{t\in I}$ een *continue-tijd* stochastisch proces.

Opmerking. Zij $\{f_t\}_{t\in I}$ een stochastisch proces. Beschouw de bijectie $f : I \to \{f_t\}_{t\in I}$ zodat $f(t) = f_t$. De functie f koppelt aan elke $t \in I$ een stochast $f_t \in \{f_t\}_{t\in I}$. Daarom duiden we een stochastisch proces $\{f_t\}_{t\in I}$ in dit document soms ook aan als $f(t)$ of simpelweg als f_t. Andere keren zal $f(t)$ juist een stochast $f_t \in \{f_t\}_{t\in I}$ aanduiden. Welke van de twee we bedoelen zal elke keer uit de context duidelijk worden.

Een discreet stochastisch proces heeft typisch een indexverzameling van de vorm $I = \{0, 1, ..., n\}$ voor een bepaald getal n. Een typische indexverzameling voor een continue-tijd stochastisch proces is een interval van de vorm $I = [0, T]$ voor een bepaald reëel getal T. Een index $t \in I$ hoeft niet per sé een praktische betekenis te hebben. Echter, intuïtief gezien is het handig om een index t op te vatten als een tijdstip. Een index t kan ook een andere praktische betekenis hebben zoals in het onderstaande voorbeeld.

Voorbeeld 3.1.1 (Dronkemanswandeling). Een dronken man loopt over de gehele getallenlijn $\mathbb{Z}$. Hij begint vanaf de kroeg die zich bevindt op het getal 0. Omdat de man dronken is kan hij helaas maar n stappen zetten voordat hij instort. Ook wankelt de man ontzettend door zijn alcoholmisbruik waardoor hij elke keer met gelijke kans een stap terug of een stap vooruit doet.

Zij I de verzameling stappen $\{0, 1, ..., n\}$ en X_t de positie van de man nadat hij $t \in I$ stappen heeft gezet. De verzameling $\{X_t\}_{t\in I} = \{X_t \in \mathbb{Z} | t \in I\}$ is dan een discrete-tijd stochastisch proces.

In het volgende voorbeeld stelt een index t wel de tijd voor. In het bijzonder beschrijft dit voorbeeld een continue-tijd stochastisch proces.

Voorbeeld 3.2.1. Een microbioloog plaatst een populatie van duizend bacterieën in een petrischaal. De bacterieën planten zich voort door zich in tweeën te delen. De microbioloog onderzoekt de volgende bijzondere eigenschap van deze bacteriesoort. Elke keer als één bacterie zich deelt, dan delen alle bacterieën van dit soort in de omgeving zich. Op elk tijdstip is er een gelijke en positieve kans dat de bacteriepopulatie zich deelt. Zij X_t het aantal keer dat zo'n deling zich heeft plaatsgevonden op tijdstip t. De populatie van de bacterie op tijdstip t is dan $P_t := 1000 \cdot 2^{X_t}$. De microbioloog laat de petrischaal staan gedurende een periode $[0, T]$ waarna hij het experiment beëindigt en de bacteriepopulatie vernietigt. In dit geval is zowel de verzameling $\{X_t\}_{t \in [0,T]}$ als de verzameling $\{P_t\}_{t \in [0,T]}$ een continue-tijd stochastisch proces.

3.2 Filters

Definitie 3.2 (Filter). Zij $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ een kansruimte en $I \subset \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$ een indexverzameling. Zij $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in I} := \{\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F} | t \in I\}$ een verzameling deel-σ-algebra's van $\mathcal{F}$. De verzameling $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$ heet een *filter* indien voor alle elementen $s \leq t \in I$ de σ-algebra $\mathcal{F}_s$ een deelverzameling is van de σ-algebra $\mathcal{F}_t$.
Zij $\{X_t\}_{t \in I}$ een stochastisch proces op de indexverzameling I. De *filter gegeneerd door het stochastisch proces* $\{X_t\}_{t \in I}$ is de filter $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$ zodanig dat elke σ-algebra $\mathcal{F}_t$ de gegenereerde σ-algebra $\sigma(\{X_s | s \in [0, t]\})$ is.
Tenzij er anders vermeld wordt mag je er in dit document van uit gaan dat de kleinste σ-algebra $\mathcal{F}_0$ van een filter $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$ gelijk is aan $\{\emptyset, \Omega\}$.

Zij $\{X_t\}_{t \in I}$ een stochastisch proces en $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$ de filter gegenereerd door $\{X_t\}_{t \in I}$. Merk op dat uit stelling A.3 volgt dat elke stochast X_s uit het stochastisch proces $\{X_t\}_{t \in I}$ $\mathcal{F}_s$-meetbaar is voor elke σ-algebra uit het filter $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$. We zeggen ook wel dat $\{X_t\}_{t \in I}$ *aangepast* is aan $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$. De volgende definitie beschrijft dit begrip precies.

Definitie 3.3 (Aangepast proces). Zij $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$ een filter en $\{X_t\}_{t \in I}$ een stochastisch proces, beide gedefinieerd op de kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. Indien voor elke $X_s \in \{X_t\}_{t \in I}$ en $\mathcal{F}_s \in \{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$ de stochast X_s $\mathcal{F}_s$-meetbaar is, noemen we het proces $\{X_t\}_{t \in I}$ *aangepast* aan de filter $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$.

3.3 Martingalen

Definitie 3.4 (Martingaal). Zij $\{X_t\}_{t \in I}$ een stochastisch proces op kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ en indexverzameling $I \subset \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$ aangepast aan de filter $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$. Het stochastisch proces $\{X_t\}_{t \in I}$ heet een *martingaal* (aangepast aan de filter $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$) indien hij voor elk tweetal indices $s \leq t \in I$ voldoet aan

$$X_s = \mathrm{E}[X_t | \mathcal{F}_s].$$

Het stochastisch proces $\{X_t\}_{t \in I}$ heet een *benedenmartingaal* (aangepast aan de filter $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$) indien hij voor elk tweetal indices $s \leq t \in I$ voldoet aan

$$X_s \leq \mathrm{E}[X_t | \mathcal{F}_s].$$

Het stochastisch proces $\{X_t\}_{t \in I}$ heet een *bovenmartingaal* (aangepast aan de filter $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$) indien hij voor elk tweetal indices $s \leq t \in I$ voldoet aan

$$X_s \geq \mathrm{E}[X_t | \mathcal{F}_s].$$

Opmerking. Merk op dat een stochastisch proces een martingaal is dan en slechts dan als hij zowel een boven- als een benedenmartingaal is.

Zij $\{X_t\}_{t \in I}$ een stochastisch proces aangepast aan de filter $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$ (bijvoorbeeld maar niet noodzakelijk een martingaal). Wat is dan de intuïtieve betekenis van een verwachtingswaarde $\mathrm{E}[X_t | \mathcal{F}_s]$? Herinner je uit hoofdstuk 2 dat een σ-algebra opgevat kan worden als informatie. De σ-algebra $\mathcal{F}_s$ kan je dus opvatten als de informatie beschikbaar op tijdstip s. De verwachtingswaarde $\mathrm{E}[X_t | \mathcal{F}_s]$ is dan de verwachte waarde van

X_t rekening houdend met de informatie die op tijdstip s beschikbaar is.

Voorbeeld 3.1.2 (Dronkemanswandeling). Keer terug naar de dronkemanswandeling uit voorbeeld 3.1.1. Is het stochastisch proces $\{X_t\}_{t\in I}$ een martingaal? Stel dat we de dronken man hebben geobserveerd voor de eerste k stappen. We hebben dan de informatie $\mathcal{F}_k = \sigma(\{X_s | s \in \{0, ..., k\}\})$ en dus weten we zijn locatie X_k. Intuïtief gezien is dit duidelijk maar hoe vertaalt dit zich wiskundig?

De uitkomstenruimte van de dronkemanswandeling is $\Omega = \{-1, 1\}^n$ (de macht geeft aan dat we n maal het cartesisch product van $\{-1, 1\}$ nemen). Definieer de verzamelingen

$$V_{i_1,i_2,...,i_k} := \big\{(i_1, i_2, ..., i_k, j_{k+1}, ..., j_n) \in \Omega | j_t \in \{-1, 1\}\big\}.$$

Elke i_s en j_t is dus gelijk aan 1 of -1. Merk verder op dat de getallen i_s in $V_{i_1,i_2,...,i_k}$ van tevoren vastgelegd zijn terwijl de getallen j_t nog willekeurig zijn. De σ-algebra $\mathcal{F}_k$ is dan de verzameling die alle k^2 mogelijke verzamelingen van de vorm $V_{i_1,i_2,...,i_k}$ bevat. Dat de σ-algebra $\mathcal{F}_k$ gegeven is, betekent dat we weten in welke verzameling $V_{i_1,i_2,...,i_k}$ de uiteindelijk uitkomst $\omega = (i_1, ..., i_n)$ zit. Dit betekent dus dat de eerste k stappen van de uitkomst bekend zijn en dus is de locatie X_k bekendt.

Zij m een geheel getal zodanig dat $k \leq m \leq T$. Wat is nu de verwachtingswaarde $\mathrm{E}[X_m|\mathcal{F}_k]$? De $k+1$-de stap heeft gelijke kans $\frac{1}{2}$ om op 1 of -1 uit te komen. Uit een symmetrie argument volgt dan dat de kans $\mathrm{P}(X_m - X_k = x)$ (de kans dat de dronkeman x stappen vooruit is gekomen van stap $k+1$ tot en met stap m) gelijk is aan $\mathrm{P}(X_m - X_k = -x)$ (een rigoreuze uitwerking hiervan laat ik over als oefening voor de lezer). Er geldt dus

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[X_m|\mathcal{F}_k] = &\sum_{x=-(m-k)}^{m-k} \mathrm{P}(X_m - X_k = x)(X_k + x) \\
&= \mathrm{P}(X_m - X_k = 0)X_k + \sum_{x=-(m-k)}^{-1} \mathrm{P}(X_m - X_k = x)(X_k + x) \\
&\quad + \sum_{x=1}^{m-k} \mathrm{P}(X_m - X_k = x)(X_k + x) \\
&= \mathrm{P}(X_m - X_k = 0)X_k + \sum_{x=1}^{m-k} \mathrm{P}(X_m - X_k = x)(X_k - x) + \sum_{x=1}^{m-k} \mathrm{P}(X_m - X_k = x)(X_k + x) \\
&= X_k \sum_{x=-(m-k)}^{m-k} \mathrm{P}(X_m - X_k = x) = X_k
\end{aligned}$$

en dus is het proces $\{X_t\}_{t\in I}$ inderdaad een martingaal.

Voorbeeld 3.2.2. Keer nu terug naar voorbeeld 3.2.1. Is het stochastisch proces $\{P_t\}_{t\in I}$ een martingaal? Stel, we hebben de hele groei van de bacteriepopulatie gedocumenteerd vanaf tijdstip 0 tot en met tijdstip $s < T$. Dit betekent dat we de informatie $\mathcal{F}_s$ beschikbaar hebben: de σ-algebra die als het aantal delingen X_s tot en met tijdstip s heeft opgeslagen. Zij t een tijdstip later dan s maar niet later dan T, dat wil zeggen, $s < t \leq T$. Wat is nu de verwachtingswaarde $\mathrm{E}[P_t|\mathcal{F}_s]$?

De populatie op tijdstip s is P_s. De populatie heeft zich tussen tijdstip t en s $X_t - X_s$ keer verdubbeld. De populatie op tijdstip t is dan dus $P_t = P_s \cdot 2^{X_t - X_s} = P_s \cdot 2^{X_t} \cdot 2^{-X_s}$. Er geldt dus $\mathrm{E}[P_t|\mathcal{F}_s] = \mathrm{E}[P_s \cdot 2^{X_t} \cdot 2^{-X_s}|\mathcal{F}_s]$. Uit stelling 2.1 iii) volgt dan $\mathrm{E}[P_t|\mathcal{F}_s] = P_s \cdot 2^{-X_s}\,\mathrm{E}[2^{X_t}|\mathcal{F}_s]$. Als $\{P_t\}_{t\in I}$ een martingaal is, dan moet gelden $\mathrm{E}[P_t|\mathcal{F}_s] = P_s$ en dus $\mathrm{E}[2^{X_t}|\mathcal{F}_s] = 2^{X_s}$. Dit betekent dat voor elke $s \in [0, T]$ de bacterie zich naar verwachting niet meer deelt na tijdstip s. Echter, omdat de bacterie op elk tijdstip een positieve kans heeft om zich te delen geldt voor elke $t > s$ dat $\mathrm{E}[2^{X_t}|\mathcal{F}_s] > \mathrm{E}[2^{X_s}|\mathcal{F}_s] = 2^{X_s}$. Het proces $\{P_t\}_{t\in I}$ is dus geen martingaal.

We sluiten het hoofdstuk af met de volgende stelling.

Stelling 3.1. Zij $\{X_t\}_{t\in I}$ een martingaal aangepast aan het filter $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in I}$ zodat $\min I = 0$ en $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Dan geldt $\mathrm{E}[X_t] = \mathrm{E}[X_0] = X_0$ voor elke index $t \in I$.

(Bewijs.) Omdat $\{X_t\}_{t\in I}$ een martingaal is geldt voor elke index $t \in I$

$$\mathrm{E}[X_t|\mathcal{F}_0] = X_0.$$

Uit eigenschap ii) van stelling 2.1 (verwachting van verwachting) volgt vervolgens

$$\mathrm{E}\big[\,\mathrm{E}[X_t|\mathcal{F}_0]\big] = \mathrm{E}[X_t] = \mathrm{E}[X_0].$$

Uit eigenschappen iii) (het bekende eruit halen) en vii) (verwachting zonder voorkennis) van stelling 2.1 volgt tenslotte

$$\mathrm{E}[X_t] = \mathrm{E}[X_0] = \mathrm{E}[X_0|\mathcal{F}_0] = X_0.$$

$\blacksquare$

4 Brownse bewegingen

We gebruiken in dit document een stochastisch proces om de waarde van primaire (onderliggende) activa te modelleren. Om precies te zijn gaan we er in ons financieel-wiskundig model van uit dat de waarde van een primair actief zich gedraagt als een zogenaamde *geometrische Brownse beweging.* Om geometrische Brownse bewegingen te begrijpen, hebben we eerst begrip nodig van reguliere *Brownse bewegingen.* In dit hoofdstuk zullen we beide behandelen.

In tegenstelling tot de meeste wiskundige concepten uit dit document, is het concept van Brownse bewegingen niet ontdekt door een wiskundige, maar door de Schotse botanicus Robert Brown (1773-1857)[1]. Hij ontdekte een geval van Brownse beweging in de natuur. Specifiek ontdekte hij met behulp van een microscoop dat in water drijvende deeltjes stuifmeel een continue willekeurige beweging uitvoeren [10]. Een beweging die we tegenwoordig de naar hem vernoemde Brownse beweging noemen.

In 1900 bracht de Franse wiskundige Louis Bachelier (1870-1946)[1] zijn PhD. thesis *De Theorie van Speculatie* uit. Hierin gaf Bachelier de wiskundige basis voor Brownse beweging en was hij de eerste die Brownse bewegingen gebruikte voor de studie van optiewaardering. De wiskundige beschrijving van Brownse beweging werd later, onafhankelijk van Bachelier, in meer detail beschreven door de Duitse natuurkundige Albert Einstein (1879-1955)[3] bij zijn onderzoek naar de beweging van kleine, in water drijvende deeltjes als gevolg van thermodynamische processen. [10]

Bachelier's gebruik van Brownse bewegingen als model voor de waarde van primaire activa bracht echter wat problemen met zich mee. Daarom gebruikten de Amerikaanse econoom en wiskundige Fischer Black (1938-1995) [15] en Amerikaanse econoom Myron Scholes (1941)[16] begin jaren '70 geometrische Brownse bewegingen om primaire activawaarden mee te modelleren. [14]

4.1 Brownse bewegingen

Voordat we het geometrisch Brownse model van activawaarde behandelen, hebben we eerst begrip nodig van reguliere Brownse bewegingen. In deze paragraaf behandelen we kort de notie van Brownse beweging en bewijzen we een stelling die we later nodig zullen hebben voor de waardering van Europese opties.

Definitie 4.1 (Brownse beweging). Zij $\{W_t\}_{t\geq 0} := \{W_t\}_{t\in I}$ een stochastisch proces op kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ en indexverzameling $I := \{t \in \mathbb{R} | t \geq 0\}$. We noemen $\{W_t\}_{t\in I}$ een *Brownse beweging* indien hij voldoet aan de volgende eigenschappen:

i) Voor elke uitkomst $\omega \in \Omega$ geldt $W_0(\omega) = 0$.
ii) Voor elk viertal indices $0 = s < t \leq u < v \in I$ zijn de verschillen $W_t - W_s$ en $W_v - W_u$ onderling onafhankelijk.
iii) Voor elkpaar indices $0 \leq s \leq t \in I$ is het verschil $W_t - W_s$ $\mathcal{N}(0, t-s)$ verdeeld.
iv) De functie $W : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $W(t)(\omega) := W_t(\omega)$ is bijna zeker continu ten opzichte van de variabele t.

Opmerking. Merk op dat uit de combinatie van eigenschap i) en eigenschap iii) volgt dat voor een Brownse beweging $\{W_t\}_{t\in I}$ en elke index $s \in I$ de stochast W_s $\mathcal{N}(0, s)$ verdeeld is.

Merk op dat we Brownse bewegingen alleen hebben gedefinieerd voor tijdstippen t groter of gelijk aan 0. In het algemeen beschouwen we tijdstip $t = 0$ als het heden. We kunnen activa die we in het heden bezitten (helaas) niet verkopen op tijdstippen $t < 0$ in het verleden. Daarom zijn we alleen geïnterreseerd in tijdstippen $t \geq 0$ en volstaat het dus om Brownse bewegingen uitsluitend voor deze tijdstippen te definiëren.

Zij $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ een filter aangepast aan de Brownse beweging $\{W_t\}_{t\geq 0}$ op kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. Dan is Brownse beweging $\{W_t\}_{t\geq 0}$ een martingaal aangepast aan de filter $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$. Het bewijs van deze stelling laat is redelijk voor de hand liggend en laat ik over als oefening voor de lezer. Het volgende bewijs hebben we later nodig in paragraaf 6.2.

Stelling 4.1. Zij $\{W_t\}_{t\geq 0}$ een Brownse beweging op kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. Dan geldt voor alle $0 \leq s \leq t$

$$\mathrm{E}[(W_t - W_s)^2] = t - s.$$

Bewijs. Uit eigenschap i) van stelling C.6 volgt $\mathrm{E}[(W_t - W_s)^2] = \mathrm{Var}\big((W_t - W_s)^2\big) + (\mathrm{E}[W_t - W_s])^2$. Uit eigenschap iii) van definitie 4.1 volgt $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$. Dus geldt $\mathrm{E}[(W_t - W_s)^2] = \mathrm{Var}([W_t - W_s]^2) + (\mathrm{E}[W_t - W_s])^2 = t - s + 0^2 = t - s$.

■

4.2 Geometrische Brownse bewegingen

In deze paragraaf behandelen we de notie van geometrische Brownse bewegingen. Het is belangrijk om op te merken dat, verwarrend genoeg, een geometrische Brownse beweging geen Brownse beweging is. Tenslotte zullen we in deze paragraaf trachten te verantwoorden waarom we de waarde van primaire activa modelleren als een geometrische Brownse beweging.

Definitie 4.2 (Geometrische Brownse beweging). Zij $\{W_t\}_{t\geq 0}$ een Brownse beweging op kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ en $S_0 > 0$, μ en $\sigma > 0$ constante reële getallen. Een stochastisch proces $\{S_t\}_{t\geq 0}$ van de vorm

$$S_t := S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t} \tag{2}$$

heet een *geometrische Brownse beweging* op $\{W_t\}_{t\geq 0}$ met parameters μ en $\sigma > 0$ respectievelijk. De constante S_0 heet de *beginwaarde* van de geometrische Brownse beweging.

Net als Brownse bewegingen zijn geometrische Brownse bewegingen bijna zeker continu. De volgende stelling bewijst deze uitspraak.

Stelling 4.2. Zij $\{S_t\}_{t\geq 0}$ een geometrische Brownse beweging op kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ en Brownse beweging $\{W_t\}_{t\geq 0}$ met beginwaarde $S_0 > 0$ en parameters μ en $\sigma > 0$ respectievelijk. Dan is de functie $S : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $S(t)(\omega) := S_t(\omega)$ bijna zeker continu ten opzichte van de variabele t.

Bewijs. In dit bewijs zullen we de eigenschappen "continu" en "bijna zeker continu" beide aanduiden als "continu". Alle termen uit dit bewijs die een stochast bevatten en aangeduid worden als "continu" zullen in werkelijkheid bijna zeker continu zijn. Bovendien zullen we, als we over continuïteit spreken, uitsluitend continuïteit ten opzichte van de variabele t bedoelen.

Zij $W : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $W(t)(\omega) := W_t(\omega)$. Dan geldt $S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t} = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)}$. Uit eigenschap iv) van definitie 4.1 volgt dat $W(t)$ continu is. Een continue functie vermenigvuldigd met een constante is ook continu. Dus is de afbeelding $t \mapsto \sigma W(t)$ ook continu. De afbeelding $t \mapsto (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t$ is ook continu. Dus is hun som $t \mapsto (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) + t\sigma W(t)$ ook continu. De exponentiële functie is continu. Dus is de functie $S(t) := S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)}$ (bijna zeker) continu.

■

Waarom een geometrische Brownse beweging?

Als men op de internetfora de vraag "waarom is een geometrische Brownse beweging een goed model voor activawaarde?"stelt, dan zullen ze vaak het volgende antwoord krijgen: "dat is het niet". Het model is zelfs berucht voor zijn slechte benadering van primaire activawaarde over de korte termijn. Toch is het geometrisch Brownse model voor activawaarde tot op de dag van vandaag het meest gebruikte model. Dan moet het gebruik van geometrische Brownse beweging toch enigszins gerechtvaardigd zijn?

De voornaamste rechtvaardiging om activawaarde als een geometrische Brownse beweging te modelleren is dat het model voldoet aan de zogenaamde *efficiënte-markthypothese*. De efficiënte-markthypothese stelt onder andere dat de huidige waarde van activa alle beschikbare informatie over de waarde van de activa reflecteert. Dit impliceert dat activawaarde onafhankelijk is van het verleden. Stel, we leven op tijdstip $u > 0$ en we zijn geïnterreseerd in de waarde $\{S_t\}_{t\geq 0}$ van een actief tussen nu en het toekomstige tijdstip t. We modelleren $\{S_t\}_{t\geq 0}$ als een geometrische Brownse beweging met onderliggende Brownse beweging $\{W_t\}_{t\geq 0}$. Merk op dat uit eigenschap ii) van de definitie van Brownse beweging volgt dat het toekomstige waardeverschil $W_t - W_u$ onafhankelijk is van het verleden $W_u - W_0$. Hierdoor is ook de geometrisch Brownse beweging $\{S_t\}_{t\geq 0}$ onafhankelijk van het verleden.

Misschien vraag je je nu af: "als een reguliere Brownse beweging ook onafhankelijk is van het verleden, waarom gebruiken we dat dan niet als model voor activawaarde?"Het probleem met een reguliere Brownse beweging $\{W_t\}_{t\geq 0}$ is dat zijn beginwaarde W_0 altijd nul is én dat een Brownse beweging negatief kan worden. Het is praktischer als we in ons model een beginwaarde van een actief kunnen instellen. Ook willen we voorkomen dat activa een negatief bedrag waard zijn. Een aandeel bijvoorbeeld kan niet een negatieve waarde hebben. Zodra het aandeel een waarde van 0 heeft dan is het aandeel gecrasht en zal het betreffende bedrijf faillissement aanvragen. Bij een geometrisch Brownse beweging $\{S_t\}_{t\geq 0}$ kunnen we onze beginwaarde kiezen door S_0 te kiezen. Doordat een geometrisch Brownse beweging een exponentiële functie is, is zijn waarde altijd positief. De geometrische Brownse beweging lost dus beide tekortkomingen van Brownse beweging op.

Voor een uitgebreide behandeling over hoe goed een geometrische Brownse beweging een activawaarde modeleert verwijs ik de lezer naar [13].

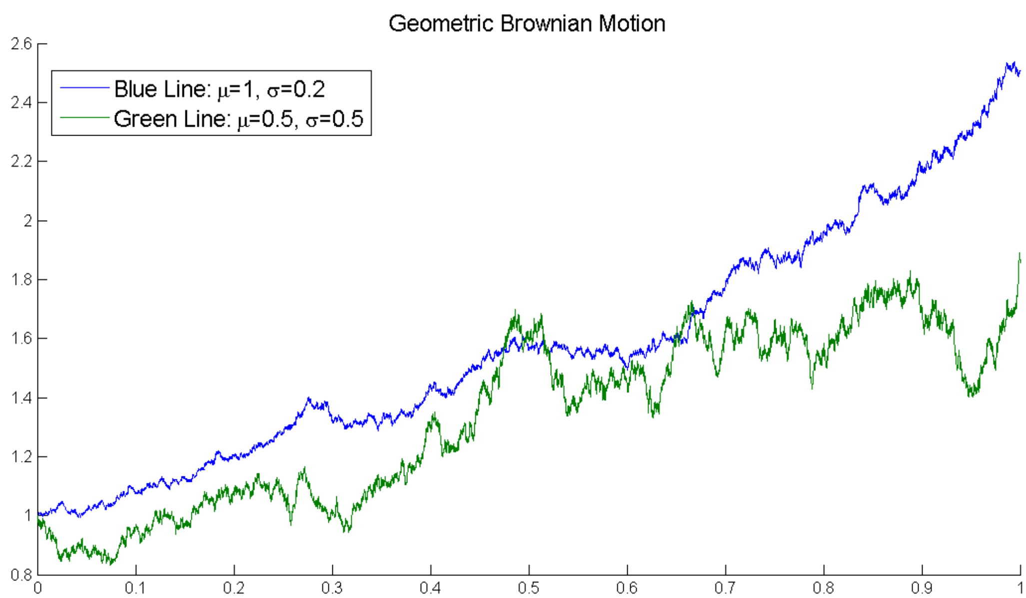

Fig 4.1. *Twee simulaties van geometrische Brownse beweging. Merk op dat de grafieken lijken op aandeelkoersen*

Opmerking. Merk op dat de efficiënte-markthypothese impliceert dat activawaarde een *Markov proces* is. Een Markov proces is een stochastisch proces zodanig dat zijn toekomstige waarde alleen afhangt van zijn huidige waarde en onafhankelijk is van zijn waarde in het verleden. We zullen Markov processen verder niet behandelen in dit document.

5 Stochastische calculus

Voordat we kunnen beginnen aan optiewaardering zelf, hebben we nog begrip van één laatste wiskundige techniek nodig: *stochastische calculus.* Waar we in normale calculus integreren over variabelen, willen we in stochastische calculus integreren over stochastische processen, martingalen en Brownse bewegingen om precies te zijn.

