

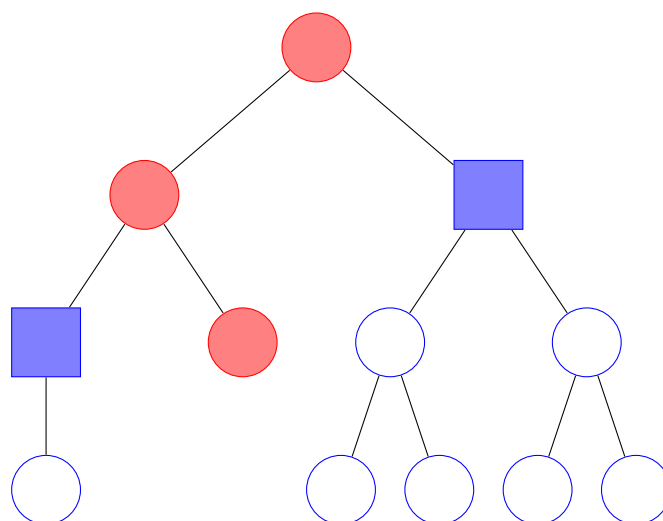


Universiteit Utrecht

Faculteit Bètawetenschappen

Algoritmes voor Firefighting op bomen

Bachelorscriptie



JELLE J. OOSTVEEN
Wiskunde en Informatica

Begeleiders:

Dr. ERIK JAN VAN LEEUWEN
Departement Informatica

Prof. Dr. ROB H. BISSELING
Departement Wiskunde

5 juni 2018

Samenvatting

Het *Firefighter* probleem is een model voor macroschaal virusbestrijding of voor het blussen van vuur. In het begin staat er één knoop in de brand. Elke tijdstap kan er een knoop beschermd worden waarna het vuur zich verspreid naar alle aanliggende knopen die nog niet in de brand staan en ook niet beschermd zijn. Het proces eindigt als het vuur zich niet meer kan verspreiden. Het doel is om te zorgen dat er een maximaal aantal knopen niet in de brand staat. In deze scriptie analyseren we meerdere benaderingsalgoritmen voor het Firefighter probleem op bomen. We behandelen en bewijzen een greedy algoritme, een benadering aan de hand van een lineair programma, en een benadering aan de hand van een enumeratie na compressie van een boom.

Inhoudsopgave

1	Introductie	1
2	Geschiedenis van het probleem	2
3	Een greedy algoritme	4
3.1	Benaderingsfactor	4
3.2	Striktheid benaderingsfactor	5
4	Bomen van maximale graad 3	6
4.1	De wortel heeft 2 kinderen	6
4.2	Complexiteit	8
5	LP benadering	8
5.1	Het LP	9
5.2	Benaderingsfactor	9
5.3	Derandomisatie	11
5.4	Striktheid benaderingsfactor	12
6	PTAS	13
6.1	Veralgemening van Firefighter	13
6.2	Totale Unimodulariteit	14
6.3	Overzicht van het PTAS	15
6.3.1	Compressie	15
6.3.2	Verdere reductie	17
6.3.3	Eigenschappen nieuwe instantie	21
6.3.4	Zware knopen	21
6.3.5	Een nieuw LP	22
6.3.6	$(1 - \frac{\epsilon}{3})$ -Benadering	23
7	Conclusie	26
	Referenties	I

1 Introductie

Het *Firefighter* probleem werd origineel geïntroduceerd door B. Hartnell [19] in 1995, en kan gezien worden als een model van virusverspreiding of andere macroschaal beschermingsproblemen. Het probleem is een soort spel waarin een speler strijdt tegen de verspreiding van een vuur. De speler kan telkens een plek beschermen, waarna het vuur zich verspreidt. Formeel definiëren we dit probleem als volgt.

Zij (G, r) een paar met een ongerichte graaf $G = (V, E)$ en een knoop r waar vuur in uitbreekt. Hierbij is V de verzameling knopen en E de verzameling kanten. Noem deze staat tijdstap $t = 0$. Voor elk tijdstap $t \geq 1$ geldt er de volgende serie van handelingen. Eerst kan de speler een niet-brandende knoop *beschermen*. Deze knoop kan dan niet meer in brand vliegen voor de rest van het spel. We noemen een knoop *veilig* of *gered* als deze, ongeacht het verloop van de rest van het spel, niet meer in brand kan vliegen. Elke beschermde knoop is dus veilig. Meestal zal een bescherming leiden tot het veilig stellen van meerdere knopen. Een knoop kan uiteraard alleen beschermd worden als deze nog niet in brand staat, en nog niet veilig is. Na een bescherming verspreidt het vuur zich naar elke niet-beschermde knoop aanliggend aan het vuur. Dit proces gaat door tot het vuur zich niet verder kan verspreiden. Het doel is om een serie beschermingen te vinden zodat het maximale aantal knopen veilig is.

We noemen een serie van beschermingen een *oplossing* ofwel *strategie* S . We noteren de hoeveelheid knopen die een strategie veilig stelt als $\|S\|$. We noemen dit vaak de *waarde* van deze strategie. Een strategie S is *optimaal* als voor elke andere strategie S' geldt dat $\|S\| \geq \|S'\|$.

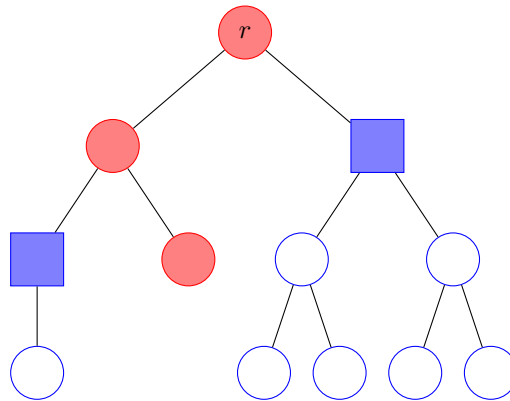
We zullen echter een minder algemene versie van het probleem behandelen. Het gaat hier om het geval waarbij de graaf $G = (V, E)$ een boom is, genoteerd met T . Merk op dat elke knoop in een boom als de wortel gezien kan worden, en we dus voor het gemak r , de knoop waar vuur in uitbreekt, als de wortel van de boom kunnen stellen. Zie Figuur 1 voor een voorbeeld van het Firefighter probleem op bomen met oplossing.

Zij $V_l \subseteq V$ de verzameling knopen met diepte l in de boom, met $l \in \{1, \dots, L\}$, waarbij L de diepte van de boom is. We noemen V_l ook wel *laag* l van de boom. De wortel r heeft diepte 0, en elke andere knoop heeft dus minstens diepte 1.

Elke knoop $v \in V$ heeft een uniek kortste pad naar r , genoteerd met P_v . Alle knopen op dit pad noemen we *voorouders* van v . Merk op dat r dus een voorouder is van elke knoop behalve zichzelf. Als een knoop v een kant heeft naar een knoop w , waarbij de diepte van w groter is dan de diepte van v , noemen we w een *kind* van v . Dan is v dus een voorouder van w .

We noteren de deelboom van T waarvan een knoop v de wortel is met T_v . De verzameling bladeren van T noteren we met $\Gamma \subseteq V$.

We zullen eerst een overzicht van een deel van de literatuur van het probleem geven. We behandelen daarna de analyse van een greedy algoritme voor het Firefighter probleem op bomen. We zullen bewijzen dat dit greedy algoritme een $\frac{1}{2}$ -benadering geeft. Vervolgens kijken we naar een specifiek geval waar de boom T hooguit van graad 3 is, en geven we een polynomiaal algoritme voor het geval dat de wortel twee kinderen heeft. Ook behandelen we een verbetering op het greedy algoritme, een $(1 - 1/e)$ -benadering aan de hand van een lineair programma. Als laatste zullen we een $(1 - \epsilon)$ -benadering voor elke $\epsilon > 0$ behandelen. Daarmee is de vraag naar de benaderbaarheid van het Firefighter probleem op bomen vrijwel afgesloten.



Figuur 1: Een voorbeeld van het Firefighter probleem met oplossing. Hierbij staan rode knopen in brand, en vierkante blauwe knopen zijn beschermd door de strategie. In dit geval zijn er 9 knopen veilig gesteld door de strategie.

2 Geschiedenis van het probleem

Het Firefighter probleem werd geïntroduceerd door B. Hartnell [19] in 1995. Sindsdien is het probleem op vele manieren geanalyseerd. In 2009 hebben S. Finbow en G. MacGillivray [15] een lijst van openstaande kwesties voor het probleem gepubliceerd. Een aantal van deze kwesties is opgelost, echter niet allemaal. We zullen eerst een overzicht van een aantal stukken literatuur geven die de complexiteit van het probleem aanschouwen.

In 2003 lieten G. MacGillivray en P. Wang [24] zien dat het probleem NP-volledig is op bipartiete grafen.

In 2007 bewezen S. Finbow *et al.* [14] dat voor bomen met maximale graad 3 waarbij de wortel twee kinderen heeft het probleem polynomiaal oplosbaar is. Nog belangrijker, ze bewijzen ook dat het Firefighter probleem NP-volledig is op bomen van maximale graad 3 waarbij de wortel drie kinderen heeft. Dit geeft een enorm contrast, wat goed illustreert dat dit geen makkelijk probleem is om te analyseren.

In 2010 hebben A. King en G. MacGillivray [23] laten zien dat het probleem NP-volledig is op kubische grafen. Daarnaast geven ze een bewijs voor de NP-volledigheid van bomen waarbij elk blad dezelfde afstand tot de wortel heeft, en je probeert elk blad te redden.

In 2012 gaven E. Anshelevich *et al.* [3] een analyse van het probleem waarbij ze een onderscheid maken tussen een verspreidende bescherming (een bescherming gaat zich net als het vuur naar aanliggende knopen verspreiden) en de klassieke variant. Hierbij bekijken ze de benaderingsfactor voor deze varianten. Ze bekijken het probleem waarbij er gemaximaliseerd wordt hoeveel knopen er gered worden, en de variant waarbij er, gegeven een te redden verzameling knopen, het budget moet worden geminimaliseerd. Ze bewijzen hierbij een erg sterke uitspraak. Het is NP-moeilijk om een $n^{1-\epsilon}$ -benadering te vinden voor het Firefighter probleem op algemene grafen.

In 2013 analyseerden C. Bazgan *et al.* [6] het probleem op bomen waarbij er meer dan één bescherming per tijdstap beschikbaar is. Ze laten resultaten zien gerelateerd aan de resultaten van [14], maar dan veralgemeniseerd voor meerdere beschermingen. Ze geven ook een polynomiaal algoritme voor een speciale subklasse van bomen.

In 2016 hebben F. V. Fomin *et al.* [16] laten zien dat het probleem NP-moeilijk is op *unit disk* grafen. Echter, ze geven wel polynomiale algoritmes voor *interval* grafen, *split* grafen, permutatie

grafen, en P_k -free grafen voor een vaste k .

In 2017 hebben J. Chlebíková en M. Chopin laten zien dat het probleem NP-volledig is voor bomen met een *pathwidth* van minder dan 3.

Aangezien de complexiteit van het probleem dus vaak al NP-volledig is, is ook het belang van benaderingsalgoritmen duidelijk. Hoewel dit dus voor algemene grafen niet makkelijk is, is er voor het geval dat de instantie een boom is nog veel te vinden omtrent benaderingsalgoritmen. Dit is dan ook extensief onderzocht in de literatuur. Toch is de factor van benadering voor het probleem op bomen voor een lange tijd onbekend gebleven.

In 2000 gaven B. Hartnell en Q. Li [20] ten eerste een $\frac{1}{2}$ -benadering door middel van een greedy algoritme.

G. MacGillivray en P. Wang [24] hebben in 2003 een lineair programma (LP) opgesteld en daarbij hebben ze enkele eigenschappen over een optimale oplossing bewezen. Dit LP is een van de meest gebruikte constructies in de analyse van het probleem. In 2004 heeft S. G. Hartke [18] extra beperkingen die kunnen worden toegevoegd aan het LP opgesteld, zodat het *integrality gap* ervan kleiner is. Echter, in 2008 hebben L. Cai *et al.* [9] een $(1 - 1/e)$ -benadering gegeven aan de hand van het LP opgesteld in [24]. Deze factor is voor een lange tijd de beste benadering gebleven voor algemene bomen. Wel zijn er andere resultaten gekomen voor specifiekere gevallen.

In 2011 gaven Y. Iwaiikawa *et al.* [22] een $(1 - \frac{k-1}{(k-1)e+1})$ -benadering voor het probleem op bomen als de wortel k kinderen heeft.

In 2016 lieten P. Chalermsook en D. Vaz [10] een sterk resultaat zien. Er is een $(1 - 1/e + \epsilon)$ ondergrens voor de *integrality gap* van het LP gegeven in [24]. Dit betekent dat een geheeltallige oplossing gehaald uit dit LP niet beter kan zijn dan een $(1 - 1/e)$ -benadering. Ook laten ze een $\frac{5}{6}$ *integrality gap* zien voor het LP met extra beperkingen, opgesteld in [18]. Deze resultaten maken het volgende resultaat des te meer indrukwekkend.

In 2017 hebben D. Adjiashvili *et al.* [1] laten zien dat er een *Polynomial Time Approximation Scheme (PTAS)* bestaat voor het Firefighter probleem op bomen. Dit is een $(1 - \epsilon)$ -benadering van polynomiale tijd voor elke $\epsilon > 0$. We zullen deze PTAS behandelen in Sectie 6.

Voor geparametriseerde complexiteit zijn er door de jaren heen ook een aantal bewijzen geleverd.

In de paper die ook het bewijs van de $(1 - 1/e)$ -benadering bevat, gaven L. Cai *et al.* [9] in 2008 een aantal *Fixed Parameter Tractable (FPT)* algoritmes.

In 2011 hebben C. Bazgan *et al.* [5] laten zien dat het W[1]-moeilijk is om k knopen te redden, of om k knopen te laten verbranden, zelfs voor bipartiete grafen. Daarnaast hebben ze laten zien dat het probleem FPT is voor planaire grafen.

