Universiteit Utrecht

Bètafaculteit

Wiskunde

Instructieve bewijzen voor de hoofdstellingen in de theorie van Coxeter strookpatronen

Author
D.P. van Balen

Supervisor
Dr. J.W. van de Leur

15-06-2018

Inhoudsopgave

1 Inleiding **2**

2 Strookpatronen **3**

3 Pentagramma mirificum **4**

4 Eigenschappen van het strookpatroon **5**

4.1 Periodiciteit 6

4.2 Polynomen in a_i 7

4.3 Enkele andere eigenschappen 9

5 Strookpatronen van natuurlijke getallen **10**

5.1 Opdelen van veelhoeken in driehoeken 10

5.2 Combinatorische interpretatie 12

6 Conclusie **15**

7 Discussie **15**

1 Inleiding

Een strookpatroon (Frieze pattern) is een getallenrooster dat aan een aantal voorwaarden voldoet, waaronder een lokale relatie.
Strookpatronen werden in 1971 door Coxeter geintroduceerd [Cox71]. Coxeter en Conway ontdekten in 1973 een bijectie tussen strookpatronen en de opdeling van veelhoeken in driehoeken. Een recentere bron van interesse voor strookpatronen komt uit de Fomin-Zelevinsky theorie van cluster algebra's. In 2015 schreef Morier-Genoud het artikel [MG15], waarin ze een overzicht geeft van de bestaande theorie rondom strookpatronen.

Het artikel van Morier-Genoud [MG15] geeft een overzicht van de belangrijkste stellingen over strookpatronen, maar laat vele bewijzen weg of laat ze als opdracht voor de lezer. Deze scriptie poogt deze bewijzen wel op te nemen.

Deze scriptie geeft een introductie in de theorie en hoofdstellingen van strookpatronen. In sectie 2 wordt de definitie waarmee we werken toegelicht. In sectie 3 duiken we in het eerste voorbeeld van een strookpatroon in de praktijk, en zien we waarom deze interessant zijn. In sectie 4 worden enkele hoofdstellingen benoemd en bewezen. Sectie 5 behandelt een meer combinatorische aanpak, waarin strookpatronen met natuurlijke waarden en hun geometrische interpretaties worden bekeken.
In secties 6 en 7 wordt gekeken naar de behandelde stof en eventuele verdere verdieping, en wordt er met een kritische blik naar de hoofdbron gekeken.

2 Strookpatronen

Een strookpatroon is een getallenrooster dat aan de volgende voorwaarden voldoet:

1. Het rooster bestaat uit een eindig aantal rijen, die elk oneindig zijn in beide richtingen;

2. De eerste rij en de laatste rij bestaan uit nullen, de tweede rij en de een-na-laatste rij bestaan uit eenen;

3. Opeenvolgende rijen zijn een halve plaats verschoven. Elke vier aanliggende getallen a, b, c, d

$$\begin{array}{ccc} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{array}$$

   voldoen aan de relatie $ad - bc = 1$;
   De derde regel noemen we ook wel de *unimodulaire regel*.

Wanneer een strookpatroon ook voldoet aan voorwaarde 4, noemen we deze *tam*;

4. Elke 3×3 submatrix heeft determinant 0. Hiermee wordt het volgende bedoeld: Voor elke negen aanliggende getallen $a, b, c, d, e, f, g, h, i$