De lezer met veel kennis over calculus zal wellicht denken: “een stochastisch proces kan opgevat worden als een functie, kunnen we hier misschien Riemann-Stieltjesintegratie voor gebruiken?”Om redenen waar we verder niet op in zullen gaan werkt de Riemann-Stieltjesintegraal helaas niet goed voor integratie over stochastische processen. Om deze reden ontwikkelde de Japanse wiskundige Kiyoshi Itô (1915-2008)[11] de begrippen die we nu kennen als de *Itô-integraal* en *stochastische integraal.* Bij Itô-integratie wordt geïntegreerd over een Brownse beweging en bij het algemenere begrip stochastische integratie wordt geïntegreerd over een martingaal. Hoewel in sommige teksten Itô-integratie en stochastische integratie synoniem aan elkaar zijn, zullen ze in deze tekst integratie met betrekking tot een Brownse beweging en integratie met betrekking tot een martingaal respectievelijk betekenen. We doen dit zodat we gemakkelijk onderscheid tussen de twee kunnen maken.

In dit hoofdstuk construeren we de Itô- en stochastische integraal. Aan het einde van dit hoofdstuk gebruiken we onze nieuw ontwikkelde integratietechnieken om zogenaamde stochastische differentiaalvergelijkingen te definiëren. Ook definiëren we een specifiek soort stochastische processen genaamd *Itô-processen.*

5.1 De Itô-integraal en de stochastische integraal.

Voordat we de Itô- en stochastische integraal definiëren voor algemene stochastische processen, zullen we eerst de Itô-integraal definiëren voor zogenaamde *simpele processen.*

Definitie 5.1 (Simpel proces). Zij $\{f_t\}_{t\in[0,T]}$ een stochastisch proces op kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ en indexverzameling $[0,T] \in \mathbb{R}$, aangepast op het filter $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$. Zij $t_0, ..., t_n \in [0,T]$ zodanig dat $0 = t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n = T$. Het stochastisch proces $\{f_t\}_{t\in[0,T]}$ heet een *simpel proces* indien f_t constant is op elk interval $[t_k, t_{k+1})$ én $f_T = f_{t_{n-1}}$. Dat wil zeggen, als de uitkomst $\omega \in \Omega$ gegeven is dan geldt $f_s = f_{t_k}$ voor elke $s \in [t_k, t_{k+1})$. In het bijzonder geldt $f_s = f_{t_{n-1}} = f_T$ voor alle $s \in [t_{n-1}, T]$.

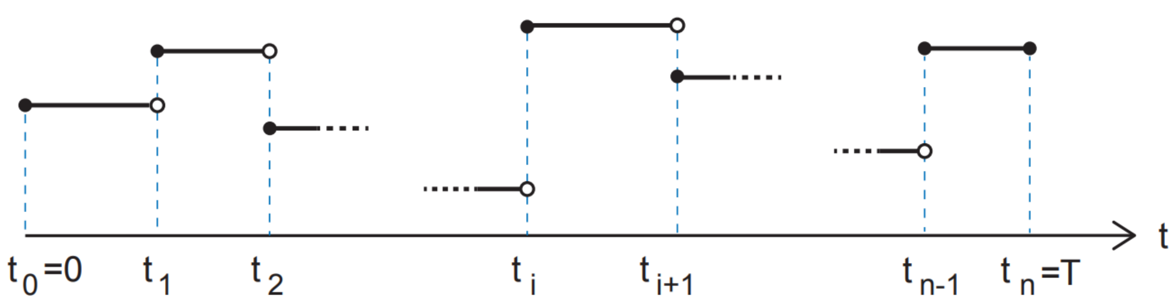

Fig 5.1. *Het verloop van een simpel proces voor een bepaalde uitkomst $\omega \in \Omega$. Afbeelding gekopieerd uit ([1],p.159).*

Voor een beter begrip van simpele processen, zie het bovenstaande figuur. Figuur 5.1 weergeeft het verloop van een bepaald simpel proces $\{f_t\}_{t\in[0,T]}$ over een bepaalde tijdsspanne $[0,T]$. Een simpel proces kenmerkt zich doordat hij, gegeven de uitkomst $\omega \in \Omega$ van het onderliggende kansexperiment, constant is op elk interval $[t_i, t_{i+1})$. Hierin is het interval $[0,T]$ opgedeeld in sub-intervallen $[t_0, t_1) = [0, t_1), [t_1, t_2), ..., [t_{n-2}, t_{n-1}),$ $[t_{n-1}, t_n] = [t_{n-1}, T]$. De eis $f_T = f_{t_{n-1}}$ in definitie 5.1 zorgt ervoor dat het simpele proces $\{f_t\}_{t\in[0,T]}$ constant is over het laatste, gesloten interval $[t_{n-1}, T]$.

Het is belangrijk om op te merken dat een simpel proces $\{f_t\}_{t\in[0,T]}$ <u>niet</u> noodzakelijk constant is voor alle uitkomsten ω. Dit betekent het volgende. Zij c_i de waarde van f_t voor alle $t \in [t_i, t_{i+1})$ (of $t \in [t_{n-1}, T]$ als $i = n-1$). Hoewel f_t gelijk is aan c_i voor alle $t \in [t_i, t_{i+1})$ (of $t \in [t_{n-1}, T]$ als $i = n-1$), hangt de waarde van de "constante"c_i af van de uitkomst ω, i.e. $c_i = c_i(\omega)$. De volgende definitie definieert de Itô-integraal voor simpele processen.

Definitie 5.2 (De Itô- en stochastische integraal voor simpele processen). Zij $\{f_t\}_{t\in[0,T]}$ een simpel proces en $\{W_t\}_{t\in[0,T]}$ een Brownse beweging, beide gedefinieerd op kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ en indexverzameling $[0,T] \in \mathbb{R}$ en aangepast op het filter $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$. Zij $\{f_t\}_{t\in[0,T]}$ constant op de intervallen $0 = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n = T$. Zij tenslotte $t \in [t_k, t_{k+1})$. Dan definiëren we de *Itô-integraal* van $\{f_t\}_{t\in[0,T]}$ tussen 0 en t als:

$$\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}W(s) := \left(\sum_{i=0}^{k-1} f(t_i)[W(t_{i+1}) - W(t_i)]\right) + f(t_k)[W(t) - W(t_k)].$$

Zij $\{M_t\}_{t\in[0,T]}$ een martingaal op kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ en indexverzameling $[0,T] \in \mathbb{R}$ en aangepast op het filter $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$. Dan is de *stochastische integraal* van $\{f_t\}_{t\in[0,T]}$ tussen 0 en t is op vergelijkbare wijze gedefinieerd als

$$\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}M(s) := \left(\sum_{i=0}^{k-1} f(t_i)[M(t_{i+1}) - M(t_i)]\right) + f(t_k)[M(t) - M(t_k)].$$

Voordat we de Itô- en stochastische integraal voor algemene stochastische processen kunnen definiëren, hebben we eerst begrip nodig van de zogenaamde L^2-norm.

Definitie 5.3 (De L^2-norm). Zij f een stochast op kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. Dan definiëren we de L^2*-norm* op f als

$$||f|| := \int_\Omega |f|^2\,\mathrm{d}\,\mathrm{P} = \mathrm{E}[|f|^2].$$

Opmerking. Als we in dit hoofdstuk spreken over convergentie van limieten, dan bedoelen we convergentie met betrekking tot de L^2-norm.

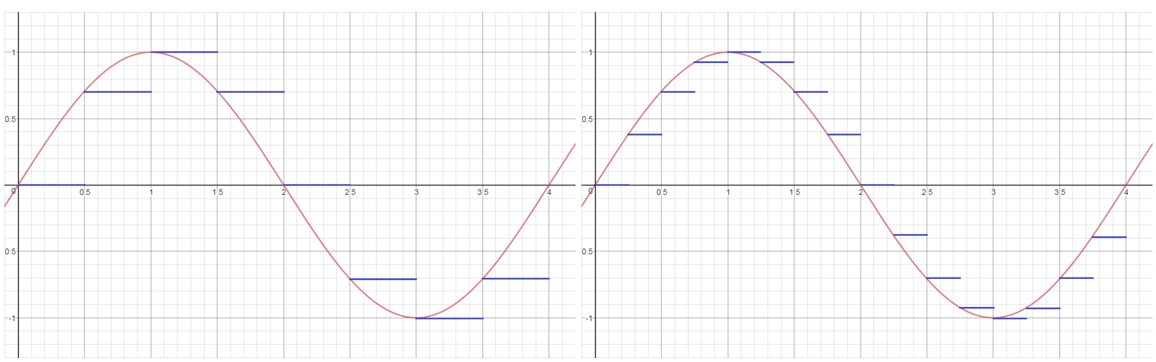

Fig 5.2. *Een stochastisch proces $f(t)$ benaderd door $f_8(t)$ (links) en $f_{16}(t)$ (rechts).*

Een non-simpel stochastisch proces is niet constant op een gegeven aantal intervallen. Een dergelijk stochastisch proces kan constant fluctueren over de tijd t. Zij $\{f_t\}_{t\in[0,T]}$ een non-simpel stochastisch proces. We kunnen het interval $[0,T]$ onderverdelen in n sub-intervallen $[t_0, t_1) = [0, t_1), [t_1, t_2), \ldots, [t_{n-2}, t_{n-1}), [t_{n-1}, t_n] = [t_{n-1}, T]$ waarin $t_i := \frac{i}{n}T$ voor alle $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Definieer vervolgens het simpele proces $\{f_{n,t}\}_{t\in[0,T]}$ zodanig dat $f_n(t) := f(t_i)$ voor alle $t \in [t_i, t_{i+1})$ (of $t \in [t_{n-1}, t_n]$). Het simpele proces $\{f_{n,t}\}_{t\in[0,T]}$ fungeert als benadering voor het stochastische proces $\{f_t\}_{t\in[0,T]}$. Merk op dat het simpele proces $\{f_{n,t}\}_{t\in[0,T]}$ een betere benadering voor $\{f_t\}_{t\in[0,T]}$ is naarmate n groter wordt (zie figuur 5.2). Intuïtief gezien lijkt het dus logisch dat de limiet $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$ geldt. Het lijkt dus redelijk om de Itô-integraal van $\{f_t\}_{t\in[0,T]}$ te definiëren als de limiet $\lim_{n\to\infty} \int_0^t f_n(s)\,\mathrm{d}W(s)$. Dit is de strekking van de volgende definitie. De stochastische integraal van $\{f_t\}_{t\in[0,T]}$ is op vergelijkbare wijze gedefinieerd.

Definitie 5.4.1 (De Itô-integraal en de stochastische integraal). Zij $\{f_t\}_{t\in[0,T]}$ een stochastisch proces en $\{W_t\}_{t\in[0,T]}$ een Brownse beweging, beide gedefinieerd op kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ en indexverzameling $[0,T] \in \mathbb{R}$ en aangepast op het filter $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$. Definieer voor elk natuurlijk getal n de verzameling $V_n := \{t_{n,0}, t_{n,1}, ...t_{n,n}\}$ zodanig dat $t_{n,i} := \frac{i}{n}T$ voor alle $i \in \{0,1,...,n\}$. Zij $\left\{\{f_{n,t}\}_{t\in[0,T]} | n \in \mathbb{N}\right\}$ de verzameling van simpele processen zodanig dat $f_n(t) := f(t_{n,i})$ voor alle $t \in [t_{n,i}, t_{n,i+1})$. Dan definiëren we voor alle $t \in [0,T]$ de *Itô-integraal* van $\{f_t\}_{t\in[0,T]}$ tussen 0 en t als

$$\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}W(s) := \lim_{n\to\infty} \int_0^t f_n(s)\,\mathrm{d}W(s).$$

Zij $\{M_t\}_{t\in[0,T]}$ een martingaal op kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ en indexverzameling $[0,T] \in \mathbb{R}$ en aangepast op het filter $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$. Dan is de *stochastische integraal* van $\{f_t\}_{t\in[0,T]}$ tussen 0 en t is op vergelijkbare wijze gedefinieerd als

$$\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}M(s) := \lim_{n\to\infty} \int_0^t f_n(s)\,\mathrm{d}M(s).$$

Opmerking. Merk op dat Itô- en stochastische integralen op zichzelf stochasten zijn.

We stellen in definitie 5.2 de eis dat een simpel proces aangepast moet zijn aan een filter. Om de bovenstaande definitie 5.4.1 zinvol te laten zijn, moeten de simpele processen $\left\{\{f_{n,t}\}_{t\in[0,T]} | n \in \mathbb{N}\right\}$ dus ook aangepast zijn op een filter. De volgende stelling toont aan dat deze simpele processen aangepast zijn op het filter $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ uit definitie 5.4.1.

Stelling 5.1. In definitie 5.4.1 zijn de simpele processen $\left\{\{f_{n,t}\}_{t\in[0,T]} | n \in \mathbb{N}\right\}$ aangepast op het filter $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$.

Bewijs. Zij $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0,T]$ en $a < b \in \mathbb{R}$ willekeurig. Er geldt $f_t^{-1}\big((a,b)\big) = \{\omega \in \Omega | f_t(\omega) \in (a,b)\} \in \mathcal{F}_t$. Zij $i \in \{0,1,...,n-1\}$ zodanig dat $t \in [t_i, t_{i+1})$ (of $t \in [t_{n-1}, T]$ als $i = n-1$). Omdat het stochastisch proces $\{f_{n,t}\}_{t\in[0,T]}$ simpel is geldt $f_{n,t}(\omega) = f_{t_i}(\omega)$ voor alle $\omega \in \Omega$. Dus geldt $f_{n,t}^{-1}\big((a,b)\big) = f_{t_i}^{-1}\big((a,b)\big) \in \mathcal{F}_{t_i}$. Tenslotte geldt $\mathcal{F}_{t_i} \subset \mathcal{F}_t$ omdat $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ een filter is en $t_i \leq t$.

■

Belangrijke opmerking. In definitie 5.4.1 eisen we $t_{n,i} := \frac{i}{n}T$. Waarom doen we dit? Is het niet voldoende om het interval $[0,T]$ onder te verdelen in $0 = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n = T$ voor willekeurige t_i? Nee. Stel bijvoorbeeld dat $T = 2$. Een mogelijke onderverdeling van $[0,2]$ is dan $0 = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} = 1 < t_n = 2$. Omdat het interval $[0,2]$ overaftelbaar is kunnen $t_0, ..., t_{n-1}$ altijd in het interval $[0,1]$ gepropt worden, zelfs als n willekeurig groot wordt. Het probleem is dan dat een stochastisch proces $\{f_t\}_{t\in[0,2]}$ op deze wijze niet goed benaderd wordt voor het interval $(1,2]$.

Meer in het algemeen is het in de bovenstaande definitie belangrijk dat de afstand tussen de t_i naar 0 nadert naarmate n groter wordt, i.e. $\lim_{n\to\infty} t_{i+1} - t_i = 0$ voor alle $i \in \{0,1,...,n\}$. Merk op dat als $t_{n,i} := \frac{i}{n}T$ er inderdaad geldt

$$\lim_{n\to\infty} t_{i+1} - t_i = \lim_{n\to\infty} (\tfrac{i+1}{n} - \tfrac{i}{n})T = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} = 0$$

en dus is deze eis voldoende (maar niet noodzakelijk). Met dit in gedachten definiëren we het volgende alternatief op definitie 5.4.1. We zullen de equivalentie van de twee definities niet aantonen.

Definitie 5.4.2 (De Itô-integraal en de stochastische integraal). Zij $\{f_t\}_{t\in[0,T]}$ een stochastisch proces en $\{W_t\}_{t\in[0,T]}$ een Brownse beweging, beide gedefinieerd op kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ en indexverzameling $[0,T] \in \mathbb{R}$ en aangepast op het filter $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$. Deel het interval $[0,T]$ op als $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ en definieer $\delta t := \max\{t_{i+1} - t_i | 0 \le i \le n-1\}$. Zij $\left\{\{f_{n,t}\}_{t\in[0,T]} | n \in \mathbb{N}\right\}$ de verzameling van simpele processen zodanig dat $f_n(t) := f(t_i)$ voor alle $t \in [t_i, t_i + 1)$. Dan definiëren we voor alle $t \in [0,T]$ de *Itô-integraal* van $\{f_t\}_{t\in[0,T]}$ tussen 0 en t als

$$\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}W(s) := \lim_{\delta t\to 0} \int_0^t f_n(s)\,\mathrm{d}W(s).$$

Zij $\{M_t\}_{t\in[0,T]}$ een martingaal op kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ en indexverzameling $[0,T] \in \mathbb{R}$ en aangepast op het filter $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$. Dan is de *stochastische integraal* van $\{f_t\}_{t\in[0,T]}$ tussen 0 en t is op vergelijkbare wijze gedefinieerd als

$$\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}M(s) := \lim_{\delta t\to 0} \int_0^t f_n(s)\,\mathrm{d}M(s).$$

Opmerking. Merk op dat we met het limiet-teken $\lim_{n\to\infty}$ in definitie 5.4.1 eisen dat n willekeurig groot wordt. In de bovenstaande definitie 5.4.2 eist het limiet-teken $\lim\limits_{\delta t\to 0}$ juist dat het maximale verschil tussen de opvolgende t_i willekeurig dicht bij 0 komt, i.e. infinitesimaal klein wordt. Merk op dat n willekeurig groot wordt naarmate δt naar 0 nadert in $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$. De informatie van het teken $\lim_{n\to\infty}$ wordt dus als het ware al geïmpliceerd door het limiet-teken $\lim\limits_{\delta t\to 0}$.

Ik wil nu aantonen dat de verwachtingswaarde van de Itô-integraal $\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}W(s)$ van een stochastisch proces $\{f_t\}_{t\in[0,T]}$ gelijk is aan 0. Hiervoor hebben we eerst de volgende belangrijke stelling nodig.

Stelling 5.2. Zij $\{f_t\}_{t\in[0,T]}$ een stochastisch proces en $\{W_t\}_{t\in[0,T]}$ een Brownse beweging, beide gedefinieerd op kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ en indexverzameling $[0,T] \in \mathbb{R}$ en aangepast op het filter $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$. Dan is de Itô-integraal $M_t := \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}W(s)$ van $\{f_t\}_{t\in[0,T]}$ een martingaal ten opzichte van het filter $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$.

De meeste literatuur bewijst stelling 5.2 uitsluitend voor het speciale geval dat $\{f_t\}_{t\in[0,T]}$ een simpel proces is. Wij zullen het bewijs helemaal overslaan. Voor een bewijs van het speciale geval waarin $\{f_t\}_{t\in[0,T]}$ een simpel proces is verwijs ik de lezer door naar ([2], p. 128-129).

In de volgende stelling tonen we aan dat de verwachtingswaarde van de Itô-integraal $\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}W(s)$ van een stochastisch proces $\{f_t\}_{t\in[0,T]}$ gelijk is aan 0.

Stelling 5.3. Zij $\{f_t\}_{t\in[0,T]}$ een stochastisch proces en $\{W_t\}_{t\in[0,T]}$ een Brownse beweging, beide gedefinieerd op kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ en indexverzameling $[0,T] \in \mathbb{R}$ en aangepast op het filter $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$. Dan is de verwachtingswaarde van de Itô-integraal van $\{f_t\}_{t\in[0,T]}$ tussen 0 en $t \in [0,T]$ gelijk aan 0, i.e.

$$\mathrm{E}\Big[\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}W(s)\Big] = 0.$$

Bewijs. Uit stelling 5.2 volgt dat $M_t := \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}W(s)$ een martingaal is. Uit stelling 3.1 volgt dan

$$\mathrm{E}[M_t] = M_0 = \int_0^0 f(s)\,\mathrm{d}W(s) = 0.$$

■

5.2 Stochastische differentiaalvergelijkingen en de Itô-formule

In deze paragraaf gaan we er van uit dat elk stochastisch proces en filter is gedefinieerd op een kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$.

Definitie 5.5 (Itô-proces). Zij $\{a_t\}_{t\geq 0}$ en $\{b_t\}_{t\geq 0}$ twee stochastische processen en $\{W_t\}_{t\geq 0}$ een Brownse beweging, alle drie aangepast op het filter $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$. Dan noemen we een stochastisch proces $\{X_t\}_{t\geq 0}$ van de vorm

$$X_t = X_0 + \int_0^t a_s\,\mathrm{d}s + \int_0^t b_s\,\mathrm{d}W_s. \tag{3}$$

een *Itô-proces.* Hierin is X_0 constant voor elke uitkomst $\omega \in \Omega$, i.e. niet-willekeurig. Alternatief zeggen we ook wel dat een Itô-proces $\{X_t\}_{t\geq 0}$ die voldoet aan vergelijking 3 een oplossing is van de *stochastische differentiaalvergelijking*

$$\mathrm{d}X_t = a_t\,\mathrm{d}t + b_t\,\mathrm{d}W_t.$$

Stelling 5.4 (De Itô-formule). Zij $\{X_t\}_{t\geq 0}$ een Itô-proces gegeven door de stochastische differentiaalvergelijking

$$\mathrm{d}X_t = a_t\,\mathrm{d}t + b_t\,\mathrm{d}W_t.$$

Zij $f(t,x) : [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een functie zodanig dat de afgeleiden $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}$ bestaan en continu zijn. Dan is $f(t, X_t)$ een Itô-proces en geldt bijna zeker

$$\begin{aligned} &f(t,X_t) - f(0,X_0) \\ &= \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} f(u,X_u)\,\mathrm{d}u + \int_0^t a_u \frac{\partial}{\partial x} f(u,X_u)\,\mathrm{d}u + \int_0^t b_u \frac{\partial}{\partial x} f(u,W_u)\,\mathrm{d}W_u + \frac{1}{2}\int_0^t b_u^2 \frac{\partial^2}{\partial^2 x} f(u,X_u)\,\mathrm{d}u. \end{aligned} \tag{4}$$

Alternatief geven we vergelijking 4 ook wel aan als de stochastische differentiaalvergelijking

$$\mathrm{d}f(t,X_t) = \frac{\partial}{\partial t} f(t,X_t)\,\mathrm{d}t + a_t \frac{\partial^f}{\partial^f x}(t,X_t)\,\mathrm{d}W_t + b_t \frac{\partial f}{\partial x}(t,X_t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2} b_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(t,X_t)\,\mathrm{d}t.$$

Het bewijs voor de Itô-formule is erg lang, ingewikkeld en niet heel interessant voor onze behandeling van optiewaardering. Daarom zullen we dit bewijs overslaan.

Het volgende lemma hebben we nodig in het bewijs van stelling 5.5.

Lemma 5.1. Zij $\{W_t\}_{t\in[0,T]}$ een Brownse beweging op kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ en indexverzameling $[0,T] \in \mathbb{R}$ en aangepast op het filter $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$. Dan geldt voor alle $t \in [0,T]$

$$\int_0^t \mathrm{d}W(s) = W(t).$$

Bewijs. Zij het interval $[0,T]$ opgedeeld als $0 = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n = T$. Zij k zodanig dat $t \in [t_k, t_{k+1})$ (of $t \in [t_k, T]$ als $k = n-1$. De Itô-integraal $\int_0^t \mathrm{d}W(s) = \int_0^t 1\,\mathrm{d}W(s)$ is de Itô-integraal van het simpele proces $f(t) = 1$. Uit definitie 5.2 volgt dus

$$\begin{aligned}
\int_0^t \mathrm{d}W(s) &= \sum_{i=0}^{k-1}[W(t_{i+1}) - W(t_i)] + [W(t) - W(t_k)] \\
&= [W(t_1) - W(t_0)] + [W(t_2) - W(t_1)] + \ldots + [W(t_k) - W(t_{k-1})] + [W(t) - W(t_k)] \\
&= W(t) - W(0) \\
&= W(t).
\end{aligned}$$

■

In de volgende stelling tonen we aan dat een geometrische Brownse beweging een Itô-proces is. Het bewijs is een meer rigoureuze behandeling van het bewijs uit ([12], p. 125).

Stelling 5.5. Een geometrische Brownse beweging $\{S_t\}_{t\geq 0}$ is een Itô-proces. In het bijzonder is een geometrische Brownse beweging met parameters μ en $\sigma > 0$ een oplossing van de stochastische differentiaalvergelijking

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t\,\mathrm{d}t + \sigma S_t\,\mathrm{d}W_t.$$

Bewijs. Zij $f(x) := \log x$. Uit de Itô-formule volgt dan bijna zeker

$$\begin{aligned}
f(S_t) = \log S_t &= \log S_0 + \mu \int_0^t S_u f'(S_u)\,\mathrm{d}u + \sigma \int_0^t S_u f'(S_u)\,\mathrm{d}W_u + \frac{1}{2}\sigma^2 \int_0^t S_u^2 f''(S_u)\,\mathrm{d}u \\
&= \log S_0 + \mu \int_0^t S_u \frac{1}{S_u}\,\mathrm{d}u + \sigma \int_0^t S_u \frac{1}{S_u}\,\mathrm{d}W_u + \frac{1}{2}\sigma^2 \int_0^t S_u^2 (-\frac{1}{S_u^2})\,\mathrm{d}u \\
&= \log S_0 + \mu \int_0^t \mathrm{d}u + \sigma \int_0^t \mathrm{d}W_u - \frac{1}{2}\sigma^2 \int_0^t \mathrm{d}u \\
&= \log S_0 + \mu t + \sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t.
\end{aligned}$$

Merk op dat de term $\int_0^t \frac{\partial}{\partial t} f(u, X_u)\,\mathrm{d}u$ uit vergelijking 4 in dit geval verdwijnt. Dit komt doordat de functie f onafhankelijk is van t en er dus $\frac{\partial}{\partial t} f(u) = 0$ geldt. Tenslotte geldt

$$S_t = e^{\log S_t} = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}.$$

■

6 Gevorderde financiën

Voordat we beginnen aan de waardering van Europese opties, moeten we nog een aantal financiële termen doornemen. We behandelen in dit hoofdstuk de termen *geactualiseerde activaprijs*, *portefeuille*, *zelf-financierend portefeuille*, *arbitrage*, *bied-* en *laatprijs* en tenslotte *hedgen*. Vooral het begrip hedgen is van groot belang. In hoofdstuk 1 merkten we al op dat optiewaardering gebeurt aan de hand van hedgen, i.e. het risico elimineren uit een portefeuille. In de laatste paragraaf van dit hoofdstuk zullen we uitleggen hoe dit in zijn werk gaat. Aan het eind van de eerste paragraaf geven we ook alle aannames op ons financieel-wiskundige model voor optiewaardering.

6.1 Financiële termen en aannames op het financieel-wiskundige model

Stel dat het risicovrije rentetarief op $r = 0.05$. Stel daarnaast dat je werkgever je nog €100 aan nettoloon verschuldigd is. Je werkgever geeft je de volgende keuze: je krijgt nu direct €100 óf hij betaalt je over één jaar van nu €105. Misschien ben je geneigd om te kiezen voor de €105 over één jaar (persoonlijk ben ik daar te ongeduldig voor maar misschien denk jij er anders over) voor die €5 extra winst. Maar is dit wel de meest winstgevende keuze?

