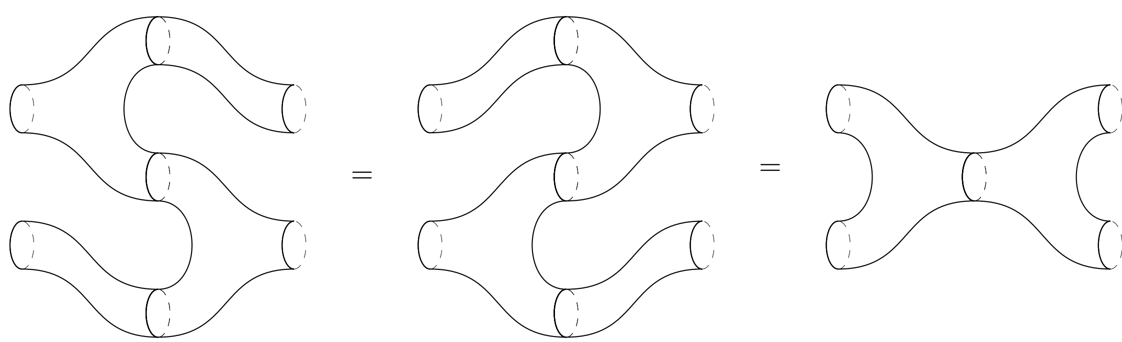
Bachelorscriptie

Tweedimensionale Topologische Kwantumveldtheorieën en Frobeniusalgebra's

Sebastiaan Smeenk



begeleid door
G. S. K. S. Heuts
28 juli 2018

Inhoudsopgave

1 Inleiding

Topologische kwantumveldtheoriën (TQFT's) zijn wiskundige modellen voor de kwantummechanica, het adjectief 'topologisch' duidt op het feit dat deze modellen een topologische karakter hebben; er wordt gebruik gemaakt van zogeheten *cobordismen*: topologische variëteiten met georiënteerde rand. Deze scriptie zal niet ingaan op de natuurkundige aspecten van TQFT's, maar richt zich op de wiskundige achtergrond van de theorie, in het bijzonder van tweedimensionale TQFT's en hun verband met commutatieve Frobeniusalgebra's. Hiervoor behandelen we achtereenvolgens: categoriën, cobordismen, Frobeniusalgebra's en TQFT's. Tot slot passed we deze theorie toe door topologische invarianten te berekenen die Frobeniusalgebra's aan gesloten, georiënteerde tweedimensionale oppervlakken toekennen.

De opbouw van deze scriptie is ontleed aan het boek *Frobenius Algebras and 2D Topological Quantum Field Theories* van Joachim Kock[1].

2 Categorieën

Categorietheorie formaliseert het begrip van wiskundige structuren en hun samenhang. De eerste, meest basale definitie, is die van een *categorie*, wat een wiskundige structuur voorstelt.

Definitie 2.1. Een *categorie* $\mathscr{C}$ bestaat uit:

1. Een klasse van *objecten* (of *hoekpunten*) genoteerd met $\mathbf{Ob}(\mathscr{C})$.

2. Een klasse van *morfismen* (of *pijlen*) tussen deze objecten genoteerd met $\mathbf{Mor}_{\mathscr{C}}$. Gegeven $A,\ B \in \mathbf{Ob}(\mathscr{C})$ schrijven we $\mathbf{Mor}_{\mathscr{C}}(A,\ B)$ voor alle morfismen van A naar B.

3. Een samenstellingsoperator $\circ : \mathbf{Mor}_{\mathscr{C}}(A,\ B) \times \mathbf{Mor}_{\mathscr{C}}(A,\ B) \to \mathbf{Mor}_{\mathscr{C}}(A,\ B)$ die aan de volgende eigenschappen voldoet:

   (a) Associativiteit: voor $f \in \mathbf{Mor}_{\mathscr{C}}(A,\ B),\ g \in \mathbf{Mor}_{\mathscr{C}}(B,\ C),\ h \in \mathbf{Mor}_{\mathscr{C}}(C,\ D)$ geldt $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

   (b) Voor iedere $A \in \mathbf{Ob}(\mathscr{C})$ bestaat er een zogeheten *identiteitsmorfisme* $\mathbb{1}_A : A \to A$ zodanig dat voor alle $f \in \mathbf{Mor}_{\mathscr{C}}(A,\ A)$ geldt dat $f \circ \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_A \circ f = f$.

△

Voorbeeld 2.2. (Eindigdimensionale) vectorruimten. Een categorie die later van primair belang zal zijn is de categorie van (eindigdimensionale) vectorruimten over een lichaam $\mathbb{K}$, notatie: $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ met als morfismen de lineaire afbeeldingen tussen deze vectorruimten. Omdat samenstelling van lineaire afbeeldingen weer een lineaire afbeelding oplevert en iedere vectorruimte een identiteitsafbeelding heeft is dit inderdaad een categorie. △

Definitie 2.3. Een *diagram* is een verzameling objecten en morfismen grafisch weergegeven als hoekpunten resp. pijlen op het vlak. Het volgen van de pijlen in een diagram is equivalent met een samenstelling van afbeeldingen. △

Voorbeeld 2.4. De onderstaande afbeelding is een voorbeeld van een diagram waarin $A,\ B,\ C,\ D$ objecten zijn en $f,\ g,\ h,\ k$ morfismen van een ongenoemde categorie. Dit diagram heet *commutatief* indien de keuze van pijlen om van een object naar een ander te komen niet uitmaakt; in dit geval zou gelden dat $f \circ g = h \circ k$.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "k"] & B \arrow[d, "g"] \\
C \arrow[r, "h"] & D
\end{tikzcd}
$$

$\triangle$

Voorbeeld 2.5. Een andere categorie is die van groepen (objecten) en homomorfismen (morfismen): **Grp**. In dit geval kan de eerste isomorfismestelling als commutatief diagram weergegeven worden:

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"] & & H \\
& G/\operatorname{Ker} f \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"'] &
\end{tikzcd}
$$

De gestippelde lijn geeft hier aan dat het bestaan van $\tilde{f}$ geïmpliceerd wordt. Zodoende geldt dat $f = \tilde{f} \circ \pi$.

$\triangle$

Naast de morfismen binnen categorieën is het ook mogelijk om afbeeldingen tussen verschillende categorieën te beschouwen; de zogeheten *functoren*.

Definitie 2.6. Een *functor* $\mathcal{F}$ is een afbeelding $\mathcal{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ van een categorie $\mathscr{C}$ naar een categorie $\mathscr{D}$ zodanig dat:

1. Voor alle objecten $A \in \mathbf{Ob}(\mathscr{C})$, geldt $\mathcal{F}(A) \in \mathbf{Ob}(\mathscr{D})$.

2. Voor alle morfismen $f \in \mathbf{Mor}(\mathscr{C})$ en alle $A,\ B \in \mathbf{Ob}(\mathscr{C})$ met $f : A \to B$, geldt $\mathcal{F}(f) \in \mathbf{Mor}(\mathscr{D})$ met $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(A) \to \mathcal{F}(B)$.

3. Samenstellingen blijven behouden: $f,\ g$

4. Identiteitsmorfismen blijven behouden: $\mathcal{F}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{1}_{\mathcal{F}(A)}$.

$\triangle$

Voorbeeld 2.7. Zij $\mathscr{C}$ een willekeurige categorie, dan is $\mathrm{id}_{\mathscr{C}} : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ de functor die ieder object en ieder morfisme in $\mathscr{C}$ op zichzelf afbeeldt. $\triangle$

Voorbeeld 2.8. We noemen **Top** de categorie van gepunte, samenhangende topologische ruimten met als morfismen de continue afbeeldingen. De *fundamentele-groepsfunctor* is de functor $\mathcal{F}$: **Top** $\to$ **Grp** die topologische ruimten naar hun fundamentele groep stuurt en continue afbeeldingen naar geïnduceerde homomorfismen. Normaal staat **Top** voor algemene topologische ruimten, maar als de eigenschap dat deze ruimten gepunt en samenhangend zijn vervallen is de fundamentele-groepsfunctor niet langer welgedefinieerd. $\triangle$

2.1 Symmetrische Monoïdale Categorieën

Om de theorie van TQFT's volledig uit te drukken in categorietheoretische taal is er nog nood aan de definitie van symmetrische, monoïdale categorieën en de bijbehorende functoren. Monoïden zijn verzamelingen uitgerust met een associatieve operator en een eenheidselement. De symmetrie in deze definitie duidt op die van de monoïde operator.

Definitie 2.9. Een *productcategorie* is een categorie bestaande uit paar $\mathscr{C} \times \mathscr{D}$ van categorieeën, waarin de objecten en morfismen componentsgewijs zijn gedefiniëerd:

1. Voor alle $A \in \mathbf{Ob}(\mathscr{C}),\ B \in \mathbf{Ob}(\mathscr{D})$ definiëert $(A,\ B)$ een object in $\mathscr{C} \times \mathscr{D}$.
2. Voor alle $f \in \mathbf{Mor}_{\mathscr{C}}(A,\ A'),\ g \in \mathbf{Mor}_{\mathscr{D}}(B,\ B')$ definiëert $(f,\ g)$ een morfisme $(f,\ g) \in \mathbf{Mor}_{\mathscr{C}\times\mathscr{D}}((A,\ B),\ (A',\ B'))$.
3. Zij $f : A \to B$, $g : B \to C$ en $f' : A' \to B'$, $g;: B' \to C'$ dan geldt $(f,\ f') \circ (g,\ g') = (f \circ g,\ f' \circ g')$.
4. $\mathbb{1}_{(A,\ B)} = (\mathbb{1}_A,\ \mathbb{1}_B)$.

Een functor $\mathcal{F} : \mathscr{C} \times \mathscr{D} \to \mathscr{E}$ heet een *bifunctor*. $\triangle$

Definitie 2.10. Een *monoïdale categorie* is een categorie $\mathscr{C}$ samen met een *bifunctor* $\mu : \mathscr{C} \times \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ zodanig dat $\mu(\mu(A,\ B),\ C) \simeq \mu(A,\ \mu(B,\ C))$, waarbij '$\simeq$' duidt op het natuurlijke isomorfisme, een object $\mathbf{1} \in \mathbf{Ob}(\mathscr{C})$ en een afbeelding $\eta : \mathbf{1} \to \mathscr{C}$ die als identiteit fungeert. Ofwel, de volgende diagrammen commuteren:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathscr{C} \times \mathscr{C} \times \mathscr{C} \arrow[dl, "\mathrm{id}_{\mathscr{C}} \times \mu"'] \arrow[dr, "\mu \times \mathrm{id}_{\mathscr{C}}"] & \\
\mathscr{C} \times \mathscr{C} \arrow[dr, "\mu"'] & & \mathscr{C} \times \mathscr{C} \arrow[dl, "\mu"] \\
 & \mathscr{C} &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \times \mathscr{C} \arrow[r, "\eta \times \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & \mathscr{C} \times \mathscr{C} \arrow[dl, "\mu"] \\
\mathscr{C} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathscr{C} \times \mathscr{C} \arrow[dr, "\mu"'] & \mathscr{C} \times \mathbf{1} \arrow[l, "\mathrm{id} \times \eta"'] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
 & \mathscr{C}
\end{tikzcd}$$

$\triangle$

Definitie 2.11. Een monoïdale categorie $\mathscr{C}$ heet *symmetrisch* als er voor ieder paar objecten $A,\ B \in \mathbf{Ob}(\mathscr{C})$ een isomorfisme $s_{AB} : A \coprod B \to B \coprod A$ bestaat dat het volgende diagram laat commuteren:

$$\begin{tikzcd}
B \coprod C \coprod A & A \coprod B \coprod C \arrow[l, "s_{A(B \coprod C)}"'] \arrow[r, "s_{(A \coprod B)C}"] \arrow[dl, "s_{AB} \coprod \mathrm{id}_C"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_A \coprod s_{BC}"'] & C \coprod A \coprod B \\
B \coprod A \coprod C \arrow[u, "\mathrm{id}_B \coprod s_{AC}"] & & A \coprod C \coprod B \arrow[u, "s_{AC} \coprod \mathrm{id}_B"']
\end{tikzcd}$$

en waarvoor verder geldt dat $s_{AB} \circ s_{BA} = \mathrm{id}_{A \coprod B}$ en verder dat voor morfismen $f : A \to B,\ g : A' \to B'$ het diagram

$$\begin{tikzcd}
A \coprod B \arrow[r, "s_{AB}"] \arrow[d, "f \coprod g"'] & B \coprod A \arrow[d, "g \coprod f"] \\
A' \coprod B' \arrow[r, "s_{A'B'}"] & B' \coprod A'
\end{tikzcd}$$

commuteert. Deze laatste eigenschap betekent dat de wisselafbeeldingen s_{AB} *natuurlijk* zijn: ze werken 'voorspelbaar' of morfismen.

$\triangle$

Voorbeeld 2.12. Een belangrijk voorbeeld van een symmetrische, monoïdale categorie is een uitbreiding van een eerder voorbeeld dat later in deze scriptie belangrijk wordt: de categorie ($\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$, $\otimes$, $\mathbb{K}$, τ). Dit zijn de vectorruimten over $\mathbb{K}$ en hun lineaire afbeeldingen uitgerust met het tensorproduct $\otimes$ en $\tau : A \otimes B \to B \otimes A$. Per definitie geldt dat $A \otimes \mathbb{K} = \mathbb{K} \otimes A = A$ en dus fungeert de vectorruimte $\mathbb{K}$ als een identiteit voor de monoïdale operator $\otimes$.

$\triangle$

Opmerking 2.13. De zojuist gegeven definitie is in werkelijkheid die van een *strikt monoïdale categorie*. Een 'normale' monoïdale categorie heeft een algemenere definitie die te onwerkbaar is om hier te bespreken [2].

De monoïdale operator μ zal in het vervolg bij niet-abstracte categorieën aangeduid worden met het symbool '$\otimes$' of '$\coprod$' (tensorproducten van vectorruimten en disjuncte verenigingen van verzamelingen hebben een monoïdale structuur). Daarnaast moeten er speciale eigenschappen toegekend worden aan functoren tussen monoïdale categorieën; ze moeten de monoïdale structuur behouden.