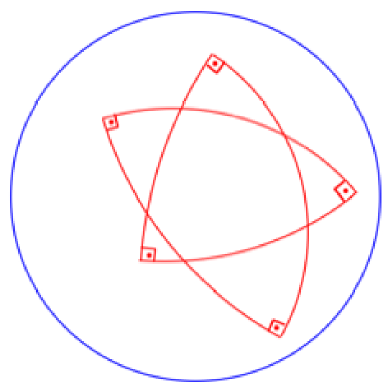
$$\begin{array}{ccccc} & & c & & \\ & b & & f & \\ a & & e & & i \\ & d & & h & \\ & & g & & \end{array}$$

   geldt $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 0.$

Coxeter strookpatronen zonder nulwaardes zijn altijd tam. In sectie 4, stelling 9 zal dit worden bewezen. Coxeter bestudeerde strookpatronen met positieve waardes, in het bijzonder zijn deze dus altijd tam.
We zullen de *breedte* van een strookpatroon definiëren als het aantal rijen tussen de rijen met eenen. Het onderzoek naar strookpatronen komt vanuit verschillende interesses. Coxeter was vooral geinteresseerd in strookpatronen die slechts positieve gehele getallen bevatten, dit leidt tot een combinatorische aanpak. In deze scriptie zijn de waardes meestal reëele of complexe getallen, maar in sectie 5 zullen we deze combinatorische aanpak bespreken.

3 Pentagramma mirificum

Deze sectie behandelt de stof in sectie 1.1 van [MG15]. Een van de motivaties van Coxeter om strookpatronen te bestuderen waren de Gauss formules voor de pentagramma mirificum. De pentagramma mirificum is een vijfhoek getekend op het oppervlak van een bol, bestaande uit opeenvolgende loodrechte grootcirkels. Een grootcirkel is de rand van een snijvlak dat de bol in twee gelijke helften opdeelt.



Figuur 1: Een Pentagramma Mirificum [Wal10]

Als we de zijdes van de ingesloten vijfhoek $\alpha_1 \dots \alpha_5$ noemen, geldt de volgende vergelijking voor elke $c_i = \tan^2(\alpha_i)$, met indices i modulo 5:

$$c_i c_{i+1} = c_{i+3} + 1$$

Gauss liet ook zien dat het aannemen van de bovenstaande relatie voor drie willekeurige i de overige twee impliceert.

Coxeter schreef deze relaties in een strookpatroon:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \dots \\
\dots & & c_1 & & c_2 & & c_3 & & c_4 & & c_5 & \\
 & c_3 & & c_4 & & c_5 & & c_1 & & c_2 & & \dots \\
\dots & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 &
\end{array}$$

De bewering van Gauss impliceert dat alle strookpatronen van breedte 2 periodiek zijn met een periode van 5. Strookpatronen kunnen worden gezien als een generalisering van dit fenomeen.

4 Eigenschappen van het strookpatroon

In deze sectie werk ik de bewijzen uit [Cox71] uit, waarnaar gerefereerd wordt in secties 1.2 en 1.4 in [MG15].

Om de symmetrie en periodiciteit in strookpatronen te bewijzen, introduceren we eerst een coördinatenstelsel:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & (0,0) & & (1,1) & & (2,2) & & (3,3) & & (4,4) & & \dots \\
\dots & & (0,1) & & (1,2) & & (2,3) & & (3,4) & & (4,5) & \\
 & (-1,1) & & (0,2) & & (1,3) & & (2,4) & & (3,5) & & \dots \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & \\
 & & & (-1,n-1) & (0,n) & (1,n+1) & (2,n+2) & (3,n+3) & & & &
\end{array}
$$

We kiezen n zó, dat er $n-3$ rijen tussen de rijen met eenen zitten.
Hierbij gelden de volgende beweringen per definitie:

- $(x,x) = 0 = (x,x+n)$
- $(x,x+1) = 1 = (x+1,x+n)$
- $(x-1,y)\cdot(x,y+1) = 1 + (x,y)\cdot(x-1,y+1)$ voor relevante x,y.

In deze sectie nemen we aan dat er geen nullen in de niet-triviale rijen zitten.
Ook nemen we voor de handigheid de volgende notaties aan:

$$f_a = (-1,a), g_a = (0,a)$$

$$a_i = (i-1,i+1)$$

Wanneer één diagonaal vaststaat (f_i is gegeven voor $i \in \{-1,n\}$), kan de rest van het strookpatroon diagonaal voor diagonaal worden uitgerekend met behulp van de unimodulaire regel. Dit betekent dat deze diagonaal het hele strookpatroon bepaalt.