Ook in 2011 hebben M. Cygan *et al.* [12] laten zien dat het probleem FPT is op algemene grafen met als parameter het aantal knopen dat in de brand staat, maar dat er voor bomen dan geen polynomiale *kernel* bestaat. Daartegenover laten ze zien dat het probleem W[1]-moeilijk is als er als parameter het aantal geredde knopen wordt genomen.

In 2014 gaven C. Bazgan *et al.* [4] meerdere geparametriseerde complexiteitsresultaten voor het probleem met meerdere beschermingen per tijdstap. Hieronder vallen (1) een bewijs dat het W[1]-moeilijk is op bipartiete grafen, en (2) FPT resultaten voor planaire grafen en grafen met beperkte *treewidth*. Gerelateerd aan dit begrip *treewidth* geven L. Cai *et al.* [8] een analyse van de overlevingsfactor voor grafen met beperkte *treewidth* in hun paper uit 2010.

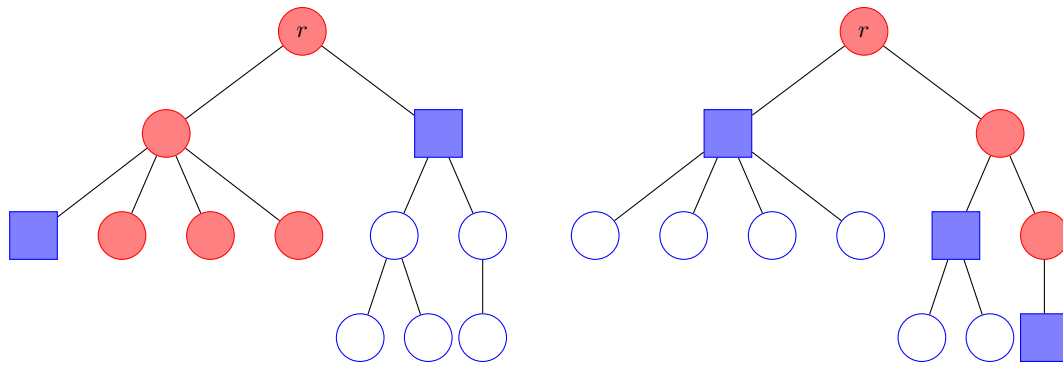
Het is goed om te noemen dat de analyse van het probleem hierbij niet ophoudt. Er zijn nog vele specifieke gevallen en andere analyses omtrent het probleem gedaan, echter, deze zijn niet relevant voor deze scriptie.

3 Een greedy algoritme

We beginnen de analyse van het Firefighter probleem met het kijken naar een greedy algoritme. Een greedy algoritme heeft deze naam omdat het ‘pakt wat het pakken kan’. Dit geeft een goede instap in het probleem en de complexiteit ervan. B. Hartnell en Q. Li [20] beschrijven een greedy algoritme voor het Firefighter probleem op bomen en vergelijken deze met de optimale oplossing. In deze sectie zullen we de analyse van dit algoritme behandelen zoals B. Hartnell en Q. Li beschrijven.

3.1 Benaderingsfactor

Beschouw een instantie van het Firefighter probleem (T, r) . We definiëren het greedy algoritme als volgt. Op tijdstap t , waarbij het vuur naar de knopen v_1, v_2, \dots, v_k gaat verspreiden, kiest het greedy algoritme simpelweg een v_i , met $1 \leq i \leq k$, zodat T_{v_i} zo groot mogelijk is. Merk op dat hierdoor deze hele deelboom veilig gesteld wordt. We vergelijken deze aanpak met een optimale oplossing. Zie Figuur 2 voor een voorbeeld van het verschil tussen de greedy oplossing en een optimale oplossing.



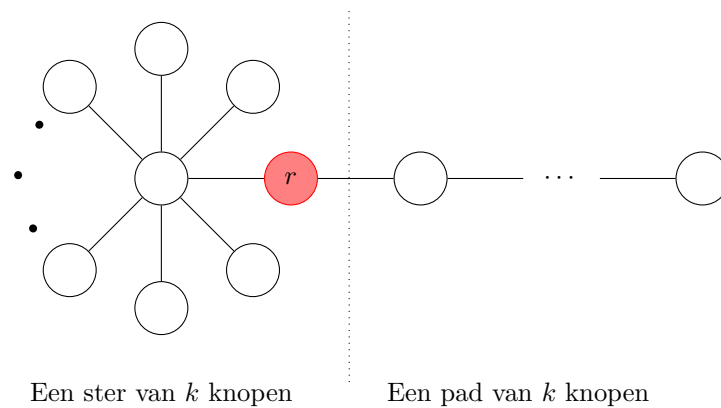
(a) De oplossing verkregen met het greedy algoritme.

(b) Een optimale oplossing.

Figuur 2: Vergelijking tussen het greedy algoritme en een optimale oplossing. Hierbij staan rode knopen in brand, en vierkante blauwe knopen zijn beschermd door de strategie. Het greedy algoritme redt 7 knopen, terwijl een optimale oplossing 9 knopen redt.

Stelling 3.1. *Voor elke instantie van het Firefighter probleem (T, r) , redt het greedy algoritme meer dan de helft van de hoeveelheid knopen dat elke andere strategie zou redden.*

Bewijs. Definieer K_{greedy} en K_{opt} als de knopen gered door respectievelijk het greedy algoritme en een optimale strategie S . Definieer K_{opt}^A als de knopen die gered zijn door de optimale zettten waarbij de respectievelijke greedy zettten niet minder knopen redden. Dus als S op $t = 3$ drie knopen redt, en de greedy zet vier, dan worden deze knopen aan K_{opt}^A toegevoegd. Als er geen corresponderende greedy zet is, wordt K_{opt}^A dus ook niet groter. We noteren $|K|$ als de grootte van K . Zij K_{opt}^B de verzameling van knopen gered door de andere optimale zettten, dus $|K_{opt}| = |K_{opt}^A| + |K_{opt}^B|$. Er volgt dat $|K_{greedy}| \geq |K_{opt}^A|$. We zullen nog bewijzen dat er geldt $|K_{greedy}| > |K_{opt}^B|$, om zo tot de conclusie te komen dat $|K_{greedy}| > \frac{1}{2}|K_{opt}|$.



Figuur 3: Het slechtste geval voor het greedy algoritme.

Merk op dat er op $t = 1$ een garantie is dat het greedy algoritme tenminste evenveel knopen redt als S . Stel nu dat S op een tijdstap $t > 1$ een knoop v beschermt, en zo meer knopen redt dan het greedy algoritme op deze tijdstap. Dan moet het greedy algoritme al een voorouder van de knoop v hebben gered. Zo niet, dan zou het greedy algoritme namelijk ook v kunnen beschermen en zo meer knopen redden. Dus, voor deze $t > 1$ heeft het greedy algoritme alle knopen die S redt, al gered. Het greedy algoritme heeft dus in een eerdere zet naast T_v ook een voorouder van v gered, en zo meer knopen gered dan dat S er redt. Het is ook mogelijk dat S meerdere keren knopen beschermt waarvoor het greedy algoritme voor allemaal dezelfde voorouder w al heeft beschermd. De rechter deelboom van Figuur 2 is een voorbeeld hiervan, de optimale strategie redt twee knopen die beide als voorouder een knoop hebben die gered is door de greedy strategie. Echter, de voorouder w is minstens één extra knoop, dus het greedy algoritme heeft nog steeds meer knopen gered. Er volgt dus dat $|K_{greedy}| > |K_{opt}^B|$.

We kunnen concluderen dat $|K_{greedy}| + |K_{greedy}| > |K_{opt}^A| + |K_{opt}^B|$, en dus dat $|K_{greedy}| > \frac{1}{2}|K_{opt}|$. Aangezien S het maximale aantal knopen redt, geldt deze vergelijking ook voor elke andere strategie in plaats van een optimale strategie. \square

In het vervolg zullen we behandelen dat deze grens strikt is, door een voorbeeld te construeren.

3.2 Striktheid benaderingsfactor

We moeten nog bewijzen dat de benaderingsgrens van het greedy algoritme niet strikter kan. We zullen een voorbeeld construeren waarbij $|K_{greedy}| \rightarrow \frac{1}{2}|K_{opt}|$. Beschouw het voorbeeld van Figuur 3. Gegeven is een boom van $2k$ knopen, bestaande uit een ster van k knopen vastgemaakt aan een pad van k knopen. Het vuur begint in de knoop die de ster aan het pad verbindt. Het greedy algoritme redt eerst het pad van k knopen, immers, dit is meer dan $k - 1$ knopen. Het vuur verspreidt dan naar het midden van de ster, en dan kan het greedy algoritme nog maar één knoop redden. Totaal redt het greedy algoritme dus $k + 1$ knopen. Laat het duidelijk zijn dat een optimale strategie eerst het midden van de ster redt en daarmee $k - 1$ knopen veilig stelt. Daarna kan deze nog $k - 1$ knopen van het pad redden. Een optimale strategie redt dus $2(k - 1)$ knopen. De verhouding tussen het aantal knopen gered door een optimale strategie en door het greedy algoritme is dus

$$\frac{2(k-1)}{k+1}.$$

Als nu $k \rightarrow \infty$, dan zal deze verhouding naar 2 gaan. Dus de benaderingsgrens voor het greedy algoritme is strikt.

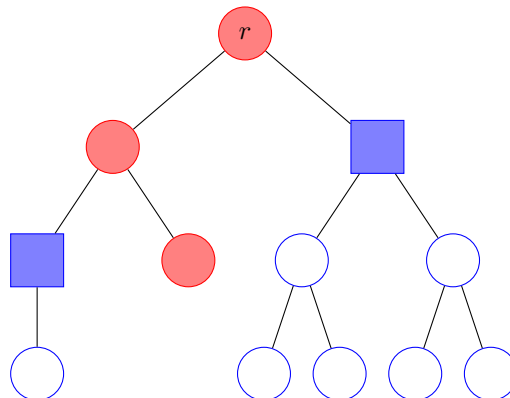
We hebben gezien dat in het voorbeeld van Figuur 3 de ratio van geredde knopen begrensd is door een constante. Het is interessant om op te merken dat de ratio van knopen die in brand staan niet begrensd is. Een optimale strategie laat altijd maar twee knopen in brand vliegen, terwijl het greedy algoritme er $k - 1$ in brand laat vliegen. Zo is deze ratio zelfs onbegrensd als $k \rightarrow \infty$. Dit brengt de vraag naar voren of het greedy algoritme verbeterd kan worden door een andere greedy strategie. Deze andere greedy aanpak zou kunnen letten op het aantal knopen dat in de brand gaat in plaats van het aantal knopen dat het redt.

4 Bomen van maximale graad 3

Voor het geval dat een gegeven Firefighter probleem een paar (T, r) is, kunnen we meer conclusies trekken als we specifieke eisen stellen op de boom T . Eén van deze nuttige eisen is dat de boom van maximale graad 3 is, zie ook [14] voor een gedetailleerde analyse van dit geval. *Maximale graad 3* betekent dat elke knoop v in de boom totaal maximaal drie inkomende of uitgaande kanten heeft. Hieruit volgt dat elke knoop $v \in T \setminus \{r\}$ maximaal twee kinderen heeft. We zullen eerst een polynomiaal algoritme geven voor het bepalen van de optimale oplossing als de wortel twee kinderen heeft. Daarna zullen we de complexiteit van het Firefighter probleem op bomen van maximale graad 3 noemen, wat mogelijk een verbazingwekkend resultaat is in vergelijking tot het polynomiale algoritme als de wortel twee kinderen heeft.

4.1 De wortel heeft 2 kinderen

Zij (T, r) een instantie van het Firefighter probleem waarbij T van maximale graad 3 is. Als r maximaal 2 kinderen heeft, bestaat er een algoritme dat in polynomiale tijd een optimale oplossing vindt. Finbox *et al.* [14] beschrijven dit algoritme, echter, [14] is niet als bron gebruikt voor het bewijs van Stelling 4.1.



Figuur 4: Het vuur verspreid zich langs één pad op een boom van maximale graad 3 waarbij r twee kinderen heeft. Hierbij staan rode knopen in brand, en vierkante blauwe knopen zijn beschermd door de strategie.

Het idee voor het algoritme stamt uit de volgende redenering. De boom T zal op elke diepte i

maximaal 2^i knopen hebben, met $i = 0, 1, \dots, k$, waarbij k de hoogte van T is. Optimaal willen we op tijdstap i een knoop van diepte i beschermen en daarbij deze knoop en al zijn kinderen veilig stellen (zie Corollary 4.2 van [24] voor het bewijs van deze uitspraak). Hieruit volgt dat, mits de beschermingen goed gekozen worden, we het vuur altijd naar maximaal één knoop kunnen laten verspreiden. Het vuur verspreidt zich dan dus langs één pad door de boom. Zie Figuur 4 ter illustratie. Een optimale strategie beschermt het maximaal mogelijke aantal knopen en laat daarbij dus ook het minimaal mogelijke aantal knopen verbranden. Als we het pad waarover we het vuur laten verspreiden dus zo kort mogelijk maken, dan geeft dit een optimaal resultaat. We bekijken onderstaande stelling.

Stelling 4.1. *Zij (T, r) een Firefighter probleem waarbij T van maximale graad 3 is en r hoogstens twee kinderen heeft. Dan bestaat er een algoritme dat een optimale oplossing geeft in polynomiale tijd.*

Bewijs. Zij (T, r) een Firefighter probleem waarbij $T = (V, E)$ van maximale graad 3 is en de graad van r maximaal 2 is. Merk ten eerste op dat we klaar zijn als r één kind heeft, aangezien we de eerste knoop onder r kunnen beschermen en dan klaar zijn. Neem in het vervolg dus aan dat r twee kinderen heeft. Definieer de functie $f : V \rightarrow \mathbb{Z}$ als de lengte van het unieke pad naar de wortel r voor een gegeven $v \in V$, ofwel $f(v) = |P_v| - 1$. Dan is dus $f(r) = 0$ en $f(v) > 0$ voor alle $v \in V \setminus \{r\}$. Zij $W \subseteq V \setminus \{r\}$ de verzameling knopen met minder dan 2 kinderen, ofwel $W = \{v \in V \setminus \{r\} \mid \deg(v) < 3\}$. Merk op dat W nooit leeg is, aangezien T altijd bladeren $b \in \Gamma$ heeft, en deze graad 1 hebben. Zij m het minimum van de lengtes van de paden naar r voor alle $v \in W$, dus $m = \min_{v \in W} f(v)$. Kies een $w \in W$ met $f(w) = m$, en zij P het unieke pad van r naar w , dus $P = (r, v_1, v_2, \dots, v_{m-1}, w)$ met $v_i \in V_i$ voor alle $i = 1, \dots, m - 1$. Bescherm in tijdstap t de (unieke) knoop j van diepte t die nog niet veilig is en niet op het pad P ligt, dus $j \neq v_t$. Bescherm op tijdstap m de knoop van diepte m die nog niet veilig is en die ook niet w is. Als w één kind heeft, bescherm deze dan op tijdstap $m + 1$, als w geen kinderen heeft, dan zijn we na tijdstap m klaar.