Stel dat je kiest om nu direct de €100 van je werkgever te ontvangen. Euro's zijn een (nagenoeg) risicovrij actief. Dit betekent dat je er het risicovrije rentetarief over kan vangen. Na één jaar is die €100 dan gegroeid tot $100e^{0.05} \approx$ €105.13. We kunnen het ook opvatten als dat €100 vandaag over een jaar €105.13 waard is. Het is dus verstandig om gelijk de €100 loon van je werkgever te innen (bovendien voorkomt dit financieel risico, wie weet waar je werkgever zich over een jaar bevindt). Zolang het risicovrije rentetarief positief is, is geld vandaag dus altijd meer waard dan in de toekomst. Dit concept noemen we de *tijdswaarde van geld*.

Hoeveel is die €105 van over één jaar vandaag waard? Zij $B =$ €105 het toekomstige bedrag van €105 en noteer $\widetilde{B}$ voor de actuele waarde van B. Uit gevolg 1.1 volgt $B = 105 = \widetilde{B}e^{0.05}$. Er geldt dus $\widetilde{B} = Be^{-0.05} = 105e^{-0.05} \approx$ €99.88. Een bedrag van €105 over één jaar zou vandaag dus ongeveer €99.88 waard zijn. De actuele waarde van een toekomstig actief noemen we ook wel de *geactualiseerde activaprijs*.

Definitie 6.1 (Geactualiseerde activaprijs). Zij $\{S_t\}_{t\geq 0}$ een stochastisch proces zodanig dat voor elke $t \geq 0$ de stochast S_t de prijs van een bepaald actief aanduidt. Dan definiëren we de *geactualiseerde activaprijs* $\widetilde{S}_t$ als

$$\widetilde{S}_t := S_t e^{-rt}.$$

In hoofdstuk 1 definieerden we een *portefeuille* als "*een verzameling van activa van een bepaalde belegger*". Naast deze linguïstische definitie van een portefeuille, hanteren we in de financiële wiskunde ook een andere, wiskundige definitie van het begrip portefeuille. In de financiële wiskunde is een portefeuille een lineaire combinatie van waarden van activa.

Definitie 6.2 (Portefeuille). Zij $\{A_{1,t}\}_{t\geq 0}$, $\{A_{2,t}\}_{t\geq 0}$,..., $\{A_{n,t}\}_{t\geq 0}$ stochastische processen zodanig dat $A_{i,t}$ de waarde van een bepaald actief A_i op tijdstip t aanduidt. Stel dat een belegger (zoals een persoon of bedrijf) op tijdstip t een hoeveelheid $\lambda_{1,t}$, $\lambda_{2,t}$,..., $\lambda_{n,t}$ van de activa A_1, A_2,..., A_n respectievelijk bezit. Dan definiëren we zijn *portefeuille* als het stochastische proces $\{\Pi_t\}_{t\geq 0}$ zodat

$$\Pi_t := \lambda_{1,t}A_{1,t} + \lambda_{2,t}A_{2,t} + ... + \lambda_{n,t}A_{n,t}.$$

Is het zinvol om het toe te staan dat hoeveelheden λ in de bovenstaande definitie negatief zijn? Stel dat het actief A de euro voorstelt. Een negatieve hoeveelheid euro's stelt dan een monetaire schuld (in euro's) voor. Wat nou als het actief A een aandeel voorstelt? Als λ negatief is dan stelt het product λA een zogenaamde *short-positie* op het aandeel A voor. Een short-positie in een aandeel aangaan, ook wel *short gaan* genoemd, werkt als volgt.

Zij A_t de waarde van het aandeel A op tijdstip t. Stel dat je op tijdstip t_1 een short-positie in aandeel A aangaat. Dit betekent dat je op dat tijdstip een hoeveelheid $|\lambda|$ ($\lambda < 0$) aandelen A verkoopt die je op dat moment niet bezit. Je bezit op dat moment dus als het ware een negatief aantal λ aandelen A. Je bent echter verplicht om dit verkochte aantal aandelen op een later moment t_2 terug te kopen zodat je saldo in A weer op 0 staat. Je ontvangt voor het tijdstip t_2 dan ook nog niet de opbrengst $|\lambda|A_{t_1}$ van de verkoop van de aandelen op tijdstip t_1. Als je de aandelen op tijdstip t_2 weer terug koopt, is je opbrengst $|\lambda|(A_{t_1}-A_{t_2}) = \lambda(A_{t_2}-A_{t_1})$. Dit betekent dat als $A_{t_1} - A_{t_2}$ positief is (de waarde van het aandeel A is gedaald), je op tijdstip t_2 je winst $A_{t_1} - A_{t_2}$ krijgt uitgekeerd. Als $A_{t_1} - A_{t_2}$ negatief is (de waarde van het aandeel A is gestegen), je op tijdstip t_2 het openstaande bedrag $|A_{t_1} - A_{t_2}|$ moet betalen. Daar bovenop betaal je in de praktijk meestal ook een premie voor het innemen van een short-positie. Omdat je in een short-positie winst maakt juist als het betreffende aandeel in waarde daalt, wordt short gaan in de volksmond ook wel 'betting against' genoemd.

Het onderstaande concept van de *zelf-financierende portefeuille* is erg belangrijk voor onze behandeling van hedgen in paragraaf 2 van dit hoofdstuk.

Definitie 6.3 (Zelf-financierende portefeuille). Een portefeuille heet *zelf-financierend* indien de portefeuille geen externe stortingen of opnames van waarde ondervindt. Dat wil zeggen dat de koop van nieuwe activa gefinancierd moeten worden door de verkoop van andere activa in de portefeuille.

Opmerking. Als de nieuwe activa gekocht worden met valuta (lees: geld) in het portefeuille dan zeggen we ook wel dat we de valuta (of het geld) verkopen.

Stel dat de prijs van goud in Nederland constant €35.000 per kilogram is terwijl de prijs in België constant slechts €30.000 per kilogram bedraagt. Als slimme belegger wil jij deze mogelijkheid graag exploiteren. Door een reeks slechte investeringen ben je momenteel helaas platzak. Gelukkig kan je een bank vinden die je wel €30.000 wil lenen voor een eenmalige renteheffing van 1%. Je koopt een kilo goud in België, verkoopt het goud weer in Nederland en betaalt tenslotte je lening inclusief rente terug aan de bank. Na al dit heb je mooi een winst gemaakt van $35.000 - 30.000 - 300 =$ €4.700. Omdat de prijzen in België en Nederland constant zijn, loop je niet het financiële risico op dat de prijs van goud overal ter wereld plotseling onder de €30.000 keldert en je het goud met verlies moet verkopen. Je hebt dus als het ware risico-vrije winst. De mogelijkheid op risico-vrije winst zonder startkapitaal noemen we ook wel *arbitrage*. De onderstaande definitie beschrijft het concept arbitrage precies.

Definitie 6.4 (Arbitrage). We zeggen dat er op een markt een *arbitrage* bestaat als er een portefeuille $\{\Pi_t\}_{t\in[0,T]}$ bestaat zodanig dat $\Pi_0 = 0$ en $\Pi_T \geq 0$ met kans 1 en $\Pi_T > 0$ met positieve kans geldt.

In de praktijk zijn markten nooit volledig efficiënt en treedt er af en toe arbitrage op. Deze momenten van arbitrage zijn echter maar van korte duur en balanceren zichzelf snel uit en is er dus sprake van een soort semi-arbitrage. In ons wiskundig model gaan we er echter vanuit dat de markten compleet arbitragevrij zijn. Een model waarin de markt arbitrage toestaat kan niet gebruikt worden voor analyse omdat dit tot inherent tot paradoxale resultaten leidt.

Voordat we de aannames van ons financieel-wiskundige model opnoemen behandelen we nog de termen *biedprijs* en *laatprijs*. Stel, student A heeft net het vak 'Inleiding Financiële Wiskunde' gehaald. Net als in eerdere voorbeelden zit student A krap bij kas. Hij besluit daarom zijn lesboek *Stochastic Calculus for Finance I* door Steven E. Shreve te verkopen via marktplaats.nl. Hij zet het boek te koop voor voor de vraagprijs €30. Stiekem is student A best bereid om het boek te verkopen voor minder dan €30 (maar hij probeert natuurlijk zijn opbrengst te maximaliseren). Stel dat student A bereid is om het boek voor minimaal €20 te verkopen. Deze minimale prijs van €20 is dan de *laatprijs* van het boek. In het algemeen is de laatprijs van een actief de minimale waarde waartegen de verkoper bereidt is het actief te verkopen.

Aan de andere kant van het internet zit een andere arme student B. Omdat hij ook krap bij kas zit, wil hij in de toekomst ook het vak 'Inleiding Financiële Wiskunde' volgen en probeert hij het lesboek tweedehands voor een voordelige prijs te kopen. Op marktplaats.nl vindt hij het aanbod van student A en hij biedt €15. Stiekem is student B best bereid om het boek voor meer dan €15 te kopen (maar hij probeert natuurlijk zijn kosten te minimaliseren). Stel dat student B bereid is om maximaal €25 te betalen voor het boek. Deze maximale prijs van €25 is dan de *biedprijs* van het boek. In het algemeen is de biedprijs van een actief de maximale waarde waartegen de koper bereidt is het actief te kopen. Het verschil tussen de bied- en laatprijs heet de *bid-ask spread.*

We sluiten deze paragraaf af met een opsomming van onze aannames op ons financieel-wiskundige model voor optiewaardering.

Aannames 6.1 (Aannames op het financieel-wiskundige model). In ons financieel-wiskundig model voor de analyse van optiewaardering maken we de volgende aannames.

Aannames op het onderliggende actief

i) De waarde van het actief volgt een geometrische Brownse beweging.
ii) De aandelen keren geen dividend uit.
iii) Er kan geen gebruik worden gemaakt van aandelensplitsing.

Aannames op de financiële markt

iv) Het is op elk moment mogelijk om elke hoeveelheid van het actief te kopen of te verkopen.
v) De bied- en laatprijs zijn gelijk, i.e. de bid-ask spread is nul.
vi) Er worden geen transactiekosten of belastingen geheven.
vii) Short gaan is altijd mogelijk en zonder extra kosten.
viii) Het is altijd mogelijk om elk gewenst bedrag te lenen.
ix) Het risicovrije rentetarief is bekend en constant.
x) Over risicovrije activa wordt het risicovrije rentetarief geheven.
xi) De markt is arbitragevrij.

6.2 Hedgen

Herinner je uit hoofdstuk 1 dat optiewaardering gebeurt aan de hand van het risicovrij maken van een portefeuille, oftewel hedgen. In deze paragraaf zullen we uitleggen hoe hedgen werkt. Deze behandeling van hedgen is een uitgebreidere variant van die uit ([1], p. 245-247). Beschouw een zelf-financierende portefeuille Π bestaande uit een risicovrij actief D (zoals geld op een bankrekening) waar de risicovrije rentetarief r over wordt gevangen, een verkochte optie V en een hoeveelheid Δ van het riskante onderliggende activa S (zoals aandelen). Als Δ negatief is dan betekent dat dat we een short-positie aangaan. De waarde van de optie V is afhankelijk van de tijd t en de waarde van het onderliggende actief S. De waarde van het onderliggende actief S is op zijn beurt weer afhankelijk van de tijd t. Omdat er rente wordt gevangen over het risicovrije actief is zijn waarde D ook afhankelijk van de tijd. Afhankelijk van de waarde van het onderliggende actief S kan er besloten worden om hier een aantal van te kopen (of verkopen). Omdat de portefeuille zelf-financierend is, worden de kosten van deze koop afgetrokken van de waarde van D (of de opbrengst van de verkoop opgeteld bij de waarde van D). De waarde D is dus ook afhankelijk van de waarde S. Ga er tenslotte van uit dat Δ afhankelijk is van de waarde S en de tijd t. Het portefeuille Π ziet er dan uit als

$$\Pi(t, S(t)) = -V(t, S(t)) + D(t) + \Delta\big(t, S(t)\big)S(t).$$

We onderzoeken nu wat er met het portefeuille gebeurt op een klein tijdsinterval $[t, t + \delta t]$. Op dat interval verandert de waarde van de optie van $V(t, S(t))$ naar $V(t+\delta t, S(t+\delta t))$ en de waarde van het riskante actief van $S(t)$ naar $S(t + \delta t)$. We gaan er vanuit dat de hoeveelheid Δ vast blijft op dit tijdsinterval. De beheerder van het portefeuille moet immers eerst de informatie beschikbaar op tijd $t + \delta t$ binnen krijgen voordat hij een besluit kan maken over het wijzigen van Δ. Omdat de hoeveelheid Δ van het riskante onderliggende actief constant blijft op dit tijdsinterval, is D op dit tijdsinterval niet langer afhankelijk van de waarde S. De waarde D is op dit tijdsinterval dus uitsluitend afhankelijk van de tijd, i.e. $D = D(t)$. De waarde van het risicovrije actief veranderd op dit interval dan van $D(t)$ naar $D(t+\delta t)$. Definieer $\delta\Pi := \Pi(t+\delta t, S(t+\delta t))-\Pi(t, S(t))$, $\delta V := V(t + \delta t, S(t + \delta t)) - V(t, S)$, $\delta D := D(t + \delta t) - D(t)$ en $\delta S := S(t + \delta t) - S(t)$. Er geldt dan

$$\delta\Pi = -\delta V + \delta D + \Delta\big(t, S(t)\big)\delta S. \tag{5}$$

Ik zoek eerst een uitdrukking voor δD. Uit gevolg 1.1 volgt dat waarde van het risicovrije actief D gelijk is aan $D(t) = D(0)e^{rt}$. De afgeleide van D is dus $D'(t) = D(0)e^{rt}r = rD(t)$. Omdat $[t, t+\delta t]$ een klein tijdsinterval is geldt nagenoeg $D(t+\delta t) = D(t) + rD(t)\delta t$ en dus $D(t+\delta t) - D(t) = \delta D = rD(t)\delta t$.

Vervolgens zoek ik een uitdrukking voor δV. Als we $V(t+\delta t, S(t+\delta t)) = V(t+\delta t, S+\delta S)$ benaderen met een tweede-orde Taylorpolynoom verkrijgen we

$$\begin{aligned}&V(t+\delta t, S+\delta S)\\ \approx &V(t,S) + \frac{\partial}{\partial t}V(t,S)\delta t + \frac{\partial}{\partial S}V(t,S)\delta S + \frac{\partial^2}{\partial S\partial t}V(t,S_t)\delta S\delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial^2 t}V(t,S)(\delta t)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial^2 S}V(t,S)(\delta S)^2\end{aligned}$$

en dus

$$\begin{aligned}&V(t+\delta t, S+\delta S) - V(t,S) = \delta V\\ \approx &\frac{\partial}{\partial t}V(t,S)\delta t + \frac{\partial}{\partial S}V(t,S)\delta S + \frac{\partial^2}{\partial S\partial t}V(t,S_t)\delta S\delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial^2 t}V(t,S)(\delta t)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial^2 S}V(t,S)(\delta S)^2.\end{aligned}$$

Omdat $[t, t+\delta t]$ een klein tijdsinterval is, is deze benadering nagenoeg exact. Omdat δt klein is, is δS met grote waarschijnlijkheid ook klein. Daarom kunnen we de termen van orde 2 $\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial^2 t}V(t,S)(\delta t)^2$ en $\frac{\partial^2}{\partial S\partial t}V(t,S_t)\delta S\delta t$ verwaarlozen.

Op het eerste gezicht lijkt het er op dat we de term $\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial^2 S}V(t,S)(\delta S)^2$ ook kunnen verwaarlozen. Uit nadere inspectie blijkt echter $(\delta S)^2 \approx \sigma^2\big[S(t)\big]^2\delta t$. Om dit in te zien beschouwen we de eerste orde Taylorpolynoom van S

$$S(t+\delta t) \approx S(t) + S'(t)\delta t.$$

Omdat δt klein is is deze benadering nagenoeg exact. De vergelijking kan dus worden herschreven tot

$$S(t+\delta t) - S(t) = \delta S = S'(t)\delta t. \tag{6}$$

Herinner je dat de waarde van het onderliggende actief van een optie een geometrische Brownse beweging is, i.e. $S(t) = S(0)e^{(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma W(t)}$ waarin $W(t)$ een Brownse beweging is. Er geldt dus

$$S'(t) = S(0)e^{(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma W(t)}\big[\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 + \sigma W'(t)\big] = S(t)\big[\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 + \sigma W'(t)\big].$$

Als we deze uitdrukking substitueren in vergelijking 6 verkrijgen we

$$\delta S = S(t)\big[\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 + \sigma W'(t)\big]\delta t = S(t)\big[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\delta t + \sigma W'(t)\delta t\big].$$

Omdat δt klein is geldt nagenoeg $W'(t)\delta t = W(t+\delta t) - W(t) =: \delta W$. Er geldt dus

$$\begin{aligned}(\delta S)^2 =&\big[S(t)\big]^2\big[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\delta t + \sigma\delta W\big]^2\\ =&\big[S(t)\big]^2\big[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)^2(\delta t)^2 + \sigma^2(\delta W)^2 + 2(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\delta t\delta W\big].\end{aligned}$$

Omdat δt klein is, is δW met grote waarschijnlijkheid ook klein. Daarom kunnen we de termen $(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)^2(\delta t)^2$ en $(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\delta t\delta W$ verwaarlozen.

Uit stelling 4.1 volgt dat $\mathrm{E}[(\delta W)^2] = \mathrm{E}\Big[(W(t+\delta t) - W(t))^2\Big] = t + \delta t - t = \delta t$. We kunnen dus stellen dat $(\delta W)^2 \approx \delta t$. Er geldt dan

$$(\delta S)^2 = \big[S(t)\big]^2\sigma^2(\delta W)^2 = \big[S(t)\big]^2\sigma^2\delta t.$$

Onze nieuwe term voor δV is nu dus

$$\delta V = \frac{\partial}{\partial t}V(t,S)\delta t + \frac{\partial}{\partial S}V(t,S)\delta S + \frac{1}{2}\big[S(t)\big]^2\sigma^2\frac{\partial^2}{\partial^2 S}V(t,S)\delta t.$$

Als we onze termen voor δD en δV in vergelijking 5 substitueren, verkrijgen we

$$\delta\Pi = \left(-\frac{\partial}{\partial t}V(t,S) - \frac{1}{2}\big[S(t)\big]^2\sigma^2\frac{\partial^2}{\partial^2 S}V(t,S) + D(t)r\right)\delta t + \left(\Delta(t,S) - \frac{\partial}{\partial S}V(t,S)\right)\delta S. \tag{7}$$

We hebben nu een mogelijkheid om het risico in $\delta\Pi$ te elimineren. Als we $\Delta(t,S(t)) = \frac{\partial}{\partial S}V(t,S(t))$ kiezen, dan geldt $(\Delta(t,S) - \frac{\partial}{\partial S}V(t,S))\delta S = 0$ en hebben we dus de riskante term δS uit (7) geëlimineerd. We zeggen ook wel dat we de portefeuille hebben gehedgd.

7 Europese opties

We hebben nu eindelijk alle benodigde voorkennis om te beginnen met optiewaardering. We beginnen in paragraaf 7.1 met het waarderen van een Europese calloptie. Aan het begin van deze paragraaf zal ik in stelling 7.1 eerst de prijs van een Europese calloptie geven. Ik doe dit zodat het gedurende de rest van de paragraaf duidelijk is waar we naartoe aan het werken zijn. De rest van de paragraaf is namelijk gericht op het bewijzen van deze stelling en het bewijs is lang en soms complex. Daarom zullen we het bewijs niet in één keer behandelen, we werken telkens van tussenresultaat naar tussenresultaat in de vorm van lemma's.

Voordat we beginnen met het bewijs van het eerste lemma geef ik nog een paar laatste stellingen, namelijk de stelling van Radon-Nikodym en de stelling van Girsanov. We hebben de resultaten van deze stellingen uitsluitend nodig als hulpstelling voor het bewijs van stelling 7.1. De bewijzen van deze stellingen vallen buiten het bestek van dit document. Om deze twee redenen zullen we ze niet bewijzen.

Ons bewijs van stelling 7.1 is een meer rigoureuze en uitgebreidere versie van de zogenaamde *martingaal-methode* gebruikt in ([1], p. 269-275). Deze martingaalmethode verschilt van het beroemde bewijs van Black-Scholes-Merton. De resultaten van de martingaalmethode zijn echter identiek aan die van Black-Scholes-Merton.

Aan het einde van dit hoofdstuk zullen we een Europese putoptie waarderen. Maak je geen zorgen, het is niet nodig om het hele bewijs van stelling 7.1 voor een putoptie te herhalen. Als we eenmaal de prijs van een Europese calloptie weten, kunnen we via een handig resultaat genaamd de *put-call pariteit* gemakkelijk de prijs van een Europese putoptie berekenen.

7.1 Europese callopties

Zonder verder oponthoud, de prijs van een Europese calloptie.

Stelling 7.1 (De waarde van een Europese calloptie). Zij $\{S_t\}_{t\geq 0}$ de waarde van een primair actief en neem aan dat deze een geometrische Brownse beweging volgt. Zij $\{V_t\}_{t\in[0,T]}$ de waarde van een Europese calloptie op dit actief met expiratietijd T en uitvoerprijs K. De prijs V_0 van deze optie wordt dan gegeven door

$$V_0 = S_0\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2).$$

Hierin geldt

$$d_1 = \frac{\log(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma T}, d_2 = \frac{\log(\frac{S_0}{K}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma T}$$

en is Φ de standaard normale cumulatieve verdelingsfunctie.

De volgende twee stellingen geven ons de mogelijkheid om op een meetbare ruimte te wisselen van kansmaat. We zullen dit gebruiken in ons bewijs van stelling 7.1.

Stelling 7.2 (Radon-Nikodym). Zij P en Q twee kansmaten op een meetbare ruimte $(\Omega, \mathcal{F})$ zodat voor elke gebeurtenis $A \in \mathcal{F}$ de uitspraak 'als $\mathrm{Q}(A) = 0$ geldt, dan geldt $\mathrm{P}(A) = 0$' geldig is. Dan bestaat er een non-negatieve stochast X zodanig dat voor elke gebeurtenis $A \in \mathcal{F}$ de volgende vergelijking geldt:

$$\mathrm{Q}(A) = \int_A X \,\mathrm{d}\,\mathrm{P}.$$

Geïnspireerd door de fundamentele stelling van de calculus noteren we $X = \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Q}}{\mathrm{d}\,\mathrm{P}}$. We noemen de stochast $\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Q}}{\mathrm{d}\,\mathrm{P}}$ de *Radon-Nikodym afgeleide* van Q ten opzichte van P.

Stelling 7.3 (Girsanov). Zij $\{W_t\}_{t\in[0,T]}$ een Brownse beweging op kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ en filter $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ en zij θ een reëel getal. Definieer het stochastisch proces $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ zodat $X_t := W_t + \theta t$ voor alle $t \in [0,T]$. Definieer $L_T := e^{-\frac{1}{2}\theta^2 T - \theta W_T}$ en de kansmaat Q zodanig dat $\mathrm{d}\,\mathrm{Q} := L_T \,\mathrm{d}\,\mathrm{P}$. Dan is $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ een Brownse beweging ten opzichte van de kansmaat Q.

Vanaf hier beginnen we met ons bewijs van stelling 7.1. Lemma 7.1 dient als eerste tussenresultaat op onze weg naar het bewijzen van stelling 7.1.

Lemma 7.1. Zij $\{W_t\}_{t\in[0,T]}$ een Brownse beweging op kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ en filter $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$. Zij $\{S_t\}_{t\geq 0}$ de waarde van een actief en neem aan dat S_t de geometrische Brownse beweging

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t \,\mathrm{d}t + \sigma S_t \,\mathrm{d}W_t$$

volgt. Zij $r > 0$ het risicovrije rentetarief en zij $\theta := \frac{\mu - r}{\sigma}$. Definieer het stochastisch proces $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ zodat $X_t := W_t + \theta t$ voor alle $t \in [0,T]$. Definieer $L_T := e^{-\frac{1}{2}\theta^2 T - \theta W_T}$ en de kansmaat Q zodanig dat $\mathrm{d}\,\mathrm{Q} := L_T \,\mathrm{d}\,\mathrm{P}$. Dan is de geactualiseerde activaprijs

$$\widetilde{S}_t := e^{-rt} S_t$$

een martingaal ten opzichte van de kansmaat Q.

Bewijs. Zij $\{W_t\}_{t\in[0,T]}$ een Brownse beweging ten opzichte van de kansmaat P en zij S_t de geometrische Brownse beweging

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t \,\mathrm{d}t + \sigma S_t \,\mathrm{d}W_t$$

met oplossing

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}.$$

Er geldt $W_t = X_t - \theta t$. Als we dit substitueren in de bovenstaande vergelijking verkrijgen we

$$\begin{aligned}
S_t &= S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma(X_t - \theta t)} \\
&= S_0 e^{(\mu - \sigma\theta - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma X_t} \\
&= S_0 e^{(\mu - \sigma\frac{\mu - r}{\sigma} - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma X_t} \\
&= S_0 e^{(\mu - \sigma\frac{\mu - r}{\sigma} - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma X_t} \\
&= S_0 e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma X_t}.
\end{aligned}$$

Er geldt nu

$$\widetilde{S}_t = e^{-rt} S_t = S_0 e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma X_t}. \tag{8}$$

Definieer het filter $\{\mathcal{G}_t\}_{t\geq 0}$ als $\mathcal{G}_t := \sigma(X_t)$ (de σ-algebra gegenereerd door X_t) voor alle $t \geq 0$ en zij $0 \leq s \leq t$ een paar reële getallen. Uit de stelling van Girsanov volgt dat het stochastische proces X_t een Brownse beweging is ten opzichte van de kansmaat Q. Uit eigenschappen i) en ii) van definitie 4.1 volgt dat $X_t - X_s$ Q-onafhankelijk is van $X_s - X_0 = X_s$. Dus is $X_t - X_s$ Q-onafhankelijk van $\mathcal{G}_s$. Uit eigenschap iv) (onafhankelijkheid) van stelling 2.1 volgt nu

$$\mathrm{E}^{\mathrm{Q}}[e^{\sigma(X_t - X_s)} | \mathcal{G}_s] = \mathrm{E}^{\mathrm{Q}}[e^{\sigma(X_t - X_s)}] = \mathrm{E}^{\mathrm{Q}}[e^{\sigma Z}]$$

waarin Z een $\mathcal{N}(0, t-s)$ verdeelde stochast is. Uit gevolg 5.1 en de stelling van de onbewuste statisticus volgt dan

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}^{\mathrm{Q}}[e^{\sigma Z}] &= \int\limits_{\Omega} e^{\sigma Z} \,\mathrm{d}\,\mathrm{Q} \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\sigma z} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\Big(-\frac{z^2}{2(t-s)}\Big) \,\mathrm{d}z \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\Big(\sigma z - \frac{z^2}{2(t-s)}\Big) \,\mathrm{d}z \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\Big(\frac{-[z-\sigma(t-s)]^2 + \sigma^2(t-s)^2}{2(t-s)}\Big) \,\mathrm{d}z \\
&= e^{\frac{1}{2}\sigma^2(t-s)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\Big(-\frac{[z-\sigma(t-s)]^2}{2(t-s)}\Big) \,\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

Substitueer nu $x = z - \sigma(t-s)$. Dan geldt $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z} = 1$ en dus

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}^{\mathrm{Q}}[e^{\sigma Z}] &= e^{\frac{1}{2}\sigma^2(t-s)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\Big(-\frac{[z-\sigma(t-s)]^2}{2(t-s)}\Big) \,\mathrm{d}z \\
&= e^{\frac{1}{2}\sigma^2(t-s)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\Big(-\frac{x^2}{2(t-s)}\Big) \,\mathrm{d}x \\
&= e^{\frac{1}{2}\sigma^2(t-s)} \qquad (9)
\end{aligned}$$

omdat $\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp(-\frac{x^2}{2(t-s)})$ de kansdichtheid is van een $\mathcal{N}(0, t-s)$ verdeelde stochast. Vervolgens volgt uit eigenschap iii) (het bekende eruit halen) van stelling 2.1

$$\mathrm{E}^{\mathrm{Q}}[e^{\sigma(X_t - X_s)}|\mathcal{G}_s] = e^{-\sigma X_s}\,\mathrm{E}^{\mathrm{Q}}[e^{\sigma X_t}|\mathcal{G}_s]. \qquad (10)$$

Als we vergelijking 9 en 10 combineren, dan verkrijgen we

$$\mathrm{E}^{\mathrm{Q}}[e^{\sigma X_t}|\mathcal{G}_s] = e^{\frac{1}{2}\sigma^2(t-s)+\sigma X_s}.$$

Tenslotte geldt dus

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}^{\mathrm{Q}}[\widetilde{S}_t|\mathcal{G}_s] &= \mathrm{E}^{\mathrm{Q}}[e^{\sigma X_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t}|\mathcal{G}_s] \\
&= e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t}\,\mathrm{E}^{\mathrm{Q}}[e^{\sigma X_t}] \\
&= \exp\Big(-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \frac{1}{2}\sigma^2(t-s) + \sigma X_s\Big) \\
&= e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 s + \sigma X_s} \\
&= \widetilde{S}_s
\end{aligned}$$

en dus is $\widetilde{S}_t$ een martingaal ten opzichte van kansmaat Q en filter $\{\mathcal{G}_t\}_{t\geq 0}$.