4.1 Periodiciteit

Stelling 1. $(x, y) = f_x g_y - f_y g_x$ *voor relevante waarden van* x, y.

Het volgende bewijs werd vermeld maar niet uitgewerkt in [Cox71].

Bewijs. We bewijzen stelling 1 met volledige inductie.

- Het is waar voor alle $(x, x) = 0$ en voor alle g_i met $i \in [0, n]$.
- Stel dat $(x, y) = f_x g_y - f_y g_x$ voor $(a, b-1), (a-1, b-1)$ en $(a-1, b)$.

  Te bewijzen: $(a, b) = f_a g_b - f_b g_a$.

  $(a, b) \cdot (a-1, b-1) = 1 + (a-1, b)(a, b-1)$

  Ofwel:
  $(a, b) \cdot (f_{a-1} g_{b-1} - f_{b-1} g_{a-1}) = 1 + (f_{a-1} g_b - f_b g_{a-1})(f_a g_{b-1} f_{b-1} g_a)$

  $= 1 + f_a g_b f_{a-1} g_{b-1} + f_b g_a f_{b-1} g_{a-1} - f_a f_b g_{a-1} g_{b-1} - g_a g_b f_{a-1} f_{b-1}$

  Met behulp van de unimodulaire regel:
  $g_a g_b f_{a-1} f_{b-1} = (1 + f_a g_{a-1})(1 + f_b g_{b-1}) = 1 + f_a g_{a-1} + f_b g_{b-1} + f_a f_b g_{a-1} g_{b-1}$

  Dus:
  $(a, b) \cdot (f_{a-1} g_{b-1} - f_{b-1} g_{a-1}) =$
  $1 + f_a g_b f_{a-1} g_{b-1} + f_b g_a f_{b-1} g_{a-1} - 2 \cdot f_a f_b g_{a-1} g_{b-1} - 1 - f_a g_{a-1} - f_b g_{b-1}$

  $= f_a (g_b f_{a-1} g_{b-1} - g_{a-1} - f_b g_{a-1} g_{b-1}) + f_b (g_a f_{b-1} g_{a-1} - g_{b-1} - f_a g_{a-1} g_{b-1})$

  $= f_a (g_b f_{a-1} g_{b-1} - g_{a-1} \cdot (1 + f_b g_{b-1})) + f_b (g_a f_{b-1} g_{a-1} - g_{b-1} \cdot (1 + f_a g_{a-1}))$

  Nogmaals de unimodulaire regel toepassen geeft:
  $(a, b) \cdot (f_{a-1} g_{b-1} - f_{b-1} g_{a-1}) =$
  $f_a (g_b f_{a-1} g_{b-1} - g_{a-1} f_b g_{b-1}) + f_b (g_a f_{b-1} g_{a-1} - g_{b-1} f_a g_{a-1})$

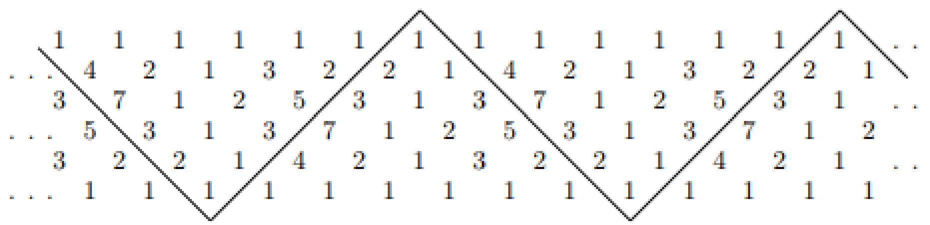
  Dus:
  $(a, b) = f_a g_b - f_b g_a$

□

Stelling 1 impliceert dat $(x, y) = -(y, x)$, hetgeen een natuurlijke manier is om het strookpatroon ook verticaal uit te breiden.
Ook zien we dat $(x, y) = -(x, y + n)$. Hieruit volgt dat $(x, y) = -(y, x) = (y, x + n) = -(x + n, y) = (x + n, y + n)$.
De relatie $(x, y) = (x + n, y + n)$ bewijst de n-periodiciteit van strookpatronen met breedte $m = n - 3$.