We bewijzen eerst dat de knoop die beschermd moet worden op tijdstap t uniek bepaald is, en altijd bestaat, via inductie. Voor tijdstap 1 zijn er twee knopen van diepte 1, aangezien r twee kinderen heeft. Eén van deze knopen ligt op het pad P , dus de keuze is uniek bepaald. Neem nu aan dat de keuze uniek bepaald is voor alle tijdstappen $t = 1, \dots, k$, met $1 \leq k < m$. We bewijzen dat deze ook uniek bepaald is voor tijdstap $k + 1$. De knoop $v_k \in P$ heeft twee kinderen, immers, w is de knoop van minimale diepte met minder dan twee kinderen. Eén van deze twee knopen ligt op het pad P , aangezien $v_k \neq w$. Stel nu dat er meer dan één keuze is van knopen op diepte $k + 1$ die niet op P liggen. Dan is er dus een knoop j , die geen kind is van v_k , op diepte $k + 1$ nog niet veilig. Maar dan is het hele pad van j tot r nog niet veilig. Dit is in tegenspraak met de aanname dat op tijdstap $1, \dots, k$ de keuze van bescherming uniek bepaald was. Dus de keuze is ook uniek bepaald op tijdstap $k + 1$. Via het principe van volledige inductie is de keuze tot bescherming nu uniek bepaald, en deze bescherming is altijd mogelijk, op alle tijdstappen $t = 1, \dots, m$.

Merk nu op dat de oplossing die gegeven wordt door deze serie beschermingen exact $m + 1$ knopen in de brand zet en de rest van de knopen veilig stelt. Aangezien m onafhankelijk is van de keuze van w , heeft de keuze van w dus geen invloed op de waarde van de oplossing. Zoals MacGillivray en Wang [24] stellen: een optimale strategie beschermt op tijdstap i een knoop in laag i en hoeft de kinderen van deze knoop niet te beschermen. Deze observatie leidt ertoe dat

een optimale strategie altijd het vuur langs één pad van T laat verspreiden. Aangezien het algoritme wat hierboven beschreven staat het pad kiest wat zo kort mogelijk is, geeft dit algoritme een optimale oplossing.

Het rest ons alleen nog om te bewijzen dat dit algoritme polynomiale complexiteit heeft. Zij n het aantal knopen in T . Het bepalen van w kost $O(n)$ tijd, aangezien de boom te doorlopen is per laag door middel van een *Breadth First Search*. Het eerste voorkomen van een knoop met minder dan twee kinderen geeft dan ook het kortste pad naar r . Het bepalen van het pad van w naar r kost ook $O(n)$ tijd. De strategie bepalen kost $O(n)$ tijd. Dit betekent dat het algoritme zeker in polynomiale tijd een oplossing geeft. \square

4.2 Complexiteit

We hebben nu gezien dat voor bomen van maximale graad 3, waarbij de wortel twee kinderen heeft, het Firefighter probleem polynomaal oplosbaar is. S. Finbow *et al.* [14] bewijzen echter een opmerkelijk resultaat in hun paper ‘The firefighter problem for graphs of maximum degree three’. Als de wortel niet twee maar drie kinderen heeft, is dit probleem NP-volledig. Dit onderscheid is enorm, en geeft goed weer hoe moeilijk de beslissing tot beschermen kan zijn.

NP-volledigheid heeft uiteraard een beslissingsvariant nodig, dus we geven de beslissingsvariant van het Firefighter probleem op bomen van maximale graad 3.

Definitie 4.2 (Beslissingsvariant). Gegeven een instantie van het Firefighter probleem op bomen waarbij de boom van maximale graad 3 is. Is er een strategie die maximaal k knopen in de brand laat gaan?

We zullen niet bewijzen dat de beslissingsvariant NP-volledig is, dit bewijs is enigszins uitgebreid en niet de focus van deze scriptie. Zie [14] voor het bewijs dat deze beslissingsvariant NP-volledig is. Een simpeler NP-volledigheidsbewijs, alhoewel op een andere instantie, wordt gegeven in [11]. Het is zeer aan te raden dit bewijs eerst te lezen als introductie tot de NP-volledigheidsbewijzen van het Firefighter probleem.

In de volgende sectie zullen we ingaan op een volgend benaderingsalgoritme dat werkt aan de hand van een lineair programma. Nu dat we de complexiteit van het probleem weten is het belang van polynomiale benadering duidelijker geworden, waar de rest van de secties op zullen focussen.

5 LP benadering

In deze sectie beschrijven we een verbetering ten opzichte van het greedy algoritme voor het Firefighter probleem op bomen (zie Sectie 3). Het betreft een $(1 - 1/e)$ -benaderingsalgoritme (merk op dat $1 - 1/e \approx 0.6321$), wat deterministisch een oplossing geeft in polynomiale tijd zoals L. Cai *et al.* beschrijven in [9]. Dit gaat door middel van een *geheeltallig lineair programma (ILP)* geformuleerd door MacGillivray en Wang [24]. Dit kan worden opgelost via *LP-relaxatie* om een fractionele oplossing te krijgen. Daarna kan er *randomised rounding* op toegepast worden, om een geldige oplossing te krijgen. *Randomised rounding* kan worden gederandomiseerd via conditionele verwachtingen [2] om een deterministisch algoritme van polynomiale tijd te krijgen.

5.1 Het LP

We formuleren eerst een 0-1 geheeltallig lineair programma dat overeenkomt met de optimale oplossing voor het Firefighter probleem op bomen zoals MacGillivray en Wang dit beschrijven in [24]. Zij (T, r) een instantie van het Firefighter probleem, met $T = (V, E)$. Zij L de diepte van T . Zij x_v een booleaanse beslissingsvariabele voor een knoop $v \in V$ zodat $x_v = 1$ dan en slechts dan als v beschermd wordt. Zij w_v de hoeveelheid knopen die v als voorouder hebben met v erbij, dus $w_v = |T_v|$. Gegeven $u, v \in V$ noteren we $v \preceq u$ als v een voorouder van u is, of als $u = v$. Zoals MacGillivray en Wang bewijzen, een optimale strategie op een boom beschermt op tijdstap i een knoop in laag i , en heeft geen noodzaak om de kinderen van deze knoop te beschermen [24]. Met deze observatie wordt het volgende LP opgesteld.

$$\begin{aligned} \text{Maximaliseer} \quad & \sum_{v \in V} w_v x_v \\ \text{onder de beperkingen} \quad & x_r = 0, \\ & \sum_{v \in V_l} x_v \leq 1 \quad \text{voor elke laag } V_l \text{ met } 1 \leq l \leq L, \quad (\text{LP}_{\text{MW}}) \\ & \sum_{v \preceq u} x_v \leq 1 \quad \text{voor elk blad } u \in \Gamma, \\ & x_v \in \{0, 1\} \quad \text{voor elke knoop } v \in V. \end{aligned}$$

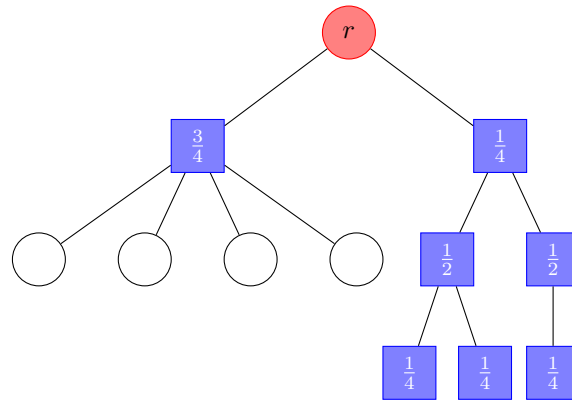
Het oplossen van dit LP is uiteraard net zo moeilijk als het oplossen van het Firefighter probleem. Echter, als we de bekende techniek van LP-relaxatie toepassen (de voorwaarde $x_v \in \{0, 1\}$ weglaten en vervangen door $0 \leq x_v \leq 1$), dan kunnen we een fractionele strategie krijgen in polynomiale tijd. Een *fractionele strategie* is een plaatsing van *fractionele brandweermannen* op de knopen van T zodat de som van alle breuken op een laag i maximaal 1 is. Daarnaast is ook de som van alle breuken op een pad van een blad u naar de wortel r hoogstens 1. Als een knoop v bijvoorbeeld door 0.5 brandweerman beschermd wordt, zijn alle knopen met v als voorouder ook voor 0.5 beschermd. Als er dan een knoop u met v als voorouder ook nog door 0.3 brandweerman beschermd wordt, zijn alle knopen met u als voorouder voor 0.8 beschermd. De optimale oplossing na de LP-relaxatie wordt genoteerd met OPT_{LP} . Zie ook Figuur 5 voor een voorbeeld van een fractionele strategie op een Firefighter instantie.

5.2 Benaderingsfactor

In het vervolg gaan we uit van een Firefighter probleem (T, r) met oplossing OPT_{LP} . Om van deze oplossing weer een geldige oplossing te maken (dus geen fractionele brandweermannen), beschrijven L. Cai *et al.* [9] het principe van *randomised rounding* en de benadering die dit algoritme geeft.

Per laag in de boom sommeren de waarden van x_v tot hoogstens 1. Dit kan dus gezien worden als een kansverdeling. *Randomised rounding* kiest dus aan de hand van deze kansverdeling per laag één knoop om te beschermen. Het kan uiteraard zijn dat in een laag de waarden van x_v niet sommeren tot 1, maar tot minder. In dat geval wordt de overige kans gezien als de optie om niks te beschermen in deze laag.

Er zijn een paar nadelen aan deze aanpak. Het kan zijn dat het afronden er voor zorgt dat een knoop v en zijn voorouder u beiden beschermd worden. In de oplossing zullen we dan u



Figuur 5: Een instantie waarop een fractionele strategie is gevisualiseerd. Hierbij staan rode knopen in brand, en vierkante blauwe knopen zijn (partieel) beschermd door de strategie.

beschermen, en in de laag van v geen knoop beschermen, immers, als u al is beschermd is v al veilig dus de bescherming heeft geen nut.

Een ander risico is het volgende geval. Zij v een knoop die volledig gered wordt door de fractionele strategie (v wordt zelf niet beschermd). We willen dan uiteraard dat in de uiteindelijke strategie v ook gered wordt. Zij d_v de lengte van het unieke kortste pad van v naar de wortel r , dus $d_v = |P_v| - 1$. In het ergste geval heeft elke voorouder van v een fractie $1/d_v$ van een brandweerman, aangezien de kans dat v gered wordt dan zo klein mogelijk is. Deze kans is gelijk aan

$$1 - (1 - 1/d_v)^{d_v} \geq 1 - 1/e.$$

Dit geeft al aan wat de benaderingsfactor voor dit algoritme minstens zal worden.

Aangezien we werken met kansrekening gebruiken we de volgende notaties voor een aantal standaard operaties. Noteer $\mathbf{E}[X]$ voor de verwachte waarde van X . Noteer $\mathbf{Pr}[X = x]$ als de kans dat X gelijk is aan x .

We bewijzen de benadering die *randomised rounding* geeft in het volgende lemma, zoals ook beschreven in [9]. Herinner dat voor een strategie S de waarde van deze strategie wordt genoteerd met $\|S\|$.

Lemma 5.1. *Zij S_F een gegeven fractionele strategie. Zij S_I de strategie die geproduceerd wordt door randomised rounding toe te passen op S_F . Dan geldt*

$$\mathbf{E}[\|S_I\|] \geq \left(1 - \frac{1}{e}\right) \cdot \|S_F\|.$$

Bewijs. We voeren eerst wat notatie in. Noteer de waarde van de fractionele strategie op knoop v als \tilde{x}_v , en de waarde van de afgeronde strategie als x_v . Hier geeft dus x_v aan of S_I de knoop v beschermt of niet. Definieer op soortgelijke manier $\tilde{y}_v = \sum_{u \preceq v} \tilde{x}_u$ als de fractie van v die gered wordt door S_F , en zo ook $y_v = \sum_{u \preceq v} x_u$ om aan te geven of v gered wordt door S_I .

Zij nu $v \in V$ een vaste knoop in T , en noteer het unieke pad van v naar r als $r = v_0, v_1, v_2, \dots, v_k = v$. De kans dat v gered wordt, dus dat $y_v = 1$, kan worden bepaald door

één minus de kans dat alle knopen op het pad niet gered worden. Dit geeft

$$\Pr[y_v = 1] = 1 - \prod_{i=1}^k (1 - \tilde{x}_{v_i}).$$

De ‘ongelijkheid van Jensen’ stelt dat $\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$. Deze kan worden toegepast om de volgende ongelijkheid te krijgen:

$$1 - \prod_{i=1}^k (1 - \tilde{x}_{v_i}) \geq 1 - \left(\frac{\sum_{i=1}^k (1 - \tilde{x}_{v_i})}{k} \right)^k.$$

Dit is om te schrijven naar een aangenamere vorm, namelijk

$$1 - \left(\frac{\sum_{i=1}^k (1 - \tilde{x}_{v_i})}{k} \right)^k = 1 - \left(\frac{k - \sum_{i=1}^k \tilde{x}_{v_i}}{k} \right)^k = 1 - \left(\frac{k - \tilde{y}_v}{k} \right)^k = 1 - \left(1 - \frac{\tilde{y}_v}{k} \right)^k.$$

Aangezien $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\tilde{y}_v}{k} \right)^k = e^{-\tilde{y}_v}$, geldt er

$$1 - \left(1 - \frac{\tilde{y}_v}{k} \right)^k \geq 1 - e^{-\tilde{y}_v}.$$

Merk op dat $0 \leq \tilde{y}_v \leq 1$. Voor $\tilde{y}_v = 0$ en $\tilde{y}_v = 1$ geldt er dat $1 - e^{-\tilde{y}_v} = (1 - 1/e)\tilde{y}_v$. Dus is makkelijk na te gaan dat er geldt

$$1 - e^{-\tilde{y}_v} \geq \left(1 - \frac{1}{e} \right) \tilde{y}_v.$$

We hebben dus afgeleid dat

$$\Pr[y_v = 1] \geq \left(1 - \frac{1}{e} \right) \tilde{y}_v.$$

De sommatie van alle \tilde{y}_v is de waarde van S_F , dus er geldt

$$\mathbf{E}[\|S_I\|] = \sum_{v \in V} \Pr[y_v = 1] \geq \sum_{v \in V} \left(1 - \frac{1}{e} \right) \tilde{y}_v = \left(1 - \frac{1}{e} \right) \cdot \|S_F\|.$$

Hiermee is Lemma 5.1 bewezen. □

In de volgende subsectie laten we zien dat dit tot een deterministisch benaderingsalgoritme van polynomiale tijd leidt.