Definitie 2.14. Een *monoïdale functor* is een functor tussen twee monoïdale categorieën zodanig dat de monoïdale structuur behouden blijft. Specifieker: Gegeven twee monoïdale categorieën $(\mathscr{C},\ \mu,\ \eta)$ en $(\mathscr{C}',\ \mu',\ \eta')$, dan heet een functor $\mathcal{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ monoïdaal, indien $\mu' = \mathcal{F}(\mu)$ en de volgende diagrammen commuteren:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C} \times \mathscr{C} \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[d, "\mu"'] & \mathscr{C}' \times \mathscr{C}' \arrow[d, "\mu'"] \\
\mathscr{C} \arrow[r, "\mathcal{F}"] & \mathscr{C}'
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\mathscr{C} \arrow[r, "\mathcal{F}"] & \mathscr{C}' \\
\mathbf{1} \arrow[u, "\eta"] & \mathbf{1} \arrow[u, "\mathcal{F}(\eta)"']
\end{tikzcd}$$

$\triangle$

We sluiten dit hoofdstuk af met de symmetrische eigenschap van de monoïdale functor.

Definitie 2.15. Een monoïdale functor $\mathcal{F}$ tussen twee symmetrische monoïdale categorieën $(\mathscr{C},\ \mu,\ \eta,\ s)$ en $(\mathscr{D},\ \mu',\ \eta',\ s')$ heet *symmetrisch*, indien $s' = \mathcal{F}(s)$ voor alle objecten $A,\ B \in \mathbf{Ob}\,(\mathscr{C})$ geldt dat $\mathcal{F}(s(A,\ B)) = s'(\mathcal{F}(A),\ \mathcal{F}(B))$.

$\triangle$

3 Cobordismen

Nu behandelen we de zogeheten *cobordismen*. Dit zijn variëteiten met een gemarkeerde binnen- en buitenrand. Omdat de rand van een variëteit met dimensie n een $n-1$-dimensionale deelvariëteit is, kan een cobordisme worden opgevat als een vervorming van de binnenrand naar de buitenrand. Volledigheidshalve beginnen we dit hoofdstuk met het herhalen van een essentiële definitie.

Definitie 3.1. Een n-dimensionale *variëteit* is een topologische ruimte X die Hausdorff en tweedst-aftelbaar is. Verder is X lokaal Euclidisch: voor ieder punt $x \in X$ bestaat er een open omgeving U rond x zodanig dat U homeomorf is met $\mathbb{R}^n$. Verder heet een variëteit *glad* als er voor iedere twee open verzamelingen U, V rond x met $\phi : U \approx \mathbb{R}^n$ en $\phi' : V \approx \mathbb{R}^n$ geldt dat $\phi \circ \phi'$ en $\phi' \circ \phi$ diffeomorfismen op $\mathbb{R}^n$ zijn.

$\triangle$

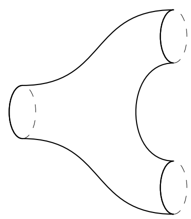
Nu kunnen we meteen de definitie van het cobordisme invoeren:

Definitie 3.2. Zij Σ, Σ' twee compacte, $(n-1)$-dimensionale, georiënteerde variëteiten, dan heet een compacte, n-dimensionale, georiënteerde variëteit met rand M (notatie $\Sigma \xrightarrow{M} \Sigma'$) een ($n$-dimensionale) *cobordisme*, indien er gladde functies $f : \Sigma \to \partial M$ en $f' : \Sigma' \to \partial M$ bestaan zodanig dat $f \coprod f' : \Sigma \coprod \Sigma' \to \partial M$ een diffeomorfisme is. $\triangle$

Deze definitie betekent het volgende: er bestaat een variëteit M die als rand $\Sigma \coprod \Sigma'$ heeft. Dat M georiënteerd is heeft betrekking op het feit dat Σ en Σ' de zogeheten *binnen*- respectievlijk *buitenrand* vormen[1]. Derhalve hoeft er niet te gelden dat $\Sigma \xrightarrow{M} \Sigma' = \Sigma' \xrightarrow{M} \Sigma$, omdat de binnen- en buitenrand omgewisseld zijn. Om onderscheid tussen een binnenrand Σ en buitenrand Σ' te maken, schrijven we $\Sigma \xrightarrow{M} \Sigma'$.

Voorbeeld 3.3. De definitie schrijft niet voor dat Σ, Σ' en M samenhangend hoeven te zijn. Een voorbeeld van een cobordisme tussen $\Sigma = S^1 \coprod S^1$ en $\Sigma' = S^1$ is

[1] Er zijn meerdere manieren om oriëntatie te visualiseren; bijvoorbeeld een pijl op de rand die naar binnen of naar buiten wijst. In deze scriptie komt oriëntatie overeen met de linker- (binnen-) of rechter- (buiten)rand.



$\triangle$

Zoals het bovenstaande voorbeeld wellicht doet vermoeden is het mogelijk om een gegeven cobordisme middels een continue afbeelding te vervormen tot een cobordisme die topologisch equivalent is. Om hier geen rekening te hoeven houden, voeren we een equivalentierelatie in:

Propositie 3.4. *Zij M, M' twee cobordismen van $\Sigma \to \Sigma'$. We schrijven $M \sim M'$ als er een diffeomorfisme $f : M \to M'$ bestaat dat de oriëntatie op de randen behoudt of specifieker; als het onderstaande diagram commuteert. De relatie $\sim$ definieert een equivalentierelatie op de verzameling van cobordismen in een willekeurig, maar vaste dimensie n.*

$$\begin{tikzcd}
& M & \\
\Sigma \arrow[ur] \arrow[dr] & & \Sigma' \arrow[ul] \arrow[dl] \\
& M \arrow[uu, "\simeq", "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Bewijs. Reflexiviteit: Stel $M' = M$, dan is $\mathrm{id} : M \to M$ een diffeomorfisme dat het bovenstaande diagram laat commuteren, dus $M \sim M$.
Transitiviteit: Stel $M \sim M'$ en $M' \sim M''$ met bijbehorende diffeomorfismen $f,\ g$. Dan commuteert het diagram

$$\begin{tikzcd}
& M'' & \\
\Sigma \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & M' \arrow[u, "\simeq", "g"'] & \Sigma' \arrow[ul] \arrow[l] \arrow[dl] \\
& M \arrow[u, "\simeq", "f"'] &
\end{tikzcd}$$

En dus geldt in het bijzonder dat $M \sim M''$ (als we M' weglaten en de samenstelling $g \circ f$ in de plaats zetten).

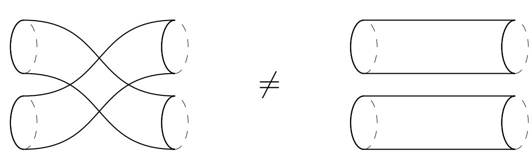
Symmetrie: Stel $M \sim M'$ onder diffeomorfisme f, dan is f^{-1} eveneens een diffeomorfisme. Daarnaast induceert f een diffeomorfisme op Σ en Σ' en door de bijectiviteit commuteert het bijbehorende diagram.

Conclusie: $\sim$ is een equivalentierelatie.

□

De verzameling (in het vervolg: *klasse*) van equivalentieklassen onder de zojuist gedefinieerde $\sim$ voor dimensie n noemen we **nCob**. In het vervolg zullen we ons alleen bezig houden met de klasse **2Cob**. Dit zijn de cobordismen van dimensie 2 en met eendimensionale rand: disjuncte verenigingen van cirkels.

Voorbeeld 3.5. De twee onderstaande cobordismen zijn niet equivalent. Hoewel beide cobordismen diffeomorf zijn, bestaat er geen diffeomorfisme dat de randen behoudt:



△

Voorbeeld 3.6. Zij Σ, Σ' twee eendimensionale, compacte, georiënteerde variëteiten die diffeomorf zijn. Dan bestaat er een cobordisme $\Sigma \xrightarrow{I} \Sigma'$ dat diffeomorf is met de cylinder $\Sigma \times [0,\ 1]$. Dit cobordisme bestaat uit een disjuncte vereniging van cylinders tussen twee randen met precies even veel kopieën van cirkels. Dit zal later in deze scriptie bewezen worden.

$\triangle$

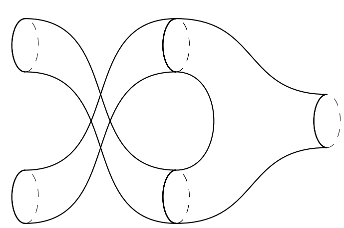
3.1 Operaties op Cobordismen

Ontbinding van cobordismen Een belangrijke operatie op de klasse van cobordismen is ontbinding. Dat wil zeggen: gegeven een cobordisme $\Sigma \xrightarrow{M} \Sigma''$ bestaan er twee cobordismen $\Sigma \xrightarrow{M_0} \Sigma' \xrightarrow{M_1} \Sigma''$ zodanig dat $M_0 M_1 \approx M$ ($M_0 M_1$ is een samengesteld cobordisme, dit wordt gedefinieerd in de volgende paragraaf). De ontbinding van cobordismen is noodzakelijk voor de hieropvolgende paragraaf over samenstellingen. We beginnen met een belangrijke definitie.

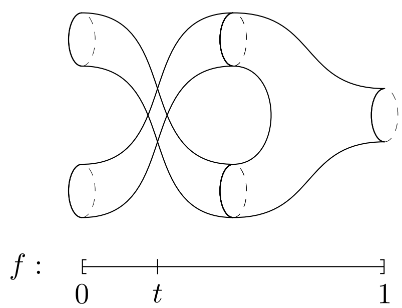
Definitie 3.7. Een gladde functie $f : M \to [0,\ 1]$ met M een compacte variëteit heet een *Morsefunctie* als alle kritieke punten van f niet-gedegenereerd zijn. $\triangle$

In het bijzonder kijken we naar Morsefuncties f van cobordismen $\Sigma \xrightarrow{M} \Sigma'$ zodanig dat $f^{-1}(0) = \Sigma$ en $f^{-1}(1) = \Sigma'$. Gegeven een dergelijke Morsefunctie op een n-dimensionaal cobordisme $\Sigma \xrightarrow{M} \Sigma'$ en een niet-kritieke waarde $x \in]0,\ 1[$ volgt uit de submersiestelling dat $f^{-1}(x)$ een $n-1$-dimensionale deelvariëteit is (zonder rand). Nu kan dit cobordisme M opgesplits worden: $M = M_0 M_1$ met $\Sigma \xrightarrow{M_0} f^{-1}(x) \xrightarrow{M_!} \Sigma'$.

De cobordismen die we tot nu toe hebben gezien en die we in het vervolg nog zullen zien worden telkens weergegeven als een immersie in $\mathbb{R}^2$, bijvoorbeeld:



Nu kunnen we een functie f definiëren van dit cobordisme naar $[0,\ 1]$ door aan ieder punt op het cobordisme de horizontale coördinaat in de submersie toe te kennen:



In het voorbeeld hierboven zou $f^{-1}(\frac{1}{2})$ overeenkomen met de variëteit $S^1 \coprod S^1$.

Op de coördinaat t kruist het beeld van het cobordisme onder de immersie zichzelf; dit is ogenschijnlijk: we beschouwen cobordismen slechts als abstracte variëteiten en in werkelijkheid gaan de desbetreffende cylinders dan ook langs elkaar heen. Er geldt dan ook niet $f^{-1}(t) \simeq S^1$, maar $f^{-1}(t) \simeq S^1 \coprod S^1$.

Samenstellingen van cobordismen Een andere, wellicht belangrijkere, operatie op **2Cob** is de *samenstelling*. Intuïtief gezien kan men twee cobordismen $\Sigma \xrightarrow{M} \Sigma'$ en $\Sigma' \xrightarrow{M'} \Sigma''$ aan elkaar plakken langs de rand Σ' die door M en M' wordt gedeeld. De eerder genoemde Morsefuncties zijn een belangrijk middel. Allereerst een stelling zonder bewijs ontleend aan [3]:

Lemma 3.8 (*The Collar Neighbourhood Theorem*)**.** *Op ieder cobordisme $\Sigma \xrightarrow{M} \Sigma'$ bestaat een Morsefunctie f zodanig dat voor een voldoende kleine $\epsilon > 0$ de deelvariëteit $V = f^{-1}(\epsilon)$ een ontbinding $\Sigma \xrightarrow{C} V \xrightarrow{M'} \Sigma'$ met de eigenschap dat $C \sim \Sigma \times [0,\ 1]$ en $M' \sim M$.*

Het bovenstaande lemma omschrijft de zogeheten *cylinderontbinding*. Meer specifiek is dit de *linker* cylinderontbinding. Eenzelfde lemma kan geformuleerd worden indien voor een Morsefunctie en een $0 < \epsilon < 1$ dicht genoeg bij 1, zodat er aan de rechterkant een cylinder afgesplitst kan worden.

Stelling 3.9. *Zij $\Sigma \xrightarrow{M_0} \Sigma'$ en $\Sigma' \xrightarrow{M_1} \Sigma''$ twee cobordismen in* **2Cob***, dan bestaat er een samengesteld cobordisme $\Sigma \xrightarrow{M_0 M_1} \Sigma''$. Deze samenstelling is welgedefinieerd op de klasse* **2Cob**

Bewijs. Allereerst bewijzen we het bestaan van een dergelijke samenstelling en een bijbehorende gladde structuur. Vervolgens tonen we aan dat deze gladde structuur uniek is en tenslotte tonen we welgedefinieerdheid aan. *Existentie*: We gebruiken het voorgaande lemma om voor M_0 een rechter- en voor M_1 een linker cylinderontbinding te verkrijgen:

$$\left(\Sigma \xrightarrow{M_0} \Sigma'\right) \sim \left(\Sigma \xrightarrow{M_0} \Sigma' \xrightarrow{I} \Sigma'\right), \quad \left(\Sigma' \xrightarrow{M_1} \Sigma''\right) \sim \left(\Sigma' \xrightarrow{I} \Sigma' \xrightarrow{M_1} \Sigma''\right).$$

Nu definiëren we $M_0M_1 := M_0 \coprod M_1/\Sigma'$. Hierbij verklaart de modulo Σ twee elementen in $M_0 \coprod M_1$ equivalent als ze hetzelfde origineel hebben in de natuurlijke inbeddingen $\Sigma' \hookrightarrow M_0 \hookrightarrow M_0 \coprod M_1$ en $\Sigma' \hookrightarrow M_1 \hookrightarrow M_0 \coprod M_1$.