■

Nu we hebben aangetoond dat de geactualiseerde activaprijs $\widetilde{S}_t$ een martingaal is, kunnen we er een stochastische integraal over definiëren. We zullen dit nodig hebben in het bewijs van het volgende lemma 7.2.

Lemma 7.2. Zij voldaan aan alle voorwaarden uit lemma 7.1. Zij het stochastisch proces $\{V_t\}_{t\geq 0}$ de waarde van een Europese calloptie op het onderliggende actief S_t met expiratietijd T en uitoefenprijs K. Dan geldt

$$V_0 = e^{-rT}\,\mathrm{E}^{\mathrm{Q}}[V_T].$$

Bewijs. Beschouw de zelf-financierende portefeuille uit paragraaf 6.2.

$$\Pi(t, S(t)) = -V(t, S(t)) + D(t, S(t)) + \Delta(t, S(t))S(t).$$

Voor het gemak maken gebruik van de notatie $\Pi_t := \Pi(t, S(t))$, $V_t := V(t, S(t))$, $D(t, S(t)) = D_t$, $\Delta_t := \Delta(t, S(t))$ en $S_t := S(t)$. In paragraaf 6.2 hebben we aangetoond dat we deze portefeuille kunnen hedgen als we $\Delta_t = \frac{\partial}{\partial S}V(t, S)$ kiezen. Omdat het portefeuille dan risicovrij wordt, wordt er het risicovrije rentetarief over gevangen. Omdat de portefeuille daar bovenop zelf-financierend is en er dus geen externe waarde-injecties op worden uitgevoerd, geldt $\Pi_t = \Pi_0 e^{rt}$ voor alle $t \in [0, T]$ en dus $\widetilde{\Pi}_t = e^{-rt}\Pi_t = \Pi_0$ voor alle $t \in [0, T]$. Deel het tijdsinterval $[0, T]$ op: $0 = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n = T$, $t_i = \frac{i}{n}T$. Zei n dusdanig groot zodat de tijdsintervallen $[t_i, t_{i+1})$ zodanig klein zijn dat de hoeveelheid Δ_t op het interval $[t_i, t_{i+1})$ constant blijft (net als op het kleine tijdsinterval $[t, t + \delta t]$ uit paragraaf 6.2, op grotere tijdsintervallen mag Δ_t wel fluctueren). Net als in paragraaf 6.2 is de waarde van D voor alle $t \in [t_i, t_{i+1})$ dan onafhankelijk van de waarde $S(t)$. De waarde van D fluctueert dan op dit tijdsinterval alleen als gevolg van de rente, i.e. $D_t = D_{t_i}e^{r(t-t_i)}$ voor alle $t \in [t_i, t_{i+1})$. De geactualiseerde activaprijs is dan $\widetilde{D}_t = D_{t_i}e^{-rt_i}$ voor alle $t \in [t_i, t_{i+1})$ en $i \in \{0, 1, ..., n\}$. Voor een stochastisch proces $\{Y_t\}_{t\geq 0}$, definieer $Y_{t-} := \lim_{u\uparrow t, u\in[0,t)} Y_u$. Omdat de portefeuille risicovrij en zelf-financierend is geldt dan

$$\widetilde{\Pi}_{(t_{i+1})-} - \widetilde{\Pi}_{t_i} = -(\widetilde{V}_{(t_{i+1})-} - \widetilde{V}_{t_i}) + (\widetilde{D}_{(t_{i+1})-} - \widetilde{D}_{t_i}) + \Delta_{t_i}(\widetilde{S}_{(t_{i+1})-} - \widetilde{S}_{t_i}).$$

Merk op dat de factor Δ_{t_i} in de bovenstaande vergelijking voldoet omdat Δ_{t_i} constant is over het interval $[t_i, t_{i+1})$ en $S_{(t_{i+1})-} = \lim_{u\uparrow t, u\in[0,t)} S_u$. Uit stelling 4.2 volgt dat S_t continu is. Omdat S_t continu is, is de waarde van de optie $V_t = (S_t - K)^+$ ook continu. Omdat e^{-rt} ook continu is, zijn de functies $\widetilde{V}_t$, $\widetilde{S}_t$ en dus $\widetilde{\Pi}_t$ ook continu. Daarom geldt

$$\widetilde{\Pi}_{(t_{i+1})-} - \widetilde{\Pi}_{t_i} = \widetilde{\Pi}_{t_{i+1}} - \widetilde{\Pi}_{t_i}.$$

Omdat $\widetilde{\Pi}_t = e^{-rt}\Pi_t = \Pi_0$ geldt voor alle $t \in [0, T]$, geldt

$$\begin{aligned}\widetilde{\Pi}_{t_{i+1}} - \widetilde{\Pi}_{t_i} &= \Pi_0 - \Pi_0 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Omdat de functies $\widetilde{V}_t$ en $\widetilde{S}_t$ continu zijn, geldt tevens

$$\widetilde{\Pi}_{t_{i+1}} - \widetilde{\Pi}_{t_i} = -(\widetilde{V}_{t_{i+1}} - \widetilde{V}_{t_i}) + (\widetilde{D}_{(t_{i+1})-} - \widetilde{D}_{t_i}) + \Delta_{t_i}(\widetilde{S}_{t_{i+1}} - \widetilde{S}_{t_i}).$$

Omdat $D_{(t_{i+1})-} = \lim_{u\uparrow t, u\in[0,t_{i+1})} D_u$ en $\widetilde{D}_t = D_{t_i}e^{-rt_i}$ voor alle $u \in [t_i, t_{i+1})$ geldt, geldt vervolgens

$$\begin{aligned}-(\widetilde{V}_{t_{i+1}} - \widetilde{V}_{t_i}) + (\widetilde{D}_{(t_{i+1})-} - \widetilde{D}_{t_i}) + \Delta_{t_i}(\widetilde{S}_{t_{i+1}} - \widetilde{S}_{t_i}) &= -(\widetilde{V}_{t_{i+1}} - \widetilde{V}_{t_i}) + (\widetilde{D}_{t_i} - \widetilde{D}_{t_i}) + \Delta_{t_i}(\widetilde{S}_{t_{i+1}} - \widetilde{S}_{t_i}) \\ &= -(\widetilde{V}_{t_{i+1}} - \widetilde{V}_{t_i}) + \Delta_{t_i}(\widetilde{S}_{t_{i+1}} - \widetilde{S}_{t_i}) \\ &= 0\end{aligned}$$

en dus

$$\widetilde{V}_{t_{i+1}} - \widetilde{V}_{t_i} = \Delta_{t_i}(\widetilde{S}_{t_{i+1}} - \widetilde{S}_{t_i}).$$

Als we alle termen $\widetilde{V}_{t_{i+1}} - \widetilde{V}_{t_i}$ voor $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$ bij elkaar optellen, dan krijgen we de telescoopsom

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1}(\widetilde{V}_{t_{i+1}} - \widetilde{V}_{t_i}) &= (\widetilde{V}_{t_1} - \widetilde{V}_{t_0}) + (\widetilde{V}_{t_2} - \widetilde{V}_{t_1}) + ... + (\widetilde{V}_{t_n} - \widetilde{V}_{t_{n-1}}) \\ &= \widetilde{V}_T - \widetilde{V}_0 \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \Delta_{t_i}(\widetilde{S}_{t_{i+1}} - \widetilde{S}_{t_i}).\end{aligned}$$

Als we nu de limiet $n \to \infty$ nemen, dan worden de tijdsintervallen $[t_i, t_{i+1})$ willekeurig klein en geldt

$$\widetilde{V}_T - \widetilde{V}_0 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta_{t_i}(\widetilde{S}_{t_{i+1}} - \widetilde{S}_{t_i}) = \int\limits_0^T \Delta_t \,\mathrm{d}\widetilde{S}_t.$$

Uit lemma 7.1 volgt dat $\widetilde{S}_t$ een martingaal is en dus is de stochastische integraal $\int\limits_0^T \Delta_t \,\mathrm{d}\widetilde{S}_t$ zinvol gedefinieerd. Uit vergelijking 8 en stelling 5.5 volgt

$$\mathrm{d}\widetilde{S}_t = \sigma \widetilde{S}_t \,\mathrm{d}X_t.$$

"Daarom"geldt

$$\widetilde{V}_T - \widetilde{V}_0 = \int_0^T \Delta_t \sigma \widetilde{S}_t \,\mathrm{d}X_t. \tag{11}$$

Dit is natuurlijk slechts een intuïtief argument maar het volstaat voor nu. Ik zal na dit bewijs een sublemma toevoegen met een rigoureus bewijs voor $\int_0^T \Delta_t \,\mathrm{d}\widetilde{S}_t = \int_0^T \Delta_t \sigma \widetilde{S}_t \,\mathrm{d}X_t$. Als we aan beide kanten van vergelijking 11 de Q-verwachtingswaarde nemen, verkrijgen we

$$\begin{aligned}\mathrm{E}^{\mathrm{Q}}[\widetilde{V}_T - \widetilde{V}_0] &= \mathrm{E}^{\mathrm{Q}}[\widetilde{V}_T] - V_0 && \text{(want } \widetilde{V}_0 = V_0 \text{ en } V_0 \text{ is niet-willekeurig)} \\ &= 0 && \text{(stelling 5.3).}\end{aligned}$$

Tenslotte geldt dus

$$\begin{aligned}V_0 &= \mathrm{E}^{\mathrm{Q}}[\widetilde{V}_T] \\ &= \mathrm{E}^{\mathrm{Q}}[e^{-rT} V_T] \\ &= e^{-rT}\,\mathrm{E}^{\mathrm{Q}}[V_T].\end{aligned}$$

■

Zoals beloofd volgt hier een sublemma voor het bewijs van vergelijking 11.

Sublemma 10.1. In het bovenstaande bewijs geldt

$$\int_0^T \Delta_t \,\mathrm{d}\widetilde{S}_t = \int_0^T \Delta_t \sigma \widetilde{S}_t \,\mathrm{d}X_t.$$

Bewijs. Er geldt

$$\int_0^T \Delta_t \,\mathrm{d}\widetilde{S}_t = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta_{t_i}(\widetilde{S}_{t_{i+1}} - \widetilde{S}_{t_i}).$$

Ook geldt $\mathrm{d}\widetilde{S}_t = \sigma\widetilde{S}_t \,\mathrm{d}X_t$ en dus

$$\widetilde{S}_t - \widetilde{S}_0 = \sigma \int_0^t \widetilde{S}_u \,\mathrm{d}X_u.$$

Hieruit volgt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta_{t_i}(\widetilde{S}_{t_{i+1}} - \widetilde{S}_{t_i}) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta_{t_i}\left[(\widetilde{S}_{t_{i+1}} - \widetilde{S}_0) - (\widetilde{S}_{t_{i+1}} - \widetilde{S}_0)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta_{t_i}\sigma\Big[\int_0^{t_{i+1}} \widetilde{S}_u \,\mathrm{d}X_u - \int_0^{t_i} \widetilde{S}_u \,\mathrm{d}X_u\Big].
\end{aligned}$$

Het interval $[0, T]$ wordt opgedeeld door $0 = t_0 < t_1 < ... < t_i < t_{i+1} < ... < t_n = T$. Definieer de functies $f_i : [0, t_{i+1}] \to \mathbb{R}$ als

$$f_i(t) := \begin{cases} \widetilde{S}_{t_k} & \text{als } t \in [t_k, t_{k+1}), \\ \widetilde{S}_{t_{i+1}} & \text{als } t = t_{i+1}. \end{cases}$$

Uit definitie 5.4.2 volgt dan

$$\begin{aligned}
\int_0^{t_{i+1}} \widetilde{S}_u \,\mathrm{d}X_u - \int_0^{t_i} \widetilde{S}_u \,\mathrm{d}X_u &= \lim_{\delta t\to 0} \sum_{j=0}^{i} f_i(t_j)[X(t_{j+1}) - X(t_j)] - \lim_{\delta t\to 0} \sum_{j=0}^{i-1} f_i(t_j)[X(t_{j+1}) - X(t_j)] \\
&= \lim_{\delta t\to 0} \Big(\sum_{j=0}^{i} f_i(t_j)[X(t_{j+1}) - X(t_j)] - \sum_{j=0}^{i-1} f_i(t_j)[X(t_{j+1}) - X(t_j)]\Big) \\
&= \lim_{\delta t\to 0} f_i(t_i)[X(t_{i+1}) - X(t_i)] \\
&= \lim_{\delta t\to 0} \widetilde{S}(t_i)[X(t_{i+1}) - X(t_i)].
\end{aligned}$$

Er geldt dus

$$\begin{aligned}
\int_0^T \Delta_t \,\mathrm{d}\widetilde{S}_t &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta_{t_i}\sigma\Big[\int_0^{t_{i+1}} \widetilde{S}_u \,\mathrm{d}X_u - \int_0^{t_i} \widetilde{S}_u \,\mathrm{d}X_u\Big] \\
&= \lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{i=0}^{n-1} \Delta_{t_i}\sigma \lim_{\delta t\to 0} \widetilde{S}(t_i)[X(t_{i+1}) - X(t_i)]\Big)
\end{aligned}$$

Er staan twee limiet-tekens in de laatste uitdrukken. Het laatste limiet-teken zorgt ervoor dat het verschil tussen $t_{i+1} - t_i$ de nul nadert. Herinner je dat $t_i = \frac{i}{n}$ en $t_{i+1} = \frac{i+1}{n}T$ geldt. Er geldt dus

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(t_{i+1} - t_i) &= \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{i+1}{n} - \frac{i}{n}\Big)T \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}T \\ &= 0.\end{aligned}$$

Dit betekent dat het eerste limiet-teken, $\lim_{n\to\infty}$, de informatie van het tweede limiet-teken, $\lim_{\delta t\to 0}$, als het ware al impliceert. Het tweede limiet-teken is dus onnodig is. Tenslotte geldt dus

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{i=0}^{n-1}\Delta_{t_i}\sigma\lim_{\delta t\to 0}\widetilde{S}(t_i)[X(t_{i+1}) - X(t_i)]\Big) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\Delta_{t_i}\sigma\widetilde{S}(t_i)[X(t_{i+1}) - X(t_i)] \\ &= \int_0^T \Delta_t\sigma\widetilde{S}_t\,\mathrm{d}X_t.\end{aligned}$$

■

Tenslotte sluiten we deze paragraaf af met het langverwachte bewijs voor de waarde van een Europese calloptie.

Bewijs van stelling 7.1.

Uit lemma 7.2 volgt de volgende vergelijking betreffende de prijs van een Europese calloptie:

$$V_0 = e^{-rT}\,\mathrm{E}^{\mathrm{Q}}[V_T].$$

De waarde V_T van een calloptie gedurende zijn expiratietijd T is gelijk aan zijn uitbetaling $(S_T - K)^+$. Er geldt dus

$$\begin{aligned}V_0 &= e^{-rT}\,\mathrm{E}^{\mathrm{Q}}[(S_T - K)^+] \\ &= e^{-rT}\,\mathrm{E}^{\mathrm{Q}}[(e^{rT}\widetilde{S}_T - K)^+].\end{aligned}$$

Uit vergelijking 8 geldt vervolgens

$$\begin{aligned}V_0 &= e^{-rT}\,\mathrm{E}^{\mathrm{Q}}[(e^{rT}S_0e^{\sigma X_T - \frac{1}{2}\sigma^2T} - K)^+] \\ &= e^{-rT}\,\mathrm{E}^{\mathrm{Q}}[(S_0e^{\sigma X_T + (r-\frac{1}{2}\sigma^2)T} - K)^+].\end{aligned}$$

Herinner je dat uit Girsanov's stelling volgt dat $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ een Brownse beweging is ten opzichte van de kansmaat Q. Uit eigenschap iii) van definitie 4.1 volgt dan dat $X_T = X_T - X_0\ \mathcal{N}(0,T)$ verdeeld is ten opzichte van kansmaat Q. Zij Z een standaardnormaal verdeelde stochast. Dan zijn X_T en $\sqrt{T}Z$ identiek verdeeld. Er geldt nu dus

$$V_0 = e^{-rT}\,\mathrm{E}^{\mathrm{Q}}[(S_0e^{\sigma\sqrt{T}Z + (r-\frac{1}{2}\sigma^2)T} - K)^+].$$

Definieer $g(Z) := (S_0e^{\sigma\sqrt{T}Z + (r-\frac{1}{2}\sigma^2)T} - K)^+$. De stochast Z is $\mathcal{N}(0,1)$ verdeeld en is dus continu. Ook geldt $|g(Z)| = g(Z)$. Uit de wet van de onbewuste statisticus volgt dan

$$V_0 = e^{-rT}\int_{-\infty}^{\infty}(S_0e^{\sigma\sqrt{T}z + (r-\frac{1}{2}\sigma^2)T} - K)^+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}\,\mathrm{d}z$$

mits $\mathrm{E}^{\mathrm{Q}}[g(Z)] < \infty$, i.e. als de oneigenlijke integraal in de bovenstaande vergelijking convergeert. Er geldt $g(z) < 0$ op het domein $\{z \in \mathbb{R} | S_0 e^{\sigma\sqrt{T}z + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T} < K\}$. We kunnen het domein van integratie dus beperken tot $\{z \in \mathbb{R} | S_0 e^{\sigma\sqrt{T}z + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T} \geq K\}$. Na wat algebra volgt dat we alleen hoeven te integreren voor alle z zodat

$$z \geq z_0 := \frac{\log(\frac{K}{S_0}) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Dus geldt

$$V_0 = e^{-rT} \int_{z_0}^{\infty} (S_0 e^{\sigma\sqrt{T}z + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T} - K) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \, \mathrm{d}z.$$

Definieer

$$d_1 := \frac{\log(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma T} \text{ en } d_2 := \frac{\log(\frac{S_0}{K}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma T}$$

en zij $x = -z$. Dan geldt $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z} = -1$. Merk op dat $d_2 = -z_0$. Uit de substitutieregel voor integratie volgt dan

$$\begin{aligned}
V_0 &= e^{-rT} \int_{-\infty}^{d_2} (S_0 e^{-\sigma\sqrt{T}x - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T} - K) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \, \mathrm{d}x \\
&= e^{-rT} \int_{-\infty}^{d_2} S_0 e^{-\sigma\sqrt{T}x - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \, \mathrm{d}x - K e^{-rT} \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \, \mathrm{d}x \\
&= S_0 \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x^2 + \sigma^2 T + 2\sigma\sqrt{T}x)} \, \mathrm{d}x - K e^{-rT} \Phi(d_2).
\end{aligned}$$

Waarin Φ de de standaard normale cumulatieve verdelingsfunctie is. Merk nu op dat $x^2 + \sigma^2 T + 2\sigma\sqrt{T}x = (x + \sigma\sqrt{T})^2$. Er geldt dus

$$\int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x^2 + \sigma^2 T + 2\sigma\sqrt{T}x)} \, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x + \sigma\sqrt{T})^2} \, \mathrm{d}x.$$

Zij nu $y = x - \sigma\sqrt{T}$. Dan geldt $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1$ en als $x = d_2$, dan geldt $y = d_2 + \sigma\sqrt{T} = d_1$. Uit de substitutieregel voor integratie volgt dus

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x + \sigma\sqrt{T})^2} \, \mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{d_2 + \sigma\sqrt{T}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} \, \mathrm{d}y \\
&= \Phi(d_2 + \sigma\sqrt{T}) \\
&= \Phi(d_1)
\end{aligned}$$

wat ons het gewenste resultaat

$$V_0 = S_0 \Phi(d_1) - K e^{-rT} \Phi(d_2)$$

oplevert.

■

7.2 Europese putopties

In deze paragraaf zullen we de waarde van een Europese putoptie afleiden. We gebruiken hiervoor een handig resultaat genaamd de *put-call pariteit.* Om de put-call pariteit te bewijzen hebben we eerst het volgende lemma nodig.

Lemma 7.3. Gegeven is markt waarop een portefeuille $\{\Pi_t\}_{t\in[0,T]}$ bestaat zodanig dat $\Pi_0 < 0$ en $\Pi_T \geq 0$ met kans 1. Dan bestaat er een arbitrage op de markt.

Bewijs. Zij $d := 0 - \Pi_0$ en definieer de portefeuille $\{\Pi'_t\}_{t\in[0,T]}$ zodanig dat $\Pi'_t := \Pi_t + d$. Dan geldt $\Pi'_0 = \Pi_0 + d = 0$. Merk op dat $\Pi'_t > \Pi_t$ voor alle $t \in [0,T]$. Omdat $\mathrm{P}(\Pi_T \geq 0) = 1$ geldt dus ook $\mathrm{P}(\Pi'_T \geq 0) = 1$. Vervolgens geldt

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\Pi_T \geq 0) &= \mathrm{P}(\Pi'_T - d \geq 0)\\ &= \mathrm{P}(\Pi'_T \geq d)\\ &= 1.\end{aligned}$$

Omdat $d > 0$, geldt tenslotte dus $\mathrm{P}(\Pi'_T > 0) = 1$ en dus bestaat er een arbitrage op de markt.

■

De volgende put-call pariteit geeft een handig verband tussen de prijs van een calloptie en de prijs van een putoptie. We zullen dit verband gebruiken voor het berekenen van de prijs van een Europese putoptie.

Stelling 7.4 (Put-call pariteit). Zij $r \geq 0$ het risicovrije rentetarief. Zij $\{S_t\}_{t\geq 0}$ de waarde van een onderliggend actief. Zij de stochastische processen $\{V_t\}_{t\in[0,T]}$ en $\{V_t^P\}_{t\in[0,T]}$ respectievelijk de prijzen van een Europese call- en putoptie op dit onderliggende actief met expiratietijd T en uitoefenprijs K. Dan geldt

$$V_0 - V_0^P = S_0 - Ke^{-rT}.$$

Bewijs. Definieer de portefeuilles $\Pi_t^1 := V_t + Ke^{-r(T-t)}$ en $\Pi_t^2 := V_t^P + S_t$. Er geldt $\Pi_T^1 = (S_T - K)^+ + K = \max\{S_T - K, 0\} + K = \max\{S_T, K\}$ en $\Pi_T^2 = (S_T - K)^+ + S_T = \max\{K - S_T, 0\} + S_T = \max\{K, S_T\} = \Pi_T^1$.

Ik beweer nu dat hieruit volgt dat $\Pi_0^1 = \Pi_0^2$ moet gelden. Stel namelijk van niet, stel zonder verlies van algemeenheid dat $\Pi_0^1 > \Pi_0^2$. Koop op tijdstip 0 de portefeuille $\Pi_0^3 = \Pi_0^2 - \Pi_0^1 < 0$. Merk op dat geldt $\Pi_T^3 = 0$. Als je het portefeuille weer verkoopt op de expiratietijd T, dan levert dat je $\Pi_T^3 - \Pi_0^3 > 0$ op. Dan heb je dus winst met kans 1. Uit lemma 7.3 volgt dan dat er sprake is van een arbitrage. Dit spreekt tegen met de aanname dat de markt arbitragevrij is. Er geldt dus

$$\begin{aligned}\Pi_0^1 &= \Pi_0^2\\ &= V_0 + Ke^{-rT}\\ &= V_0^P + S_0\end{aligned}$$

en dus

$$V_0 - V_0^P = S_0 - Ke^{-rT}.$$

■

Met behulp van de put-call pariteit berekenen we tenslotte de prijs van een Europese putoptie.

Stelling 7.5 (De waarde van een Europese putoptie). De prijs V_0^P van een Europese putoptie met expiratietijd T en uitvoerprijs K wordt gegeven door

$$V_0^P = Ke^{-rT}\Phi(-d_2) - S_0\Phi(-d_1).$$

Hierin zijn d_1 en d_2 als in stelling 7.1 en is Φ de standaard normale cumulatieve verdelingsfunctie.

Bewijs. Zij $f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{x^2}{2}}$ de standaard normale kansdichtheid. Uit de put-call pariteit en stelling 7.1 volgt

$$\begin{aligned}
P_0 &= C_0 + Ke^{-rT} - S_0 \\
&= Ke^{-rT}(1 - \Phi(d_2)) - S_0(1 - \Phi(d_1)) \\
&= Ke^{-rT}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{d_2} f(x)\,\mathrm{d}x\Big) - S_0\Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{d_1} f(x)\,\mathrm{d}x\Big) \\
&= Ke^{-rT}\int_{d_2}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x - S_0\int_{d_1}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Merk op dat $f(x)$ een even functie is. Daarom geldt tenslotte

$$\begin{aligned}
Ke^{-rT}\int_{d_2}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x - S_0\int_{d_1}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x &= Ke^{-rT}\int_{-\infty}^{-d_2} f(x)\,\mathrm{d}x - S_0\int_{-\infty}^{-d_1} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= Ke^{-rT}\Phi(-d_2) - S_0\Phi(-d_1).
\end{aligned}$$

■

8 Aziatische opties

In dit hoofdstuk behandelen we de werking van *Aziatische opties*. De prijs van Aziatische opties leveren helaas meestal geen gesloten oplossing op ([2], p. 320). Er is echter een bepaald soort Aziatische optie waarvan de waarde wel een oplossing in gesloten vorm heeft. Dit is de Aziatische optie gebaseerd rond het zogenaamde *meetkundig gemiddelde* genomen over tijdstippen die op gelijke afstand van elkaar liggen.