5.3 Derandomisatie

We kunnen het resultaat van Lemma 5.1 gebruiken om een deterministisch benaderingsalgoritme te maken. Dit gaat met het proces van derandomisatie door gebruik te maken van conditionele verwachtingen, zie ook [2]. Merk op dat dit geclaimd wordt in [9], maar daar niet bewezen wordt.

Stelling 5.2. *Zij (T, r) een instantie van het Firefighter probleem. Dan is er een deterministisch $(1 - 1/e)$ -benaderingsalgoritme dat in polynomiale tijd een oplossing geeft.*

Bewijs. Zij $S_I(X_1, X_2, \dots, X_n)$ de strategie verkregen via randomised rounding, waarbij de kansverdeling op laag i van de boom gegeven wordt door X_i , met $1 \leq i \leq n$. We noteren $S_I(x_1, \dots, x_k, X_{k+1}, \dots, X_n)$ als er al vast staat welke knopen er in laag 1 tot en met k gekozen worden, met $1 \leq k \leq n$. Merk op dat een kansverdeling X_i en zijn resultaat van *randomised rounding* onafhankelijk zijn van de vastlegging van x_j in andere lagen, met $1 \leq i, j \leq n$ en $i \neq j$. We zoeken dus x_1, \dots, x_n die we bepalen uit X_1, \dots, X_n zodat $\|S_I(x_1, \dots, x_n)\| \geq \mathbf{E}[\|S_I(X_1, \dots, X_n)\|]$. Merk op dat deze x_1, \dots, x_n altijd bestaan, immers, een verwachte waarde is een gemiddelde van echte waarden, dus er zal minstens één combinatie aan deze voorwaarde voldoen.

Het algoritme wordt nu als volgt gegeven. Loop de lagen $1, \dots, n$ van de boom T één voor één door. Stel dat we nu op laag i zitten, met $1 \leq i \leq n$. Loop alle knopen in laag i één voor één door, met de toevoeging van een extra knoop a om een keuze van ‘niets beschermen’ aan te geven. Stel x_i gelijk aan de huidige knoop uit deze verzameling. Merk op dat x_1, \dots, x_{i-1} al vast staan door de vorige iteraties. Bereken de booleaanse waarde van $\mathbf{E}[\|S_I(x_1, \dots, x_i, X_{i+1}, \dots, X_n)\|] \geq \mathbf{E}[\|S_I(x_1, \dots, x_{i-1}, X_i, X_{i+1}, \dots, X_n)\|]$. Als dit waar is, is de keuze van x_i goed. Stel dan $X_i = x_i$ vast en ga dan door naar de volgende laag, $i + 1$, als deze er nog is. Als de booleaanse waarde niet waar is, ga dan verder in dezelfde laag door x_i op een andere knoop te zetten en bereken opnieuw deze waarde. Aangezien het aantal knopen in de boom, en dus ook het aantal lagen, eindig is, termineert dit algoritme altijd. Het levert een resultaat $S_I(x_1, \dots, x_n)$ op zodanig dat $\|S_I(x_1, \dots, x_n)\| \geq \mathbf{E}[\|S_I(X_1, \dots, X_n)\|]$.

De complexiteit van dit algoritme is volledig afhankelijk van de snelheid van het berekenen van de verwachte waarde voor een strategie met kansverdelingen. We hebben eerder al gezien dat er geldt $\mathbf{E}[\|S_I\|] = \sum_{v \in V} \left(1 - \prod_{i=1}^k (1 - \tilde{x}_{v_i})\right)$. Deze berekening kost duidelijk $O(dn)$ tijd, waarbij d de diepte van de boom is en n het aantal knopen in de boom. In het ergste geval doen we deze berekening twee keer voor elke knoop in de boom en nog eens twee keer voor elke laag van de boom (het ‘bescherm niets’-geval). Dit geeft een complexiteit van $O(d^2n + dn^2)$. Aangezien voor elke boom geldt $d \leq n$, is dit een complexiteit van $O(dn^2)$, wat van $O(n^3)$ is. Dit algoritme is dus zeker van polynomiale complexiteit.

Om, gegeven een Firefighter probleem (T, r) , deterministisch een oplossing te bepalen, doen we dus de volgende stappen van polynomiale tijd. Los het bijbehorende LP-probleem op met behulp van LP-relaxatie. Noem het (optimale) resultaat S_F . Gebruik deze fractionele oplossing S_F als kansverdeling voor elke laag van de boom. Derandomiseer deze kansverdelingen met behulp van bovenstaand algoritme. Dan heb je nu een oplossing voor het Firefighter probleem die een waarde groter of gelijk aan $(1 - \frac{1}{e}) \cdot \|S_F\|$ heeft. Dus beschrijft dit een deterministisch $(1 - 1/e)$ -benaderingsalgoritme van polynomiale complexiteit. \square

5.4 Striktheid benaderingsfactor

Net als bij het greedy algoritme (zie Sectie 3) komt de vraag naar voren of deze grens niet strikter kan. L. Cai *et al.* [9] beschrijven dat deze grens strikt is, zolang de afrondtechniek (zoals *randomised rounding*) *LP-respecting* is. Een afrondtechniek heet *LP-respecting* als het alleen maar kiest om een knoop v te beschermen als $\tilde{x}_v > 0$, en dus nooit een knoop v beschermt met $\tilde{x}_v = 0$. In [9] claimen L. Cai *et al.* dit zonder bewijs.

P. Chalermsook en D. Vaz [10] hebben echter een sterker resultaat aangetoond. Ze laten zien dat er een $(1 - 1/e + \epsilon)$ -ondergrens geldt voor het *integrality gap* van LP_{MW} . Dit betekent dat

het verschil tussen de optimale gerelaxeerde oplossing en de optimale geheeltallige oplossing van LP_{MW} niet beter kan dan $1 - 1/e + \epsilon$. De consequenties hiervan zijn dat een benadering via dit LP niet beter kan dan $1 - 1/e$. Betere resultaten zullen dus meer eisen moeten stellen aan het LP, of een andere aanpak moet nemen om tot een betere benadering te komen.

Dit benadrukt het indrukwekkende aan het bewijs van de volgende sectie, dat er een PTAS bestaat voor het Firefighter probleem op bomen.

6 PTAS

In deze sectie zullen we een sterker resultaat dan alle voorgaande resultaten presenteren. Het gaat om een *Polynomial Time Approximation Scheme (PTAS)*, ofwel een $(1 - \epsilon)$ -benadering van polynomiale looptijd voor elke $\epsilon > 0$, voor het Firefighter probleem op bomen. D. Adjiashvili *et al.* [1] geven deze PTAS en zijn bewijs. We zullen dit bewijs ook geven, echter, sommige elementen zullen worden weggelaten wegens compactheid en samenhang van deze scriptie. Daarnaast zullen we meer intuïtie proberen te geven aan het bewijs, zodat de grote lijnen ervan duidelijker naar voren komen. We beginnen door een veralgemenisering te geven van het Firefighter probleem op bomen.

6.1 Veralgemenisering van Firefighter

In het bewijs van de PTAS hebben we een algemenere versie nodig dan het voorheen besproken Firefighter probleem op bomen, aangezien dit meer flexibiliteit geeft voor de nodige reducties in het bewijs. We introduceren de volgende varianten van het Firefighter probleem op bomen:

- Gewogen versie: knopen $v \in V \setminus \{r\}$ hebben gewichten $w(v) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Het doel is om het totale gewicht van alle knopen die niet in brand gaan te maximaliseren. Voorheen waren alle gewichten één.
- Meerdere brandweermannen/Algemene budgetten: in plaats van één bescherming per tijdstap staan we toe dat er meerdere beschermingen per tijdstap plaats mogen vinden, zeg $B_l \in \mathbb{Z}_{>0}$ beschermingen voor elke tijdstap $1 \leq l \leq L$. We noemen B_l ook wel het *budget* van tijdstap l . Merk op dat we een budget van nul hier niet toestaan, aangezien een laag met budget nul kan worden geëlimineerd met behulp van een contractie. Dit wordt uitgebreider behandeld in het bewijs van Stelling 6.6.

De bovenstaande uitbreidingen zijn vooral voor gemak van notatie, aangezien D. Adjiashvili *et al.* in hun paper een bewijs van het volgende twee lemma's leveren:

Lemma 6.1. *Elke gewogen Firefighter instantie op bomen met n knopen en meerdere brandweermannen kan efficiënt worden getransformeerd in een equivalente gewogen Firefighter instantie met eenheid budgetten en $O(n^2)$ knopen.*

Lemma 6.2. *Elke gewogen Firefighter instantie op bomen kan worden gereduceerd naar een eenheidsbudgetten instantie met maar een arbitrair klein verlies van waarde.*

We introduceren nu nog wat notatie. Het interval van alle mogelijke dieptes van een boom T noteren we met $[L] = \{1, \dots, L\}$. De notatie $V_l \subseteq V$ voor laag l van de boom is al bekend, maar we breiden dit uit met $V_{\leq l} = \cup_{k=1}^l V_k$ en net zo $V_{< l}, V_{> l}, V_{\geq l}$ voor $l \in [L]$. Merk op dat we hier telkens laag nul negeren want deze bevat alleen r en is dus niet interessant voor notatie. In het vervolg zullen we voor elke knoop $v \in V$ het pad P_v naar de wortel ook iets aanpassen door

de wortel r niet als deel van dit pad te beschouwen. Er geldt dus $P_v \subseteq V \setminus \{r\}$ voor elke $v \in V \setminus \{r\}$.

We geven nu het gerelaxeerde LP wat hoort bij een gewogen Firefighter instantie met algemene budgetten. Hierbij is x_u de beslissingsvariabele voor de knoop $u \in V$, en noteren we $x(U) = \sum_{u \in U} x_u$. Herinner dat T_v de deelboom van T is met v als wortel. Het LP wordt gegeven door

$$\begin{aligned} \text{Maximaliseer} \quad & \sum_{v \in V \setminus \{r\}} x_v w(T_v) \\ \text{onder de beperkingen} \quad & x(P_v) \leq 1 \quad \text{voor elk blad } v \in \Gamma, \\ & x(V_{\leq l}) \leq \sum_{i=1}^l B_i \quad \text{voor elke } l \in [L], \\ & x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{V \setminus \{r\}}. \end{aligned} \tag{LP_{FF}}$$

Uit eerdere secties weten we al dat LP_{FF} een benadering geeft van $1 - 1/e$, aangezien dit LP equivalent is aan het eerder gegeven LP (zie LP_{MW}) met eenheid budgetten.

Als we in het vervolg werken met complexiteitsnotatie zullen we expliciet zijn over de afhankelijkheid van een foutmarge zoals ϵ , aangezien we werken met een $(1 - \epsilon)$ -benadering. Bij een notatie als $O(n)$ is er dus geen ϵ in de verstopte constanten.

Voor we beginnen met het bewijs van het bestaan van een PTAS en zijn constructie, zullen we eerst een nuttige stelling noemen voor het omgaan met matrices van beperkingen.

6.2 Totale Unimodulariteit

We zullen eerst de definitie van *totale unimodulariteit* geven. Dit begrip komt ons goed te pas in combinatie met een paar stellingen. Deze definities en stellingen zijn gehaald uit [26].

Definitie 6.3 (Totale unimodulariteit). We noemen een matrix A *totaal unimodulair* als elke vierkante deelmatrix van A een determinant heeft van 0, 1, of -1 .

Uit de volgende stelling blijkt het nut van totaal unimodulaire matrices, we kunnen het gebruiken voor het bewijzen van het bestaan van geheeltallige optima.

Stelling 6.4. *Zij A een totaal unimodulaire $m \times n$ matrix, en zij $b \in \mathbb{Z}^m$. Dan is het veelvlak*

$$P := \{x \mid Ax \leq b\}$$

geheeltallig.

Uit deze stelling volgt direct dat het maximum (of minimum) onder de matrix van beperkingen wordt aangenomen in een geheeltallig punt als deze matrix totaal unimodulair is. Dit maakt deze eigenschap zeer nuttig voor het werken met LP's. De volgende stelling helpt ons met het identificeren van totaal unimodulaire matrices. Deze stelling is origineel genoemd in [17].

Stelling 6.5. *Een matrix M is totaal unimodulair dan en slechts dan als elke collectie R van rijen van M gepartitioneerd kan worden in klassen R_1 en R_2 zodanig dat de som van de rijen in R_1 min de som van de rijen in R_2 een vector met alleen maar elementen 0 en ± 1 oplevert.*

We zullen deze stelling enkele keren benutten bij het werken met beperkingen.

We kunnen nu beginnen met het beschrijven van de PTAS.

6.3 Overzicht van het PTAS

Het idee van de PTAS is in essentie het volgende. We kunnen efficiënt een oplossing vinden voor een gerelaxeerd LP. Echter, als we hier een geheeltallige oplossing uit willen maken, zal er vaak veel van de waarde van de oplossing verloren gaan. Dit verschil in waarde wordt de *integrality gap* van het LP genoemd. Knopen in de oplossing die deels, maar niet volledig, beschermd worden zijn hierbij het grootste probleem, aangezien een geheeltallige oplossing niet partieel kan beschermen. We moeten deze beschermingen dus op zo'n manier weggooien dat er weinig waarde verloren gaat. Als we kunnen beperken hoeveel waarde deze partiële beschermingen omvatten, bereiken we een dergelijk resultaat.