De zojuist gegeven cylinderontbindingen geven ons inbeddingen $g_1 : \Sigma' \times]0,\ 1] \to M_0M_1$ en $g_2 : \Sigma' \times [0,\ 1[\to M_0M_1$ voor de linker- en rechterontbinding respectievelijk. Nu definiëren we

$$h : \Sigma' \times]0,\ 2[\to M_0M_1,$$
$$h(x,\ t) = \begin{cases} g_1(x,\ t) & \text{als } t \leq 1, \\ g_2(x,\ t-1) & \text{als } t \geq 1. \end{cases}$$

Voor alle punten op M_0M_1 buiten het beeld van Σ' wordt de gladde structuur gegeven door die van hun origineel in M_0 of M_1. De verkaartingen rond punten op $\Sigma' \hookrightarrow M_0M_1$ die h tot gladde functie maakt, maken M_0M_1 tot variëteit.

Uniciteit: Dat de zojuist geconstrueerde gladde structuur uniek is, kan in zijn algemeenheid bewezen worden. Maar het feit dat we werken in de klasse **2Cob** stelt ons in staat gebruik te maken van het feit dat alle laagdimensionale (≤ 3) variëteiten een unieke gladde structuur hebben. Zie bijvoorbeeld de truc van Kirby[4].

Welgedefinieerdheid: Stel we hebben $M_0' \sim M_0$ en $M_1' \sim M_1$, er dient bewezen te worden dat $M_0'M_1' \sim M_0M_1$.

We kunnen op dezelfde manier cylinderontbindingen maken voor M_0' en M_1':

$$\left(\Sigma \xrightarrow{M_0'} \Sigma'\right) \sim \left(\Sigma \xrightarrow{M_0'} \Sigma' \xrightarrow{I} \Sigma'\right), \quad \left(\Sigma' \xrightarrow{M_1'} \Sigma''\right) \sim \left(\Sigma' \xrightarrow{I} \Sigma' \xrightarrow{M_1'} \Sigma''\right).$$

Verder weten we dat

$$\left(\Sigma \xrightarrow{M_0'} \Sigma' \xrightarrow{I} \Sigma'\right) \sim \left(\Sigma \xrightarrow{M_0} \Sigma' \xrightarrow{I} \Sigma'\right)$$
$$\left(\Sigma' \xrightarrow{I} \Sigma' \xrightarrow{M_1'} \Sigma''\right) \sim \left(\Sigma' \xrightarrow{I} \Sigma' \xrightarrow{M_1} \Sigma''\right).$$

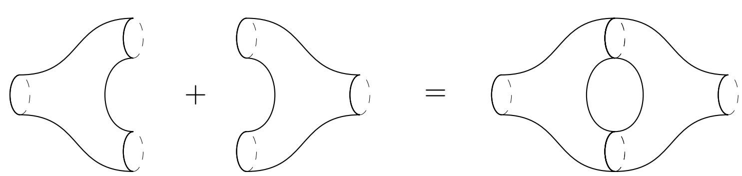
Maar, zoals te zien is onder *uniciteit*, is de geconstrueerde gladde structuur uniek en dus $M_0M_1 \sim M_0'M_1'$

□

Opmerking 3.10. De plakconstructie uit het voorgaande bewijs berust op de eigenschap dat er een omgeving rond de gedeelde rand bestaat die diffeomorf is met een cylinder; dit betekent dat een linker cylinderontbinding geen invloed heeft op de rechterrand en omgekeerd. Hieruit volgt dat samenstelling van cobordismen de associatieve eigenschap bezit: $(M_0M_1)M_2 = M_0(M_1M_2) = M_0M_1M_2$.

Opmerking 3.11. Beschouw een cobordisme $\Sigma \xrightarrow{M} \Sigma'$ en $\Sigma' \xrightarrow{I} \Sigma'$ met $I = \Sigma' \times [0,\ 1]$, dan zien we dat MI ontbonden kan worden als $\Sigma \xrightarrow{M} \Sigma' \xrightarrow{J} \Sigma' \xrightarrow{I} \Sigma'$ waar J een cylindercobordisme is. Maar J en I kunnen eenvoudig worden 'samengetrokken' tot een enkele cylinder: $JI \sim J$ en hieruit volgt dat $MI \sim M$. Een cylindercobordisme werkt dus als identiteit bij samenstellingen.

Voorbeeld 3.12. Door het samenstellen van de onderstaande cobordismen (twee *pair of pants* beide met andere oriëntatie) krijgt men een cobordisme $S^1 \xrightarrow{M} S^1$:



△

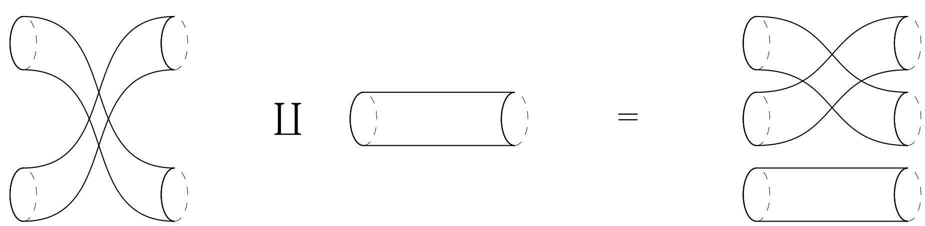
3.2 De Categorie 2Cob

Deze sectie is gewijd aan het beschrijven van de categoriestructuur op de klasse **2Cob**. In hoofdstuk 1 zijn de definities voor symmetrische, monoïdale categorieën en functoren ingevoerd en deze zullen we hier toepassen.

Objecten en Morfismen Categorieën bestaan uit objecten en morfismen. We definiëren de categorie **2Cob** (we gebruiken dezelfde notatie als voor de klasse **2Cob**) als volgt:

1. De objecten in **2Cob** zijn 1-dimensionale compacte georiënteerde variëteiten.
2. De morfismen $\Sigma \xrightarrow{M} \Sigma'$ zijn de cobordismen.
3. Het cylindercobordisme $\Sigma \xrightarrow{\Sigma \times I} \Sigma$ fungeert als identiteit op Σ.
4. In de vorige sectie is al bewezen dat samenstelling welgdefinieerd is in **2Cob** en dat samenstelling associatief is.

Monoïdale en symmetrische structuur De monoïdale structuur op **2Cob** wordt gegeven door het nemen van disjuncte verenigingen: Stel $\Sigma_1 \xrightarrow{M} \Sigma_1'$ en $\Sigma_2 \xrightarrow{N} \Sigma_2'$ zijn twee cobordismen, dan is hun disjuncte vereniging $\Sigma_1 \coprod \Sigma_2 \xrightarrow{M \coprod N} \Sigma_1' \coprod \Sigma_2'$ weer een cobordisme. Voor het gemak is hieronder een illustratie weergegeven:



De identiteit onder deze monoïde structuur is het lege cobordisme $\emptyset$. De eerder gedefinieerde samenstelling van cobordismen kan gezien worden als een *serieschakeling*, terwijl het nemen van disjuncte verenigingen gezien kan worden als *parallelschakeling*.

Het is geen gegeven dat de disjuncte vereniging van twee cobordismen (of zelfs: van twee verzamelingen) symmetrisch is: $M \coprod N \neq N \coprod M$, maar er bestaat wel een voor de hand liggende afbeelding tussen de symmetrische kopieën die we nu zullen invoeren. Eerder, in voorbeeld 3.6, hebben we gezien dat diffeomorfismen tussen randen, zeg Σ en Σ', cobordismen induceren. Op dezelfde wijze bestaat er een diffeomorfisme $T : \Sigma \coprod \Sigma' \to \Sigma' \coprod \Sigma$.

Een symmetrische structuur op **2Cob** kan worden aangebracht door een operator te definiëren die afzonderlijk de linkerranden omwisselt en de rechterrand ongeroerd laat:

Definitie 3.13. Een *wissel* of *twist* is een natuurlijk diffeomorfisme $T : \Sigma \coprod \Sigma' \to \Sigma' \coprod \Sigma$ die Σ en Σ' verwisselt. De term 'natuurlijk' betekent hier dat T hetzelfde werkt als het algemene isomorfisme $A \coprod B \xrightarrow{\sim} B \coprod A$ tussen twee verzamelingen. Op gelijke wijze als bij eenvoudige diffeomorfismen, induceert T een zogenaamd *wisselcobordisme* $\Sigma \coprod \Sigma' \xrightarrow{T} \Sigma' \coprod \Sigma$. △

Gevolg 3.14. *De wissel* $T : \Sigma \coprod \Sigma' \to \Sigma' \coprod \Sigma$ *is inverteerbaar, met inverse de wissel* $T^{-1} : \Sigma' \coprod \Sigma \to \Sigma \coprod \Sigma'$. *Verder geldt dat*

$$\Sigma \coprod \Sigma' \xrightarrow{T} \Sigma' \coprod \Sigma \xrightarrow{T^{-1}} \Sigma \coprod \Sigma' = \Sigma \coprod \Sigma' \xrightarrow{I} \Sigma \coprod \Sigma'.$$

Met I het cylindercobordisme.

Omdat we compacte 1-variëteiten en hun cobordismen als categorie hebben gedefinieerd, kunnen we werken met diagrammen in **2Cob**. De volgende propositie bewijst een belangrijke eigenschap van de wisseloperator en is vervat in een diagram.

Lemma 3.15. *Gegeven cobordismen* $\Sigma_0 \xrightarrow{M} \Sigma_0'$ *en* $\Sigma_1 \xrightarrow{M'} \Sigma_1'$ *en wisselcobordismen* S, T, *dan commuteert het volgende diagram:*

$$\begin{tikzcd}
\Sigma_0 \coprod \Sigma_1 \arrow[r, "M \coprod M'"] \arrow[d, "T"] & \Sigma_0' \coprod \Sigma_1' \arrow[d, "S"] \\
\Sigma_1 \coprod \Sigma_0 \arrow[r, "M' \coprod M"] & \Sigma_1' \coprod \Sigma_0'
\end{tikzcd}$$

Bewijs. Het weergegeven diagram betekent dat de samengestelde cobordismen $\Sigma_0 \coprod \Sigma_1 \xrightarrow{T(M' \coprod M)} \Sigma_1' \coprod \Sigma_0'$ and $\Sigma_0 \coprod \Sigma_1 \xrightarrow{(M' \coprod M)S} \Sigma_1' \coprod \Sigma_0'$ equivalent zijn. Nu kunnen we het eerder genoemde feit dat het wisselcobordisme inverteerbaar is gebruiken, om de pijl (het cobordisme) S om te keren, opdat we moeten bewijzen dat

$$\Sigma_0 \coprod \Sigma_1 \xrightarrow{T(M' \coprod M)S^{-1}} \Sigma_0' \coprod \Sigma_1' = \Sigma_0 \coprod \Sigma_1 \xrightarrow{M \coprod M'} \Sigma_0' \coprod \Sigma_1'.$$

We beschrijven dit in een diagram zoals in 3.4:

$$\begin{tikzcd}
 & M \coprod M' & \\
\Sigma_0 \coprod \Sigma_0' \arrow[ur] \arrow[d] & & \Sigma_1 \coprod \Sigma_1' \arrow[ul] \arrow[d] \\
\Sigma_0' \coprod \Sigma_0 \arrow[r] & M' \coprod M \arrow[uu, dashed, "f"'] & \Sigma_1' \coprod \Sigma_1 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

De functie f op de stippellijn moet een diffeomorfisme zijn dat het diagram laat commuteren en het wisseldiffeomorfisme $f : M \coprod M' \to M' \coprod M$ is precies zo'n functie.

□

3.3 Voortbrengers van 2Cob

In dit deel zullen we beschrijven hoe de categorie **2Cob** gegenereerd kan worden door een aftelbaar aantal objecten en een eindig aantal morfismen. Dit principe is sterk vergelijkbaar met eindig gegeneerde groepen.

Net zoals in een eerder deel de klasse **2Cob** werd gedefinieerd door een equivalentierelatie te definiëren op cobordismen, zullen we nu een equivalentierelatie definiëren op de 1-dimensionale variëteiten die de randen zijn van de cobordismen in **2Cob**. Dit is geen lastige opgave: al deze variëteiten zijn diffeomorf met een disjuncte vereniging van $n \geq 0$ cirkels: $\coprod_n S^1$. Als we deze equivalentierelatie uit **2Cob** wegdelen verkrijgen we het *skelet* van de categorie **2Cob** waarin de morfismen door een eindig aantal pijlen voortgebracht kunnen worden.

Definitie 3.16. Een *skelet* $\mathscr{D}$ van een categorie $\mathscr{C}$ is een categorie zodanig dat:

1. het skelet $\mathscr{D}$ een deelcategorie is van $\mathscr{C}$: $\mathbf{Ob}\,(\mathscr{D}) \subset \mathbf{Ob}\,(\mathscr{C})$ en voor alle $A,\ B \in \mathbf{Ob}\,(\mathscr{D})$ geldt dat $\mathbf{Mor}_{\mathscr{D}}(A,\ B) \subset \mathbf{Mor}_{\mathscr{C}}(A,\ B)$.
2. Alle morfismen voor de objecten in $\mathscr{D}$ blijven behouden: $\mathbf{Mor}_{\mathscr{D}}(A,\ B) = \mathbf{Mor}_{\mathscr{C}}(A,\ B)$.
3. Voor alle $A \in \mathbf{Ob}\,\mathscr{C}$ bestaat er een unieke $B \in \mathbf{Ob}\,(\mathscr{D})$ zodat $A \simeq B$.

$\triangle$

De eerste en laatste eigenschap in de definitie impliceren dat voor alle $A,\ B \in \mathbf{Ob}(\mathscr{D})$ met $A \neq B \implies A \not\simeq B$.