In paragraaf 8.1 zullen we de werking van een Aziatische optie en het concept meetkundig gemiddelde behandelen. In paragraaf 8.2 bepalen we de prijs een Aziatische calloptie gebaseerd rond een *meetkundig gemiddelde* genomen over tijdstippen die op gelijke afstand van elkaar liggen. Tenslotte bepalen we in paragraaf 8.3 de prijs van een Aziatische putoptie gebaseerd rondom hetzelfde meetkundig gemiddelde.

8.1 Aziatische opties en het meetkundig gemiddelde

In dit hoofdstuk behandelen we de waardering van zogenaamde *Aziatische opties*. Beschouw een Aziatische optie op een onderliggend actief met waarde $\{S_t\}_{t\geq 0}$, expiratietijd T en uitoefenprijs K. Bij een dergelijke optie is de uitbetalingsfunctie van de optie gebaseerd rondom een bepaald gemiddelde van de waarde van het onderliggende actief genomen over de looptijd $[0,T]$, in tegenstelling tot de waarde van het onderliggende actief op een bepaalde tijd t. Zo is de uitbetalingsfunctie van een Aziatische calloptie gedefinieerd als $C := (A-K)^+$ en de uitbetalingsfunctie van een Aziatische putoptie $P := (K-A)^+$. Hierin is A een bepaald gemiddelde van de waarde $\{S_t\}_{t\geq 0}$ genomen over de looptijd $[0,T]$.

Er zijn echter verschillende manieren hoe we het gemiddelde van $\{S_t\}_{t\geq 0}$ over de looptijd $[0,T]$ kunnen nemen. Elk soort gemiddelde leidt tot een ander soort Aziatische optie met een andere prijs. De meest bekende manier om een gemiddelde te nemen is het zogenaamde *rekenkundig gemiddelde*. We zouden een rekenkundig gemiddelde van $\{S_t\}_{t\geq 0}$ genomen over de looptijd $[0,T]$ als volgt kunnen nemen. Kies een aantal representatieve tijdstippen $0 \leq t_1 < ... < t_{n-1} < t_n = T$ uit de looptijd. Dan is het rekenkundig gemiddelde van $\{S_t\}_{t\geq 0}$ gedefinieerd als

$$A_r := \frac{S_{t_1} + S_{t_2} + ... + S_{t_n}}{n}.$$

De prijs van een Aziatische optie gebaseerd rondom een rekenkundig gemiddelde levert echter geen gesloten oplossing op ([2], p. 320). We zullen dit soort Aziatische opties daarom niet in dit document behandelen. Er bestaat echter wel een ander soort gemiddelde waarbij de prijs van Aziatische opties gebaseerd op dit type gemiddelde wel een gesloten oplossing oplevert. Dit gemiddelde heet het zogenaamde *geometrisch* of *meetkundig gemiddelde*.

Definitie 8.1 (Meetkundig gemiddelde). Zij $S_1, ..., S_n > 0$ een aantal reële getallen. Het *meetkundig gemiddelde* van deze getallen is dan gedefinieerd als

$$A := (S_1 \cdot S_2 \cdot ... \cdot S_n)^{\frac{1}{n}}.$$

Voorbeeld 8.1. Beschouw de getallen 3, 9 en 27. Hun (rekenkundig) gemiddelde is $A_r = \frac{3+9+27}{3} = \frac{39}{3} = 13$.

Merk op dat $3 = 3^1$, $9 = 3^2$ en $27 = 3^3$, oftewel dat alle getallen machten van 3 zijn. Stel dat we niet geïnterreseerd zijn in hun normale rekenkundig gemiddelde, maar welk getal we verkrijgen als we 3 tot het rekenkundig gemiddelde van de exponenten 1, 2 en 3 heffen. Het gemiddelde van de exponenten is $\frac{1+2+3}{3} = 2$ en dus is dit getal $3^2 = 9$.

Merk nu op dat het meetkundig gemiddelde van de getallen gelijk is aan $A = (3\cdot 9\cdot 27)^{\frac{1}{3}} = (3\cdot 3^2\cdot 3^3)^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1+2+3}{3}} = 9$. Meer in het algemeen geldt $\log_k A = \log_k \left((S_1 \cdot S_2 \cdot ... \cdot S_n)^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{\log_k S_1 + \log_k S_2 + ... + \log_k S_n}{n}$ voor elk logaritme met basis $k > 0$. Het meetkundig gemiddelde van een rij $S_1, ..., S_n > 0$ moet dus opgevat worden als het getal dat verkregen wordt als je k heft tot het rekenkundig gemiddelde van de exponenten $x_1, ...x_n$ zodanig dat $k^{x_1} = S_1, k^{x_2} = S_2, ..., k^{x_n} = S_n$.

Voorbeeld 8.2. Beschouw een onderliggend actief met waarde $\{S_t\}_{t\geq 0}$. We kunnen als volgt een meetkundig gemiddelde van $\{S_t\}_{t\geq 0}$ over een looptijd $[0,T]$ nemen. Kies een aantal representatieve tijdstippen $0 \leq t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n \leq T$. Dan is het meetkundig gemiddelde van $\{S_t\}_{t\geq 0}$ over de looptijd $[0,T]$

$$A = (S_{t_1} \cdot S_{t_2} \cdot \ldots \cdot S_{t_n})^{\frac{1}{n}}.$$

8.2 Aziatische callopties

Zij $\delta t := \frac{T}{n}$. In dit paragraaf bepalen we de prijs van een Aziatische calloptie met meetkundig gemiddelde genomen over de tijdstippen $t_1 = \delta t < t_2 = 2\delta t < \ldots < (n-1)\delta t < n\delta t = T$. De uitbetalingsfunctie van een Aziatische calloptie met gemiddelde A is $(A-K)^+$. Het idee achter het bewijs is om aan te tonen dat A een bepaalde geometrische Brownse beweging volgt en de Aziatische calloptie dus dezelfde prijs heeft als een Europese calloptie waarin het onderliggend actief deze geometrische Brownse beweging volgt. Het bewijs is een uitgebreidere versie van die uit ([1], p. 308-309).

Stelling 8.1 (De waarde van een Aziatische calloptie). Zij $\delta t := \frac{T}{n}$. Beschouw een Aziatische calloptie op een onderliggend actief met waarde $S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}$ met expiratietijd T, uitoefenprijs K en meetkundig gemiddelde A genomen over de tijdstippen $t_1 = \delta t < t_2 = 2\delta t < \ldots < (n-1)\delta t < n\delta t = T$. Dan wordt de prijs V_0 van deze Aziatische calloptie gegeven door

$$V_0 = S_0 e^{(\overline{\mu} - r)T}\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2).$$

Hierin geldt

$$\begin{aligned}
\overline{\sigma}^2 &:= \frac{1}{6}\sigma^2(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n}),\\
\overline{\mu} &:= \frac{1}{2}\overline{\sigma}^2 + \frac{1}{2}(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(1+\frac{1}{n}),\\
d_1 &:= \frac{\log\frac{S_0}{K} + (\overline{\mu} + \frac{1}{2}\overline{\sigma}^2)T}{\overline{\sigma}\sqrt{T}},\\
d_2 &:= \frac{\log\frac{S_0}{K} + (\overline{\mu} - \frac{1}{2}\overline{\sigma}^2)T}{\overline{\sigma}\sqrt{T}}
\end{aligned}$$

en is Φ de standaard normale cumulatieve verdelingsfunctie.

Bewijs. Zij $\mu = r$. Herinner je uit hoofdstuk 7 dat er voor een geometrische Brownse beweging $S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}$ een stochastisch proces $X_t = W_t + \frac{\mu - r}{\sigma}$ en kansmaat Q bestaan zodat $\{X_t\}_{t\geq 0}$ een geometrische Brownse beweging ten opzichte van Q is en $S_t = S_0 e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma X_t}$ geldt. Het is dus gerechtvaardigd om $\mu = r$ te kiezen.

Definieer $\delta t := \frac{T}{n}$ en deel het interval $[0,T]$ op als $t_1 = \delta t < t_2 = 2\delta t < \ldots < (n-1)\delta t < n\delta t = T$. Dan is het meetkundig gemiddelde van $\{S_t\}_{t\geq 0}$ over $[0,T]$ gelijk aan

$$\begin{aligned}
A &= \exp\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log S_{i\delta t}\Big)\\
&= \exp\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big[\log\big(S_0 e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)i\delta t + \sigma W_{i\delta t}}\big)\Big]\Big)\\
&= \exp\Big(\log S_0 \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big[(r - \frac{1}{2}\sigma^2)i\delta t + \sigma W_{i\delta t}\Big]\Big)\\
&= S_0 \exp\Big(\frac{1}{n}\Big[(r - \frac{1}{2}\sigma^2)\sum_{i=1}^{n} i\delta t + \sigma \sum_{i=1}^{n} W_{i\delta t}\Big]\Big).
\end{aligned}$$

Voor elke $i \in \{1, ..., n\}$ geldt $W_{i\delta t} \sim \mathcal{N}(0, i\delta t)$. Uit het herhaaldelijk toepassen van stelling C.9 volgt dan dat de som $\sum_{i=1}^{n} W_{i\delta t} \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\delta t)$ verdeelt is. Hierbij maken we gebruik van de identiteit

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Omdat $\delta t = \frac{T}{n}$ geldt, geldt $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\delta t = \frac{1}{6}(n+1)(2n+1)T = (n\overline{\sigma})^2$. Definieer nu

$$X := \frac{1}{n}\Big[(r - \frac{1}{2}\sigma^2)\sum_{i=1}^{n} i\delta t + \sigma \sum_{i=1}^{n} W_{i\delta t}\Big].$$

Uit stelling C.9 volgt

$$\sum_{i=1}^{n} W_{i\delta t} \sim \mathcal{N}\big(0, (n\overline{\sigma})^2\big) \Rightarrow \sigma \sum_{i=1}^{n} W_{i\delta t} \sim \mathcal{N}\big(0, (n\sigma\overline{\sigma})^2\big).$$

Er geldt

$$\begin{aligned}(r - \frac{1}{2}\sigma^2)\sum_{i=1}^{n} i\delta t &= (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\frac{T}{n}\sum_{i=1}^{n} i \\ &= (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\frac{T}{n}\frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2}(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(n+1)T\end{aligned}$$

en dus volgt uit stelling C.9

$$\begin{aligned}\sigma \sum_{i=1}^{n} W_{i\delta t} \sim \mathcal{N}\big(0, (n\sigma\overline{\sigma})^2\big) &\Rightarrow (r - \tfrac{1}{2}\sigma^2)\sum_{i=1}^{n} i\delta t + \sigma \sum_{i=1}^{n} W_{i\delta t} \sim \mathcal{N}\big(\tfrac{1}{2}(r - \tfrac{1}{2}\sigma^2)(n+1)T, (n\sigma\overline{\sigma})^2\big) \\ &\Rightarrow X \sim \mathcal{N}\big(\tfrac{1}{2}(r - \tfrac{1}{2}\sigma^2)(1 + \tfrac{1}{n})T, (\sigma\overline{\sigma})^2\big).\end{aligned}$$

Merk op dat $\frac{1}{2}(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(1 + \frac{1}{n})T = (\overline{\mu} - \frac{1}{2}\overline{\sigma}^2)T$ en $(\sigma\overline{\sigma})^2 = \overline{\sigma}^2 T$ geldt. Er geldt dus

$$X \sim \mathcal{N}\big((\overline{\mu} - \tfrac{1}{2}\overline{\sigma}^2)T, \overline{\sigma}^2 T\big).$$

Definieer nu

$$Y := X - (\overline{\mu} - r)T.$$

Er geldt dan $A = S_0 e^{(\overline{\mu}-r)T} e^Y$. Merk op dat $Y \sim \mathcal{N}\big((r - \frac{1}{2}\overline{\sigma}^2)T, \overline{\sigma}^2 T\big)$ verdeeld is. Hieruit volgt dat de stochast A hetzelfde verdeeld is als een geometrische Brownse beweging met parameters r en $\overline{\sigma}$ en respectievelijk en beginwaarde $S_0 e^{(\overline{\mu}-r)T}$. Omdat de uitbetaling van de optie $(A - K)^+$ is, is de waarde van de Aziatische calloptie dus hetzelfde als die van een Europese calloptie waarin het onderliggend actief deze geometrische Brownse beweging volgt. De prijs van de Aziatische calloptie is dus

$$V_0 = S_0 e^{(\overline{\mu}-r)T}\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2).$$

Hierin geldt

$$\begin{aligned}d_1 &= \frac{\log(\frac{S_0 e^{(\overline{\mu}-r)T}}{K}) + (r + \frac{1}{2}\overline{\sigma}^2)T}{\overline{\sigma}\sqrt{T}} \\ &= \frac{\log\frac{S_0}{K} + (\overline{\mu} - r)T + (r + \frac{1}{2}\overline{\sigma}^2)T}{\overline{\sigma}\sqrt{T}} \\ &= \frac{\log\frac{S_0}{K} + (\overline{\mu} + \frac{1}{2}\overline{\sigma}^2)T}{\overline{\sigma}\sqrt{T}}\end{aligned}$$

en op vergelijkbare wijze geldt

$$d_2 = \frac{\log \frac{S_0}{K} + (\overline{\mu} - \frac{1}{2}\overline{\sigma}^2)T}{\overline{\sigma}\sqrt{T}}.$$

■

8.3 Aziatische putopties

We sluiten dit hoofdstuk af met een bepaling van de prijs van een Aziatische putoptie met hetzelfde meetkundig gemiddelde als in paragraaf 11.2. Het bewijs is bijna identiek aan het bewijs van stelling 8.1.

Stelling 8.2 (De waarde van een Aziatische putoptie). Zij $\delta t := \frac{T}{n}$. Beschouw een Aziatische putoptie op een onderliggend actief met waarde $S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}$ met expiratietijd T, uitoefenprijs K en meetkundig gemiddelde A genomen over de tijdstippen $t_1 = \delta t < t_2 = 2\delta t < \ldots < (n-1)\delta t < n\delta t = T$. Dan wordt de prijs V_0^P van deze Aziatische putoptie gegeven door

$$V_0^P = Ke^{-rT}\Phi(-d_2) - S_0 e^{(\overline{\mu} - r)T}\Phi(-d_1).$$

Hierin zijn $\overline{\sigma}^2$, $\overline{\mu}$, d_1 en d_2 als in stelling 8.1 en is Φ de standaard normale cumulatieve verdelingsfunctie.

Bewijs. Op dezelfde wijze als in het bewijs van stelling 8.1 kan aangetoond worden dat, omdat de uitbetaling van een Aziatische putoptie $(K - A)^+$ is, de Aziatische putoptie dezelfde waarde heeft als een Europese putoptie waarin het onderliggend actief een geometrische Brownse beweging volgt met parameters $\overline{\mu}$ en $\overline{\sigma}^2$ en beginwaarde $S_0 e^{(\overline{\mu} - r)T}$. De waarde van de Aziatische putoptie is dus

$$V_0^P = Ke^{-rT}\Phi(-d_2) - S_0 e^{(\overline{\mu} - r)T}\Phi(-d_1).$$

De afleiding van d_1 en d_2 kan je vinden in het bewijs van stelling 8.1.

■

Conclusie

In dit document hebben we de vragen ‘wat is de waarde van een Europese optie?’ en ‘wat is de waarde van een Aziatische optie?’ behandeld. Na een introductie over financiële termen behandelden we eerst de wiskundige theorie van *voorwaardelijke verwachtingswaarden*, *stochastische processen*, *martingalen* en *Brownse bewegingen.* Vervolgens hebben we deze theorie toegepast om een integratiemethode over Brownse bewegingen en martingalen te definiëren in het hoofdstuk *stochastische calculus.*

Hierna keerden we terug naar de financiële theorie en behandelde we de theorie achter *hedgen* uit. Dit bracht ons in staat om de waarde van Europese opties te bepalen. Na dit hoofdstuk behandelde we kort de waardering van Aziatische opties. De waarde van een Aziatische optie heeft meestal geen gesloten oplossing en dus hebben we alleen het specifieke geval van Aziatische opties met een meetkundig gemiddelde genomen over tijdstippen die op gelijke afstand van elkaar liggen behandeld. De waarde van dit soort Aziatische opties hebben wel oplossing in gesloten vorm.

De waardes van een Europese call- en putoptie met expiratietijd T en uitvoerprijs K op een onderliggend actief met waarde $S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}$ worden gegeven door

$$V_0 = S_0 \Phi(d_1) - K e^{-rT} \Phi(d_2) \text{ en}$$
$$V_0^P = K e^{-rT} \Phi(-d_2) - S_0 \Phi(-d_1)$$

respectievelijk. Hierin geldt

$$d_1 = \frac{\log(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma T} \text{ en } d_2 = \frac{\log(\frac{S_0}{K}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma T}$$

en is Φ de standaard normale cumulatieve verdelingsfunctie.

Zij $\delta t := \frac{T}{n}$. Beschouw een Aziatische call- en putoptie met expiratietijd T, uitoefenprijs K op een onderliggend actief met waarde $S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}$ en meetkundig gemiddelde A genomen over de tijdstippen $t_1 = \delta t < t_2 = 2\delta t < \ldots < (n-1)\delta t < n\delta t = T$. Dan worden de prijzen van deze Aziatische call- en putoptie gegeven door

$$V_0 = S_0 e^{(\overline{\mu} - r)T} \Phi(d_1') - K e^{-rT} \Phi(d_2') \text{ en}$$
$$V_0^P = K e^{-rT} \Phi(-d_2') - S_0 e^{(\overline{\mu} - r)T} \Phi(-d_1')$$

respectievelijk. Hierin geldt

$$\overline{\sigma}^2 := \frac{1}{6}\sigma^2(1 + \frac{1}{n})(2 + \frac{1}{n}),$$
$$\overline{\mu} := \frac{1}{2}\overline{\sigma}^2 + \frac{1}{2}(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(1 + \frac{1}{n}),$$
$$d_1' := \frac{\log \frac{S_0}{K} + (\overline{\mu} + \frac{1}{2}\overline{\sigma}^2)T}{\overline{\sigma}\sqrt{T}},$$
$$d_2' := \frac{\log \frac{S_0}{K} + (\overline{\mu} - \frac{1}{2}\overline{\sigma}^2)T}{\overline{\sigma}\sqrt{T}}$$

en is Φ de standaard normale cumulatieve verdelingsfunctie.

Appendices

A Maattheorie en elementaire kansrekening

Voordat we in de theorie van optiewaardering duiken hebben we wiskundig gereedschap nodig voor het omschrijven van deze theorie. In deze appendices zullen we uitleg geven over deze wiskundige gereedschappen. De theorie van optiewaardering leunt sterk op technieken uit de kansrekening en de notie van σ-algebra's. In dit hoofdstuk geven we de lezer de basisgereedschappen uit deze twee gebieden die hij later nodig zal hebben voor de analyse van optiewaardering. In appendix C zullen we de theorie beschreven in dit hoofdstuk uitgebreid gebruiken voor de beschrijving van termen zoals *verwachtingswaarde*, *variantie*, *kansverdeling*, de *normale verdeling* en *momentgenererende functies*.

Aan de hand van elementaire maattheorie zullen we de notie van σ-algebra's omschrijven en beschrijven hoe de kansrekening voortvloeit uit begrippen van maattheorie. Op het gebied van kansrekening beschrijven we in dit hoofdstuk de begrippen kansmaat, stochast en (on)afhankelijkheid.

Veel leerboeken over optiewaardering, waaronder [1] en [2], geven ook uitleg over meer gevorderde begrippen uit de maattheorie zoals algemene maten of Borelverzamelingen. Veel mensen met kennis van kansrekening hebben echter geen kennis van maattheorie. In een poging om dit document ook voor deze mensen leesbaar te houden zal ik alleen uitleg geven de begrippen uit de maattheorie die we uiteindelijk nodig hebben voor onze analyse van optiewaardering. Ook hebben we voor onze analyse niet de algemene definitie van een maat nodig, uitsluitend die van een kansmaat. Ik zal me dus beperken tot de definitie van kansmaat. Verder zal ik de theorie van de kansrekening beperken tot uitsluitend de begrippen die we nodig hebben voor onze analyse van optiewaardering.

De gegeven definities in dit hoofdstuk zijn sterk gebaseerd op hoe ze beschreven zijn in [1]. Sommige definities zal ik echter anders geven dan hoe ze in [1] gegeven worden. Dit zal ik doen om meer gevorderde begrippen uit maattheorie (zoals Borelverzamelingen) te ontwijken of omdat de definitie op die wijze naar mijn mening meer tot de verbeelding van de lezer spreekt en dus beter te begrijpen zal zijn.

A.1 Elementaire maattheorie

Stel, je werpt een zuivere zeszijdige dobbelsteen. De mogelijke uitkomsten van de worp zijn $1, 2, 3, 4, 5$ en 6. Op deze manier definiëren we de *uitkomstenruimte* van dit kansexperiment als $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Over het algemeen is de uitkomstenruimte van een kansexperiment gedefinieerd als de verzameling van alle mogelijke uitkomsten van het experiment. De uitkomstenruimte wordt meestal aangeduid met de Griekse letter Ω. Een uitkomstenruimte is niet noodzakelijk een verzameling van getallen. Als je bijvoorbeeld een euro werpt zijn de mogelijke uitkomsten kop en munt. De uitkomstenruimte is dan dus $\Omega = \{\text{kop}, \text{munt}\}$.

Laten we terugkeren naar de dobbelsteenworp en laten we de situatie iets interessanter maken. Stel, je zit met een vriend in een bar. Je hebt vorige maand zonder oogbescherming naar een zonsverduistering gekeken en helaas ben je daardoor permanent blind geworden. Je vriend gebruikte gelukkig wel oogbescherming. Terug in de bar werp je een dobbelsteen en vraag je aan je vriend wat de uitkomst ω van de worp is. Helaas is je vriend een beetje tegendraads en wil hij je niet de exacte uitkomst van de worp vertellen. Het enige dat hij je wil vertellen is of de uitkomst van de worp even of oneven is. Je kan helaas dus niet de exacte uitkomst van de worp weten. We zeggen dat de exacte uitkomst van de worp niet *meetbaar* is. Wel kunnen we nog 'meten' of de worp even of oneven is, dat wil zeggen, of $\omega \in \{2, 4, 6\}$ of $\omega \in \{1, 3, 5\}$ geldt. Met dit in gedachten definiëren we het begrip *σ-algebra*.

Definitie A.1 (σ-Algebra). Een familie $\mathcal{F}$ van deelverzamelingen van een niet-lege verzameling Ω heet een *σ-algebra* indien hij aan de volgende voorwaarden voldoet:

i) De familie $\mathcal{F}$ bevat de gehele verzameling Ω.
ii) Als de deelverzameling $A \subset \Omega$ bevat is in de familie $\mathcal{F}$, dan is ook zijn complement $\Omega \setminus A$ bevat in de familie $\mathcal{F}$.
iii) Zij $A_1, A_2, \ldots$ een rij deelverzamelingen van Ω in de familie $\mathcal{F}$. Dan is hun vereniging $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ ook bevat in de familie $\mathcal{F}$.

Een (deel)verzameling in de familie $\mathcal{F}$ heet een ($\mathcal{F}$-)*meetbare* (deel)verzameling. Het paar $(\Omega, \mathcal{F})$ heet een *meetbare ruimte*.

Merk op dat deze definitie ook werkt voor abstracte verzamelingen Ω die niet noodzakelijk een betekenis hebben. In dit document nemen we echter aan dat een σ-algebra altijd gedefinieerd is op de uitkomstenruimte van een bepaald kansexperiment. Merk ook op dat uit de combinatie van eigenschappen i) en ii) volgt dat elke σ-algebra de lege verzameling $\emptyset$ bevat.

Voorbeeld A.1. Voor elke verzameling Ω is de meest simpele σ-algebra $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$.

Voorbeeld A.2. In het eerdere voorbeeld van de blinde mans dobbelsteenworp is de σ-algebra

$$\mathcal{G} := \{\emptyset, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \Omega\}.$$

Indien we de dobbelsteen wel kunnen zien is de σ-algebra de machtsverzameling $\mathcal{F} := \mathcal{P}(\Omega)$. In het algemeen is de machtenverzameling van elke verzameling een σ-algebra. Merk op dat de σ-algebra $\mathcal{G}$ een deelverzameling is van de σ-algebra $\mathcal{F}$. Met dit in gedachten definiëren we het begrip *deel-σ-algebra.*

Definitie A.2 (Deel-σ-algebra). Zij $\mathcal{F}$ een σ-algebra. Een *deel-σ-algebra* van de σ-algebra $\mathcal{F}$ is een deelverzameling $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ zodanig dat de deelverzameling $\mathcal{G}$ ook een σ-algebra is.

Merk op dat de σ-algebra $\mathcal{G}$ uit voorbeeld A.2 de kleinste σ-algebra is die de verzamelingen $\{1, 3, 5\}$ en $\{2, 4, 6\}$ bevat. We kunnen zeggen dat de σ-algebra $\mathcal{G}$ als het ware gegenereerd is door de verzamelingen $\{1, 3, 5\}$ en $\{2, 4, 6\}$. Met dit in gedachten schrijf ik de volgende definitie.

Definitie A.3. Zij Ω een uitkomstenruimte en de gebeurtenissen $A_1, ..., A_n$ deelverzamelingen van Ω. Zij V de verzameling van alle σ-algebra's die de deelverzamelingen $A_1, ..., A_n$ bevatten. We definiëren de *σ-algebra gegenereerd door de gebeurtenissen* $A_1, ..., A_n$ als

$$\sigma(A_1, ..., A_n) := \bigcap_{F \in V} F.$$

Een σ-algebra gegenereerd door gebeurtenissen is zelf ook daadwerkelijk een σ-algebra. Het bewijs hiervan is echter zeer vergelijkbaar met het bewijs van de wat lastigere stelling A.2 (zie verderop). Ik zal het bewijs hiervan dus ter oefening aan de lezer overlaten. Als de dobbelsteen in het bovenstaande voorbeeld zuiver is, is de kans op elke mogelijke uitkomst $\omega \in \Omega$ gelijk aan $\frac{1}{6}$. Indien we alleen kunnen meten of de uitkomst even of oneven is, is de kans op een even uitkomst ($\omega \in \{2, 4, 6\}$) gelijk aan $\frac{1}{2}$. De kans op een oneven uitkomst ($\omega \in \{1, 3, 5\}$) is ook gelijk aan $\frac{1}{2}$. Aan de hand hiervan definiëren we het begrip kansmaat.

Definitie A.4 (Kansmaat en kansruimte). Zij $(\Omega, \mathcal{F})$ een meetbare ruimte. Een functie $\mathrm{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ heet een *kansmaat* indien hij voldoet aan de volgende eigenschappen:

i) Er geldt $\mathrm{P}(\Omega) = 1$.

ii) Zij $A_1, A_2, ...$ een rij paarsgewijs disjuncte elementen van de σ-algebra $\mathcal{F}$. Dan geldt $\mathrm{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \Sigma_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n)$.

De drieling $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ heet een *kansruimte.* De kansmaat $\mathrm{P}(A)$ van een gebeurtenis $A \in \mathcal{F}$ wordt soms ook wel kortweg de *kans* op gebeurtenis A genoemd.