Het PTAS werkt vanuit het volgende principe. We kunnen LP_{FF} uitbreiden zodat het alleen volledig geredde en beschermde knopen mag beschermen voor een oplossing x . Deze oplossing is dan zo geconstrueerd dat het resultaat van LP_{FF} een geheeltallige oplossing zal zijn. Om te zorgen dat dit nog een 'goede' oplossing oplevert moeten we 'zware' knopen definiëren, dit zijn knopen met relatief veel gewicht. Door te gokken welke zware knopen in de oplossing komen, zal het omzetten van de oplossing naar een geheeltallige oplossing weinig verlies van waarde geven. Echter, het gokken van de zware knopen is een exponentieel proces. Om dit idee dus nog in polynomiale tijd uit te voeren, zullen we de verzameling van zware knopen naar logaritmische grootte moeten forceren. Hiervoor zullen we in het begin van het bewijs een aantal reducties op de gegeven boom van het probleem toepassen. Deze reducties moeten uiteraard ook het verlies van waarde laag houden, en dit verlies zal in elke stap expliciet duidelijk gemaakt worden. Zo volgt er uiteindelijk een PTAS.

6.3.1 Compressie

We beginnen door een compressietechniek toe te passen op het Firefighter probleem. Deze compressie zal de diepte van de boom naar logaritmische grootte omzetten met maar een klein verlies van waarde.

De compressie gaat aan de hand van een serie *budgetverschuivingen*, die we definiëren als volgt. Elke verschuiving beïnvloedt twee lagen $l_1, l_2 \in [L]$ met $l_1 < l_2$ van de boom, en verschuift het budget B_{l_1} van laag l_1 naar laag l_2 . Zo is het nieuwe budget van laag l_2 gelijk aan $B_{l_1} + B_{l_2}$, en het budget van laag l_1 is nul. Laat het duidelijk zijn dat deze verschuivingen alleen maar de opties van beschermen beperken. We kunnen de lagen die na deze serie verschuivingen geen budget meer hebben met een simpele contractieoperatie uit de boom verwijderen. We laten zien dat er een serie budgetverschuivingen is zodat er $O(\log L)$ lagen met niet-nul budget overblijven en er maar een kleine marge van optimale waarde verloren gaat. Dit wordt geformaliseerd in onderstaande Stelling 6.6.

Stelling 6.6. *Zij \mathcal{I} een eenheid-budget Firefighter instantie op een boom met diepte L , en zij $\delta \in (0, 1)$. Dan is er een algemene budgetten-instantie $\bar{\mathcal{I}}$ van het Firefighter probleem op bomen met diepte $L' = O(\frac{\log L}{\delta})$ in polynomiale tijd te construeren waarvoor de onderstaande eigenschappen gelden. Hierbij zijn $\|OPT(\bar{\mathcal{I}})\|$ en $\|OPT(\mathcal{I})\|$ de waarden van de optimale oplossingen van $\bar{\mathcal{I}}$ en \mathcal{I} respectievelijk. De eigenschappen worden gegeven door*

$$(i) \quad \|OPT(\bar{\mathcal{I}})\| \geq (1 - \delta) \|OPT(\mathcal{I})\|, \text{ en}$$

(ii) *elke oplossing van $\bar{\mathcal{I}}$ kan efficiënt omgezet worden in een oplossing van \mathcal{I} met dezelfde waarde.*

We zullen Stelling 6.6 bewijzen aan de hand van de volgende stelling.

Stelling 6.7. *Zij \mathcal{I} een eenheid-budget Firefighter instantie op een boom van diepte L , en zij $\delta \in (0, 1)$. Dan is er een instantie $\bar{\mathcal{I}}$ te construeren door middel van budgetverschuivingen, zodanig dat*

$$(i) \quad \|\text{OPT}(\bar{\mathcal{I}})\| \geq (1 - \delta) \|\text{OPT}(\mathcal{I})\|, \text{ en}$$

(ii) $\bar{\mathcal{I}}$ heeft niet-nul budgetten op maar $O(\frac{\log L}{\delta})$ lagen.

Bewijs. Zij gegeven een eenheid-budget Firefighter instantie op een boom $T = (V, E)$ met diepte L . De instantie $\bar{\mathcal{I}}$ zal niet-nul budgetten hebben op de volgende lagen $\mathcal{L} \subseteq [L]$ van T :

$$\mathcal{L} = \left\{ \lceil (1 + \delta)^j \rceil \mid j \in \left\{ 0, \dots, \left\lfloor \frac{\log L}{\log 1 + \delta} \right\rfloor \right\} \right\} \cup \{L\}.$$

Merk op dat de lagen met budget dus steeds meer uitgespreid zijn naarmate we verder afdalen in de boom. Noteer voor het gemak $\mathcal{L} = \{l_1, \dots, l_k\}$ met $1 = l_1 < l_2 < \dots < l_k = L$. Merk op dat dus $k = O(\frac{\log L}{\log 1 + \delta}) = O(\frac{\log L}{\delta})$. De instantie $\bar{\mathcal{I}}$ wordt nu verkregen door in elke laag $i \notin \mathcal{L}$ het budget naar beneden te verschuiven naar de eerstvolgende laag $j \in \mathcal{L}$. Aangezien we met eenheid-budgetten werken, betekent dit formeel dat laag l_i met $i \in [k]$ budget $B_{l_i} = l_i - l_{i-1}$ krijgt, ofwel het aantal lagen tussen laag l_i en laag l_{i-1} . Hierbij geldt $l_0 = 0$. Verder zetten we $B_l = 0$ voor alle $l \in [L] \setminus \mathcal{L}$. Dit kost lineaire tijd in het aantal lagen van de boom T , dus $\bar{\mathcal{I}}$ is zeker efficiënt te construeren. Hiermee voldoen we aan eis (ii) van Stelling 6.7, want $\bar{\mathcal{I}}$ heeft niet-nul budgetten in exact $k = O(\frac{\log L}{\delta})$ lagen.

Zij $S^* \subseteq V$ een optimale oplossing van \mathcal{I} . Dan is $\|\text{OPT}(\mathcal{I})\| = \|S^*\| = \sum_{u \in S^*} w(T_u)$. We zullen laten zien dat er een oplossing $\bar{S} \subseteq S^*$ is van $\bar{\mathcal{I}}$, zodat $\|\bar{S}\| \geq (1 - \delta) \|\text{OPT}(\mathcal{I})\|$. We weten dat twee knopen $u, v \in S^*$ niet op hetzelfde pad van blad naar wortel kunnen liggen, aangezien S^* een optimale oplossing is. Maar dan geldt deze uitspraak ook voor elke deelverzameling $\bar{S} \subseteq S^*$. Hieruit volgt dat de waarde van \bar{S} gegeven wordt door $\bar{S} = \sum_{u \in \bar{S}} w(T_u)$.

Een verzameling S is geldig in termen van budget voor $\bar{\mathcal{I}}$ dan en slechts dan als

$$|S \cap V_{\leq l}| \leq \sum_{i=1}^l B_{l_i} \quad \forall l \in [L]. \quad (1)$$

Beschouw een laag $l \in [L - 1]$ met $B_{l+1} = 0$. De eis die (1) stelt aan deze l is zwakker dan de eis die (1) stelt aan $l + 1$, en is dus overbodig. Dit is zo omdat de linkerkant bij het tweede geval een grotere verzameling beschrijft, terwijl de rechterkant hetzelfde is. Hieruit volgt het volgende systeem dat equivalent is aan (1):

$$\begin{aligned} |S \cap V_{\leq l_{i+1}-1}| &\leq l_i \quad \forall i \in [k - 1], \\ |S \cap V| &\leq L. \end{aligned} \quad (2)$$

We definiëren het polytoop, dat het convexe omhulsel van alle karakteristieke vectoren $\chi^S \in \{0, 1\}^V$ van verzamelingen $S \subseteq S^*$ die voldoen aan (2) beschrijft, als volgt

$$P = \left\{ x \in [0, 1]^V \mid \begin{array}{l} x(V_{\leq l_{i+1}-1}) \leq l_i \quad \forall i \in [k - 1], \\ x(V) \leq L, \\ x(V \setminus S^*) = 0 \end{array} \right\}. \quad (3)$$

Observeer dat de matrix van beperkingen voldoet aan de *consecutive-ones* eigenschap met respect tot de kolommen¹. Dit geldt aangezien $V_{\leq l}$ ervoor zorgt dat elke knoop die in een

¹De *consecutive-ones* eigenschap met respect tot de kolommen zegt dat elke kolom bestaan uit nullen en enen, en precies van de vorm $\{0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0\}$ is.

eerdere beperking voorkomt ook zeker in de beperkingen erna voorkomt, tot en met de $x(V) \leq L$ beperking. We kunnen nu Stelling 6.5 toepassen. Zij R een willekeurige deelverzameling van de rijen van de matrix van beperkingen. Zet de niet-strikte beperking met de meeste elementen uit R in R_1 (dat wil zeggen, de beperking waarvoor de rij van coëfficiënten de meeste enen bevat binnen R , en het niet de $x(V \setminus S^*) = 0$ is). De beperking erboven, dus de beperking met minder elementen dan de eerste, maar meer elementen dan de andere beperkingen, zetten we in R_2 . Volgens deze zelfde eis zetten we de eerstvolgende beperking in R_1 . Zo gaan we door totdat we alleen (mogelijk) de $x(V \setminus S^*) = 0$ beperking nog in R_1 of R_2 moeten zetten, als deze deel van R is. Merk op dat op dit punt er door de *consecutive-ones* eigenschap geldt dat de vector R_1 minus R_2 alleen maar nullen en enen bevat. We kunnen dus $x(V \setminus S^*) = 0$ aan R_2 toevoegen, en zo houden we zeker een vector over met alleen elementen 0, 1 en -1 . Dus is volgens Stelling 6.5 de matrix totaal unimodulair.

Uit Stelling 6.4 volgt nu dat het optimum onder deze beperkingen wordt aangenomen in een geheeltallig punt. Hieruit kunnen we concluderen dat er een verzameling $S \subseteq S^*$ bestaat met $\sum_{u \in S} w(T_u) \geq (1 - \delta) \|\text{OPT}(\mathcal{I})\|$ dan en slechts dan als

$$\max \left\{ \sum_{u \in S^*} x(u) \cdot w(T_u) \mid x \in P \right\} \geq (1 - \delta) \|\text{OPT}(\mathcal{I})\|. \quad (4)$$

Om (4) aan te tonen, hoeven we alleen een (fractionele) oplossing in P te vinden met minstens waarde $(1 - \delta) \cdot \|\text{OPT}(\mathcal{I})\|$. Beschouw $y = \frac{1}{1+\delta} \chi^{S^*}$, waarbij χ^{S^*} de karakteristieke vector van S^* is. Het is niet moeilijk om aan te tonen dat y aan de gewenste eisen voldoet (zie [1], Stelling 4), en dit wordt weggelaten wegens compactheid van dit bewijs. \square

Om Stelling 6.6 aan te tonen laten we zien dat deze uit Stelling 6.7 volgt.

Bewijs van Stelling 6.6. We laten eerst zien dat lagen met budget nul kunnen worden verwijderd met behulp van een contractie. Zij $l \in \{2, \dots, L\}$ een laag met budget $B_l = 0$. Trek voor elke knoop $v \in V_{l-1}$ alle kanten van v naar zijn kinderen in, en verhoog het gewicht $w(v)$ van v met de som van alle gewichten van zijn kinderen. Formeel gezien, als v kinderen $u_1, \dots, u_k \in V_l$ heeft, worden de knopen v, u_1, \dots, u_k vervangen door een enkele knoop z met gewicht $w(z) = w(v) + \sum_{i=1}^k w(u_i)$. Deze knoop z wordt dan een kind van de voorouder van v waarvan deze een kind was, en krijgt zelf als kinderen alle kinderen van u_1, \dots, u_k . Het is makkelijk te zien dat een oplossing voor deze contractie ook een oplossing is na de contractie (als we v met z associëren). Daarnaast hebben oplossingen voor en na de contractie dezelfde waarde.

Gegeven een eenheid-budget Firefighter instantie \mathcal{I} met diepte L , en $\delta \in (0, 1)$, pas nu eerst Stelling 6.7 toe met de gegeven parameters. Pas op elke laag met budget nul in het resultaat deze contractieoperatie toe. Het resultaat is uiteindelijk een equivalente instantie met diepte $L' = O(\frac{\log L}{\delta})$, en dit is het gewenste resultaat. \square

In het vervolg behandelen we nog een reductie die nodig is voor de enumeratie van ‘zware’ knopen die we later gaan doen.

6.3.2 Verdere reductie

We zullen nu twee nieuwe termen invoeren voor knopen in een oplossing. Zij x een oplossing van LP_{FF} over een algemene budgetten Firefighter instantie op een boom. We noemen een knoop $v \in V \setminus \{r\}$ *x-los* of gewoon *los* als $x_v > 0$ en $x(P_v) < 1$. We noemen een knoop $v \in V \setminus \{r\}$ *x-vast* of gewoon *vast* als $x_v > 0$ en $x(P_v) = 1$. Merk op dat dus elke knoop in $v \in V$ met $x_v > 0$ ofwel los ofwel vast is. Zoals eerder genoemd in het begin van subsectie 6.3 zorgen de losse knopen voor

problemen en beperken we ons het liefst tot vaste knopen om zo een geheeltallige oplossing te krijgen. De volgende stelling geeft een handige indicatie van het aantal losse knopen in een oplossing.