Voorbeeld 3.17. De categorie van eindige verzamelingen **FinSet** heeft als skelet de ordinaalgetallen. $\triangle$

Topologische classificatie van cobordismen We zullen hier gebruik maken van een stelling betreft classificatie van tweedimensionale gesloten, oppervlakken:

Stelling 3.18 (Het ZIP bewijs van Conway[5])**.** *Een gesloten, tweedimensionaal oppervlak zonder rand is diffeomorf met een van de volgende oppervlakken:*

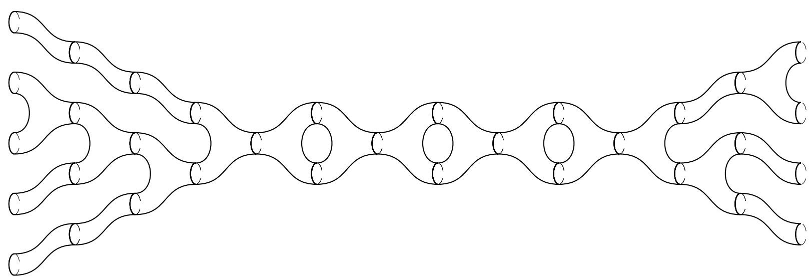
1. *De 2-sfeer.*
2. *De verbonden som van een eindig aantal torussen.*
3. *De verbonden som van een eindig aantal projectieve vlakken.*

Voordat deze stelling gebruikt kan worden moet er rekening gehouden worden met het feit dat cobordismen variëteiten met rand zijn en dat er onderscheid tussen binnen- en buitenrand wordt gemaakt. Gelukkig blijkt een oplossing vrij eenvoudig te implementeren: de randcomponenten van 2-cobordismen zijn cirkels en daarom kan een rand verkregen worden door een open schijf te verwijderen uit een oppervlak. Men kan een dergelijke schijf vrijelijk bewegen over het oppervlak, opdat oppervlakken met rand volledig geclassificeerd kunnen worden door de voorgaande stelling plus het aantal verwijderde schijven. Als we vervolgens onderscheid maken tussen binnen- en buitenrand en opmerken dan cobordismen georiënteerd zijn, komen we uit op het volgende:

Gevolg 3.19. *Twee samenhangende, tweedimensionale cobordismen zijn equivalent indien zij hetzelfde genus en hetzelfde aantal binnen- en buitenranden hebben.*

Het is belangrijk om te spreken over *samenhangende* cobordismen, om bijvoorbeeld twee parallele cylinders en de wissel uit te sluiten (zie 3.5). De onsamenhangde cobordismen zullen in de volgende paragraaf behandeld worden.

Gegeven deze stelling, kunnen we ieder samenhangend cobordisme omzetten in een normaalvorm, zie bijvoorbeeld het onderstaande figuur:

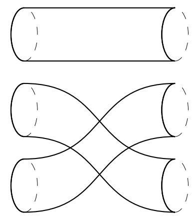


Niet-samenhangende cobordismen Nu behandelen we niet-samenhangende cobordismen. Er zal blijken dat er nog steeds een normaalvorm te vinden valt, maar dat hiervoor iets meer arbeid verricht moet worden.

Propositie 3.20. *Twee randen Σ en Σ' zijn diffeomorf dan en slechts dan als er een inverteerbaar cobordisme $\Sigma \xrightarrow{\sigma} \Sigma'$ bestaat. In de situatie* **2Cob** *betekent dit dat Σ en Σ' beide equivalent zijn aan de disjuncte vereniging van n cirkels.*

Bewijs. $' \Longrightarrow'$: Stel $\Sigma \simeq \Sigma'$, dan bestaat er een cylinder $\Sigma \xrightarrow{I} \Sigma'$ die inverteerbaar is.
$' \Longleftarrow'$: Stel nu dat $\Sigma \xrightarrow{\sigma} \Sigma'$ inverteerbaar is. Indien σ samenhangend is geldt dat $\sigma\sigma^{-1} \sim \Sigma \times [0,\ 1]$ met $\sigma\sigma^{-1}$ eveneens samenhangend, dus Σ bestaat uit een enkel component. Eenzelfde redenering houdt stand voor Σ'.

Stel nu dat σ uit meerdere samenhangende componenten bestaat. We kunnen met iedere samenhangende component in Σ en Σ' een getal associëren dat overeenstemt met de samenhangende component in σ. Nu kunnen we σ samenstellen met één of meerdere *permutatiecobordismen*: een parallele vereniging van wissels en cylinders (zie onderstaand figuur voor een voorbeeld).



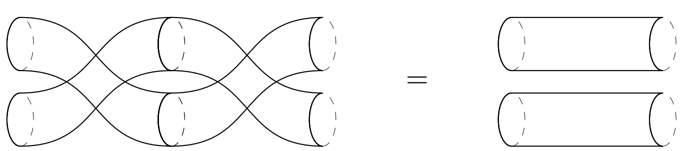
Figuur 1: Een permutatiecobordisme dat overeenkomt met de permutatie (23).

Dit permutatiecobordisme *permuteert* deze samenhangende componenten (vandaar de notatie σ). We kiezen daartoe een permutatiecobordisme T voor de binnenrand die de samenhangende componentent sorteert en een ander permutatiecobordisme S voor de buitenrand die dezelfde sortering oplevert. In dit geval geldt dat $S\sigma T$ bestaat uit een disjuncte vereniging van cobordismen die een inverse $T^{-1}\sigma^{-1}S^{-1}$ heeft. Hieruit blijkt dat alle samenhangend componenten inverteerbaar zijn en in het bijzonder dat de binnen- en buitenrand van σ uit een gelijk aantal samenhangende componentent bestaat.

□

Stel nu dat we een niet-samenhangend cobordisme $\Sigma \xrightarrow{M} \Sigma'$ hebben, dan kunnen we dezelfde redenering volgen als in het voorgaande bewijs: er bestaan permutatiecobordismen σ en τ zodanig dat $\Sigma \xrightarrow{\sigma M\tau} \Sigma'$ bestaat uit een disjuncte vereniging van samenhangende cobordismen. Derhalve kan $\sigma M\tau$ geschreven worden als een disjuncte vereniging van normaalvormen samengesteld met aan de binnenrand het permutatiecobordisme σ^{-1} en aan de buitenrand τ^{-1}.

Voorbeeld 3.21. Mogelijk het belangrijkste inverteerbare (sterker nog: idempotente) cobordisme is de wissel:

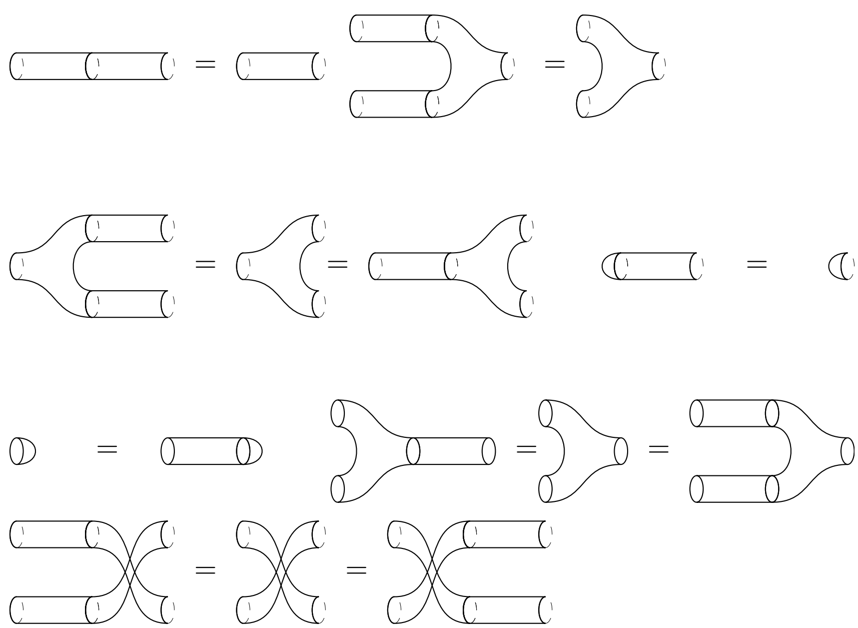


△

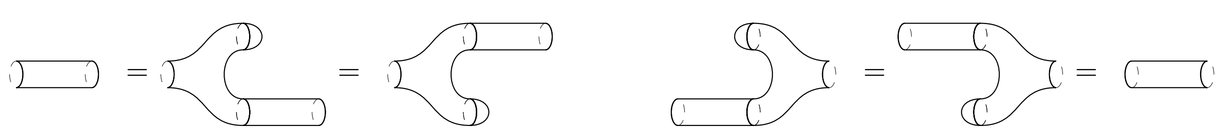
3.4 Relaties in 2Cob

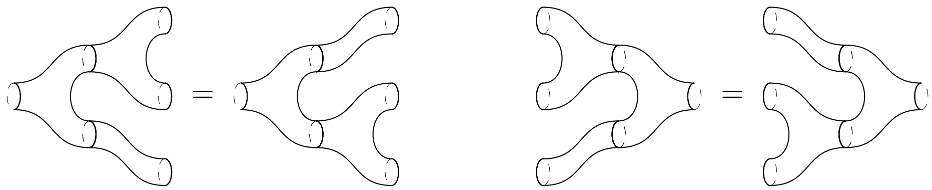
Hierond staan relaties aangegeven in de categorie **2Cob**; twee cobordismen zijn gerelateerd als ze equivalent zijn. Het bewijs hiervoor zal niet worden gegeven, omdat ze voor ieder figuur hetzelfde zijn: twee gerelateerde cobordismen hebben dezelfde normaalvorm. Het belang van de onderstaande relaties zal duidelijk worden in het volgende hoofdstuk over Frobeniusalgebra's.

Identiteiten Dit zijn relaties met één of meerdere cylinders.



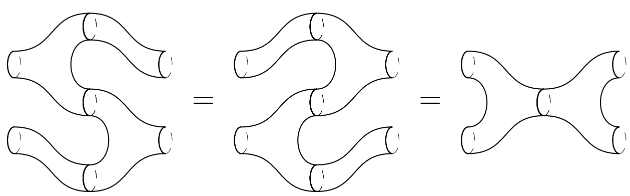
Eenheid en co-eenheid Deze identiteiten bevatten een cobordisme met een lege binnenrand óf een lege buitenrand.





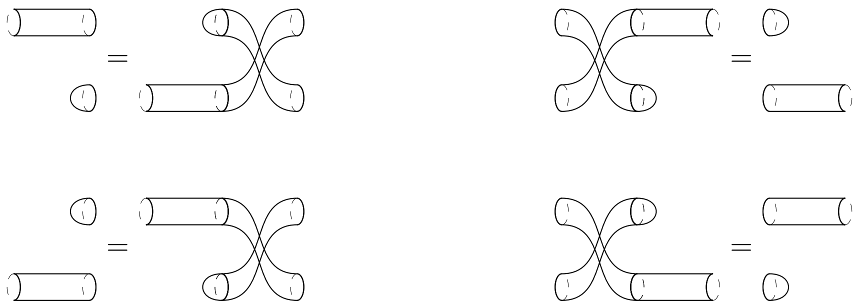
Associativiteit en coassociativiteit

Commutativiteit en cocommutativiteit

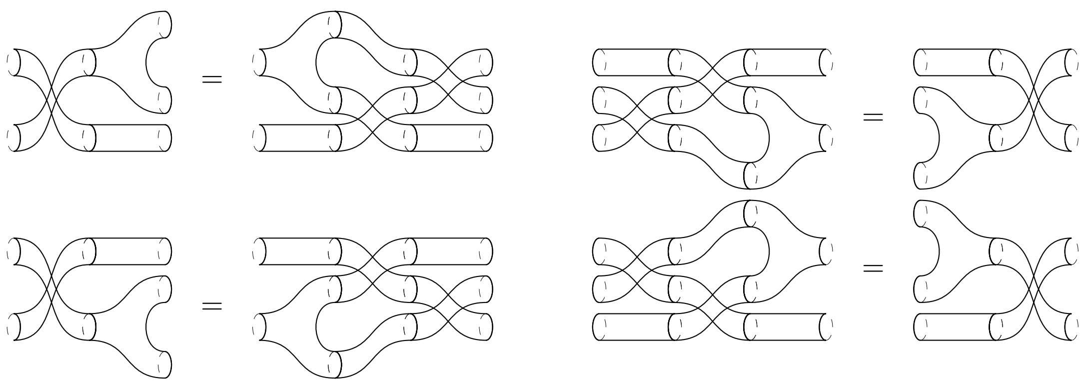


De Frobeniusrelatie

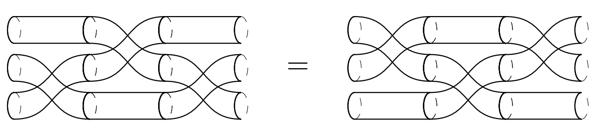
Relaties met een wisselcobordisme Uit lemma 3.15 volgde dat een wisselcobordisme gevolgd door een disjuncte vereniging cobordismen equivalent is met de disjuncte vereniging gevolgd door de wissel. De volgende relaties illustreren deze eigenschap.



Het elimineren van een wissel voor of na een *pair of pants*:



Tenslotte de volgende equivalentie met drie wissels:



Alle permutatiecobordismen kunnen worden opgevat als elementen van een symmetrische groep op n elementen. Stel $n = 3$ dan is bovenstaande equivalent met de relatie $(12)(23)(12) = (23)(12)(23)$.

3.4.1 Toereikendheid van de relaties

Het is mogelijk om oneindig veel relaties te beschrijven in **2Cob**, maar het is interessanter om een zo klein mogelijk aantal *basis*relaties te geven en te laten zien dat iedere mogelijke relatie is 'op te bouwen' uit deze basisrelaties. Deze toereikendheid van de basisrelaties is cruciaal voor de theorie die zal worden beschrijven in het hoofdstuk Tweedimensionale Topologische Kwantumveldtheorieën.

Tellen van de stukken We zullen aanvankelijk aannemen dat M samenhangend is. Dit betekent dat we het wisselcobordisme voorlopig buiten beschouwing kunnen laten. Verder zullen we het gebruik van cylinders in de onderstaande discussie negeren, omdat ze vrijelijk toegevoegd of weggelaten kunnen worden zonder he cobordisme te veranderen.

Zij M een cobordisme willekeurig opgedeeld in elementaire cobordismen. Veronderstel dat M n en m componenten in de binnen- resp. buitenrand heeft en dat verder M genus g heeft. We berekenen de Eulerkarakteristiek voor oppervlakken: $\chi(M) = 2-2g-n-m$. Het aantal  noemen we a, het aantal  noemen we b, het aantal  heet p en het aantal  heet q. Omdat de Eulerkarakteristiek voldoet aan het principe van insluiting en uitsluiting: $\chi(A \cup B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B)$ waar A, B zodanig gekozen kunnen worden dat $A \cap B$ een disjuncte verening van cylinders is en cylinders hebben Eulerkarakteristiek 0, volgt hieruit dat $2-2g-n-m = p+q-a-b$. Verder moeten de binnen- en buitenrand overeenstemmen waardoor $2b+a-q = n$ en $2a+b-p = m$. Herschrijven als $b+b+a = n+q$ en $a+a+b = m+p$ levert op dat $a+n+q = m+p+b$. In combinatie met wat volgde uit de Eulerkarakteristiek geeft dit:

$$a = m+g-1+p \quad b = n+g-1+q.$$

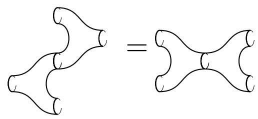
De bovenstaande getallen zijn allemaal positief of gelijk aan 0.