Opmerking. Uit de bovenstaande definitie volgt dat de waarde van $\mathrm{P}(\emptyset)$ gelijk is aan 0. De uitkomstenverzameling en lege verzameling zijn disjunct, i.e. $\Omega \cup \emptyset = \Omega$. Uit eigenschap i) van definitie A.4 volgt dus $\mathrm{P}(\Omega \cup \emptyset) = \mathrm{P}(\Omega) = 1$. Uit eigenschap ii) van definitie A.4 geldt dan $\mathrm{P}(\Omega \cup \emptyset) = \mathrm{P}(\Omega) + \mathrm{P}(\emptyset) = 1 = \mathrm{P}(\Omega)$ en dus $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$.

Stelling A.1. Zij $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ en $A \in \mathcal{F}$. Dan geldt

$$\mathrm{P}(\Omega \setminus A) = 1 - \mathrm{P}(A).$$

Bewijs. Uit eigenschap i) van definitie A.4 volgt $\mathrm{P}(\Omega) = 1$. Er geldt $\Omega = (\Omega \setminus A) \cup A$. Omdat $\Omega \setminus A$ en A disjunct zijn, volgt uit eigenschap ii) van definitie A.4

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\Omega) &= 1 \\ &= \mathrm{P}\Big((\Omega \setminus A) \cup A\Big) \\ &= \mathrm{P}(\Omega \setminus A) + \mathrm{P}(A)\end{aligned}$$

en dus $\mathrm{P}(\Omega \setminus A) = 1 - \mathrm{P}(A)$.

■

Definitie A.5 (Equivalente Kansmaten). Zij P en Q twee kansmaten op een meetbare ruimte $(\Omega, \mathcal{F})$. We noemen de kansmaten P en Q *equivalent* als voor elke deelverzameling $A \in \mathcal{F}$ de vergelijking $\mathrm{P}(A) = 0$ geldt dan en slechts dan wanneer de vergelijking $\mathrm{Q}(A) = 0$ geldt.

A.2 Stochasten

In definitie A.1 hebben we het begrip meetbare deelverzameling gedefinieerd. In deze alinea zal ik het gebruik van het begrip *meetbare afbeelding* motiveren. Keer terug naar het voorbeeld van de blinde mans dobbelsteenworp. Definieer de afbeelding $Y : \Omega \to \Omega$ als $Y(\omega) = \omega$. Beschouw de σ-algebra's $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \{1,3,5\}, \{2,4,6\}, \Omega\}$ en $\mathcal{F}_2 = \mathcal{P}(\Omega)$: de machtsverzameling van de uitkomstenruimte $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Merk op dat de verzamelingen $\{1\}$, $\{3\}$ en $\{5\}$ niet in $\mathcal{F}_1$ zitten. De uitkomsten 1, 3 en 5 zitten alle drie in $\{1,3,5\} \in \mathcal{F}_1$. Intuïtief gezien kan dit opgevat worden dat de σ-algebra $\mathcal{F}_1$ geen onderscheid maakt tussen $Y = 1$, $Y = 3$ en $Y = 5$. We kunnen zeggen dat de afbeelding Y niet meetbaar is ten opzichte van σ-algebra $\mathcal{F}_1$.

De σ-algebra $\mathcal{F}_2$ bevat wel de verzamelingen $\{1\}$, $\{3\}$ en $\{5\}$ en ook de verzamelingen $\{2\}$, $\{4\}$ en $\{6\}$. De σ-algebra $\mathcal{F}_2$ maakt als het ware dus wel onderscheid tussen alle verschillende uitkomsten van de stochast Y. We zeggen dat de stochast Y $\mathcal{F}_2$-meetbaar is. De volgende definitie beschrijft het begrip meetbare afbeelding precies.

Definitie A.6 (Meetbaarheid en stochast). Zij $X : \Omega \to \mathbb{R}$ een afbeelding en $\mathcal{F}$ een σ-algebra. We noemen de stochast X *$\mathcal{F}$-meetbaar* indien voor elk paar reële getallen $a < b$ geldt dat het teruggehaalde beeld van het interval (a, b) met betrekking tot de stochast X bevat is in de σ-algebra $\mathcal{F}$, i.e.

$$X^{-1}[(a,b)] \in \mathcal{F} \; \forall a < b \in \mathbb{R}.$$

Binnen de kansrekening noemen we een meetbare afbeelding een *stochast*. Indien de uitkomstenruimte Ω aftelbaar is, noemen we de stochast *discreet*. Indien de uitkomstenruimte Ω overaftelbaar is, noemen we de stochast *continu*.

Intuïtief gezien kan een stochast als volgt worden opgevat. Stel, we hebben een kansexperiment met kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. Een stochast X is dan een bepaalde waarde die afhangt van de uitkomst ω. Dat wil dus zeggen dat de uiteindelijke waarde van de stochast X willekeurig is en dus dat elke mogelijke waarde van X een bepaalde kans heeft om voor te komen.

Voorbeeld A.3. De winst van de weddenschap X in het voorbeeld van de blinde dobbelsteenworp hierboven is een stochast met uitkomstenruimte $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. De stochast X is meetbaar ten opzichte van de σ-algebra $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \{1,3,5\}, \{2,4,6\}, \Omega\}$. Deze uitkomstenruimte is eindig en dus aftelbaar. De stochast X is dus een discrete stochast. Beschouw nu de stochast $Y = \omega$: de uitkomst van de dobbelsteenworp zelf. Merk op dat Y een afbeelding van $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ op $\{1,2,3,4,5,6\} \subset \mathbb{R}$ is en meetbaar is ten opzichte van de σ-algebra $\mathcal{F}_2 = \mathcal{P}(\Omega)$. De uitkomst Y van de dobbelsteenworp is zelf dus ook een stochast. Meer in het algemeen geldt dat als de uitkomstenruimte Ω van een kansexperiment een deelverzameling is van de reële getallen $\mathbb{R}$, dan is de uitkomst van het kansexperiment een stochast op zichzelf.

Merk op dat je aan de uitkomst van de stochast X uit het voorbeeld hierboven kan aflezen of de worp even of oneven uitkomt, dat wil zeggen, of de uitkomst ω in $\{2,4,6\}$ of in $\{1,3,5\}$ zit. Als we deze twee verzamelingen samen in een omvattende verzameling $\mathcal{F}$ zetten en alles toevoegen om hier een σ-algebra van te maken, verkrijgen we de σ-algebra $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1,3,5\}, \{2,4,6\}, \Omega\}$. We kunnen zeggen dat de σ-algebra $\mathcal{F}$ als het ware gegenereerd is door de stochast X. Aan de hand hiervan schrijven we de volgende definitie.

Definitie A.7. Zij $X : \Omega \to \mathbb{R}$ een stochast op de kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. Zij V de verzameling van alle σ-algebra's die de verzamelingen van de vorm $X^{-1}[(a,b)]$ bevatten. We definiëren de *σ-algebra gegeneerd door de stochast X* als

$$\sigma(X) := \bigcap_{F \in V} F.$$

Op vergelijkbare wijze kunnen we een σ-algebra gegenereerd door meerdere stochasten definiëren. Zij $\{X_t | t \in I\}$ een verzameling stochasten $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$ op de kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. Zij V de verzameling van alle σ-algebra's die de verzamelingen van de vorm $X_t^{-1}[(a,b)]$ voor alle elementen t uit de indexverzameling I bevatten. We definiëren de *σ-algebra gegeneerd door de stochasten X_t* als

$$\sigma(\{X_t | t \in I\}) := \bigcap_{F \in V} F.$$

De bovenstaande definitie spreekt van de σ-algebra $\sigma(X)$ gegenereerd door de stochast X. Zoals de naam doet vermoeden is de verzameling $\sigma(X)$ zelf een σ-algebra zoals gedemonstreerd wordt in de volgende stelling.

Stelling A.2. Zij $X : \Omega \to \mathbb{R}$ een stochast op de kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. Dan is de σ-algebra $\sigma(X)$ gegenereerd door de stochast X ook daadwerkelijk een σ-algebra.

Bewijs. Ten eerste moeten we eigenschap i) van definitie A.1 bewijzen. Zij V als in definitie A.7. Elk element van V is een σ-algebra. Dus elk element F van V bevat de verzamelingen $\emptyset$ en Ω. Dus bevat de doorsnede $\bigcap_{F \in V} F = \sigma(X)$ van elk element uit V ook de lege verzameling $\emptyset$ en de gehele uitkomstruimte Ω.

Nu het bewijs van eigenschap ii). Zij $A \in \sigma(X)$. Dat betekent dat $A \in F$ voor elke $F \in V$. Omdat elk element $F \in V$ een σ-algebra is, zit ook het complement $\Omega \setminus A$ in elke $F \in V$. Dus zit $\Omega \setminus A$ ook in de doorsnede $\bigcap_{F \in V} F = \sigma(X)$.

Tenslotte bewijzen we eigenschap iii). Zij $A_1, A_2, \ldots$ een rij elementen van de verzameling $\bigcap_{F \in V} F = \sigma(X)$. Dan zit A_i dus in elke $F \in V$ voor alle $i \in \mathbb{N}$. Omdat elk element $F \in V$ een σ-algebra is, geldt vanwege eigenschap iii) van definitie A.1 dat hun vereniging $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ ook in elke σ-algebra $F \in V$ zit. Dus zit de vereniging $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ ook in de doorsnede $\bigcap_{F \in V} F = \sigma(X)$.

■

Het klinkt logisch dat een stochast X meetbaar is op de door hem gegenereerde σ-algebra $\sigma(X)$. De volgende stelling levert hier bewijs voor.

Stelling A.3. Zij X een stochast op de kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ en zij $\sigma(X)$ de σ-algebra gegenereerd door X. Dan is de stochast X $\sigma(X)$-meetbaar.

Bewijs. Zij a en b reële getallen zodat a strikt kleiner is dan b. Zij de verzameling V gedefinieerd als in definitie A.7. Uit de definitie van V volgt dat $X^{-1}[(a,b)]$ een element is van elke σ-algebra $F \in V$. Dus is de verzameling $X^{-1}[(a,b)]$ ook een element van hun de doorsnede $\bigcap_{F\in V} F = \sigma(X)$.

■

A.3 Onafhankelijkheid

Stel dat we bij het werpen van een zuivere dobbelsteen geïnterreseerd zijn in de gebeurtenissen A, de uitkomst van de worp is even en B, de uitkomst van de worp is 2. Zij $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ de σ-algebra van wat we kunnen meten, dat wil zeggen, we kunnen de exacte uitkomst van de worp observeren. De gebeurtenis A kan dan worden opgevat als de deelverzameling $A = \{2,4,6\} \in \mathcal{F}$ en de gebeurtenis B kan worden opgevat als de deelverzameling $B = \{2\} \in \mathcal{F}$. De kans dat de uitkomst van de worp even is, is $\mathrm{P}(A) = \frac{1}{2}$. De kans dat de uitkomst van de worp 2 is is gelijk aan $\mathrm{P}(B) = \frac{1}{6}$. Stel dat we nu geïnterreseerd zijn in de kans dat de uitkomst zowel even is én dat de uitkomst van de worp 2 is. Merk op dat als de uitkomst van de worp 2 is, dan is de uitkomst van de worp ook gelijk even. De kans dat dit gebeurt is gelijk aan de kans van de strengere eis dat de uitkomst 2 is. Dit kunnen we wiskundig weergeven als $A \cap B = B$ en dus $\mathrm{P}(A\cap B) = \mathrm{P}(B) = \frac{1}{6}$. Merk op dat $\mathrm{P}(A\cap B) \neq \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)$. Twee gebeurtenissen waarvoor dit geldt noemen we *afhankelijk*.

Stel nu dat we na de eerste worp de dobbelsteen nog een keer werpen. We zijn nu geïnterreseerd in gebeurtenis A en gebeurtenis C: de uitkomst van de tweede worp is 2. Als de uitkomst van de eerste worp even is, wat is dan de kans dat de uitkomst van de tweede worp 2 is? De uitkomstenruimte van dit kansexperiment is $\Omega \in \{(i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} | 1 \leq i,j \leq 6\}$. In dit kansexperiment geldt $A = \{(i,j) \in \Omega | i \text{ is even}\}$ en $C = \{(i,j) \in \Omega | j = 2\}$ De eerste worp heeft geen invloed op de tweede worp. De kans is dus gewoon $\mathrm{P}(C) = \frac{1}{6}$. Merk op dat Ω, A en C respectievelijk 36, 18 en 6 elementen telt. De kans dat zowel gebeurtenis A als gebeurtenis C plaatsvinden is dan dus $\mathrm{P}(A\cap C) = \mathrm{P}(\{(2,2),(4,2),(6,2)\}) = \frac{3}{36} = \frac{18}{36}\frac{6}{36} = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(C)$. Twee gebeurtenissen A en C die voldoen aan $\mathrm{P}(A\cap C) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(C)$ noemen we *onafhankelijk*. De volgende definities beschrijven de notie van onafhankelijkheid precies.

Definitie A.8 (Onafhankelijkheid van gebeurtenissen). Zij de drieling $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ een kansruimte. De meetbare deelverzamelingen van Ω (of gebeurtenissen) $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{F}$ heten *onafhankelijk* indien de vergelijking

$$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = \mathrm{P}(A_1)\,\mathrm{P}(A_2) ... \mathrm{P}(A_n)$$

geldig is.

Definitie A.9 (Onafhankelijkheid van σ-algebra's). Beschouw een verzameling van σ-algebra's $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ..., \mathcal{F}_n$ van een uitkomstenruimte Ω. We zeggen dat de σ-algebra's $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ..., \mathcal{F}_n$ *onafhankelijk* zijn indien de gebeurtenissen $A_1, A_2, ..., A_n$ onafhankelijk zijn voor elke keuze van $A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2, ..., A_n \in \mathcal{F}_n$.

Definitie A.10 (Onafhankelijkheid van stochasten). Zij $X_1, X_2, ..., X_n$ een rij stochasten op de kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. We noemen de stochasten $X_1, X_2, ..., X_n$ *onafhankelijk* indien de door hun gegenereerde deel-σ-algebra's $\sigma(X_1), \sigma(X_2), ..., \sigma(X_n) \in \mathcal{F}$ onafhankelijk zijn.

Gebeurtenissen, σ-algebra's of stochasten die onderling niet onafhankelijk zijn noemen we *afhankelijk*.

B De Lebesgue-integraal

In dit hoofdstuk zullen we het begrip Lebesgue-integraal construeren. Onze constructie van de Lebesgue-integraal is geïnspireerd door die uit [1] en [2]. Onze constructie verschilt echter wel subtiel van zowel die uit [1] als [2].

De techniek van integratie bestaat al sinds de 17e eeuw toen Isaac Newton (1642-1727) [4] en Gottfried Leibniz (1646-1716) [3], rond dezelfde tijd, doch onafhankelijk van elkaar, de calculus ontwikkelden. Hiervoor gebruikte zij methodes gebaseerd op infinitesimalen. In de 19e eeuw begon men echter de geldigheid van infinitesimale methoden in twijfel te trekken. Infinitesimalen zijn intuïtief erg handig maar niet exact en kunnen daardoor niet gebruikt worden voor het opstellen van rigoureuze wiskunde (of in ieder geval niet voor de ontwikkeling van de hyperreële getallen in de laatste helft van de 20e eeuw). Hierom begonnen wiskundigen uit de 19e eeuw de calculus opnieuw te definiëren aan de hand van het meer rigoureuze concept van limieten. Deze rigoureuze herbehandeling van de calculus noemen we de analyse. De Duitse wiskundige Bernhard Riemann (1826-1866) [3] definieerde derhalve (Riemann)integratie als de limiet van wat we nu Riemannsommen noemen. Later ontwikkelde de Franse wiskunde Henri-Léon Lebesgue (1875-1941) [3] in het begin van de 20e eeuw [1] een meer algemene vorm van integratie wat we nu Lebesgue-integratie noemen. In het begin werd Lebesgue-integratie beschouwd als onnodig abstract in vergelijking met Riemannintegratie. Echter, in 1933 gebruikte de Russische wiskundige Andrej Kolmogorov (1903-1987) [3] Lebesgue-integratie in een axiomatische behandeling van de kansrekening. Sindsdien is Lebesgue-integratie een standaardbegrip geworden in de formele kansrekening [1].

De Lebesgue-integraal is cruciaal voor het waarderen van opties in het continue-tijdsmodel. Dit is opmerkelijk gezien een hoop van de kansrekening begrepen kan worden zonder gebruik te maken van de Lebesgue-integraal. Om meer precies te zijn, het meeste onderwijs in kansrekening wordt, zelfs op universitair niveau, gegeven aan de hand van kansdichtheidsfuncties in combinatie met Riemannintegratie (zie appendix C). Vermoedelijk gebeurt dit omdat deze methode van kansrekeningonderwijs intuïtiever en, in veel gevallen, eenvoudiger is. Ook is de methode van Riemannintegratie veel bekender dan de methode van Lebesgue-integratie. Bovendien vermijdt je ook een hoop maattheorie wanneer je de Lebesgue-integraal vermijdt in je behandeling van de kansrekening.

In het geval van optiewaardering in het continue-tijdsmodel schiet Riemannintegratie echter tekort. Zonder de Lebesgue-integraal kan je, zoals ik uit ervaring heb ondervonden, geen zinnige definitie geven aan het begrip *verwachtingswaarde gegeven een σ-algebra* (zie hoofdstuk 2) zonder tegen andere problemen aan te lopen. Verwachtingswaarden gegeven een σ-algebra staan echter centraal in de analyse van optiewaardering en dus kunnen we Lebesgue-integratie niet vermijden.

B.1 De Lebesgue-integraal van een discrete stochast

Voordat we beginnen aan de constructie van de Lebesgue-integraal, wil ik eerst wat intuïtief begrip van een kansmaat ten opzichte van de bijbehorende uitkomstenruimte creëren. Zij $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ een kansruimte. Stel je nu voor dat Ω een vlak van eindige oppervlakte is. We zouden Ω ook als lijn of als ruimte kunnen beschouwen maar om het ons niet te makkelijk noch te moeilijk te maken gaan we er vanuit dat Ω een vlak is. Zij nu $A \in \mathcal{F}$ een bepaalde gebeurtenis op Ω. Zoals de naam al doet vermoeden geeft de kansmaat $\mathrm{P}(A)$ van de gebeurtenis A een "maat" of "grootte" aan de gebeurtenis A. De standaardmaat van een vlak is de oppervlakte. Je kan de kans $\mathrm{P}(A)$ dus zien als een oppervlakte. Een kans mag echter niet groter zijn dan 1 dus om precies te zijn is de kans voor elke gebeurtenis A de verhouding van zijn oppervlakte $\mathrm{P}(A)$ ten opzichte van de oppervlakte van de hele uitkomstenruimte $\mathrm{P}(\Omega)$. Daarom stellen we voor het gemak de oppervlakte $\mathrm{P}(\Omega)$ van de gehele uitkomstenruimte op 1. Voor elke gebeurtenis A is de kans $\mathrm{P}(A)$ dan gelijk aan zijn oppervlakte:

$$\frac{\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(\Omega)} = \frac{\mathrm{P}(A)}{1} = \mathrm{P}(A).$$

Zij nu X een stochast op kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ en $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ een functie op deze stochast. We kunnen nu een gewogen gemiddelde van de functie f over zijn domein $X(\Omega)$ definiëren. Het gewicht van elke $f(X)$ is dan gelijk aan zijn kans $\mathrm{P}(X = x) := \mathrm{P}\big(X^{-1}(x)\big)$.

Opmerking. Voordat we hiermee aan de slag gaan, merk eerst op dat de functie $Y : \Omega \to \mathbb{R}, Y(\omega) = f\big(X(\omega)\big)$ een stochast op zichzelf is. We kunnen de functie $f(X)$ dus ook opvatten als een stochast Y. Meer in het algemeen kan elke functie f van een willekeurige stochast X dus opgevat worden als een andere stochast Y.

Om een intuïtief begrip te creëren voor het bovengenoemde gewogen gemiddelde zal ik eerst een dobbelstenenvoorbeeld behandelen. Beschouw het volgende spel. Je gooit een dobbelsteen en elke worp levert je een bepaalde score op. Zij de stochast Y de score van elke worp als volgt:

$$Y(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{als } \omega \in \{1,2,3\}, \\ 2 & \text{als } \omega \in \{4,5\}, \\ 4 & \text{als } \omega = 6. \end{cases}$$

Wat is nu het gemiddelde van Y gewogen aan zijn kansen $\mathrm{P}(Y = y)$? Het gewogen gemiddelde van Y over de gehele uitkomstenruimte is de som van elke mogelijke waarde $Y(\omega)$ maal de kans $\mathrm{P}(\{\omega\})$ voor elke uitkomst $\omega \in \Omega$. Elke uitkomst ω heeft dezelfde kans $\mathrm{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{6}$. Het gewogen gemiddelde van Y, ook wel de *verwachtingswaarde* van Y genoemd, is dan dus $\sum_{\omega\in\Omega} Y(\omega)\,\mathrm{P}(\{\omega\}) = (3\cdot 1 + 2\cdot 2 + 1\cdot 4)\frac{1}{6} = 1\frac{5}{6}$. Merk op dat dit verschilt van het rekenkundig gemiddelde van alle mogelijke waarden van X: $1\frac{5}{6} \neq \frac{1+2+4}{3} = 1\frac{3}{4}$. Voor een discrete stochast is dit voldoende voor het definiëren van de Lebesgue-integraal.

Definitie B.1 (Lebesgue-integraal van een discrete stochast). Zij $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ een kansruimte zodat Ω aftelbaar is. Zij Y een stochast op deze kansruimte. De *Lebegue integraal* van de (discrete) stochast Y over de deelverzameling $A \in \mathcal{F}$ is dan gedefinieerd als

$$\int_A Y \,\mathrm{d}\,\mathrm{P} := \sum_{\omega\in A} Y(\omega)\,\mathrm{P}(\{\omega\}).$$

B.2 De Lebesgue-integraal van een non-negatieve stochast

Definitie B.1 werkt helaas niet meer zodra de uitkomstenruimte Ω overaftelbaar is. Je kan echter niet sommeren over een overaftelbare verzameling. Misschien denk je nu: 'Misschien kunnen we Riemannintegreren over Ω?' Indien Ω een deelverzameling is van een reële verzameling $\mathbb{R}^n$ kan dit inderdaad werken. Het probleem is echter: niet elke uitkomstenverzameling Ω is een deelverzameling van $\mathbb{R}^n$. Zoals we in paragraaf A.1 al hadden behandeld, de uitkomstenverzameling Ω hoeft niet eens een verzameling van getallen te zijn! Dit is precies de reden waarom we het concept van integreren moeten uitbreiden naar het begrip Lebesgue-integratie. De Riemannintegraal is gedefinieerd met behulp van de Riemannondersom. Op vergelijkbare wijze definieer ik de *Lebesgue-ondersom*.

Definitie B.2 (Lebesgue-ondersom). Zij $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ een kansruimte en Y een stochast op deze kansruimte zodanig dat $Y(\omega)$ voor elke uitkomst ω non-negatief is en van boven begrenst door een bepaald reëel getal M, dat wil zeggen, $0 \leq Y(\omega) \leq M \;\forall \omega \in \Omega$. Verdeel het interval $[0, M]$ nu op in n intervallen van gelijke lengte $I_k := [\frac{k}{n}M, \frac{k+1}{n}M)$ voor alle $k \in \{0, ...n-2\}$ en $I_{n-1} = [\frac{n-1}{n}M, M]$. Definieer de verzameling $A_k(n) := Y^{-1}(I_k)$. Dan definiëren we de Lebesgue-ondersom als

$$S(n, Y) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} M\,\mathrm{P}\big(A_k(n)\big).$$

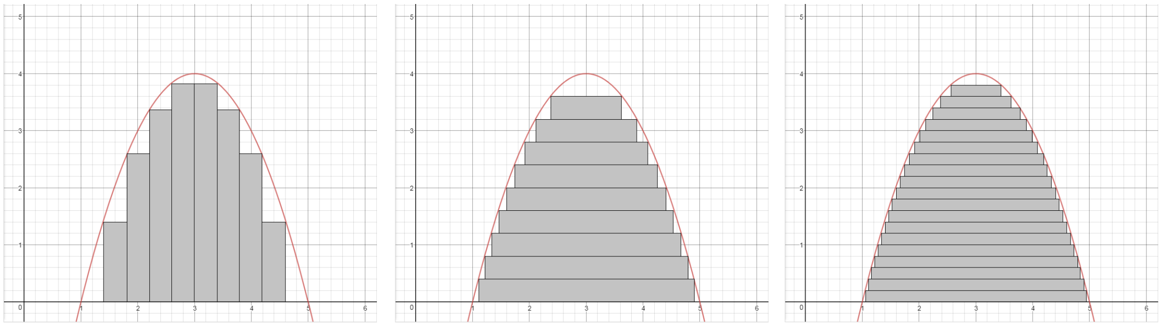

Fig B.1. *Links: Een Riemannondersom. Midden: Een Lebesgue-ondersom voor* $n = 10$*. Rechts: Een meer nauwkeurige Lebesgue-ondersom met* $n = 20$.

Net als bij de Riemannintegraal is de Lebesgue-ondersom een benadering van de Lebesgue-integraal. Bij de Riemannondersom van een functie $f(x)$ wordt het domein van de functie onderverdeeld in intervallen. Vervolgens ontstaat uit elk van die intervallen een balk die zo breed is als het interval en zo hoog als het infimum van de functie op dit interval (zie de bovenstaande figuur). De Riemannondersom is dan vervolgens de totale oppervlakte van al deze balkjes.

De Lebesgue-ondersom werkt net andersom. In plaats van dat we het domein Ω van de stochast Y onderverdelen in intervallen, verdelen we juist het bereik van de stochast Y op in intervallen. Vervolgens ontstaan uit elk van deze intervallen balkjes met de lengte van dit interval en als breedte de kans op dit interval.

Net als bij de Riemannondersom, wordt Lebesgue-ondersom een steeds nauwkeurigere benadering van de Lebesgue-integraal naarmate n groter wordt. Daarom definiëren we de Lebesgue-integraal als volgt.

Definitie B.3. Zij $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ een kansruimte en Y een stochast op deze kansruimte zodat $0 \leq Y(\omega) \leq M \; \forall \omega \in \Omega$. Zij $S(n, Y)$ als in definitie B.2. Dan definiëren we de Lebesgue-integraal van de stochast Y over de uitkomstenruimte Ω als

$$\int_\Omega Y \, \mathrm{d}\,\mathrm{P} := \lim_{n \to \infty} S(n, Y).$$

B.3 Afbakenen van het domein van integratie

Misschien is je in de bovenstaande definitie het volgende probleem opgevallen. Naast dat de definitie alleen werkt voor stochasten die groter of gelijk zijn aan 0 (hier zal ik later op terugkomen), werkt de definitie ook uitsluitend voor het geval dat we over de hele uitkomstenruimte Ω willen integreren. Gelukkig kunnen we dit probleem oplossen met behulp van de *indicatorfunctie*.