Stelling 6.8. *Zij x een oplossing in een extreem punt van LP_{FF} over een Firefighter instantie op een boom met algemene budgetten. Dan is het aantal x -losse knopen hoogstens L , de diepte van de boom.*

Bewijs. Zij x een extreem punt van het veelvlak dat de mogelijke geldige oplossingen van LP_{FF} definieert. Dan kan x uniek gedefinieerd worden door $|V \setminus \{r\}|$ lineair onafhankelijk strikte beperkingen. Merk op dat de strikte beperkingen in drie groepen kunnen worden opgedeeld:

- (i) Strikte niet-negatieve beperkingen, één voor elke knoop in $\mathcal{F}_1 = \{v \in V \setminus \{r\} \mid x(v) = 0\}$.
- (ii) Strikte budgetbeperkingen, één voor elke laag in $\mathcal{F}_2 = \{l \in [L] \mid x(V_{\leq l}) = \sum_{i=1}^l B_i\}$.
- (iii) Strikte bladbeperkingen, één voor elke knoop in $\mathcal{F}_3 = \{v \in \Gamma \mid x(P_v) = 1\}$.

Er zijn mogelijk meer manieren om x te beschrijven binnen de verzameling $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3$. We beschouwen het systeem dat x uniek bepaalt waarin heel \mathcal{F}_1 bevat is, met daarbij arbitraire deelverzamelingen $\mathcal{F}'_2 \subseteq \mathcal{F}_2$ en $\mathcal{F}'_3 \subseteq \mathcal{F}_3$ zodanig dat $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}'_2 \cup \mathcal{F}'_3$ een systeem van volledige rang beschrijft. Dat het systeem van volledige rang is impliceert dat er voor elke knoop in het probleem exact één beperking is. Hieruit volgt dat

$$|\mathcal{F}_1| + |\mathcal{F}'_2| + |\mathcal{F}'_3| = |V| - 1. \quad (5)$$

Zij $V^{\mathcal{L}}$ en $V^{\mathcal{T}}$ de verzameling van respectievelijk x -losse en x -vaste knopen. We laten zien dat $|\mathcal{F}'_3| \leq |V^{\mathcal{T}}|$. Definieer voor elk blad $v \in \mathcal{F}'_3$, $f_v \in V^{\mathcal{T}}$ als de eerste knoop op het pad P_v van v naar de wortel waarvoor $x_{f_v} > 0$. Aangezien $x(P_v) = 1$ voor elk blad $v \in \mathcal{F}'_3$, is $f_v \in V^{\mathcal{T}}$. We moeten nog laten zien dat voor elke twee verschillende $v_1, v_2 \in \mathcal{F}'_3$ er geldt dat $f_{v_1} \neq f_{v_2}$. Stel dat $f_{v_1} = f_{v_2} = f$ voor verschillende $v_1, v_2 \in \mathcal{F}'_3$. Dan is f dus een voorouder van v_1 en van v_2 . Maar dan is het equivalent om voor v_2 te eisen dat $x(v_2) = 0$. Dit is in tegenspraak met de aanname dat \mathcal{F}_1 volledig bevat is in het systeem. Dus is $f_{v_1} \neq f_{v_2}$ voor elke twee verschillende $v_1, v_2 \in \mathcal{F}'_3$. Maar dan is

$$|\mathcal{F}'_3| \leq |V^{\mathcal{T}}|. \quad (6)$$

We kunnen concluderen dat

$$\begin{aligned} |V^{\mathcal{L}}| + |V^{\mathcal{T}}| &= |V| - 1 - |\mathcal{F}_1| && (V^{\mathcal{L}} \cup V^{\mathcal{T}} \text{ zijn alle knopen } v \in V \setminus \{r\} \text{ met } x_v > 0) \\ &= |\mathcal{F}'_2| + |\mathcal{F}'_3| && (\text{vanwege (5)}) \\ &\leq |\mathcal{F}'_2| + |V^{\mathcal{T}}| && (\text{vanwege (6)}). \end{aligned}$$

En zo zien we direct dat er geldt

$$|V^{\mathcal{L}}| \leq |\mathcal{F}'_2| \leq L.$$

□

We zouden nu kunnen proberen om, gegeven een oplossing x van LP_{FF} , een nieuw LP te construeren door te eisen dat LP_{FF} alleen maar knopen mag beschermen die x -vast zijn. Het nieuwe LP zal een optimale waarde van minstens $\sum_{v \in V \setminus \{r\}} x_v w(T_v) - \sum_{v \in V^{\mathcal{L}}} x_v w(T_v)$ hebben. Dit aangezien deze waarde overeenkomt met de oplossing waarin alleen de x -vaste knopen binnen x beschermd worden, wat een geldige oplossing van het nieuwe LP is. We zien dat we een PTAS bereiken als $\sum_{v \in V^{\mathcal{L}}} x_v w(T_v)$ ten hoogste $\epsilon \cdot \|\text{OPT}\|$ is, waarbij $\|\text{OPT}\|$ de optimale waarde van de instantie is. Echter, dit kan niet algemeen waar zijn, want dat zou in tegenspraak zijn met de

ondergrens voor de *integrality gap* van LP_{FF} (Zie [10]).

Zoals eerder beschreven, willen we dus het verlies van het weggooien van de losse knopen minimaliseren. Dit gaan we doen door te enumereren over de mogelijke ‘zware’ knopen in de optimale oplossing (deze term wordt later gedefinieerd). Om deze enumeratie in polynomiale tijd te voltooien hebben we echter nog een transformatie op de gegeven Firefighter instantie nodig. Deze zorgt ervoor dat de optimale oplossing van de instantie minstens een fractie van het gewicht van de boom redt. Dit zal de grootte van de verzameling zware knopen beperken.

Lemma 6.9. *Zij \mathcal{I} een instantie van het Firefighter probleem op een boom $T = (V, E)$ met algemene budgetten en gewichten w . Dan is er voor elke $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ een nieuwe Firefighter instantie $\bar{\mathcal{I}}$ op een deelboom $T' \subseteq T$ met dezelfde budgetten. Deze nieuwe instantie is in polynomiale tijd te construeren door middel van knoopverwijderingen en gewichtsverlagingen, zodanig dat*

$$(i) \quad \|OPT(\bar{\mathcal{I}})\| \geq (1 - \frac{1}{\lambda}) \|OPT(\mathcal{I})\|, \text{ en}$$

$$(ii) \quad \|OPT(\bar{\mathcal{I}})\| \geq \frac{1}{\lambda} w'(V'), \text{ met } w' \leq w \text{ de nieuwe gewichten van de knopen in de instantie } \bar{\mathcal{I}}.$$

De verwijdering van een knoop $v \in V$ komt overeen met het weghalen van de hele deelboom uit T , dus het weghalen van T_v .

Bewijs. Zij B_l het budget voor laag $l \in [L]$ en definieer $\lambda_l = \lambda B_l$. We construeren T' met de volgende aanpak. Voer het greedy algoritme uit, zoals beschreven in Sectie 3, waarbij we in laag $l \in [L]$ niet één knoop beschermen, maar λ_l knopen. We veranderen nu alleen knopen die in het resultaat van dit greedy algoritme in brand staan. Zij $u \in V$ een knoop die na het greedy algoritme in brand staat. Als u op een pad P_v van een beschermde knoop v naar de wortel ligt, zet $w(u) = 0$. Anders, verwijder T_u uit T . Doe dit voor elke knoop die na het greedy algoritme in brand staat. Het resultaat is de boom $T' = (V', E')$ en de nieuwe gewichten w' . Noteer $D_l = \{v_1^l, \dots, v_{\lambda_l}^l\}$ als de verzameling knopen die in laag i door het greedy algoritme beschermd zijn. Zij $D = \bigcup_{l \in [L]} D_l$.

Merk nu op dat elke knoop met een niet-nul gewicht in een deelboom van een knoop in D zit. We kunnen een partitie maken van D in λ deelverzamelingen zodat elke deelverzameling een geldige oplossing is. Het maximum van de waardes van deze deelverzamelingen is dus minimaal $\frac{1}{\lambda}$ -deel van het gewicht van T' . Hieruit volgt dat een optimale oplossing van de nieuwe instantie minstens $\frac{1}{\lambda}$ -deel van het gewicht van T' redt (immers, het optimum is minstens zo goed als elke andere oplossing). Zo is punt (ii) van Lemma 6.9 al bewezen.

Merk ook op dat het greedy algoritme een polynomiale looptijd heeft, en dat de verwijderingen en gewichtsverlagingen die we doen ook in polynomiale tijd kunnen worden gedaan. Dus zal de constructie van deze nieuwe instantie ook zeker in polynomiale tijd voltooid zijn.

Het rest ons nog punt (i) van Lemma 6.9 te bewijzen. We zullen dit doen door een oplossing A te construeren met een verwachte waarde van minstens $(1 - \frac{1}{\lambda}) \cdot \|OPT(\mathcal{I})\|$, wat impliceert dat de optimale waarde ook boven deze grens ligt. Merk op dat we existentie van een oplossing A gaan aantonen, en er dus vanuit kunnen gaan dat we weten hoe een optimale oplossing S^* van T eruitziet.

Zij $S^* = S_1^* \cup \dots \cup S_L^*$ de beschermde knopen in een optimale oplossing van T , met $S_l^* \subseteq V_l$ de knopen beschermd in laag l . Voor twee verschillende knopen $u, v \in V$ zeggen we ‘ u overdekt v ’ als $v \in T_u \setminus \{u\}$, dus de knoop v wordt veilig gesteld door de bescherming van u .

Voor $l \in [L]$, zij $I_l = S_l^* \cap D_l$ de verzameling van knopen beschermd door zowel de optimale oplossing als het greedy algoritme in laag l . Laat $J_l \subseteq S_l^*$ de verzameling knopen van laag l in de optimale oplossing die overdekt worden door een knoop uit de greedy oplossing. Laat $K_l = S_l^* \setminus (I_l \cup J_l)$ de overige optimale knopen van laag l .

Beschouw een knoop $u \in K_l$. Vanuit het greedy algoritme hebben we de garantie dat voor elke $v \in D_l$ geldt dat $w'(T_v) = w(T_v) \geq w(T_u)$. Daarnaast weten we dat knopen in J_l hetzelfde gewicht hebben in T' als ze hadden in T . We zullen deze eigenschappen gebruiken om een oplossing met waarde dicht bij $\|S^*\|$ te vinden.

We construeren een oplossing $A = A_1 \cup \dots \cup A_L$ met $A_l \subseteq V_l$ en $|A_l| \leq B_l$ met enige willekeur, en bewijzen een grens op zijn verwachte waarde. We lopen de lagen van T' stap voor stap door. We nemen aan dat de verzamelingen $A_{l'}$ met $l' < l$ geconstrueerd en bekend zijn. We construeren de verzameling A_l als volgt:

1. Voeg aan A_l alle knopen in I_l toe.
2. Voeg aan A_l alle knopen uit J_l toe die nog niet overdekt worden door knopen uit $A_1 \cup \dots \cup A_{l-1}$.
3. Voeg aan A_l een *uniform verdeelde willekeurige deelverzameling* uit $D_l \setminus I_l$ van $|K_l|$ groot.

A_l is een geldige oplossing aangezien deze constructie nooit twee knopen op hetzelfde pad naar de wortel kiest. Aangezien A_l nooit meer knopen beschermt in laag l dan S_l^* er beschermt, is A_l ook geldig in termen van budget. We laten zien dat de verwachte waarde van $\|A\|$ minstens $(1 - \frac{1}{\lambda}) \cdot \|\text{OPT}(Z)\|$ is, waarmee het bewijs geleverd is.

Aangezien we alleen een grens op de verwachte waarde hoeven te geven kunnen we ons focussen op één laag $l \in [L]$ en daarin laten zien dat de bijdrage van de knopen in A_l minstens $(1 - \frac{1}{\lambda})$ keer de bijdrage van de knopen in S_l^* is. Aangezien I_l een deelverzameling van beide A_l en S_l^* is, is het genoeg om te laten zien dat de bijdrage van de knopen in $A_l \setminus I_l$ minstens $(1 - \frac{1}{\lambda})$ keer de bijdrage van de knopen in $S_l^* \setminus I_l$ is. Ook dragen de $|K_l|$ willekeurig gekozen knopen in A_l minstens even veel bij als de knopen uit K_l . Dus we kunnen ons beperken tot de bijdrage van de knopen uit $A_l \cap J_l$ in verhouding tot de bijdrage van de knopen in J_l . Aangezien $A_l \cap J_l \subseteq J_l$ is het voldoende om te laten zien dat elke knoop $v \in J_l$ ook bevat is in A_l met een kans van tenminste $1 - \frac{1}{\lambda}$.

Zij $v \in J_l$ willekeurig voor een laag $l \in [L]$. Zij $l' < l$ de laag waarin er voor een $u \in D_{l'}$ geldt dat $v \in T_u$, ofwel u is gekozen door het greedy algoritme en overdekt v . Merk op dat u uniek bepaald is (het greedy algoritme beschermt niet twee knopen op hetzelfde pad naar de wortel). Dus als $v \notin A_l$ dan moet wel $u \in A_{l'}$, aangezien dit de enige knoop in D is die v kan overdekken. Daarnaast geldt dat u dan wel gekozen moet zijn via de willekeurige selectie, dus $u \notin S^*$, aangezien S^* geen twee knopen op hetzelfde pad naar de wortel beschermt. In andere woorden, de kans dat v overdekt is, is exact de kans dat u willekeurig gekozen wordt om deel te zijn van $A_{l'}$. Er worden $|K_{l'}|$ knopen gekozen uit de verzameling $D_{l'} \setminus I_{l'}$, dus de kans dat dit gebeurt is hoogstens

$$\frac{|K_{l'}|}{|D_{l'}| - |I_{l'}|} = \frac{|K_{l'}|}{\lambda B_{l'} - |I_{l'}|}.$$

Aangezien er geldt dat $S_{l'}^* = I_{l'} \cup J_{l'} \cup K_{l'}$, en $|S_{l'}^*| \leq B_{l'}$, kunnen we concluderen dat $|K_{l'}| + |I_{l'}| \leq B_{l'}$. Hieruit volgt dat

$$\frac{|K_{l'}|}{\lambda B_{l'} - |I_{l'}|} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Dus de kans dat $v \in A_l$ is tenminste $1 - \frac{1}{\lambda}$. Zo is punt (i) van Lemma 6.9 bewezen. \square

Aangezien Lemma 6.9 alleen verwijderingen en gewichtsverlagingen doet is elke oplossing voor de nieuwe instantie ook een oplossing van de originele instantie met ten minste dezelfde waarde.