Verkrijgen van de normaalvorm Kies een  dat nog niet is 'verwerkt'. Is dit niet mogelijk dan zijn wel klaar. Is dit wé l mogelijk dan geldt een van de volgende gevallen:

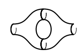
1. Een van de binnenranden is een cylinder. Deze kan vrijelijk worden weggelaten.

2. Een van de binnenranden is een *cap*. De samenstelling *cap + pair of pants* is equivalent met een cylinder: dit komt precies q keer voor.

3. Het geval

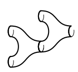


dat volgt uit toepassing van de Frobeniusrelatie.

4. Het geval 

   dat precies g keer voorkomt, omdat precies deze elementen het genus van M bepalen.

5. Het geval

   kan worden overgeslagen door naar de linker *pair of pants* over te stappen.

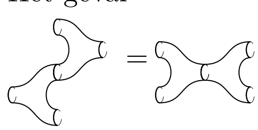
6. Het geval dat er geen cobordisme aan de linker binnenrand verbonden is: in dit geval stopt het algoritme en markeren we onze originele *pair of pants* als 'verwerkt'.

Als alle  zijn verwerkt op de bovenstaande manier, beschouwen we de . De taak is nu iets eenvoudiger, we hebben de situaties:

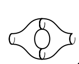
1. Een van de binnenranden is een cylinder. Deze kan vrijelijk worden weggelaten.

2. Een van de binnenranden is een *cup*. De samenstelling *cup + pair of pants* is equivalent met een cylinder: dit komt nu precies p keer voor.

3. Het geval

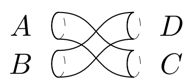
   

   kan niet voorkomen, omdat deze allemaal zijn verwerkt in de vorige stap

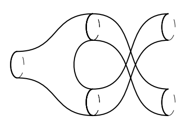
4. Hetzelfde geldt voor het geval .

5. De laatste twee gevallen van de vorige stap worden hetzelfde behandeld.

Eliminatie van de wisselcobordismen Voordat we een normaalvorm verkrijgen moeten we eerst alle wisselcobordismen wegwerken zodat het voorgaande proces ongehinderd uitgevoerd kan worden. Stel ons cobordisme M bevat een wissel

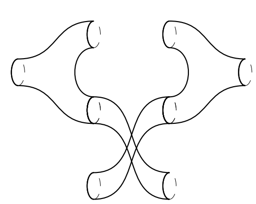


waar A, B, C en D de delen bevestigd aan de respectievelijke randen. Omdat M samenhangend is, moeten A en B, A en C, C en D of B en D aan elkaar gekoppeld zijn. Stel A en B zijn gekoppeld, dan bevat deze eenheid (genoteerd $A \cup B$) strikt minder wisselcobordismen dan M. Bij wijze van inductie nemen we aan dat A en B geen wisselcobordismen bevat. In dit geval heeft $A \cup B$ een normaalvorm waarbij de  aan de rechterkant van de normaalvorm zitten, waardoor in M de structuur

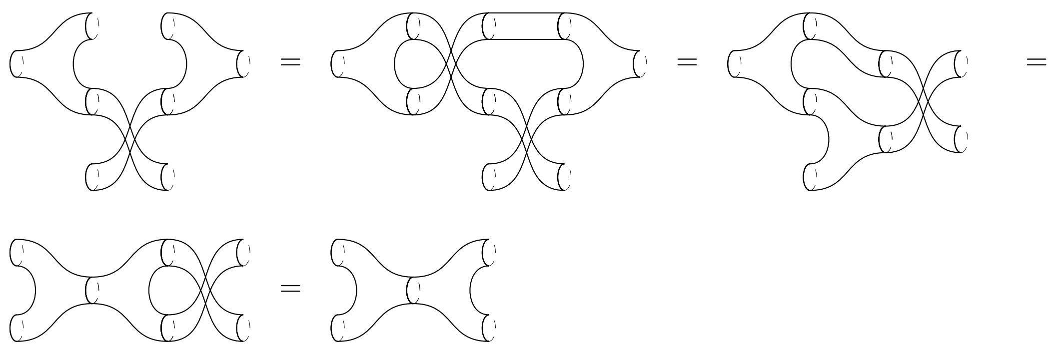


voorkomt. Uit de relatie van cocommutativiteit volgt dat dit equivalent is met . Ditzelfde kan op symmetrische wijze worden uitgevoerd voor het geval waarin C en D samengekoppeld zijn.

Stel nu dat A en C samenhangen. In dit geval geldt dat $A \cup C$ in normaalvorm gebracht kan worden en wel zó dat het onderstaande figuur hier deel van uitmaakt. De *pair of pants* die de wissel verbinden aan $A \cup C$ zitten niet aan de juiste kant van een normaalvorm, maar ze zijn de enige elementaire cobordismen die de wissel aan $A \cup C$ kunnen verbinden en dus kan worden aangenomen dat ze deel uitmaken van het cobordisme. Dat de bovenste cylinder, parallel aan de wissel, een cylinder is volgt uit de stappen beschreven in paragraaf 3.4.1.



Nu kunnen we achtereenvolgens cocommutativiteit, de *pair of pants* + wisselrelatie (paragraaf 3.4), de Frobeniusrelatie en weer cocommutativiteit gebruiken om tot het volgende te komen:



.

Middels recursie kunnen nu alle wisselcobordismen uit M weggewerkt worden.

Niet-samenhangende cobordismen Nu bespreken we de normaalvorm voor cobordismen die uit meerdere samenhangende componenten bestaan. Het moge duidelijk zijn dat ieder samenhangend component in een disjuncte vereniging van samenhangede cobordismen tot normaalvorm gereduceerd kan worden op de manier beschreven in de voorgaande paragrafen.

Zij M een niet-samenhangend cobordisme met binnenrand $\Sigma := \Sigma_1 \coprod \Sigma_2 \coprod \ldots \coprod \Sigma_n$ en buitenrand $\Sigma' := \Sigma'_1 \coprod \Sigma'_2 \coprod \ldots \coprod \Sigma'_m$, dan bestaan er permutatiecobordismen $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ en $\tau : \Sigma' \to \Sigma'$ zodanig dat $\sigma M \tau$ betsaat uit een disjuncte vereniging van cobordismen (zie 3.20). Zij N de normaalvorm voor dit cobordisme, dan geldt $\sigma^{-1} N \tau^{-1} \simeq M$ en dus is $\sigma^{-1} N \tau^{-1}$ een normaalvorm voor M. We herschrijven $M = \sigma\sigma^{-1} M \tau\tau^{-1}$ en gebruiken twee eigenschappen: ten eerste het feit dat het wisselcobordisme idempotent is; ten tweede de relatie met drie wissels (zie paragraaf 3.4). Dit zijn precies de relaties waaruit een permutatie opgebouwd kan worden en dus kan worden geconcludeerd dat $\sigma^{-1} N \tau^{-1}$ verkregen kan worden met de voorheen aangetoonde relaties.

4 Frobeniusalgebra's

Dit hoofdstuk is gewijd aan Frobenius Algebra's. In 1903 bewees Ferdinand Georg Frobenius dat er eindigdimensionale algebra's bestaan waarvoor de reguliere linker- en rechtervoorstelling equivalent zijn. Later werd door R. Brauer, C. Nesbitt en T. Nakayama herkend dat deze algebra's een interessante duale structuur bezitten en de eerste twee vernoemden deze algebra's naar Frobenius. Nog later werd het verband met topologische kwantumveldtheorieën aangetoond [6].

We beginnen met de definitie van een algemene algebra.

Definitie 4.1. Een *algebra* over een lichaam $\mathbb{K}$ is een vectorruimte A met een bilineaire operatie $\cdot : A \times A \to A$ die *vermenigvuldiging* heet. Deze vermenigvuldiging voldoet verder aan de volgende eigenschappen:

1. Er bestaat een eenheid $1_A \in A$ zodanig dat $1_A \cdot x = x \cdot 1_A$ voor alle $x \in A$.
2. Voor alle $x,\ y,\ z$ geldt $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (associativiteit).

Verder heet A commutatief als geldt dat $x \cdot y = y \cdot x$ voor alle $x,\ y \in A$. $\triangle$

Opmerking 4.2. Hoewel het normaal is om de vermenigvuldiging, zeg $v : A \times A \to A$, te schrijven als bilineaire afbeelding, zullen we in het vervolg spreken over een afbeelding $\mu : A \otimes A \to A,\ x \otimes y \mapsto x \cdot y$. Dit is mogelijk: zij $i : A \times A \to A \otimes A,\ (e_i,\ e_j) \mapsto e_i \otimes e_j$, dan is er een lineaire afbeelding μ zodanig dat het onderstaande diagram commuteert.

$$\begin{tikzcd} A \times A \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "v"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\ & A \end{tikzcd}$$

Lemma 4.3. *Zij A een eindigdimensionale $\mathbb{K}-$algebra. Dan zijn de volgende beweringen equivalent:*

1. *Er bestaat een lineaire vorm $\epsilon : A \to \mathbb{K}$ (een lineaire afbeelding $A \to \mathbb{K}$) waarvan de kern geen niet-triviale linkeridealen bevat. Deze vorm heet een* Frobeniusvorm *op A.*

2. *Er bestaat een niet-gedegenereerde bilineaire vorm $\beta : A \otimes A \to \mathbb{K}$.*

3. *Er is een isomorfisme $\phi : A \simeq A^*$ (met $A*$ de ruimte van lineaire vormen op A).*

Bewijs. $1 \implies 2$: Zij $\epsilon : A \to \mathbb{K}$ als bovenstaand en μ de vermenigvuldiging op A, dan definiëren we $\beta := \epsilon \circ \mu : A \otimes A \to \mathbb{K}$. Voor $x \in A$ definiëren we $\beta_x := \epsilon(y \cdot x)$. Stel $x \neq 0$, dan bestaat er wegens het feit dat ϵ geen niet-triviale idealen in haar kern heeft een $y \in A$ zodanig dat $\epsilon(y \cdot x) = a \neq 0$. Voor alle $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ geldt dus dat $\epsilon((\frac{\lambda}{a})y \cdot x) = \lambda \neq 0$ en dus is β niet-gedegenereerd.
$2 \implies 3$: Het feit dat β niet-gedegenereerd is betekent dat $\phi : x \mapsto (y \mapsto \beta(x \otimes y)$ een isomorfisme $\phi : A \to A^*$ is.
$3 \implies 1$: Zij $\phi : A \to A^*$ een isomorfisme, dan kiezen we $\epsilon = \phi(1_A)$. De vermenigvuldiging op A^* wordt gegeven door compositie met vermenigvuldiging: stel $\Lambda \in A^*$ en $a \in A$, dan geldt $a \cdot \Lambda = \Lambda(a \cdot -)$. Stel nu dat $a \in A$, $a \neq 0$ en $\epsilon(a) = 0$, dan geldt $A := \phi(a) = \phi(a \cdot 1_A) = \epsilon(a \cdot -)$, omdat $a \neq 0$ geldt $A \neq 0$ en dus bestaat er een $y \in A$ zodanig dat $\epsilon(a \cdot y) \neq 0$. Dit betekent dat alle niet-triviale a in de kern van ϵ geen deel uit kunnen maken van een ideaal. Conclusie: ϵ is een Frobeniusvorm op A.

□

Verder zullen we een alternatieve definitie van niet-gedegenereerdheid gebruiken in het vervolg van dit hoofdstuk:

Propositie 4.4. *Zij A een eindigdimensionale $\mathbb{K}-$algebra en $\beta : A \otimes A \to \mathbb{K}$ een lineaire verparing, dan zijn de volgende definities equivalent:*

1. *De afbeelding $\phi : A \simeq A^*$ gedefinieerd door $x \mapsto (y \mapsto \beta(x \otimes y)$ is een isomorfisme (β is niet-gedegenereerd).*

2. *Er bestaat een* medeverparing *$\gamma : \mathbb{K} \to A \otimes A$ zodanig dat de samenstelling*

$$A \simeq A \otimes \mathbb{K} \xrightarrow{\mathrm{id}_A \otimes \gamma} A \otimes A \otimes A \xrightarrow{\beta \otimes \mathrm{id}_A} \mathbb{K} \otimes A \simeq A$$

de identiteit id_A is.

Bewijs. $1 \implies 2$: Zij $(e_1, \ldots, e_n)$ een geordende basis voor A en $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ een geordende basis voor A^* zodanig dat $e_i^*(e_j) = \delta_i^j$. Uit het feit dat ϕ een isomorfisme is volgt dat er een basis $(a_1, \ldots, a_n)$ van A bestaat zodanig dat

$\phi(a_i) = e_i^*$. Nu definiëren we γ zodanig dat $\gamma(1) = \sum_{i=1}^n e_i \otimes a_i$. Invullen geeft

$$a_i \xrightarrow{\mathrm{id}_A \otimes \gamma} \sum_{j=1}^n a_i \otimes e_j \otimes a_j \xrightarrow{\beta \otimes \mathrm{id}_A} \sum_{j=1}^n \beta(a_i,\ e_j) \otimes a_j = \sum_{j=1}^n \delta_i^j a_j = a_i.$$

En dus is deze samenstelling precies id_A.

$2 \implies 1$: Stel nu dat een dergelijke $\gamma : \mathbb{K} \to A \otimes A$ bestaat en stel $\gamma(1) = \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i$. Zij verder $v \in A$ willekeurig en $0 \neq v = \sum_{i=1}^n v_i$, dan geldt $v_i \mapsto \beta(v_i \otimes\ a_i)b_i = v_i$. Omdat niet alle $v_i = 0$ en v willekeurig is gekozen, geldt dat voor $x \in A$, $x \neq 0$ dat er een $a \in A$ bestaat zodat $\beta(x \otimes a) \neq 0$ en dus is β niet-gedegenereerd (want A is eindigdimensionaal). $\square$

Opmerking 4.5. Als we voor niet-gedegenereerdheid van β de tweede eigenschap uit de voorgaande propositie nemen, dan is het overbodig om aan te nemen dat A eindigdimensionaal is. Stel namelijk dat $\gamma(1) = \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i$ dan geldt voor alle $x \in A$ dat

$$x \mapsto \sum_{i=1}^n \beta(x \otimes a_i) \otimes b_i = \sum_{i=1}^n c_i b_i = x$$

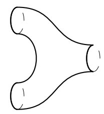
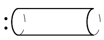
voor $c_i \in \mathbb{K}$. In het bijzonder geldt dat het opspansel $\langle b_1,\ \dots, b_n\rangle$ gelijk is aan A en dus dat A van eindige dimensie moet zijn.