Definitie B.4 (Indicatorfunctie). Zij $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ een kansruimte. We definiëren de *indicatorfunctie* $\mathbf{1}_A : \Omega \to \{0, 1\}$ van een gebeurtenis $A \in \mathcal{F}$ als

$$\mathbf{1}_A(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{als } \omega \in A, \\ 0 & \text{als } \omega \notin A. \end{cases}$$

Definitie B.5. Zij $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ een kansruimte en Y een stochast op deze kansruimte zodat $0 \leq Y(\omega) \leq M \; \forall \omega \in \Omega$. Dan definiëren we de Lebesgue-integraal van de stochast Y over de gebeurtenis $A \in \mathcal{F}$ als

$$\int_A Y \, \mathrm{d}\,\mathrm{P} := \int_\Omega \mathbf{1}_A Y \, \mathrm{d}\,\mathrm{P}.$$

De bovenstaande definitie werkt intuïtief als volgt. Stel dat we een stochast Y willen integreren over een gebeurtenis A. In een Riemannintegraal zou je het domein van integratie aanpassen. Helaas werkt dit voor de Lebesgue-integraal niet goed. In plaats daarvan integreren we wederom over de gehele uitkomstenruimte Ω maar stellen we met behulp van de indicatorfunctie de stochast Y op 0 in de gebieden $\Omega \backslash A$ waar we niet over willen integreren.

B.4 De Lebesgue-integraal voor algemene stochasten

In de bovenstaande definities hebben we de Lebesgue-integraal uitsluitend gedefinieerd voor non-negatieve stochasten Y. Hoe lossen we dit probleem op? Definieer de stochasten $Y^+(\omega) := \max\{Y(\omega), 0\}$ en $Y^-(\omega) := \max\{-Y(\omega), 0\}$. Merk op dat voor elke uitkomst ω geldt $Y(\omega) = Y^+(\omega) - Y^-(\omega)$. Met dit in gedachten definiëren we onze algemene definitie van de Lebesgue-integraal.

Definitie B.6 (Lebesgue-integraal). Zij Y een stochast op de kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. Definieer de stochasten $Y^+(\omega) := \max\{Y(\omega), 0\}$ en $Y^-(\omega) := \max\{-Y(\omega), 0\}$. Dan definiëren we de Lebesgue-integraal van de stochast Y over de gebeurtenis $A \in \mathcal{F}$ als

$$\int_A Y \,\mathrm{d}\,\mathrm{P} := \int_A Y^+ \,\mathrm{d}\,\mathrm{P} - \int_A Y^- \,\mathrm{d}\,\mathrm{P}.$$

Hierin wordt in het rechter lid van de vergelijking geïntegreerd zoals in definitie B.5.

Opmerking. Als Y in definitie B.6 een discrete stochast is, dan is definitie B.6 equivalent met definitie B.1. Het bewijs hiervan slaan we over.

Het kan voorkomen dat de Lebesgue-integraal van een stochast Y divergeert naar oneindig of min-oneindig. In dat geval heeft de Lebesgue-integraal geen zinvolle waarde. Om deze rede schrijven we de volgende definitie.

Definitie B.7 (Integreerbare stochast). Zij Y een stochast op de kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. De stochast Y heet *integreerbaar* over gebeurtenis $A \in \mathcal{F}$ indien de Lebesgue-integraal $\int_\Omega |Y| \,\mathrm{d}\,\mathrm{P}$ eindig is.

We sluiten het hoofdstuk af met de volgende. We zullen deze stelling nodig hebben in het volgende hoofdstuk. We zullen het bewijs van de stelling niet in dit document behandelen.

Stelling B.1 (Lineariteit). Zij X en Y twee stochasten op de kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ zodanig dat $X(\omega), Y(\omega) \geq 0$ voor alle uitkomsten $\omega \in \Omega$. Zij λ en μ twee reële getallen. Dan geldt

$$\int_\Omega \lambda X + \mu Y \,\mathrm{d}\,\mathrm{P} = \lambda \int_\Omega X \,\mathrm{d}\,\mathrm{P} + \mu \int_\Omega Y \,\mathrm{d}\,\mathrm{P}.$$

C Gevorderde kansrekening

In dit hoofdstuk behandelen we eerst het begrip verwachtingswaarde aan de hand van de Lebesgue-integraal. De verwachtingswaarde van een stochast vertelt ons iets over wat we als uitkomstwaarde van deze stochast mogen verwachten.

Vervolgens behandelen we voorwaardelijke kansrekening. Voorwaardelijke kansrekening vertelt ons hoe we kansen op bepaalde gebeurtenissen in een kansexperiment moeten behandelen wanneer we, voordat we de exacte uitkomst van het kansexperiment weten, al enige informatie over de uitkomst hebben.

In paragraaf C.1 definiëren we de verwachtingswaarde aan de hand van de Lebesgue-integraal. Het is echter ingewikkeld om met de Lebesgue-integraal berekeningen uit te voeren. Daarom zullen we in paragraaf C.3 de begrippen *kansmassa* en *kansdichtheid* definiëren en hun eigenschappen behandelen. Met behulp van deze begrippen zullen berekeningen met betrekking tot kans en verwachtingswaarden een stuk eenvoudiger worden, onder andere doordat kansdichtheid ons de mogelijkheid geeft om Riemannintegratie uit te voeren in plaats van Lebesgue-integratie. Aan de hand van kansmassa en kansdichtheid zullen we in dit hoofdstuk ook de begrippen *variantie* en de *normale verdeling* onder de loep nemen. Tenslotte behandelen we in dit hoofdstuk zogenaamde *momentgenererende functies*. Aan het einde van dit hoofdstuk gebruiken we deze om een aantal eigenschappen van de normale verdeling af te leiden.

C.1 Verwachtingswaarde

In paragraaf B.1 hebben we al een voorbeeld gegeven van de verwachtingswaarde van een discrete stochast. Hieronder volgt de algemene definitie van verwachtingswaarden.

Definitie C.1 (Verwachtingswaarde). Zij $X : \Omega \to \mathbb{R}$ een stochast op de kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. We definiëren de *verwachtingswaarde* van de stochast X als

$$\mathrm{E}[X] := \int_{\Omega} X \,\mathrm{d}\,\mathrm{P}.$$

Uit deze definitie volgt direct het volgende.

Gevolg 4.1 Zij $X : \Omega \to \mathbb{R}$ een stochast op de kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Dan is X integreerbaar indien $\mathrm{E}[|X|]$ eindig is.

De verwachtingswaarde van een stochast heeft een zeer intuïtieve betekenis. Zoals het woord ‘verwachtingswaarde’ linguïstisch al doet vermoeden, de verwachtingswaarde van een stochast X is wat de waarnemer als uitkomstwaarde van X mag verwachten voordat het kansexperiment heeft plaatsgevonden. Merk op dat de verwachtingswaarde ongelijk kan zijn aan elke mogelijke uitkomstwaarde $X(\omega)$ van de stochast. De verwachtingswaarde is een gemiddelde gewogen aan de kans $\mathrm{P}(X \in A)$ van de betreffende gebeurtenis A.

Merk op dat de verwachtingswaarde van een stochast gedefinieerd is aan de hand van zijn Lebesgue-integraal over de gehele uitkomstenwaarde. De Lebesgue-integraal is op zijn beurt weer gedefinieerd aan de hand van zijn kansmaat P. In dit document zullen we uiteindelijk met twee verschillende kansmaten tegelijk werken. Als P en Q twee verschillende kansmaten zijn, dan zullen we hun verwachtingswaarden van een stochast X noteren als $\mathrm{E}^{\mathrm{P}}[X]$ en $\mathrm{E}^{\mathrm{Q}}[X]$ respectievelijk.

We sluiten deze paragraaf af met een handige stelling over de verwachtingswaarde. We zullen geen bewijs leveren voor deze stelling.

Stelling C.1. Zij X en Y twee onafhankelijke stochast op de kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Dan geldt

$$\mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y].$$

C.2 Voorwaardelijke kans

Keer terug naar het blinde mans dobbelsteenworp kansexperiment uit hoofdstuk 2. Je vriend vertelt je of de uitkomst ω van de worp even of oneven is. Je vriend vraagt je om te raden of de uitkomst groter dan 2 maar kleiner dan 6 is, oftewel of $\omega \in \{3, 4, 5\}$ geldt. Stel dat je vriend je vertelt dat de uitkomst oneven is, i.e. $\omega \in \{1, 3, 5\}$, wat is dan de kans dat de worp voldoet aan $\omega \in \{3, 4, 5\}$?

Laten we dit probleem beschouwen aan de hand van het onderstaande Venndiagram. De kans op een bepaalde gebeurtenis is gelijk aan de verhouding van de oppervlakte van de gebeurtenis ten opzichte van de oppervlakte van zijn uitkomstenruimte (zie paragraaf B.1 voor een argumentatie hiervan). We nemen 1 als oppervlakte voor de totale uitkomstenruimte $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Elk van de exacte uitkomsten $\omega \in \Omega$ heeft dan oppervlakte $\frac{1}{6}$, dat wil zeggen $\mathrm{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{6}$ voor elke $\omega \in \Omega$.

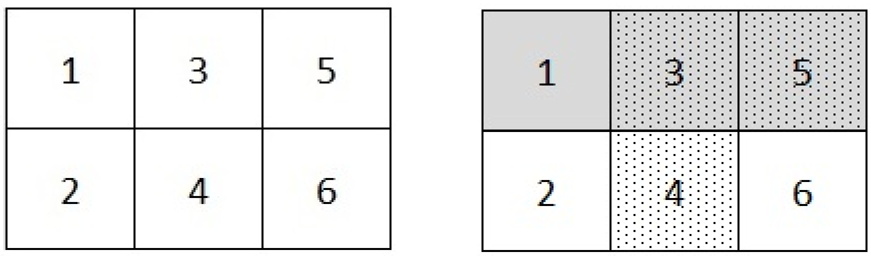

Fig C.1. *Links: het Venndiagram van de uitkomstenruimte* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. *Rechts: De oneven uitkomsten zijn grijs gekleurd. De uitkomsten groter dan 2 maar kleiner dan 6 zijn gestipt. De uitkomsten die zowel groter als 2 maar kleiner dan 6 en oneven zijn, zijn dus de vakjes die zowel grijs als gestipt zijn. De kans dat de uitkomst groter dan 2 maar kleiner dan 6 is, gegeven dat de uitkomst oneven is, is dan de verhouding van totale oppervlakte van de grijs-gestipte vakjes en de totale oppervlakte van de grijze vakjes:* $\frac{2}{3}$

Zij $A = \{3, 4, 5\}$ de gebeurtenis dat de uitkomst van de dobbelsteen worp groter dan 2 maar kleiner dan 6 is en zij $B = \{1, 3, 5\}$ de gebeurtenis dat de uitkomst van de dobbelsteen worp oneven is. We zijn dan dus geïnterreseerd in de kans op gebeurtenis A gegeven gebeurtenis B. Noteer deze kans als $\mathrm{P}(A|B)$. Het raden of gebeurtenis A geldig is, gegeven dat gebeurtenis B geldig is, kunnen we opvatten als een kansexperiment op zichzelf met uitkomstenruimte B. Merk op dat de oppervlakte van B gelijk is aan $\mathrm{P}(B) = \frac{1}{2}$. De mogelijke uitkomsten in B groter dan 2 maar kleiner dan 6 zijn alle uitkomsten die zowel in de gebeurtenissen A als B liggen, oftewel $\omega \in A \cap B = \{3, 5\}$. De oppervlakte van de verzameling $A \cap B = \{3, 5\}$ in het Venndiagram is $\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{2}{6}$. Omdat de uitkomstenruimte van dit kansexperiment $B = \{1, 3, 5\}$ is, is de kans $\mathrm{P}(A|B)$ gelijk aan de verhouding van de oppervlakte $\mathrm{P}(A \cap B)$ ten opzichte van de oppervlakte $\mathrm{P}(B)$ van uitkomstenruimte B. Dus er geldt

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Aan de hand van dit gedachte-experiment definiëren we het begrip *voorwaardelijke kans.*

Definitie C.2 (Voorwaardelijke kans). Zij $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ een kansruimte en B een gebeurtenis uit de σ-algebra $\mathcal{F}$ zodat $\mathrm{P}(B)$ positief is. De *voorwaardelijke kans op A gegeven B* is gedefinieerd als

$$\mathrm{P}(A|B) := \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}.$$

Stelling C.2. Zij $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ een kansruimte en B een gebeurtenis uit de σ-algebra $\mathcal{F}$ zodat $\mathrm{P}(B)$ positief is. De afbeelding $\mathrm{P}(.|B) : \mathcal{F} \to [0,1]$, zodat $\mathrm{P}(A|B)$ gedefinieerd is als hierboven voor elke willekeurige gebeurtenis $A \in \mathcal{F}$, is dan een kansmaat.

Bewijs. Ten eerste moeten we bewijzen dat de vergelijking $\mathrm{P}(B|B) = 1$ geldt. Uit definitie C.2 volgt de vergelijking

$$\mathrm{P}(B|B) = \frac{\mathrm{P}(B \cap B)}{\mathrm{P}(B)}.$$

Er geldt $B \cap B = B$. Als we dit invullen verkrijgen we, omdat $\mathrm{P}(B)$ positief is, de vergelijking

$$\mathrm{P}(B|B) = \frac{\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(B)} = 1.$$

Tenslotte moeten we eigenschap ii) van definitie A.2 bewijzen. Zij $A_1, A_2, \ldots$ een rij paarsgewijs disjuncte elementen van de σ-algebra $\mathcal{F}$. We moeten bewijzen dat de vergelijking $\mathrm{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n|B) = \Sigma_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n|B)$, oftewel

$$\frac{\mathrm{P}\big((\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \cap B\big)}{\mathrm{P}(B)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{P}(A_n \cap B)}{\mathrm{P}(B)}.$$

Omdat de rij $A_1, A_2, \ldots$ paarsgewijs disjunct is, is de rij $A_1 \cap B, A_2 \cap B, \ldots$ ook paarsgewijs disjunct. Uit eigenschap ii) van definitie A.2 volgt dan de vergelijking $\mathrm{P}(\cup_{n=1}^{\infty}\big(A_n \cap B)\big) = \Sigma_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n \cap B)$ en dus de vergelijking

$$\frac{\mathrm{P}\big(\cup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B)\big)}{\mathrm{P}(B)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{P}(A_n \cap B)}{\mathrm{P}(B)}.$$

Dit betekent dat het bewijs rond is als we de geldigheid van de vergelijking $\cup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B) = (\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \cap B$ kunnen aantonen. Zij de uitkomst ω een element van de verzameling $(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \cap B$. Dit betekent dat ω een element is van zowel de verzameling $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ als de verzameling B. Dus bestaat er een natuurlijk getal m zodat ω een element is van de verzameling $A_m \cap B$. Dus zit ω zeker in de vereniging van al deze mogelijkheden $\cup_{m=1}^{\infty}(A_m \cap B) = \cup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B)$.

Stel nu dat de uitkomst ω een element is van de verzameling $\cup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B)$. Dan bestaat er een natuurlijk getal m zodat ω een element is van de verzameling $A_m \cap B$. Dit betekent dat ω een element is van zowel de verzameling A_m als de verzameling B. Omdat de uitkomst ω een element is van de verzameling A_m geldt zeker dat ω een element is van de vereniging $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Maar ω is ook een element van B. Dus moet wel gelden: $\omega \in (\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \cap B$.

■

Stelling C.3. Zij $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ een kansruimte en A en B onafhankelijke gebeurtenissen uit de σ-algebra $\mathcal{F}$ zodat $\mathrm{P}(B)$ positief is. De voorwaardelijke kans op A gegeven B is dan gelijk aan de kans op A, i.e.

$$\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A).$$

Bewijs. Uit definitie C.2 volgt dat

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}.$$

Omdat de gebeurtenissen A en B onafhankelijk zijn volgt uit definitie A.8 dat $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)$. Als we dit invullen in de bovenstaande vergelijking verkrijgen we

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(B)} = \mathrm{P}(A).$$

■

C.3 Kansverdeling

We beginnen deze paragraaf met wat notatie.

Notatie C.1. Zij X een stochast. De verzameling $X^{-1}(x)$ zal vanaf nu aangeduid worden als $X = x$ mits deze als argument van een kansmaat of als tweede argument van een voorwaardelijke verwachtingswaarde fungeert, i.e.

$$\mathrm{P}(X = x) := \mathrm{P}(X^{-1}(x)),$$
$$\mathrm{E}[.|X = x] := \mathrm{E}[.|X^{-1}(x)].$$

Zij A een meetbare verzameling. Op vergelijkbare wijze zal de verzameling $X^{-1}(A)$ vanaf nu aangeduid worden als $X \in A$ mits deze als argument van een kansmaat of als tweede argument van een voorwaardelijke verwachtingswaarde fungeert, i.e.

$$\mathrm{P}(X \in A) := \mathrm{P}(X^{-1}(A)),$$
$$\mathrm{E}[.|X \in A] := \mathrm{E}[.|X^{-1}(A)].$$

Zij $A(x)$ een meetbare verzameling zodanig dat $\omega \in A(x)$ als $X(\omega) \leq x$. Dan duiden we de verzameling $X^{-1}(A(x))$ vanaf nu aan als $X \leq x$ mits deze als argument van een kansmaat of als tweede argument van een voorwaardelijke verwachtingswaarde fungeert, i.e.

$$\mathrm{P}(X \leq x) := \mathrm{P}\big(X^{-1}[A(x)]\big),$$
$$\mathrm{E}[.|X \leq x] := \mathrm{E}\big[.|X^{-1}[A(x)]\big].$$

Een stochast heeft een bepaalde uitkomst met een bepaalde kans. Stel, jij en je vriend werpen een zuivere dobbelsteen. Als de uitkomst groter dan 4 is betaalt je vriend jou €1. Anders betaal jij €1 aan je vriend. Zij de stochast X je winst. Er geldt $\mathrm{P}(X = 1) = \mathrm{P}(\{5, 6\}) = \frac{1}{3}$ en $\mathrm{P}(X = -1) = \mathrm{P}(\{1, 2, 3, 4\}) = \frac{2}{3}$. We kunnen dit samenvatten in de volgende functie:

$$p_X(x) := P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{als } x = 1, \\ \frac{2}{3} & \text{als } x = -1 \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

De bovenstaande functie is een voorbeeld van een *kansverdelingsfunctie.* De kansverdelingsfunctie van een discrete stochast (zoals hierboven) heet de *kansmassafunctie* of kortweg *kansmassa.* De kansverdelingsfunctie van een continue stochast heet de *kansdichteidsfunctie* of kortweg *kansdichtheid.*

Definitie C.3 (Kansmassa en kansdichtheid). Zij X een discrete stochast op de kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. We defiëren de *kansmassa* van X als de functie $p_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ zodat $p_X(x) = \mathrm{P}(X = x)$.

Zij Y een continue stochast op de kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ en zij A een $\sigma(Y)$-meetbare deelverzameling van het bereik $X(\Omega)$ van de stochast Y. Een functie $f_Y : \mathbb{R} \to [0,1]$ heet de *kansdichtheid* van Y indien de functie voldoet aan $\mathrm{P}(Y \in A) = \int_A f_Y(y)\,\mathrm{d}y$.

Opmerking. Zij X een stochast. Tenzij er anders vermeld wordt zal de functie $f_X(x)$ in dit document de kansdichtheid van de stochast X voorstellen.

Het begrip kansdichtheid is iets moeilijker voor te stellen dan het begrip kansmassa. Intuïtief gezien is kansdichtheid als volgt voor te stellen. Zij $I \subset X(\Omega)$ een interval bevat in het bereik van de betreffende stochast X en zij x een reëel getal bevat in het interval I. We kunnen kansdichtheid kan $f_X(x)$ dan opvatten als een maatstaf voor de kans dat de stochast X in het interval I zit waarbij we I infinitesimaal dun maken zodanig dat x in I bevat blijft.

Aan de hand van de begrippen kansmassa en kansdichtheid definiëren we de *cumulatieve kansverdelingsfunctie.*

Definitie C.4 (Cumulatieve kansverdelingsfunctie). Zij X een discrete stochast op de kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ met kansmassa p_X. Dan definiëren we zijn *cumulatieve kansverdelingsfunctie* als $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ zodat

$$F_X(x) := \mathrm{P}(X \leq x) = \sum_{k \leq x} P_X(k).$$

Zij Y een continue stochast op de kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ met kansdichtheid f_Y. Dan definiëren we zijn *cumulatieve kansverdelingsfunctie* als $F_Y : \mathbb{R} \to [0,1]$

$$F_Y(y) := \mathrm{P}(Y \leq y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(y)\,\mathrm{d}y.$$

De volgende stelling schetst het verband tussen de kansmassa of kansdichtheid van een stochast en zijn Lebesgue-integraal.

Stelling C.4. Zij X een discrete stochast op de kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ met kansmassa p_X. Zij A een deelverzameling van het bereik $X(\Omega)$ van de stochast X. Dan geldt

$$\int_A X\,\mathrm{d}\,\mathrm{P} = \sum_{x \in A} x \cdot p_X(x).$$

Zij Y een continue stochast op de kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ met kansdichtheid f_Y. Zij B een deelverzameling van het bereik $Y(\Omega)$ van de stochast Y. Dan geldt

$$\int_B Y\,\mathrm{d}\,\mathrm{P} = \int_B y \cdot f_Y(y)\,\mathrm{d}y.$$

Met behulp van definitie B.1 is het bewijs van het discrete geval simpel. Wij slaan de bewijzen van beide gevallen over.

Het onderstaande gevolg staat ons toe om verwachtingswaarden eenvoudiger te berekenen. Voor Andrej Kolmogorov's behandeling van de kansrekening met behulp van de Lebesgue-integraal werd de verwachtingswaarde gedefinieerd als in dit gevolg, i.e. gevolg C.1 geeft de klassieke definitie van de verwachtingswaarde.

Gevolg C.1. Zij X een discrete stochast op de kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ met kansmassa p_X. Dan geldt

$$\mathrm{E}[X] = \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot p_X(x).$$

Zij Y een continue stochast op de kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ met kansdichtheid f_Y. Dan geldt

$$\mathrm{E}[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_Y(y)\,\mathrm{d}y.$$

Voorbeeld C.1. Stel dat we willekeurig een getal uit het interval $\Omega = [0, 1]$ kiezen. Elk getal heeft een even grote kans om gekozen te worden. Zij de stochast X het gekozen getal. Uit definitie C.3 volgt dan dat de functie

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 \text{ als } x \in [0,1], \\ 0 \text{ anders,} \end{cases}$$

de kansdichtheid van X is. Wat is dan de kans $\mathrm{P}(X \neq \frac{1}{2})$ dat het getal $\frac{1}{2}$ niet gekozen wordt? Er geldt

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X \neq \frac{1}{2}) &= \mathrm{P}\big([0, \tfrac{1}{2}) \cup (\tfrac{1}{2}, 1]\big) \\
&= \mathrm{P}\Big([0, \tfrac{1}{2})\Big) + \mathrm{P}\Big((\tfrac{1}{2}, 1]\Big) && \text{(want } [0, \tfrac{1}{2}) \text{ en } (\tfrac{1}{2}, 1] \text{ zijn disjunct)} \\
&= \Big(1 - \mathrm{P}([\tfrac{1}{2}, 1])\Big) + \Big(1 - \mathrm{P}([0, \tfrac{1}{2}])\Big) && \text{(stelling A.1)} \\
&= \Big(1 - \int_{\frac{1}{2}}^{1} \mathrm{d}x\Big) + \Big(1 - \int_{0}^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x\Big) && \text{(stelling C.4)} \\
&= (1 - \frac{1}{2}) + (1 - \frac{1}{2}) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Merk tevens op dat uit stelling A.1 nu volgt dat $\mathrm{P}(X = \frac{1}{2}) = 0$. Je zou dus zeggen dat het *zeker* is dat het getal $\frac{1}{2}$ niet gekozen wordt. Je laat het kansexperiment uitvoeren door een random number generator en *poef*, de generator kiest $\frac{1}{2}$. Magie? Nee. Het is een tekortkoming van de kansrekening. Merk op dat $[0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1]$ niet de gehele uitkomstenruimte Ω is. Er zijn veel kansexperimenten te bedenken waarin een gebeurtenis met kans 1 voorkomt maar de gebeurtenis ongelijk is aan de uitkomstenruimte. We zeggen dat dit soort gebeurtenissen *bijna zeker* voorkomen.

Definitie C.5 (Bijna zeker). Zij $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ een kansruimte en zij $A \subset \Omega$ een gebeurtenis zodat $\mathrm{P}(A) = 1$ maar $A \neq \Omega$. Dan zeggen we dat gebeurtenis A *bijna zeker* plaats vindt.

De *momentgenererende functie* van een continue stochast X wordt in sommige teksten gedefinieerd als $\phi_X(t) := \mathrm{E}[e^{tX}]$. Zij $f_X(x)$ de kansdichtheid van X. In andere teksten wordt de momentgenererende functie van X gedefinieerd als

$$\phi_X(t) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dit leidt ertoe dat veel statistici denken dat de verwachtingswaarde van de functie e^{tX} (klassiek) gedefinieerd is als $\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)\,\mathrm{d}x$. Meer in het algemeen denken veel statistici (en zelfs sommige wiskundigen) dat de verwachtingswaarde van een functie $g(X)$ van een continue stochast X gedefinieerd is als

$$\mathrm{E}[g(X)] := \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\,\mathrm{d}x. \tag{12}$$

Herinner je dat een functie $Y := g(X)$ van een continue stochast zelf ook als een stochast opgevat kan worden. Uit gevolg C.1 volgt dan $\mathrm{E}[g(X)] = \mathrm{E}[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_Y\big(g(x)\big)\,\mathrm{d}y$. Het is niet zo voor de hand liggend dat dit gelijk is aan de rechterkant van vergelijking 12. Het resultaat van vergelijking 12 is dus niet slechts het directe resultaat van de klassieke definitie van een verwachtingswaarde, maar het resultaat van een rigoureus bewezen stelling. Vanwege deze verwarring wordt de onderstaande stelling vaak de 'wet van de onbewuste statisticus' genoemd.

Stelling C.5 (Wet van de onbewuste statisticus). Zij X een continue stochast met kansdichtheid $f_X(x)$ en zij $g : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ een functie. Als $g(X)$ integreerbaar is, dan geldt

$$\mathrm{E}[g(X)] = \int\limits_{\mathbb{R}} g(x) f_X(x)\,\mathrm{d}x.$$

C.4 Variantie

Stel, een miljonair heeft precies één miljoen euro op zijn rekening. Hij gaat naar een (zeer primitief) casino. In het casino staan twee kop-of-munt tafels (met zuivere munten). Aan de eerste tafel betaalt het huis bij munt €52 aan de speler. Bij kop betaalt de speler €50 aan het huis. Zij X de winst van de miljonair aan deze tafel. Uit gevolg C.1 volgt dat verwachte winst $\mathrm{E}[X] = \frac{1}{2}52 - \frac{1}{2}50 =$ €1 is. De miljonair heeft enigszins verstand van kansrekening en besluit, omdat de verwachte winst positief is, dat het gunstig is om aan deze tafel te spelen.