We zullen alle resultaten tot nu toe combineren en samenvatten in een eigenschap.

6.3.3 Eigenschappen nieuwe instantie

Het PTAS past eerst de compressie van Stelling 6.6 toe met $\delta = \epsilon/3$ en daarna Lemma 6.9 met $\lambda = \lceil \frac{3}{\epsilon} \rceil$ om een nieuwe Firefighter instantie op een boom $T = (V, E)$ te verkrijgen. We zullen de eigenschappen van deze nieuwe instantie samenvatten in de volgende eigenschap. Merk op dat N hier staat voor het aantal knopen in de originele instantie.

Eigenschap 6.10.

- (i) De diepte L van T voldoet aan $L = O(\frac{\log N}{\epsilon})$.
- (ii) $\|OPT\| \geq \lceil \frac{3}{\epsilon} \rceil^{-1} w(V) \geq \frac{1}{4} \epsilon w(V)$.
- (iii) De optimale waarde $\|OPT\|$ van de nieuwe instantie is ten minste een $(1 - \frac{2}{3}\epsilon)$ -deel van de optimale waarde van de originele instantie.
- (iv) Elke oplossing voor de nieuwe instantie kan efficiënt worden omgezet in een oplossing voor de originele instantie met ten minste dezelfde waarde.

Om nu het PTAS te verkrijgen moeten we voor elke $\epsilon > 0$ een $(1 - \frac{\epsilon}{3})$ -benadering vinden voor een instantie die voldoet aan Eigenschap 6.10. Neem in het vervolg aan dat we werken met een instantie die voldoet aan Eigenschap 6.10.

6.3.4 Zwارة knopen

We zullen nu het begrip van *zwارة* knopen introduceren en laten zien dat we hiermee de impact van de losse knopen kunnen beperken.

Herinner dat we een PTAS kunnen bereiken als $\sum_{v \in V^{\mathcal{L}}} x_v w(T_v)$ ten hoogste $\epsilon \cdot \|OPT\|$ is. We weten nu dat $|V^{\mathcal{L}}| = O(\frac{\log N}{\epsilon})$ door Stelling 6.8. Dus een PTAS wordt bereikt als we voor alle $v \in V^{\mathcal{L}}$ hebben dat $w(T_v) = \Theta(\frac{\epsilon^2}{\log N}) \cdot \|OPT\|$. We kunnen dit bereiken door eerst een deelverzameling van knopen in de oplossing $u \in OPT$ te raden met de hoogste impact, dus met $w(T_u) \geq \eta$ voor een $\eta = \Theta(\frac{\epsilon^2}{\log N}) \cdot \|OPT\|$.

Door Eigenschap 6.10 kunnen we η formeel definiëren in termen van $w(V)$, namelijk

$$\eta = \frac{1}{12} \frac{\epsilon^2}{L} w(V). \quad (7)$$

Dit impliceert dat het acceptabel is als we L keer een gewicht van η verliezen, aangezien er geldt dat $\frac{1}{12} \epsilon^2 w(V) \leq \frac{1}{3} \epsilon \|OPT\|$ via Eigenschap 6.10.

We noemen een knoop $v \in V$ nu *zwارة* als er geldt $w(T_v) \geq \eta$. Zij $H = \{v \in V \setminus \{r\} \mid w(T_v) \geq \eta\}$ de verzameling van *zwارة* knopen. Merk op dat de geïnduceerde deelgraaf $T[H \cup \{r\}]$ over $H \cup \{r\}$ van T een deelboom van T is. We noemen deze deelboom de *zwارة boom*.

Door Eigenschap 6.10 kunnen we uitspraken doen over de topologie van de *zwارة boom*. Merk op dat elk blad $u \in H$ van de *zwارة boom* voldoet aan $w(T_u) \geq \eta$, en dat twee verschillende bladeren $u_1, u_2 \in H$ voldoen aan $T_{u_1} \cap T_{u_2} = \emptyset$. Aangezien het gewicht van T gelijk aan $w(V)$ is, kunnen we concluderen dat de *zwارة boom* ten hoogste $w(V)/\eta = 12L/\epsilon^2 = O(\frac{\log N}{\epsilon^3})$ bladeren heeft.

We gaan nu een deelverzameling Q van zware knopen definiëren zodat de verwijdering van Q en r uit T de boom T in componenten opbreekt met gewicht ten hoogste η . Tegelijkertijd geeft het verwijderen van Q en r uit de zware boom een splitsing van de zware boom in paden, waarover we gaan enumereren.

Lemma 6.11. *Een verzameling $Q \subseteq H$ is efficiënt te construeren zodat er geldt*

- (i) $|Q| = O(\frac{\log N}{\epsilon^3})$,
- (ii) Q bevat alle bladeren en alle knopen van minstens graad 3 van de zware boom, behalve r , en
- (iii) het verwijderen van $Q \cup \{r\}$ uit T leidt tot een graaf $T[V \setminus (Q \cup \{r\})]$ waarin elke samenhangende component een totaalgewicht heeft van hoogstens η .

Bewijs. We zullen Q construeren in twee fases. Eerst construeren we een $\bar{Q} \subseteq H$ die voldoet aan eigenschappen (i) en (iii). Daarna voegen we alle knopen van minstens graad 3 van de zware boom toe aan \bar{Q} om Q te verkrijgen.

Voor het gemak definiëren we eerst zware knopen en het begrip zware boom ten opzichte van een deelboom $T' = (V', E')$ van T waarin de wortel r bevat is. Zij $H_{T'} = \{v \in V \setminus \{r\} \mid w(T'_v) \geq \eta\}$ de verzameling van zware knopen in T' . De T' -zware boom is de deelboom $T'[H_{T'} \cup \{r\}]$ van T' . Merk op dat $H = H_T$ en dat $H_{T'} \subseteq H$ voor elke deelboom $T' \subseteq T$.

We construeren nu \bar{Q} als volgt. Loop de boom T door op een ‘bottom-up’ manier, en stel ten eerste $\bar{Q} = \emptyset$. We zullen in elke iteratie een deel van de boom verwijderen. De eerste iteratie start met $T' = T$. In elke iteratie, gegeven de boom T' , voeg aan \bar{Q} een arbitrair blad $u \in H_{T'}$ van de T' -zware boom toe en verwijder T'_u uit T' . De iteratie stopt als er ofwel geen zware knopen meer in T' aanwezig zijn, ofwel r de enige zware knoop in T' is.

Merk op dat we in elke iteratie het gewicht van T' met minstens η verlagen. Aangezien we per iteratie één knoop aan \bar{Q} toevoegen geeft dit dat $|\bar{Q}| \leq \frac{w(V)}{\eta} = O(\frac{\log N}{\epsilon^3})$. Dus eigenschap (i) geldt voor \bar{Q} .

Daarnaast kunnen we inzien dat de samenhangende componenten van $T[V \setminus (\bar{Q} \cup \{r\})]$ bevat zijn in de deelbomen die we in elke iteratie verwijderen uit T' . Door de definitie van zware bladeren heeft elke deelboom T'_u voor een T' -zwaar blad u een gewicht van tenminste η . Echter, zonder het blad u heeft de deelboom een gewicht van strikt minder dan η , anders was u geen blad van de T' -zware boom. Aangezien $u \in \bar{Q}$ geldt eigenschap (iii) voor \bar{Q} .

We voegen nu aan \bar{Q} de knopen in de T -zware boom toe die minstens van graad 3 zijn, behalve r . Hiermee geldt eigenschap (ii). Aangezien we alleen maar knopen toevoegen aan \bar{Q} worden de samenhangende componenten van $T[V \setminus (\bar{Q} \cup \{r\})]$ alleen maar kleiner, en geldt eigenschap (iii) dus nog steeds. Het aantal knopen van minstens graad 3 in de zware boom is strikt minder dan het aantal bladeren van de zware boom, en het aantal bladeren van de zware boom is van $O(\frac{\log N}{\epsilon^3})$. Dus geldt er dat $|Q| = O(\frac{\log N}{\epsilon^3})$, waarmee eigenschap (i) bewezen is.

Merk ten laatste op dat deze constructie in polynomiale tijd te implementeren is. \square

6.3.5 Een nieuw LP

Voor elke knoop $q \in Q$, zij $H_q \subseteq H$ de verzameling van alle knopen die je tegenkomt als je het pad P_q affloopt richting r totdat (en niet inclusief) je de volgende knoop in $Q \cup \{r\}$ tegenkomt. Dus is H_q een deelpad van de zware boom zodat $H_q \cap Q = \{q\}$, wat we een Q -pad zullen noemen. De verzameling van Q -paden geeft een partitie van H .

We zullen nu gaan enumereren om te bepalen op welke Q -paden we een knoop willen beschermen. Aangezien Q -paden een deelpad zijn van blad-naar-wortel paden, kunnen we aannemen dat we per Q -pad maar één knoop beschermen. Het algoritme enumereert over alle $2^{|Q|}$ mogelijke deelverzamelingen $Z \subseteq Q$, waarbij Z representeert op welke Q -paden we een knoop beschermen. We verwerken deze extra eisen in LP_{FF} om het volgende LP te krijgen:

$$\begin{array}{ll}
\text{Maximaliseer} & \sum_{v \in V \setminus \{r\}} x_v w(T_v) \\
\text{onder de beperkingen} & x(P_v) \leq 1 \quad \text{voor elk blad } v \in \Gamma, \\
& x(V_{\leq l}) \leq \sum_{i=1}^l B_i \quad \text{voor elke } l \in [L], \\
& x(H_q) = 1 \quad \text{voor elke } q \in Z, \\
& x(H_q) = 0 \quad \text{voor elke } q \in Q \setminus Z, \\
& x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{V \setminus \{r\}}.
\end{array} \tag{LP}_{\text{FF}}(Z)$$

We zullen ook wel $\text{LP}_{\text{FF}}(Z^*)$ noteren als het gaat om een specifieke $Z^* \subseteq Q$ in plaats van een willekeurige $Z \subseteq Q$.

We beginnen met een observatie over $\text{LP}_{\text{FF}}(Z)$.

Lemma 6.12. *Elke oplossing voor $\text{LP}_{\text{FF}}(Z)$ is ook een oplossing voor LP_{FF} .*

Bewijs. Dit volgt direct uit het feit dat voor elke $q \in Q$ de bijbehorende ongelijkheid $x(H_q) \leq 1$ of $x(H_q) \geq 0$ ook geldig is voor LP_{FF} . Dit geldt aangezien een blad naar wortel pad door LP_{FF} al gelimiteerd wordt tot 1, en H_q een deelpad van een blad naar wortel pad is. \square

Zij losse en vaste knopen ook gedefinieerd voor $\text{LP}_{\text{FF}}(Z)$, analoog aan de definities voor LP_{FF} . Uit Lemma 6.12 kunnen we concluderen dat Stelling 6.8 ook geldt voor elke oplossing van $\text{LP}_{\text{FF}}(Z)$.

We zullen laten zien dat ongeacht de keuze van $Z \subseteq Q$ de *integrality gap* van $\text{LP}_{\text{FF}}(Z)$ klein is, en we efficiënt een geheeltallige oplossing voor LP_{FF} uit een oplossing van $\text{LP}_{\text{FF}}(Z)$ kunnen verkrijgen met bijna dezelfde waarde.

6.3.6 $(1 - \frac{\epsilon}{3})$ -Benadering

Het PTAS volgt dan door te enumereren over alle $Z \subseteq Q$. We zien Z als de verzameling van Q -paden waarop OPT een knoop beschermt. De lage *integrality gap* volgt nu uit het feit dat we de impact van de losse knopen kunnen beperken. Om exact te zijn, elke losse knoop buiten de zware boom heeft een bijdrage van hoogstens η . Daarnaast ligt elke knoop v binnen de zware boom op een Q -pad H_q , en dus kan de waarde op deze knoop naar een vaste knoop op H_q worden verplaatst. We zullen laten zien dat deze verplaatsing een impact van hoogstens η heeft op de waarde van de oplossing vanwege de constructie van Q .

We zullen nu de $(1 - \frac{\epsilon}{3})$ -benadering geven voor een instantie die voldoet aan Eigenschap 6.10. Dit, zoals eerder uitgelegd, impliceert een PTAS voor het Firefighter probleem op bomen. Algoritme 1 beschrijft de $(1 - \frac{\epsilon}{3})$ -benadering.

De volgende stelling zal het bewijs dat er een PTAS bestaat, voltooien.

Algoritme 1 Een $(1 - \frac{\epsilon}{3})$ -benadering voor een algemene budgetten Firefighter instantie die voldoet aan Eigenschap 6.10.

1. Bepaal de zware knopen $H = \{v \in V \setminus \{r\} \mid w(T_v) \geq \eta\}$, met $\eta = \frac{1}{12} \frac{\epsilon^2}{L} w(V)$.
 2. Bepaal $Q \subseteq H$, gebruik makende van Lemma 6.11.
 3. Voor elke $Z \subseteq Q$, bepaal de optimale oplossing voor $\text{LP}_{\text{FF}}(Z)$. Zij $Z^* \subseteq Q$ een verzameling waarvoor de optimale waarde van $\text{LP}_{\text{FF}}(Z^*)$ het grootste is over alle deelverzamelingen van Q , en zij x een optimale oplossing van $\text{LP}_{\text{FF}}(Z^*)$.
 4. Zij $V^{\mathcal{T}}$ de x -vaste knopen. Bepaal een optimale oplossing voor LP_{FF} beperkt tot de variabelen die overeenkomen met de knopen in $V^{\mathcal{T}}$. De oplossing zal een $\{0, 1\}$ -vector zijn, de karakteristieke vector van een verzameling $U \subseteq V^{\mathcal{T}}$, die we opleveren.
-

Stelling 6.13. *Voor elke algemene budgetten Firefighter instantie die voldoet aan Eigenschap 6.10, berekent Algoritme 1 efficiënt een geldige verzameling knopen $U \subseteq V \setminus \{r\}$ om te beschermen. Deze verzameling U is een $(1 - \frac{\epsilon}{3})$ -benadering.*

Bewijs. We laten eerst zien dat het LP dat in stap 4 wordt opgelost inderdaad een $\{0, 1\}$ -vector oplevert. Merk op dat er geen twee x -vaste knopen op hetzelfde blad-naar-wortel pad kunnen liggen. De beperkingen $x(P_u) \leq 1$ voor $u \in \Gamma$ reduceren dus tot de beperkingen $x(v) \leq 1$ voor $v \in V^{\mathcal{T}}$. We kunnen nu Stelling 6.5 toepassen op dit gereduceerde LP. Zij R een willekeurige deelverzameling van de rijen van de matrix van beperkingen. Merk op dat de budgetbeperkingen aan de *consecutive-ones* eigenschap voldoen. We kunnen dus net als in het bewijs van Stelling 6.7 de budgetbeperkingen binnen R in R_1 en R_2 zetten zodat we een $\{0, 1\}$ -vector overhouden. Dan kunnen we dus de losse $x(v) \leq 1$ voor $v \in V^{\mathcal{T}}$ beperkingen binnen R aan R_2 toevoegen zodat er een $\{0, 1, -1\}$ -vector overblijft. Nu volgt er dus uit Stelling 6.5 dat de resulterende matrix van beperkingen totaal unimodulair is. Dus uit Stelling 6.4 volgt er dat de optimale oplossing een geheeltallige oplossing zal zijn.