Definitie 4.6. Een eindigdimensionale algebra A over een lichaam $\mathbb{K}$ heet een *Frobeniusalgebra* indien A een van de equivalente eigenschappen in 4.4 bezit. Verder heet een Frobeniusalgebra A *symmetrisch* als voor alle $x,\ y \in A$ geldt dat $\epsilon(x \cdot y) = \epsilon(y \cdot x)$. In het bijzonder zijn alle commutatieve Frobeniusalgebra's symmetrisch.

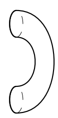
$\triangle$

4.1 Grafische Weergave

Om de overeenkomst tussen tweedimensionale cobordismen en Frobeniusalgebra's te verduidelijken zullen we de grafische weergave van Frobeniusalgebra's invoeren. Stel A is een eindigdimensionale algebra, $\mu : A \otimes A \to A$ is de vermenigvuldiging, $\eta : \mathbb{K} \to A$ is het eenheidselement, $\epsilon : A \to \mathbb{K}$ de Frobeniusvorm en $\beta : A \otimes A \to \mathbb{K}$ is de bijbehorende verparing, dan hebben we de volgende elementaire bewerkingen:

μ :  id_A : 

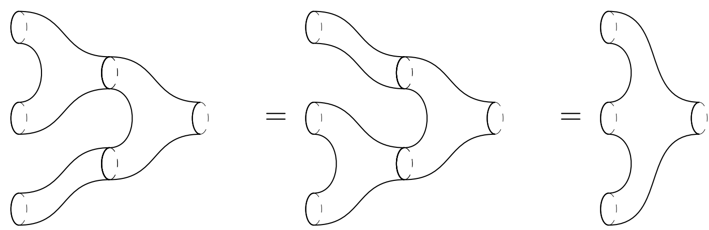
ϵ :  η : 

β : 

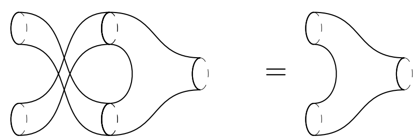
Hier stellen de binnenranden (tensorproducten van) Frobeniusalgebra's voor die als het domein van de afbeeldingen gelden (hier komt $\emptyset$ overeen met $\mathbb{K}$) en de buitenranden komen overeen met het codomein. Er bestaat eveneens een wissel voor de Frobeniusalgebra's: een afbeelding τ : $A \otimes A,\ x \otimes y \mapsto y \otimes x$. Deze heeft de grafische vorm : .

Samenstelling van afbeeldingen komt overeen met het samenstellen van de grafische bouwstenen. Zo kunnen enkele primaire eigenschappen visueel worden uitgedruk:

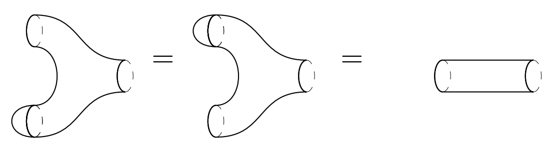
associativiteit:



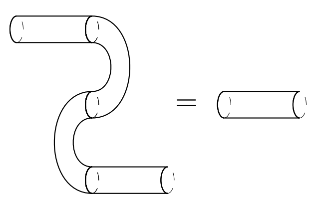
commutativiteit:



eenheid:



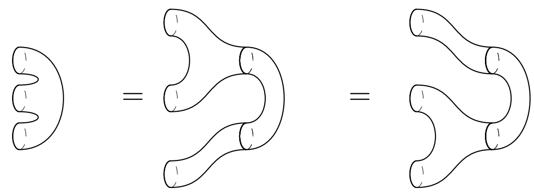
De definitie van niet-gedegenereerdheid van β (zie 4.4) kan als volgt worden weergegeven: er bestaat een medeverparing γ, weergegeven als , zodanig dat



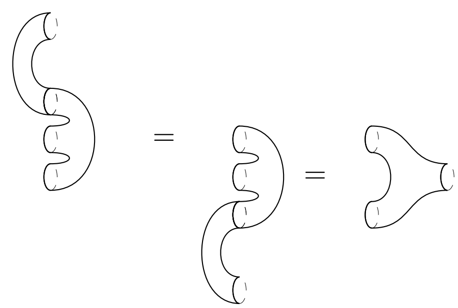
Het linker cobordisme in het bovenstaande figuur is het *slangcobordisme* en deze gelijkheid heet de *slangrelatie*.

4.2 Costructuur

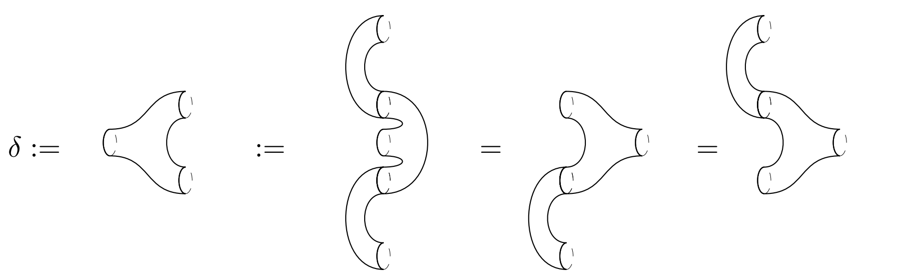
Zij $\phi : A \otimes A \otimes A \to \mathbb{K}$ gedefinieerd als $\phi = \beta \circ (\mathrm{id}_A \otimes \mu)$, dan geldt:



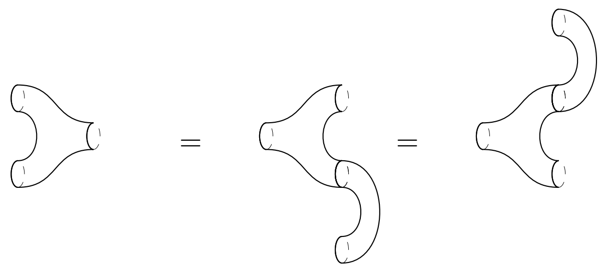
De laatste gelijkheid volgt uit het feit dat $\beta = \epsilon \circ \mu$ en toepassing van associativiteit. Als we hier een medeverparing γ aan koppelen, dan volgt uit de slangrelatie (4.1) dat



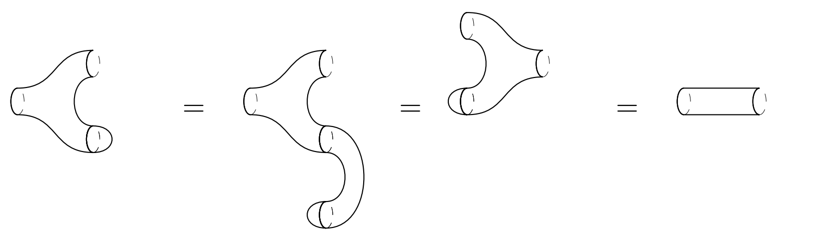
Dit betekent dat de volgende definitie voor *covermenigvuldiging* welgedefinieerd is:



Op dezelfde manier kan nu vermenigvuldiging gekarakteriseerd worden als combinatie van covermenigvuldiging en de Frobeniusverparing:

$\mu =$ 

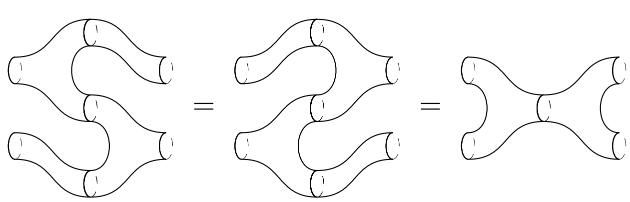
Een ander interessant verschijnsel is dat de Frobeniusvorm ϵ fungeert als de co-eenheid:

$\delta \circ (\mathrm{id}_A \circ \epsilon) =$ 

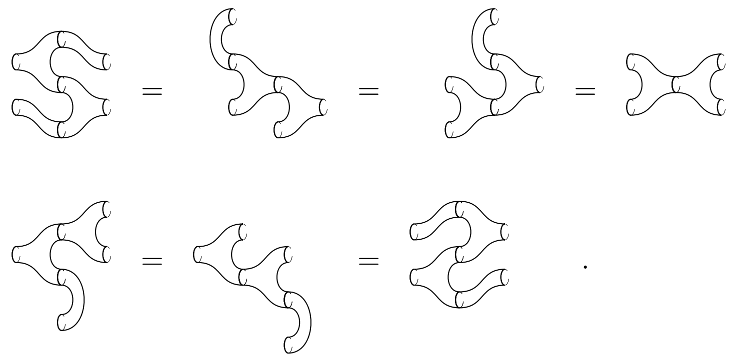
Hier wordt de eerste stap uitgevoerd door het toepassen van het feit dat $\beta = \epsilon \circ \mu$ en de eenheidseigenschap. De tweede stap volgt uit de definitie van covermenigvuldiging en de laatste stap is weer de eenheidseigenschap.

Verder geldt er een eigenschap die de vermenigvuldiging en de covermenigvuldiging omwisselt:

Lemma 4.7 (De Frobeniusrelatie)**.** *Gegeven vermenigvuldiging*  *en covermenigvuldiging* *. Dan geldt de volgende relatie:*



Bewijs. We laten cylinders weg waar mogelijk, in dit geval gaat het bewijs als volgt:



Hierbij worden afwisselend associativiteit en de definitie van covermenigvuldiging gebruikt.

□

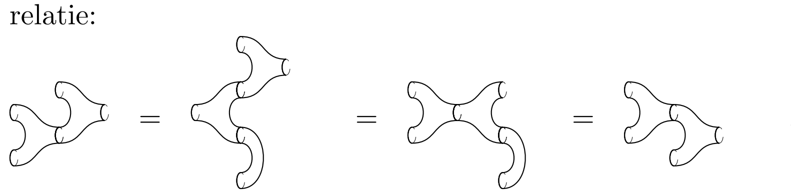
De bovenstaande relatie heet de *Frobeniusrelatie*, omdat deze relatie een algebra met costructuur tot Frobeniusalgebra maakt:

Propositie 4.8. *Zij A een algebra (niet per se associatief) met vermenigvuldiging μ, covermenigvuldiging δ, eenheid η en coeenheid ϵ met een grafische weergave als gebruikelijk en stel dat A voldoet aan de Frobeniusrelatie. Dan is A een Frobeniusalgebra met Frobeniusvorm ϵ.*

Bewijs. We moeten drie dingen bewijzen:

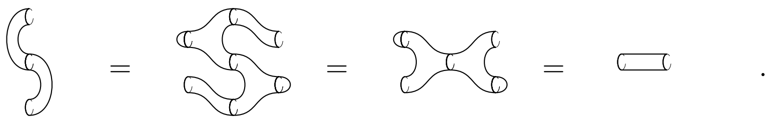
- De algebra A is associatief (en coassociatief).
- De algebra A is eindigdimensionaal.
- De vorm ϵ is een Frobeniusvorm.

1. We gebruiken de definitie van covermenigvuldiging en de Frobeniusrelatie:



En dus is A associatief (eenzelfde soort bewijs geldt voor covermenigvuldiging).

2. Volgens opmerking 4.5 volstaat het om aan te tonen dat de verparing $\beta := \epsilon \circ \mu$ voldoet aan de slangrelatie (die niet-gedegenereerdheid voorstelt). Het grafische bewijs gaat als volgt:

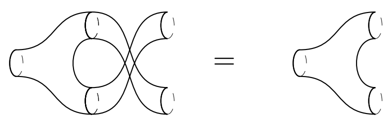


3. Uit punt 2 en lemma 4.3 volgt dat ϵ een Frobeniusvorm is.

□

We eindigen dit hoofdstuk met de relatie *cocommutativiteit* en bewijzen dat voor Frobeniusalgebra's commutativiteit en cocommutativiteit equivalent zijn.

Definitie 4.9. Een Frobeniusalgebra A met covermenigvuldiging δ heet *cocommutatief* als δ commutatief is. Of, visueel geformuleerd:

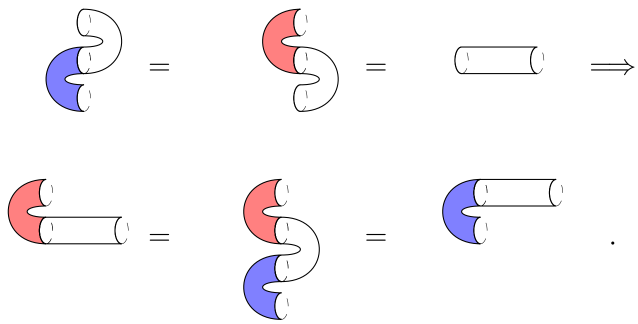


△

Voordat we kunnen bewijzen dat commutativiteit en cocommutativiteit equivalent zijn voor Frobeniusalgebra's, dienen we eerste te bewijzen dat de covermenigvuldiging δ op A uniek is. Daartoe eerst de volgende propositie:

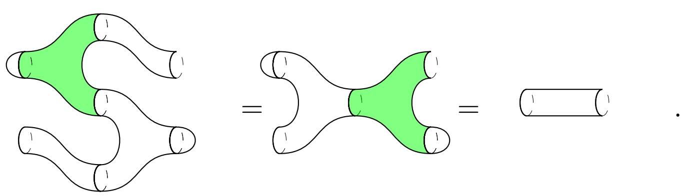
Propositie 4.10. *Op een Frobeniusalgebra A met vermenigvuldiging μ bestaat er een unieke covermenigvuldiging δ.*

Bewijs. Allereerst moet opgemerkt worden dat in propositie 4.4 gekozen is voor een medeveparing γ () die linksom samengesteld wordt met id_A. Een medeverparing γ' () die rechtsom met id_A samengesteld kan worden om het bewijs van deze propositite te voltooien stemt overeen met γ volgens het volgende grafische bewijs:

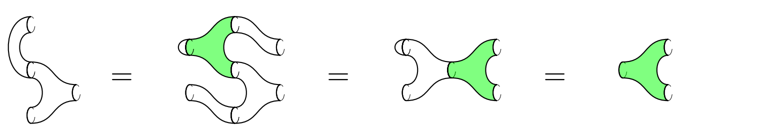


De eerste stappen maken gebruik van de slangrelatie. Na weglaten van de cylinders volgt hieruit dat $\gamma = \gamma'$ en zodoende kan gesteld worden dat een verparing β op unieke wijze een medeverparing γ induceert en andersom. Nu het hoofdbewijs:

Stel er bestaat een andere covermenigvuldiging ω () met ϵ de co-eenheid, dan voldoet ω ook aan de Frobeniusrelatie. Zo verkrijgen we:



Maar uit het voorgaande bewijs weten we dat de medeverparing $\omega \circ \epsilon = \gamma$ uniek is. Daarom kunnen we nu ω in verband brengen met de definitie van δ:

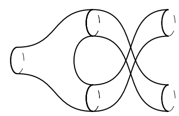


En we concluderen dat $\omega = \delta$.