Aan de tweede tafel betaalt het huis bij munt €1.000.004 aan de speler. Bij kop betaalt de speler €1.000.000 aan het huis. Zij Y de winst van de miljonair aan deze tafel. De verwachte winst is wederom $\mathrm{E}[Y] = \frac{1}{2}(10^6 + 4) + \frac{1}{2}(-10^6) =$ €2. De verwachte winst is dus wederom positief. De verwachte winst aan deze tafel is zelfs hoger dan die aan de eerste tafel. Toch besluit de miljonair om niet aan deze tafel te spelen. De miljonair leidt een redelijk luxe leven en zijn kwaliteit van leven is dus hoog. Als de miljonair wint dan gaat zijn kwaliteit van leven dus relatief niet heel erg omhoog. Als de miljonair verliest is hij echter al zijn geld kwijt en zal zijn kwaliteit van leven heel erg achteruit gaan (misschien wordt hij zelfs dakloos).

Kennelijk is kennis over de verwachtingswaarde alleen niet genoeg om goede beslissingen over kansexperimenten te nemen. Hoe verschillen de twee tafels uit het casino wiskundig van elkaar? Er geldt aan beide tafels dat de uitkomstenruimte $\Omega = \{\text{kop}, \text{munt}\}$ is. Het bereik van X is $X(\Omega) = \{-50, 52\}$ en het bereik van Y is $\{-10^6, 10^6+4\}$. Merk op dat alle uitkomsten van X 51 verschillen van de verwachtingswaarde. Alle uitkomsten van Y verschillen juist een miljoen plus twee van de verwachtingswaarde. De uitkomsten van stochast Y liggen dus veel verder verwijderd van de verwachtingswaarde dan de uitkomsten van X tot hun verwachtingswaarde. Het concept van hoe ver de uitkomsten van een stochast verwijderd liggen noemen we *spreiding*. We gebruiken de *variantie* van een stochast als een maatstaf voor zijn spreiding.

Definitie C.6 (Variantie). Zij X een stochast. Dan definiëren we zijn variantie als

$$\mathrm{Var}(X) := \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])^2].$$

Opmerking. Ook al is de variantie een maatstaf voor spreiding, de wortel van de variantie geeft meestal intuïtief een beter beeld van de spreiding (zie voorbeeld C.2). De wortel van de variantie noemen we *standaardafwijking* of *standaarddeviatie*. In de wiskunde blijkt het meestal toch praktischer om met variantie te werken voor bewijzen en berekeningen.

De volgende stelling geeft in veel gevallen een eenvoudigere wijze voor het berekenen van de variantie.

Stelling C.6. Zij X een stochast. Dan geldt

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2.$$

Bewijs. Uit eigenschappen i) (lineariteit van verwachtingswaarden) en vii) (verwachting zonder voorkennis) van stelling 2.1 volgt

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])^2] \\ &= \mathrm{E}\big[X^2 + (\mathrm{E}[X])^2 - 2X\,\mathrm{E}[X]\big] \\ &= \mathrm{E}[X^2] + (\mathrm{E}[X])^2 - 2\,\mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[X] \\ &= \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2.\end{aligned}$$

■

Voorbeeld C.2. Wat zijn de varianties van de stochasten X in het bovenstaande voorbeeld? Er geldt $(\mathrm{E}[X])^2 = 1$ en $(\mathrm{E}[Y])^2 = 4$. Uit de wet van de onbewuste statisticus en gevolg 5.1 volgt $\mathrm{E}[X^2] = \frac{1}{2}(50^2 + 52^2) = \frac{1}{2}(2500 + 2704) = 2602$. Uit stelling C.6 volgt dan $\mathrm{Var}(X) = 2602 - 1 = 2601$.

Op vergelijkbare wijze geldt $\mathrm{E}[Y^2] = \frac{1}{2}(10^{12} + (10^6 + 2)^2) = \frac{1}{2}(2 \cdot 10^{12} + 4 \cdot 10^6 + 4) \approx 10^{12}$. In beide gevallen lijkt de variantie veel groter dan de genoemde spreiding van 51 voor X en $10^6 + 2$ voor Y. Hun standaarddeviaties zijn echter $\sqrt{\mathrm{Var}(X)} = 51$ en $\sqrt{\mathrm{Var}(Y)} = 10^6 + 2$.

C.5 De normale verdeling

In deze paragraaf nemen we de zogenaamde *normale kansdichtheidsfunctie* onder de loep. Een stochast die verdeeld is volgens de normale kansdichtheid noemen we normaal verdeeld. De normale verdeling is erg nuttig vanwege de zogenaamde *centrale limietstelling*. De centrale limietstelling zegt ongeveer dat de som van een groot aantal onafhankelijke stochasten die gelijk verdeeld zijn, bij benadering normaal verdeeld is. Dit is een zeer nuttige eigenschap in de statistiek.

Stel bijvoorbeeld dat je de gemiddelde lengte van een Nederlander wilt weten. Neem aan dat er precies 17 miljoen Nederlanders zijn en noteer hun lengtes als $l_1, l_2, \ldots, l_{17\cdot 10^6}$. De gemiddelde lengte van een Nederlander is dan $\sum_{i=1}^{17\cdot 10^6} \frac{l_i}{17\cdot 10^6}$. Neem aan dat voor alle i het getal $\frac{l_i}{17\cdot 10^6}$ een stochast is. Neem verder aan dat de onderlinge lengtes van de Nederlanders uniform verdeeld en onafhankelijk zijn (wat in de praktijk natuurlijk niet zo is). Dan is de gemiddelde lengte van een Nederlander $\sum_{i=1}^{17\cdot 10^6} \frac{l_i}{17\cdot 10^6}$ bij benadering normaal verdeeld, ongeacht de verdeling van de l_i.

Definitie C.7 (Normale verdeling). Zij X een continue stochast op kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ surjectief op $\mathbb{R}$. We noemen X *normaal verdeeld* met parameters μ en $\sigma^2 > 0$ respectievelijk indien X verdeeld is door de kansdichtheidsfunctie

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Als een stochast X normaal verdeeld is met parameters μ en σ^2 respectievelijk, dan noteren we dat als $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Een stochast die $\mathcal{N}(0,1)$ verdeeld is noemen we *standaard normaal* verdeeld.

De normale verdeling werd voor het eerst gebruikt door de Duitse wiskundige Carl Friedrich Gauss (1777-1855)[3] in zijn origineel benoemde werk *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium* (Theorie van de beweging van de hemellichamen draaiende om de zon in kegelsnedes) uit 1809.

Hierin ontwikkelde Gauss een methode om de baan van de net nieuw ontdekte dwergplaneet Ceres te schatten. Hij toonde aan dat de kansdichtheid $\phi(x)$ van de afwijking in zijn schatting gelijk is aan

$$\phi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}.$$

Merk op dat dit gelijk is aan de kansdichtheid van een $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2h^2})$ verdeelde stochast. Hierom wordt de normale verdeling ook wel de gaussverdeling genoemd. [6]

Naast Gauss heeft de normale verdeling ook veel te danken aan de Franse wiskundige Pierre Simon Laplace (1749-1827)[3]. In 1810 bewees Laplace de centrale limietstelling ([7],p. 144). Ook bewees hij in 1782 als één van de eerste de identiteit

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, \mathrm{d}x = \sqrt{\pi} \quad \text{([8], p. 189).}$$

Het bewijs van de volgende stelling is gebaseerd op deze identiteit.

Stelling C.7. De functie f_X uit definitie C.7 is ook daadwerkelijk een kansdichtheidsfunctie, i.e.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = 1.$$

Bewijs. Beschouw de integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\frac{x-\mu}{\sqrt{2\sigma^2}})^2} \, \mathrm{d}x.$$

Substitueer $y = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}$. Dan geldt $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}$ en dus

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\frac{x-\mu}{\sqrt{2\sigma^2}})^2} \, \mathrm{d}x = \sqrt{2}\sigma \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \, \mathrm{d}y.$$

Beschouw nu het kwadraat van de integraal aan de rechterkant van de bovenstaande vergelijking. Er geldt

$$\begin{aligned}
\Big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \, \mathrm{d}y\Big)^2 &= \Big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, \mathrm{d}x\Big)\Big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \, \mathrm{d}y\Big) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Substitueer nu poolcoördinaten: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ en $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$. Dan geldt

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} re^{-r^2} \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\infty} re^{-r^2} \, \mathrm{d}r \\
&= 2\pi \int_0^{\infty} re^{-r^2} \, \mathrm{d}r.
\end{aligned}$$

Substitueer nu $t = r^2$. Dan geldt $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r} = 2r$ en dus

$$\begin{aligned} 2\pi \int_0^\infty re^{-r^2}\,\mathrm{d}r &= 2\pi \int_0^\infty \frac{1}{2}e^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= \pi[-e^{-t}]_0^\infty \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Er geldt dus $(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y)^2 = \pi$ en dus $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\frac{x-\mu}{\sqrt{2\sigma^2}})^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2}\sigma \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \sqrt{2\pi}\sigma$. Tenslotte geldt dus

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\frac{x-\mu}{\sqrt{2\sigma^2}})^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\sqrt{2\pi}\sigma \\ &= 1. \end{aligned}$$

■

Merk op dat de normale kansdichtheid een even functie is. De normale kansdichtheid is dus symmetrisch rondom de y-as. In de onderstaande figuur staat de grafiek van een normale kansdichtheid. De grafiek wordt breder en korter naarmate de parameter σ^2 groter wordt. De grafiek verschuift naar rechts naarmate μ groter wordt en vice versa.

Fig C.2. *Links: De grafiek van een normale kansdichtheid. Rechts: De grafiek van een standaard normale kansdichtheid (rood), een $\mathcal{N}(0,4)$ kansdichtheid (blauw) en de grafiek van een $\mathcal{N}(2,1)$ kansdichtheid (groen).*

Hebben de parameters μ en σ^2 van een normale verdeling een betekenis? Jazeker! De parameters μ en σ^2 zijn respectievelijk de verwachtingswaarde en de variantie van een normale verdeling. Het volgende bewijs is gebaseerd op het bewijs uit [9].

Stelling C.8. Zij X een normaal verdeelde stochast op kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ met parameters μ en σ^2 respectievelijk. Dan geldt

$$\mathrm{E}[X] = \mu$$

en

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2.$$

In het bijzonder gelden voor een standaard normaal verdeelde stochast Y de eigenschappen $\mathrm{E}[Y] = 0$ en $\mathrm{Var}(Y) = 1$.

Bewijs. Ik toon eerst aan dat $\mathrm{E}[X] = \mu$. Er geldt

$$\mathrm{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \,\mathrm{d}x.$$

Omdat $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ een kansdichtheid is geldt $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \,\mathrm{d}x = 1$ en dus

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[X] &= \mu + \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \,\mathrm{d}x \\ &= \mu + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-\mu}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} \,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Substitueer $y = \frac{x-\mu^2}{\sigma}$. Dan geldt $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sigma}$ en dus

$$\mathrm{E}[X] = \mu + \int_{-\infty}^{\infty} \sigma y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \,\mathrm{d}y.$$

Merk op dat $\sigma y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$ een oneven functie is. Er geldt dus $\int_0^{-\infty} \sigma y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \,\mathrm{d}y = -\int_{-\infty}^{0} \sigma y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \,\mathrm{d}y$ en dus

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[X] &= \mu + \int_{-\infty}^{0} \sigma y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \,\mathrm{d}y + \int_{0}^{\infty} \sigma y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \,\mathrm{d}y \\ &= \mu + 0 \\ &= \mu. \end{aligned}$$

Vervolgens tonen we aan dat $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$. Er geldt $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])^2] = \mathrm{E}[(X-\mu)^2]$. Uit de wet van de onbewuste statisticus volgt dan

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \,\mathrm{d}x \\ &= \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} (\frac{x-\mu}{\sigma})^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} \frac{1}{\sigma} \,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Substitueer $y = \frac{x-\mu}{\sigma}$. Dan geldt $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sigma}$ en dus

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \,\mathrm{d}y.$$

Zij $A := \frac{y}{\sqrt{2\pi}}$ en $B := -e^{-\frac{y^2}{2}}$. Dan geldt $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ en $\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}y} = ye^{-\frac{y^2}{2}}$. Uit partiële integratie volgt dan

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} y^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \,\mathrm{d}y &= -\frac{ye^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\Bigg|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \,\mathrm{d}y \\ &= -(0-0) + \int_{-\infty} \infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Merk op dat een standaard normaal verdeelde stochast Y kansdichtheid $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$ heeft. Er geldt dus $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \,\mathrm{d}y = 1$ en dus

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \,\mathrm{d}y \\ &= \sigma^2.\end{aligned}$$

■

C.6 Momentgenererende functies

In paragraaf C.3 hebben we het al kort gehad over momentgenererende functies. Momentgenererende functies zijn erg handig voor het bepalen van de kansverdeling van een bepaalde stochast. Dit komt doordat de momentgenererende functie van een stochast X uniek de kansverdeling van X bepaald. We zullen deze handige eigenschap uiteindelijk gebruiken om wat belangrijke eigenschappen van normaal verdeelde stochasten af te leiden. Hieronder volgt de definitie van een momentgenererende functie.

Definitie C.8 (Momentgenererende functie). Zij X een stochast op kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. Dan definiëren we zijn momentgenererende functie $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als

$$\phi(t) := \mathrm{E}[e^{tX}].$$

Het volgende lemma zullen we gebruiken in ons bewijs van stelling C.9. Naast de bovengenoemde uniciteit van de momentgenererende functie, is ook het resultaat van lemma C.1 erg handig voor het bepalen hoe een stochast verdeeld is.

Lemma C.1. Zij X en Y een paar onafhankelijke stochasten op kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ met momentgenererende functies $\phi_X(t)$ en $\phi_Y(t)$ respectievelijk. Zij $\phi_{X+Y}(t)$ de momentgenererende functie van de stochast $X+Y$. Dan geldt

$$\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t).$$

Bewijs. Omdat de stochasten X en Y onafhankelijk zijn, geldt uit stelling C.1

$$\begin{aligned}\phi_{X+Y}(t) &= \mathrm{E}[e^{t(X+Y)}] \\ &= \mathrm{E}[e^{tX}e^{tY}] \\ &= \mathrm{E}[e^{tX}]\,\mathrm{E}[e^{tY}] \\ &= \phi_X(t)\phi_Y(t).\end{aligned}$$

■

Zoals we hierboven al hebben genoemd bepaalt de momentgenererende functie van een stochast X uniek de kansverdeling van X. Het onderstaande lemma beschrijft deze eigenschap precies. We zullen in dit document geen bewijs leveren voor het lemma.

Lemma C.2 (Uniciteit van de momentgenererende functie). Zij X een stochast op kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. Dan bepaald zijn momentgenererende functie $\phi(t)$ uniek de kansverdeling van X. Dat wil zeggen, als Y een tweede stochast op kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ is, zodanig dat Y ook de momentgenererende functie $\phi(t)$ heeft, dan zijn X en Y identiek verdeeld.

In stelling C.9 gebruiken we deze belangrijke eigenschap van de momentgenererende functie om eigenschappen van de normale verdeling af te leiden. Om deze eigenschappen af te leiden, moeten we echter eerst weten wat de momentgenererende functie van een normaal verdeelde stochast is.

Lemma C.3 (Momentgenererende functie van een normale stochast). Zij $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ een normale stochast op kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. Dan is zijn momentgenererende functie

$$\phi(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

Bewijs. Er geldt

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \mathrm{E}[e^{tX}] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(tx - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2})\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(\frac{-(x-\mu)^2 + 2\sigma^2 tx}{2\sigma^2})\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Substitueer $y = x - \mu$. Dan geldt $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1$ en dus

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(\frac{-(x-\mu)^2 + 2\sigma^2 tx}{2\sigma^2}) \,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(\frac{-y^2 + 2\sigma^2 t(y+\mu)}{2\sigma^2}) \,\mathrm{d}y \\ &= e^{\mu t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(\frac{-y^2 + 2\sigma^2 ty}{2\sigma^2}) \,\mathrm{d}y \\ &= e^{\mu t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(\frac{-(y-\sigma^2 t)^2 + \sigma^4 t^2}{2\sigma^2}) \,\mathrm{d}y \\ &= e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(\frac{-(y-\sigma^2 t)^2}{2\sigma^2}) \,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Substitueer nu $z = y - \sigma^2 t$. Dan geldt $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = 1$ en dus

$$\begin{aligned}e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(\frac{-(y-\sigma^2 t)^2}{2\sigma^2}) \,\mathrm{d}y &= e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(\frac{-z^2}{2\sigma^2}) \,\mathrm{d}z \\ &= e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}.\end{aligned}$$

In de laatste stap gebruiken we het feit dat $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-z^2}{2\sigma^2}}$ de kansdichtheid is van een $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ verdeelde stochast en de integraal dus convergeert naar 1.

■

We sluiten dit hoofdstuk af met wat handige eigenschappen van de normale verdeling. We zullen deze eigenschappen later in hoofdstuk 8 nodig hebben.

Stelling C.9 (Eigenschappen van de normale verdeling). Zij λ een reëel getal en zij $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ en $Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ twee onafhankelijke normale stochasten op kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. Dan geldt

i) $\lambda + X \sim \mathcal{N}(\lambda + \mu_X, \sigma_X^2)$,
ii) $\lambda X \sim \mathcal{N}(\lambda \mu_X, \lambda^2 \sigma_X^2)$ en
iii) $X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$.

Bewijs.

i) Uit de lineariteit van de verwachtingswaarde volgt

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[e^{t(\lambda + X)}] &= \mathrm{E}[e^{t\lambda} e^{tX)}] \\ &= e^{t\lambda}\,\mathrm{E}[e^{tX)}].\end{aligned}$$

Uit lemma C.3 volgt vervolgens

$$\begin{aligned}e^{t\lambda}\,\mathrm{E}[e^{tX}] &= e^{t\lambda} e^{\mu_X t + \frac{\sigma_X^2 t^2}{2}} \\ &= e^{(\lambda + \mu_X)t + \frac{\sigma_X^2 t^2}{2}}.\end{aligned}$$

Uit lemma C.3 volgt dat $e^{(\lambda+\mu_X)t + \frac{\sigma_X^2 t^2}{2}}$ de momentgenererende functie is van een $\mathcal{N}(\lambda + \mu_X, \sigma_X^2)$ verdeelde stochast. Omdat de momentgenererende functie uniek de kansverdeling van een stochast bepaalt, is $\lambda + X \sim \mathcal{N}(\lambda + \mu_X, \sigma_X^2)$ verdeeld.

ii) Uit lemma C.3 volgt

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[e^{t(\lambda X)}] &= \mathrm{E}[e^{(t\lambda)X}] \\ &= e^{\mu_X(\lambda t)+\frac{\sigma_X^2(\lambda t)^2}{2}}.\end{aligned}$$

Uit lemma C.3 volgt dat $e^{\mu_X(\lambda t)+\frac{\sigma_X^2(\lambda t)^2}{2}}$ de momentgenererende functie is van een $\mathcal{N}\big(\lambda\mu_X, \lambda^2\sigma_X^2\big)$ verdeelde stochast. Omdat de momentgenererende functie uniek de kansverdeling van een stochast bepaalt, is $\lambda X \sim \mathcal{N}\big(\lambda\mu_X, \lambda^2\sigma_X^2\big)$ verdeeld.

iii) Omdat X en Y onafhankelijk zijn, volgt uit lemma C.1 $\mathrm{E}[e^{t(X+Y)}] = \mathrm{E}[e^{tX}]\,\mathrm{E}[e^{tY}]$. Uit lemma C.3 volgt vervolgens

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[e^{tX}]\,\mathrm{E}[e^{tY}] &= e^{\mu_X t+\frac{\sigma_X^2 t^2}{2}} e^{\mu_Y t+\frac{\sigma_Y^2 t^2}{2}} \\ &= e^{\mu_X t+\frac{\sigma_X^2 t^2}{2}+\mu_Y t+\frac{\sigma_Y^2 t^2}{2}} \\ &= e^{(\mu_X+\mu_Y)t+\frac{(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)t^2}{2}}.\end{aligned}$$

Uit lemma C.3 volgt dat $e^{(\mu_X+\mu_Y)t+\frac{(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)t^2}{2}}$ de momentgenererende functie is van een $\mathcal{N}\big(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2\big)$ verdeelde stochast. Omdat de momentgenererende functie uniek de kansverdeling van een stochast bepaalt, is $X + Y \sim \mathcal{N}\big(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2\big)$ verdeeld.

$\blacksquare$

Verantwoording van de bewijzen

Deze sectie is alleen van belang voor de beoordelaars van deze scriptie. In de onderstaande tabel vindt u een overzicht van welke wiskundige bewijzen ik zelf geleverd heb en welke bewijzen gebaseerd zijn op andermans intellectueel eigendom.

Lemma 1.1.	Dit bewijs heb ik volledig zelf geleverd. Karma heeft me er op gewezen dat er een korter bewijs bestaat maar ik heb besloten mijn eigen bewijs te laten staan.
Stelling 1.1.	Dit bewijs heb ik bijna volledig zelf geleverd. Karma heeft me er alleen op gewezen dat het omwisselen van het limiet- en som teken mag vanwege Beppo Levi's monotone convergentiestelling.
Stelling 2.1.	Deze bewijzen heb ik volledig zelf geleverd.
Stelling 3.1.	Dit bewijs heb ik volledig zelf geleverd.
Stelling 4.1.	Dit bewijs heb ik volledig zelf geleverd.
Stelling 4.2.	Dit bewijs heb ik volledig zelf geleverd.
Stelling 5.1.	Dit bewijs heb ik volledig zelf geleverd.
Stelling 5.3.	Dit bewijs is gebaseerd op gevolg 10.1 uit ([1], p. 164).
Lemma 5.1.	Dit bewijs heb ik volledig zelf geleverd.
Stelling 5.5.	Dit bewijs is een rigoureuzere uitwerking van het bewijs uit ([12], p. 125).
Paragraaf 6.2.	Deze uitleg over hedgen is gebaseerd op die uit ([1], p. 245-247). Choe's uitleg is echter zeer kort door de bocht en ik heb dus veel tussenstappen zelf bedacht om zijn stappen te verklaren, waaronder de verklaring dat $(\delta S)^2 = \sigma^2 S^2 \delta t$ geldt.
Lemma 7.1.	Dit bewijs is een rigoureuzere en uitgebreidere uitwerking van het bewijs uit ([1], p. 269-270).
Lemma 7.2.	Dit bewijs is een rigoureuzere en uitgebreidere uitwerking van het bewijs uit ([1], p. 270-271).
Stelling 7.1.	Dit bewijs is een rigoureuzere en uitgebreidere uitwerking van het bewijs uit ([1], p. 270-271).
Lemma 7.3.	Dit bewijs heb ik volledig zelf geleverd.
Stelling 7.4.	Dit bewijs is geïnspireerd door het bewijs van stelling ([1], p. 19-20). Choe is echter heel kort door de bocht met concluderen waarom het bestaan van portefeuille Π_t^3 tot arbitrage leidt. De verklaring hiervoor heb ik zelf bedacht en aan het bewijs toegevoegd.
Stelling 7.5.	Dit bewijs heb ik volledig zelf geleverd maar het volgt vrij gemakkelijk uit stelling 7.4.
Stelling 8.1.	Dit bewijs is een uitgebreidere uitwerking van het bewijs uit ([1], p. 308-309).
Stelling 8.2.	Dit bewijs heb ik volledig zelf geleverd maar het volgt vrij gemakkelijk uit stelling 8.1.
Stelling A.1.	Dit bewijs heb ik volledig zelf geleverd.
Stelling A.2.	Dit bewijs heb ik volledig zelf geleverd.
Stelling A.3.	Dit bewijs heb ik volledig zelf geleverd.
Stelling C.2.	Dit bewijs heb ik volledig zelf geleverd.
Stelling C.3.	Dit bewijs heb ik volledig zelf geleverd.
Stelling C.6.	Dit bewijs heb ik volledig zelf geleverd.
Stelling C.7.	Dit bewijs heb ik zelf geleverd met behulp van de bekende identiteit $\int_{-\infty}^{\infty} e^{x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$ wiens bewijs ik geleerd heb bij de vakken Wiskundige Technieken 1 en Infinitesimaalrekening A onder leiding van Dr. Steven Wepster en Prof. Dr. Jan Hogendijk respectievelijk.
Stelling C.8.	Deze bewijzen zijn gebaseerd op die uit ([9], p. 93-94, 97). Ik heb de integralen uitgebreider uitgewerkt.
Lemma C.1.	Dit bewijs heb ik volledig zelf geleverd.
Lemma C.3.	Dit bewijs heb ik volledig zelf geleverd.
Stelling C.9.	Deze bewijzen heb ik volledig zelf geleverd.
Voorbeelden.	Ik heb vrijwel alle voorbeelden zelf bedacht en uitgewerkt. Alleen het voorbeeld van de dronkemanswandeling is gebaseerd op een beroemd wiskundig gedachte-experiment.

Referenties

[1] Geon Ho Choe, *Stochastic Analysis for Finance with Simulations*, Springer International Publishing, Switzerland, eerste editie, 2016.

[2] Steven E. Shreve, *Stochastic Calculus for Finance II*, Springer-Verlag, New York, USA, eerste editie, 2004.

[3] Carl B. Boyer en Uta C. Merzbach, *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, USA, derde editie, 2011.

[4] Richard S. Westfall, *Sir Isaac Newton*, https://www.britannica.com/biography/Isaac-Newton, geraadpleegd op 19-5-2018.

[5] Eli Maor, *e: The Story of a Number*, Princeton University Press, New Jersey, USA, 1994.

[6] Saul Stahl, *The Evolution of the Normal Distribution*, Mathematics Magazine, vol. 79, p. 96-113, 2006.

[7] Stephen M. Stigler, *The History of Statistics*, The Belknap Press of Harvard University, Massachusetts, USA, 1986.

[8] Karl Pearson, *"Das Fehlergesetz und seine Verallgemeinerungen durch Fechner und Pearson"A Rejoinder*, Biometrika Trust, Biometrika, Vol. 4, No. 1/2, p. 169-212, 1905.

[9] F.M. Dekking et al., *A Modern Introduction to Probability and Statistics: Understanding Why and How*, Springer-Verlag, London, United Kingdom, eerste editie, 2005.

[10] Angeliki Ermogenous, *Brownian Motion and its Application in the Stock Market*, 2005.

[11] Steve Lohr, *Kiyoshi Ito, 93, Mathematician Who Described Random Motion, Dies* The New York Times, uitgave 23 november 2008.

[12] Nicolas Privault, *Notes on Stochastic Finance*, editie 22 december 2017.

[13] Abdelmoula Dmouj, *Stock Price Modelling: Theory and Practice*, https://beta.vu.nl/nl/Images/werkstuk-dmouj_tcm235-91341.pdf, geraadpleegd op 10-7-2018.

[14] Erdinc Akyıldırım, Halil Mete Soner, *A Brief History of Mathematics in Finance*, https://www.researchgate.net/publication/262881071_A_brief_history_of_mathematics_in_finance, geraadpleegd op 10-7-2018.

[15] David Forfar, *Fischer Black*, http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Black_Fischer.html, geraadpleegd op 11-7-2018.

[16] https://www.nobelprize.org/nobel_prizes/economic-sciences/laureates/1997/press.html, geraadpleegd op 11-7-2018.