Ook is de verzameling U duidelijk geldig in termen van budget, aangezien LP_{FF} dit als beperkingen heeft.

Algoritme 1 heeft een polynomiale looptijd, aangezien $|Q| = O(\frac{\log N}{\epsilon^3})$ door Lemma 6.11, en dus is het aantal deelverzamelingen van Q begrensd door $N^{O(\frac{1}{\epsilon^3})}$.

We moeten alleen nog aantonen dat U inderdaad een $(1 - \frac{\epsilon}{3})$ -benadering is. Zij OPT de optimale oplossing voor de gegeven Firefighter instantie met waarde $\|\text{OPT}\|$. Merk op dat de optimale waarde z^* van $\text{LP}_{\text{FF}}(Z^*)$ voldoet aan $z^* \geq \|\text{OPT}\|$ aangezien er een $Z \subseteq Q$ overeenkomt met OPT , namelijk $Z = \{q \in Q \mid H_q \cap \text{OPT} \neq \emptyset\}$. Andersom is voor deze Z de vector $\chi^{\text{OPT}} \in \{0, 1\}^{V \setminus \{r\}}$ van OPT geldig voor $\text{LP}_{\text{FF}}(Z^*)$.

We voltooien het bewijs van Stelling 6.13 nu door te laten zien dat de waarde $\|U\|$ van U voldoet aan $\|U\| \geq (1 - \frac{\epsilon}{3})z^*$. Om dit te laten zien, transformeren we een optimale oplossing x van $\text{LP}_{\text{FF}}(Z^*)$ in een oplossing y van $\text{LP}_{\text{FF}}(Z^*)$ met $v \in V^{\mathcal{T}}$ voor alle $y_v > 0$. Deze transformatie doen we zo dat er geldt $\|y\| \geq (1 - \frac{\epsilon}{3})z^*$.

Zij $V^{\mathcal{L}}$ de verzameling x -losse knopen en H de verzameling zware knopen. Begin met $y = x$ en zet $y(u) = 0$ voor elke $u \in V^{\mathcal{L}} \setminus H$. Verder doen we voor elke $u \in V^{\mathcal{L}} \cap H$ het volgende. Aangezien u deel is van de zware boom en er geldt $x(u) > 0$, ligt u op een Q -pad H_{q_u} voor een $q_u \in Z^*$. We weten dat $x(H_{q_u}) = 1$, en dus is er een vaste knoop $v \in H_{q_u}$. We verplaatsen nu de y -waarde van de knoop u naar de knoop v , dus $y(v) = y(v) + y(u)$ en $y(u) = 0$. Zo is

de constructie van y compleet. Merk op dat y zeker een geldige oplossing voor $\text{LP}_{\text{FF}}(Z^*)$ is aangezien we uit x waarden verlagen en waarden verplaatsen naar lagere lagen.

We laten zien dat de aanpassingen gedaan aan een $u \in V^{\mathcal{L}}$ de waarde van de oplossing hoogstens met η verminderen. Voor elke $u \in V^{\mathcal{L}} \setminus H$ geldt er duidelijk dat $w(T_u) \leq \eta$, dus het stellen van $y(u) = 0$ vermindert de waarde met hoogstens η . Voor elke $u \in V^{\mathcal{L}} \cap H$ geeft het verplaatsen van y -waarde van u naar de vaste knoop $v \in H_{q_u}$ een vermindering van

$$y(u) \cdot (w(T_u) - w(T_v)) \leq w(T_u) - w(T_v) = w(T_u \setminus T_v) \leq \eta.$$

De laatste ongelijkheid komt voort uit het feit dat $T_u \setminus T_v \subseteq T_u \setminus T_{q_u}$ een deelverzameling is van één samenhangend component in $T[V \setminus (Q \cup \{r\})]$, wat volgens Lemma 6.11 een gewicht van hoogstens η heeft.

Hieruit volgt dat $\|x\| - \|y\| \leq |V^{\mathcal{L}}| \cdot \eta \leq L \cdot \eta$, gebruik makende van Stelling 6.8. We kunnen nu ons bewijs afmaken door gebruik te maken van Eigenschap 6.10. Er volgt

$$\begin{aligned} \|y\| &= \|x\| - (\|x\| - \|y\|) \\ &\geq \|\text{OPT}\| - L \cdot \eta \\ &= \|\text{OPT}\| - \frac{1}{12} \epsilon^2 w(V) \\ &\geq (1 - \frac{\epsilon}{3}) \|\text{OPT}\|. \end{aligned}$$

Hiermee is bewezen dat Algoritme 1 een $(1 - \frac{\epsilon}{3})$ -benadering geeft voor een instantie die voldoet aan Eigenschap 6.10. \square

We hebben nu dus bewezen dat er een PTAS bestaat voor het Firefighter probleem op bomen. Dit betekent dat er ook geen betere benadering meer te vinden is. Echter, er kan altijd nog worden verbeterd op looptijd. We weten dat het PTAS een looptijd van $O(g(\frac{1}{\epsilon})N^{f(\frac{1}{\epsilon})})$ heeft, immers, dit is de definitie van een PTAS. We kunnen wel beter vastleggen wat $f(\frac{1}{\epsilon})$ is, want de mogelijkheid bestaat dat dit een polynoom in $\frac{1}{\epsilon}$ is, of een exponentiële functie in $\frac{1}{\epsilon}$. Laat het duidelijk zijn dat stap 3 van Algoritme 1 het duurste is in rekentijd van alle stappen in het PTAS. We weten dat het aantal deelverzamelingen van Q begrensd wordt door $N^{O(\frac{1}{\epsilon^3})}$. Voor elke deelverzameling van Q moet een gerelaxeerd LP worden opgelost, dit kan in polynomiale tijd. Dit maakt dat de looptijd van het PTAS neerkomt op $O(g(\frac{1}{\epsilon})N^{\text{poly}(\frac{1}{\epsilon})})$. Merk op dat voor een vaste ϵ de functie g en het polynoom in $\frac{1}{\epsilon}$ constantes zijn, en de looptijd dus zeker polynomiaal is. Er kunnen verbeteringen in looptijd worden gemaakt door het polynoom in $\frac{1}{\epsilon}$ en de functie g te verbeteren, maar dit zal geen enorm grote verschillen maken. Een echte verbetering in de orde maken is alleen mogelijk als er een *Efficient Polynomial Time Approximation Scheme* (EPTAS) wordt gevonden. Dit heeft een looptijd van $O(f(\frac{1}{\epsilon}) \cdot N^{O(1)})$. Nog efficiënter zou een *Fully Polynomial Time Approximation Scheme* (FPTAS) zijn, maar D. Adjiashvili *et al.* [1] stellen dat het onmogelijk is een FPTAS te vinden voor het Firefighter probleem op bomen. Een FPTAS is een $(1 - \epsilon)$ -benadering met looptijd polynomiaal in beide ϵ en N , en zijn onmogelijkheid kan worden aangetoond met behulp van sterke NP-moeilijkheid van het Firefighter probleem op bomen.

7 Conclusie

We hebben een uitgebreide analyse gedaan van het Firefighter probleem op bomen. We hebben gezien dat er een $\frac{1}{2}$ -benadering bestaat door middel van een greedy algoritme. We hebben ook gezien dat het probleem NP-volledig is voor bomen van maximaal graad 3. Daarna hebben we met een LP en de randomised rounding techniek een verbetering gezien op het greedy algoritme, een $(1 - 1/e)$ -benadering, wat ook de ondergrens van de *integrality gap* van dit LP is. Als laatste hebben we door middel van nuttige compressietechnieken en een enumeratie gezien hoe er een PTAS bestaat voor het probleem op bomen. Zo is de kwestie van benadering voor het probleem op bomen afgerond, als we alleen kijken naar de benaderingsfactor.

Uiteraard zijn er nog wel openstaande kwesties voor het Firefighter probleem op bomen. Zoals genoemd in Sectie 3 is er nog weinig bekend over algoritmes die minimaliseren hoeveel knopen er in de brand gaan, en of hier een benadering voor bestaat. Ook is de snelheid van het PTAS algoritme nog te verbeteren, immers, naast benaderingsfactor is ook de efficiëntie van een algoritme een belangrijke factor.

Referenties

- [1] David Adjiashvili, Andrea Baggio, and Rico Zenklusen. Firefighting on trees beyond integrality gaps. In *Proceedings of the Twenty-Eighth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pages 2364–2383. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2017.
- [2] Noga Alon, Joel Spencer, and Paul Erdős. The probabilistic method, 1992.
- [3] Elliot Anshelevich, Deeparnab Chakrabarty, Ameya Hate, and Chaitanya Swamy. Approximability of the firefighter problem. *Algorithmica*, 62(1-2):520–536, 2012.
- [4] Cristina Bazgan, Morgan Chopin, Marek Cygan, Michael R Fellows, Fedor V Fomin, and Erik Jan Van Leeuwen. Parameterized complexity of firefighting. *Journal of Computer and System Sciences*, 80(7):1285–1297, 2014.
- [5] Cristina Bazgan, Morgan Chopin, and Michael R Fellows. Parameterized complexity of the firefighter problem. In *International Symposium on Algorithms and Computation*, pages 643–652. Springer, 2011.
- [6] Cristina Bazgan, Morgan Chopin, and Bernard Ries. The firefighter problem with more than one firefighter on trees. *Discrete Applied Mathematics*, 161(7-8):899–908, 2013.
- [7] Christian Blum, Maria J Blesa, Carlos García-Martínez, Francisco J Rodríguez, and Manuel Lozano. The firefighter problem: application of hybrid ant colony optimization algorithms. In *European Conference on Evolutionary Computation in Combinatorial Optimization*, pages 218–229. Springer, 2014.
- [8] Leizhen Cai, Yongxi Cheng, Elad Verbin, and Yuan Zhou. Surviving rates of graphs with bounded treewidth for the firefighter problem. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 24(4):1322–1335, 2010.
- [9] Leizhen Cai, Elad Verbin, and Lin Yang. Firefighting on trees: $(1 - 1/e)$ -approximation, fixed parameter tractability and a subexponential algorithm. In *International Symposium on Algorithms and Computation*, pages 258–269. Springer, 2008.
- [10] Parinya Chalermsook and Daniel Vaz. New integrality gap results for the firefighters problem on trees. In *International Workshop on Approximation and Online Algorithms*, pages 65–77. Springer, 2016.
- [11] Janka Chlebiková and Morgan Chopin. The firefighter problem: Further steps in understanding its complexity. *Theoretical Computer Science*, 676:42–51, 2017.
- [12] Marek Cygan, Fedor V Fomin, and Erik Jan van Leeuwen. Parameterized complexity of firefighting revisited. In *International Symposium on Parameterized and Exact Computation*, pages 13–26. Springer, 2011.
- [13] Mike Develin and Stephen G Hartke. Fire containment in grids of dimension three and higher. *Discrete Applied Mathematics*, 155(17):2257–2268, 2007.
- [14] Stephen Finbow, Andrew King, Gary MacGillivray, and Romeo Rizzi. The firefighter problem for graphs of maximum degree three. *Discrete Mathematics*, 307(16):2094–2105, 2007.
- [15] Stephen Finbow and Gary MacGillivray. The firefighter problem: a survey of results, directions and questions. *Australasian Journal of Combinatorics*, 43:57–77, 2009.

-
- [16] Fedor V Fomin, Pinar Heggernes, and Erik Jan van Leeuwen. The firefighter problem on graph classes. *Theoretical Computer Science*, 613:38–50, 2016.
- [17] A Ghoulia-Houri. Caractérisation des matrices totalement unimodulaires. *CR Acad/Sci. Paris*, 254:1192–1194, 1962.
- [18] Stephen G Hartke. Attempting to narrow the integrality gap for the firefighter problem on trees. In *Discrete Methods in Epidemiology*, pages 225–232, 2004.
- [19] Bert Hartnell. Firefighter! an application of domination. In *20th Conference on Numerical Mathematics and Computing*, pages 218–229, 1995.
- [20] Bert Hartnell and Qiyang Li. Firefighting on trees: How bad is the greedy algorithm? *Congressus Numerantium*, pages 187–192, 2000.
- [21] Bin Hu, Andreas Windbichler, and Günther R Raidl. A new solution representation for the firefighter problem. In *European Conference on Evolutionary Computation in Combinatorial Optimization*, pages 25–35. Springer, 2015.
- [22] Yutaka Iwaikawa, Naoyuki Kamiyama, and Tomomi Matsui. Improved approximation algorithms for firefighter problem on trees. *IEICE TRANSACTIONS on Information and Systems*, 94(2):196–199, 2011.
- [23] Andrew King and Gary MacGillivray. The firefighter problem for cubic graphs. *Discrete Mathematics*, 310(3):614–621, 2010.
- [24] Gary MacGillivray and Ping Wang. On the firefighter problem. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 47:83–96, 2003.
- [25] Kah Loon Ng and Paul Raff. A generalization of the firefighter problem on $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. *Discrete Applied Mathematics*, 156(5):730–745, 2008.
- [26] Alexander Schrijver. *Combinatorial optimization: polyhedra and efficiency*, volume A. Springer Science & Business Media, 2003.