$\square$

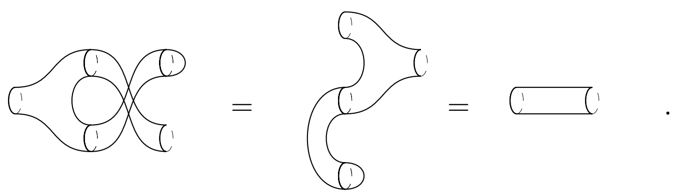
Lemma 4.11. *Stel A is een Frobeniusrelatie met de gebruikelijke notatie voor de structuur. Dan geldt dat A commutatief is, dan en slechts dan als A cocommutatief is.*

Bewijs. We zullen bewijzen dat het cobordisme $\delta \circ \tau$;

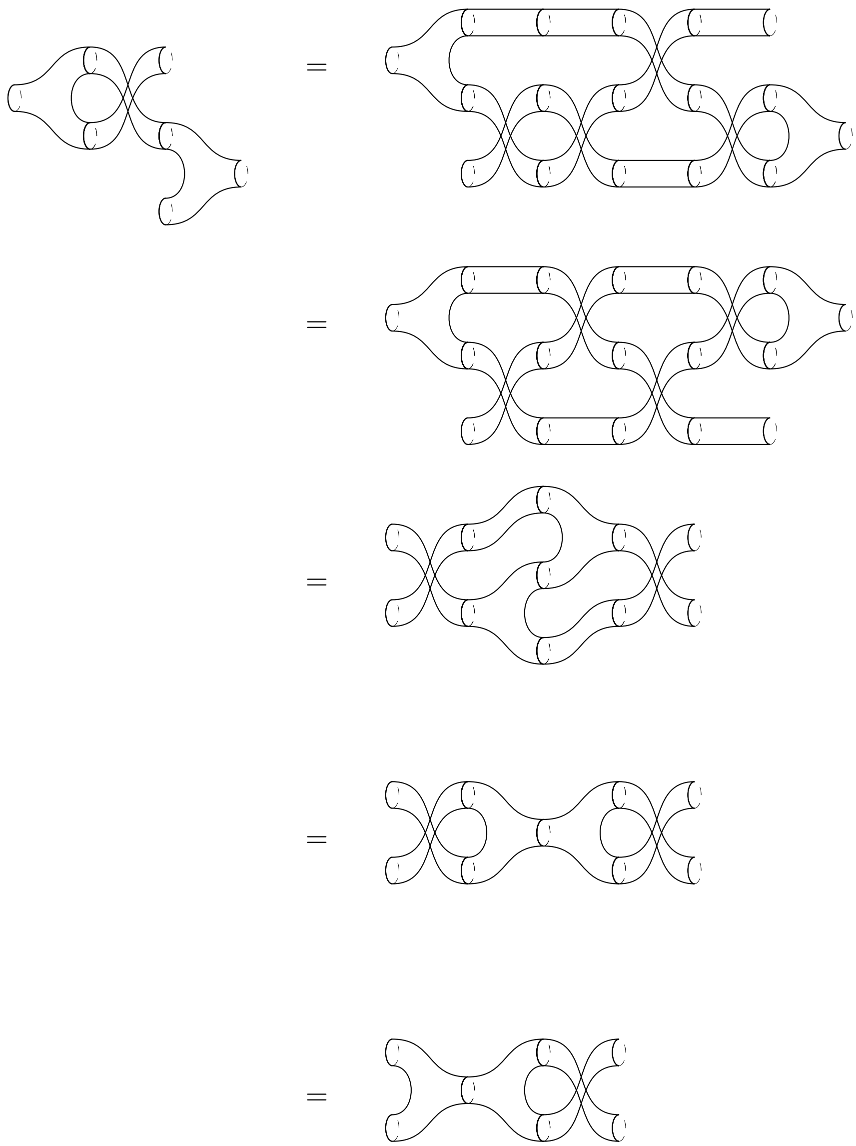


co-eenheid ϵ heeft en voldoet aan de Frobeniusrelatie. Op kracht van propositie 4.10 geldt dan dat dit cobordisme equivalent is met de covermenigvuldiging zelf.

Als we de co-eenheid aan het bovenstaande cobordisme bevestigen, geeft de definitie van de wissel en de covermenigvuldiging het volgende:



Dus de co-eenheid ϵ is ook een co-eenheid voor $\delta \circ \tau$. Bewijzen dat $\delta \circ \tau$ aan de Frobeniusrelatie voldoet is ingewikkelder:



De achtereenvolgens uitgevoerde stappen zijn:

1. De samenstelling van twee wissels $\tau \circ \tau$ is de identiteit, dus $(\mathrm{id} \otimes \tau)^2$ kan vrijelijk worden toegevoegd. Daarnaast is vermenigvuldiging commutatief, dus aan de rechterzijde vóór de vermenigvuldiging kan ook een $\mathrm{id} \otimes \tau$ toegevoegd worden zonder buiten de cobordismeklasse te treden.

2. de afwisseling van wissels in het middenstuk kan worden opgevat als een permuatiegroep. Uit de regels voor permutaties volgt nu: $(23)(12)(23)(23) = (123)(23)(23) = (123) = (132)(132) = (12)(23)(12)(23)$ en dit is precies wat er uitgedrukt staat.

3. Deze stap is niets anders dan de werking van de wissel op de vermenigvuldiging en de covermenigvuldiging.

4. Hier wordt de Frobeniusrelatie toegepast op het middendeel.

5. Hier wordt de linker wissel geëlimineerd door commutativiteit te gebruiken.

Het laatste cobordisme is precies wat er verkregen moet worden volgens de Frobeniusrelatie. Toepassing van propositie 4.10 staat ons toe te concluderen dat commutativiteit cocommutativiteit impliceert. Een omgekeerde redenering kan worden toegepast voor de inverse implicatie.

□

De in dit hoofdstuk aangetoonde relaties zijn: werking van de eenheid op vermenigvuldiging, de slangrelatie, associativiteit, commutativiteit, natuurlijkheid van de wissel, de Frobeniusrelatie en al hun omgekeerde (duale) relaties; de costructuur. Voor het volgende hoofdstuk is het belangrijk om op te merken dat dit precies de relaties uit paragraaf 3.4 zijn.

5 Tweedimensionale Topologische Kwantumveldtheorieën

In dit hoofdstuk komt de theorie van de voorgaande hoofdstukken samen. Allereest zullen we de hoofdstelling van deze scriptie formuleren. Deze stelt dat commutatieve Frobeniusalgebra's equivalent zijn met functoren van tweedimensionale cobordismen naar eindigdimensionale vectorruimten: de topologische kwantumveldtheorieën (2dTQFT's). Vervolgens geven we de definitie van 2dTQFTs volgens Michael Atiyah en zullen afsluiten met berekeningen van topologische invarianten die door 2dTQFTs worden geassocieerd met compacte, tweedimensionale oppervlakken zonder rand.

5.1 Definities

We zullen twee definitie van tweedimensionale topologische kwantumveldtheorieën (2dTQFTs) geven. De eerste definitie maakt gebruik van alle informatie uit de vorige hoofdstukken:

Definitie 5.1. Een *lineaire voorstelling* van een symmetrische, monoïdale categorie $\mathscr{C}$ is een symmetrische, monoïdale functor $\mathcal{F} : \mathscr{C} \to \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$. △

Definitie 5.2. Een *2dTQFT* is een lineaire voorstelling

$$\mathcal{F} : (\mathbf{2Cob},\ \coprod,\ \emptyset,\ \sigma) \to (\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}},\ \otimes,\ \mathbb{K},\ \tau).$$

Verder vormen alle 2dTQFT's op zich weer een categorie: **2dTQTF**. De pijlen hierin in zijn zogeheten *natuurlijke transformaties*: afbeeldingen tussen functoren, maar hier zal in deze scriptie verder geen aandacht aan besteed worden. △

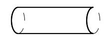
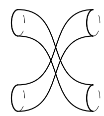
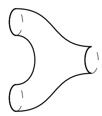
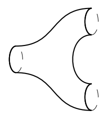
Het hoofdresultaat is als volgt:

Stelling 5.3. *Er is een equivalentie van categorieën:*

$$\mathbf{2dTQTF} \simeq \mathbf{cFA}\,.$$

Met **cFA** *de categorie van commutatieve Frobeniusalgebra's.*

Bewijs. We zoeken een functor $\mathcal{F}$: $\mathbf{2dTQTF} \simeq \mathbf{cFA}$. Zij daartoe $X \in$ $\mathbf{Ob}(\mathbf{2dTQTF})$. In de onderstaande afbeelding is gedefinieerd hoe $\mathcal{F}$ werkt op de objecten en elementaire morfismen van X.

	$\longrightarrow \epsilon$		$\longrightarrow \mathrm{id}$
	$\longrightarrow \eta$		$\longrightarrow \tau$
	$\longrightarrow \mu$	$\mathbf{1}$	$\longrightarrow A$
	$\longrightarrow \delta$	$\mathbf{n}$	$\longrightarrow \underbrace{A \otimes \ldots \otimes A}_{n \text{ keer}}$

Waar $\mathbf{1}$ en $\mathbf{n}$ staan voor S^1 en de n-voudige disjuncte vereniging van S^1 respectievelijk. Er dient bewezen te worden dat dit een welgedefinieerde functor is; als we twee equivalente cobordismen $M,\ N \in \mathbf{Ob}(X)$ hebben, dan moet gelden dat $\mathcal{F}(M) = \mathcal{F}(N)$. Dit is precies het geval voor commutatieve Frobenius algebra's, omdat voor ieder paar equivalente cobordismen M en N de relaties in paragraaf 3.4 toereikend zijn om M uit N te verkrijgen of andersom en deze relaties exact degene zijn die gelden voor commutatieve Frobeniusalgebra's volgens de laatste paragraaf in het voorgaande hoofdstuk.

De welgedefinieerdheid van $\mathcal{F}^{-1}$ is eenvoudiger: de relaties die gelden in **cFA** zijn aangetoond te gelden in **2Cob**. Hiervoor is toereikendheid niet nodig.

Nu rest het ons nog te definiëren hoe $\mathcal{F}$ werkt op de morfismen. De morfismen in **cFA** zijn lineaire afbeeldingen tussen commutatieve Frobeniusalgebra's, de morfismen in **2dTQTF** zijn monoïdale natuurlijke transformaties. Stel dat $F,\ G \in$ **2dTQTF** (dit zijn dus functoren **2Cob** $\to \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$)) dan is een natuurlijke transformatie $\eta : F \to G$ een verzameling van afbeeldingen η_X die voor alle $X \in \mathbf{Ob}(\mathbf{2dTQTF})$ een afbeelding $\eta_X : F(X) \to G(X)$ definieert en verder moet voor ieder morfisme $f : X \to Y$ (f is dus een cobordisme, $X,\ Y$ disjuncte verenigingen van cirkels) gelden dat $\eta_Y \circ F(f) = G(f) \circ \eta_X$. In diagramvorm:

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta_X"'] & F(Y) \arrow[d, "\eta_Y"] \\
G(X) \arrow[r, "G(f)"'] & G(Y)
\end{tikzcd}$$

We zoeken daarom afbeeldingen ζ_A die als tegenhangers van η fungeren in **cFA**. Hieronder is als voorbeeld het diagram voor de covermenigvuldiging $(\delta_F,\ \delta_G)$ weergegeven. We noemen $A := F(\mathbf{1}),\ B := G(\mathbf{1})$:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\delta_F"] \arrow[d, "\eta_{\mathbf{2}}"'] & A \otimes A \arrow[d, "\eta_{\mathbf{1}}"] \\
B \arrow[r, "\delta_G"'] & B \otimes B
\end{tikzcd}$$

Voor de andere generatoren (Frobeniusvorm, vermenigvulding, etc.) gelden vergelijkbare diagrammen. Als we eenzelfde natuurlijke transformatie ζ in **cFA** willen hebben, moet de afbeelding $\zeta_A : A \to B$ een algebrahomomorfisme zijn in welk geval het diagram commuteert. Voor de andere diagrammen geldt hetzelfde: een algebrahomomorfisme in **cFA** volstaat als natuurlijke transformatie. Hieruit leiden we af dat $\mathcal{F}$: **2Cob** $\to$ **cFA** een equivalentie van categorieën is.

□

In de bovenstaande stelling spreken we over een *equivalentie* van categorieën zonder de exacte definitie te geven. Hiervoor is gekozen om de reden dat deze equivalentie beschouwd kan worden als isomorfisme van categorieën als we in **2Cob** alleen het skelet van de objecten beschouwen, wat we in feite gedurende deze hele scriptie hebben. Een isomorfisme van categorieën is een functor tussen twee categorieën die een inverse functor heeft zodanig dat $F \circ G = \mathrm{id}_G$ en $G \circ F = \mathrm{id}_F$. De volgende definitie is die van Michael Atiyah.

Definitie 5.4 (Naar Atiyah[7])**.** Een n-dimensionale *topologische kwantumveldtheorie* Z over een ring R (meestal $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$) is een categorie met de volgende data:

- Aan ieder gesloten n-dimensionale variëteit Σ wordt een eindig voortgebracht R-moduul $Z(\Sigma)$ toegekend.
- Aan iedere $n+1$-dimensionale variëteit M met rand ∂M wordt een element $Z(M) \in Z(\partial M)$ toegekend.

Deze 'regel' Z voldoet verder aan de volgende eigenschappen:

- Z is een functor (en respecteert dus diffeomorfismen).
- Z werkt multiplicatief: $Z(\Sigma \coprod \Sigma') = Z(\Sigma) \otimes Z(\Sigma')$.
- Z werkt *involutoir*: we noteren Σ^* voor Σ met een omgekeerde oriëntatie. Er geldt $Z(\Sigma^*) = Z(\Sigma)^*$.

$\triangle$

Opmerking 5.5. Deze tweede definitie heeft wat nadere uitleg nodig. Allereerst duidt de *oriëntatie* van de n-dimensionale rand aan of het een linker- of rechterrand is. Het feit dat aan een $n+1$-dimensionale variëteit M (een $n+1$-cobordisme dus) een element $Z(M) \in Z(\partial M)$ wordt toegekend is equivalent met een lineaire afbeelding $Z(M) : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ voor $\partial M = \Sigma_1 \coprod \Sigma_2^*$. Dit volgt uit de eigenschappen:

$$Z(M) \in Z(\Sigma_1 \coprod \Sigma_2^*) = Z(\Sigma_1) \otimes Z(\Sigma_2)^* \simeq \mathrm{Hom}(Z(\Sigma_1),\ Z(\Sigma_2)).$$

De multiplicatieve eigenschap komt overeen met het behouden van de monoïdale structuur uit de eerste definitie. Verder geeft de multiplicatieve eigenschap dat $Z(\emptyset \coprod \Sigma) = Z(\emptyset) \otimes Z(\Sigma) = Z(\Sigma) \implies Z(\emptyset) = R$ voor een gesloten d-variëteit.

Opmerking 5.6. De involutoire eigenschap van Z in Atiyah's definitie is nauw verbonden met de karakterisatie van de verparing $\beta : A \otimes A \to \mathbb{K}$ als natuurlijk isomorfisme $\phi : A \to A^*$. Zij namelijk $\mathrm{id}_A : A \to A$ de identiteit van een Frobeniusalgebra A, dan is deze volgens de correspondentie equivalent met het cylindercobordisme . We hebben

$$Z(\mathrm{id}_A) \in Z(S^1 \coprod (S^1)^*).$$

Involutie van de buitenste rand geeft

$$Z(\beta) \in Z(S^1 \coprod (S^1)^{**}) = Z(S^1 \coprod S^1).$$

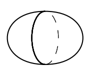
Op deze manier kan covermenigvuldiging δ opgevat worden als een afbeelding in de duale vectorruimte:

$$\delta : A^* \otimes A^* \to A^*.$$

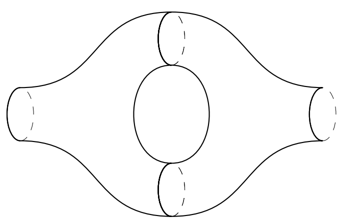
5.2 Topologische invarianten

Beide definities uit de vorige paragraaf laten zien dat cobordismen M zonder rand ($\emptyset \xrightarrow{M} \emptyset$) overeenkomen met lineaire afbeeldingen $\Lambda : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ of, equivalent gesteld, met elementen $\Lambda \in \mathbb{K}$ (of $Lambda \in R$ voor definitie 2). Dit betekent dat iedere commutatieve Frobeniusalgebra A topologische invarianten toekent aan gesloten oppervlakken.

Het eenvoudigste voorbeeld is $M_0 := S^2$. Dit oppervlak kan gefactoriseerd worden als $\epsilon \circ \eta$:

$S^2 =$ 

De torus is een ander voorbeeld van een compacte variëteit, die bestaat uit de samenstelling van de verparing β en de medeveparing γ:

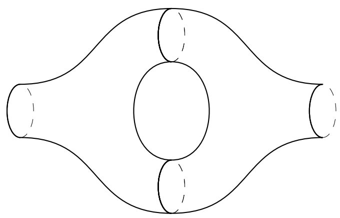
$H :=$ 

We kunnen deze waarde expliciet uitrekenen door middel van tensoren. De verparing $\beta : A \otimes A \to \mathbb{K}$ wordt genoteerd als β_{ij}, de medeverparing $\gamma : \mathbb{K} \to A \otimes A$ als γ^{ij}. We vatten deze afbeeldingen dus op als multidimensionale matrices waarbij we de domeincoördinate als subscript en de codomeincoördinaten als superscript schrijven en daarbij de Einsteinconventie aanhouden. Uit de slangrelatie volgt nu dat $\beta_{ij}\gamma^{jk} = \iota_i^k$ (de ι stelt hier de Kronecker delta voor, omdat δ al in gebruik is voor covermenigvuldiging) en dus dat $\beta_{ij} = (\gamma^{ij})^{-1}$. Uit deze informatie volgt dat de torus $\beta \circ \gamma : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ de volgende waarde heeft:

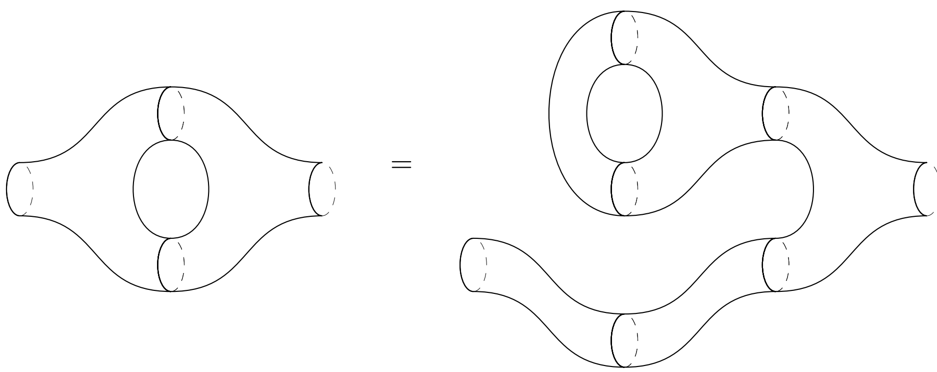
$$\beta \circ \gamma = \sum_{i,j} \beta_{ij}\gamma^{ij} = \sum_{i=k} \iota_i^k = \dim A.$$

Ofwel: onafhankelijk van de gekozen Frobeniusalgebra A kent de bijbehorende TQFT de dimensie van A toe aan de torus.

Omdat alle compacte, georiënteerde oppervlakken afhankelijk zijn van alleen hun genus, onderzoeken we nu het *hengselcobordisme*:

$H :=$ 

Ieder compact, georiënteerd oppervlak van genus g is namelijk equivalent met de samenstelling van de vorm $\epsilon \circ \underbrace{H \circ \ldots \circ H}_{g \text{ keer}} \circ\, \eta$. De onderstaande identiteit kan nu eenvoudig worden afgeleid door gebruik te maken van de topologische classificatie (de normaalvorm) van cobordismen en het feit dat



En dus is het hengselcobordisme gelijk aan de vermenigvuldiging met het element $h := \mu \circ \gamma$. We zullen nu voor een paar groepsringen $\mathbb{K}[G]$ expliciet de berekening uitvoeren. Een groepsring $\mathbb{K}[G]$ met een Frobeniusvorm ϵ voor een abelse groep G is een Frobeniusalgebra waarvoor de vermenigvuldiging als volgt weergegeven kan worden in tensornotatie:

$$\mu_{ij}^k = \begin{cases} 1 & \text{als } g_i g_j = g_k \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

Dit betekent dat voor een vaste k de matrix μ_{ij} een symmetrische ($g_i g_j = g_j g_i$) permutatiematrix (een invers element is uniek) is. De verparing β kan ook in tensorcoördinaten weergegeven worden: β_{ij}. Dus β kan worden opgevat als een matrix. Niet-gedegenereerdheid van β betekent precies dat deze matrix β_{ij} inverteerbaar is (de definitie in termen van een isomorfisme $A \simeq A^*$ lijkt hier het meeste op).

Voorbeeld 5.7. We beschouwen de algebra $A = \mathbb{C}[X]/X^n$ met als basis $1,\ X, \ldots, X^{n-1}$ en met een vorm $\epsilon : A \to \mathbb{C}$ gegeven door $\epsilon(X^k) = 0$ voor alle $k \neq n-1$ en $\epsilon(X^{n-1}) = 1$. In de kern van ϵ zitten geen idealen, omdat voor iedere $f \in A$ een macht X^k gevonden kan worden zodanig dat $X^k f(X)$ een macht X^{n-1} bezit, dus ϵ maakt A tot Frobeniusalgebra. De verparing β wordt expliciet gegeven door

$$\beta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{als } i+j=n \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

In matrixweergave betekent dit dat β op iedere kolom en iedere rij precies één 1 en verder alleen nullen heeft en dus is β_{ij} een permutatiematrix. Volgens de slangrelatie geldt dat $\gamma^{ij} = \beta_{ij}^{-1}$, maar voor permutatiematrices betekent dit dat $\gamma^{ij} = \beta_{ji}$. Daarnaast is β_{ij} een symmetrische matrix, omdat de optelling $i + j$ commutatief is. Ergo, $\beta_{ij} = \gamma^{ij}$. Het hengselelement kan nu expliciet uitgerekend worden:

$$h^k = \sum_{i,j} \gamma^{ij} \mu_{ij}^k = \sum_{i,j;i+j=k} \gamma^{ij} = \begin{cases} 0 & \text{als } i+j \neq n, \\ n & \text{als } i+j=n. \end{cases}$$

Dus $h = nX^{n-1}$. Dit betekent dat eenmalige vermenigvuldiging met het hengselelement $\epsilon \circ h \circ \eta$ de waarde n oplevert. Herhaaldelijk vermenigvuldigen met h, zeg k keer: $h^k = n^k X^{kn-k} = 0 \mod X^n$ (let op: hier geldt $h^k = \underbrace{h \cdot \ldots \cdot h}_{k\text{-keer}}$), geeft de volgende invarianten voor oppervlakten van genus k:

$$\epsilon \circ h^k \circ \eta = \begin{cases} n & \text{als } k=1, \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

△

Voorbeeld 5.8. We kunnen ook een eindig lichaam nemen voor $\mathbb{K}$. Stel $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p$ (het lichaam met priemcardinaliteit p). We beschouwen de groepsalgebra $\mathbb{Z}_p[\mathbb{F}_p] \simeq \mathbb{F}_p[X]/X^p$ en we definiëren een vorm ϵ als volgt: zij $a \in \mathbb{F}_p$ een primitief element van $\mathbb{F}_p$ (dus a genereert de multiplicatieve groep van $\mathbb{F}_p$) dan sturen we $1 \mapsto a$ en alle overige elementen $x \mapsto 0$. De bijhorende matrices zijn

$$\beta = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a^{-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ 0 & 0 & a^{-1} & \dots & 0 \\ 0 & a^{-1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Hieruit volgt dat het hengselelement

$$h = pa^{-1} = 0 \mod p.$$

Dus vermenigvuldiging met het hengselelement levert 0 op, terwijl de 2-sfeer de waarde $\epsilon(1) = a$ oplevert: $S^2 \mapsto a$. Verder geldt per definitie van het tensorproduct dat $\coprod_k S^2 \mapsto (\bigotimes_k \epsilon \circ \eta)(1) = a^k$. Dus deze TQFT kan $p-1$ kopieën van de 2-sfeer onderscheiden.

$\triangle$

5.3 En verder?

In de voorgaande paragraaf hebben we gezien dat tweedimensionale TQFT's invarianten in een lichaam $\mathbb{K}$ toekennen aan gesloten oppervlakken van verschillende genus. Kortom, een TQFT kan in dit perspectief worden opgevat als een functie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$, waar $\mathbb{N}$ het genus voorstelt. Dit leidt al gauw tot de vraag onder welke voorwaarden een functie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ gerealiseerd kan worden als een dergelijke functie (een *Frobeniusfunctie*). Hiervoor moet onderscheid gemaakt worden tussen zwakke en sterke Frobeniusalgebra's die elk een eigen type differentievergelijking opleggen aan deze functie f. Deze theorie wordt behandeld door P. H. Drube [8].

De opmerkelijke overeenkomst tussen commutatieve Frobeniusalgebra's en TQFT's kan veralgemeniseerd worden. Er is een categorie Δ, de zogeheten *simplexcategorie*, die erg lijkt op **2Cob**: het is de categorie van niet-lege, eindige ordinalen en de afbeeldingen die de ordening op deze verzamelingen behouden. Verder geldt dat disjuncte vereniging op de eindige cardinalen Δ tot monoïdale categorie maakt. Een verschil met **2Cob** is dat Δ niet symmetrisch is. Er kan vervolgens bewezen worden dat er een equivalentie

$$\Delta^{\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}} \simeq \mathbf{Alg}_{\mathbb{K}}$$

geldt. De categorie $\Delta^{\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}}$ is de categorie van monoïdale functoren $\Delta \to \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$. Dit een veel algemenere equivalentie dan degene bewezen in deze scriptie: de categorie $\mathbf{Alg}_{\mathbb{K}}$ hoeft niet commutatief en niet eindigdimensionaal te zijn! Verder kan het begrip van *Frobeniusobject* in Δ gedefinieerd worden, zodanig dat voor een Frobeniusobject $A \in \Delta$ en een eindigdimensionale vectorruimte V *in* $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$, de functor $A \to V$ overeenkomt met een Frobeniusalgebra. De categorie **2dTQTF** is dus een ondercategorie van Δ.

6 Conclusie

De enige eendimensionale gesloten variëteiten zijn S^1 en alles wat hiermee diffeomorf is. Zodoende zijn tweedimensionale cobordismen eenvoudig te classificeren: ze zijn afhankelijk van het aantal linker- en rechterranden en hun genus. Op basis hiervan kan de categorie **2Cob** ontbonden worden in enkele elementaire cobordismen. Daarnaast kan met een topologisch argument enkele identiteiten tussen eenvoudige cobordismen aangetoond worden. De categorie **2Cob** 'modulo' deze relaties lijkt heel sterk op de categorie **cFA** van commutatieve Frobeniusalgebra's. Deze gelijkenis wordt duidelijk als de axiomata binnen **cFA** grafisch worden uitgeschreven. De gelijkenis is sterker: er is een equivalentie tussen de categorie **2Cob** en **cFA**. Vervolgens kan deze identificatie gebruikt worden om topologische invarianten op gesloten oppervlakken uit te rekenen die worden gegeven door Frobeniusalgebra's.

Referenties

[1] J. Kock, *Frobenius Algebras and 2D Topological Quantum Field Theories.* Cambridge University Press, 2003.

[2] G. Kelly, “Basic concepts of enriched category theory,” *Reprints in Theory and Applications of Categories*, 2005.

[3] J. Milnor, “Lectures on the h-cobordisms,” 1965.

[4] A. Hatcher, “The kirby torus trick for surfaces,” 2014.

[5] J. R. W. G. K. Francis, “Conway’s zip proof,” *The American Mathematical Monthly*, 1999.

[6] K. Y. A. Skowroński, *Frobenius Algebras I.* EMS Textbooks in Mathematics, 2012.

[7] M. F. Atiyah, “Topological quantum field theory,” *Publications Mathématiques de l’I.H.E.S.*, 1988.

[8] P. H. Drube, “Tqft diffeomorphism invariants and skein modules,” 2011.