De relatie $(x, y) = (y, x + n)$ bewijst echter een sterkere eigenschap, de glijsymmetrie. Figuur 2 uit [MG15] illustreert deze symmetrie. De driehoek wordt om een horizontale as gespiegeld en getransleerd om het strookpatroon te vormen.

Stelling 2. *Strookpatronen zijn glijsymmetrisch rond een horizontale as. In het bijzonder is een strookpatroon van breedte m periodiek met periode $n = m + 3$.*



Figuur 2: Glijsymmetrie

4.2 Polynomen in a_i

Uit stelling 1 volgt ook dat $(a, b)(c, d) + (a, c)(d, b) + (a, d)(b, c) = 0$. Hiermee leiden we een formule voor (r, s) afhankelijk van a_i af, waarbij de indices a_i cyclisch modulo n worden genomen.

$$(r, s)(s - 2, s - 1) + (r, s - 2)(s - 1, s) + (r, s - 1)(s, s - 2) = 0$$

Merk op dat $(r, s - 2) = a_{s-1}$:

Stelling 3. $(r, s) = a_{s-1}(r, s - 1) - (r, s - 2)$

De volgende stelling volgt uit inductie:

Stelling 4. *Voor relevante waarden van r en s, geldt*

$$(r, s) = \begin{vmatrix} a_{r+1} & 1 & & & & \\ 1 & a_{r+2} & 1 & & & \\ & 1 & a_{r+3} & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & a_{s-2} & 1 \\ & & & & 1 & a_{s-1} \end{vmatrix}$$

We zien dat elke diagonaal f een strookpatroon definieert, maar een rij a_1 tot a_n moet aan bepaalde voorwaarden voldoen om een strookpatroon van breedte $n - 3$ te vormen. We gaan deze voorwaarden nu construeren.

Zij a_i gegeven voor $i \in \{0, .., n - 4\}$. We zullen zien dat de resterende drie waardes voor $a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}$ geconstrueerd kunnen worden zodat het strookpatroon gesloten is met een breedte van $m = n - 3$.

Bewijs. Met behulp van stelling 4 kunnen we nu a_{n-3} zo kiezen dat $(-1, n-2) = 1$:

$$(-1, n-2) = 1 = \begin{vmatrix} a_0 & 1 & & & & \\ 1 & a_1 & 1 & & & \\ & 1 & a_2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & a_{n-4} & 1 \\ & & & & 1 & a_{n-3} \end{vmatrix}$$

Deze methode herhalen we met $(0, n-1), (1, n)$ om a_{n-2}, a_{n-1} te vinden. Op deze manier hebben we de sluitende rij met eenen gevormd. Merk op dat er, na de rij met eenen, altijd een rij met nullen geschreven kan worden. □

Stelling 5. *De reeks $a_i, i \in \{0, \ldots, n-1\}$ definieert een strookpatroon dan en slechts dan als*

$$\begin{vmatrix} a_i & 1 & & & & \\ 1 & a_{i+1} & 1 & & & \\ & 1 & a_{i+2} & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & a_{i+n-4} & 1 \\ & & & & 1 & a_{i+n-3} \end{vmatrix} = 1$$

voor $i \in \{0, 1, 2\}$.

Definitie 6. *Zij $(a_i)_i)$ een rij met n getallen. We noemen het strookpatroon van orde n dat ontstaat door de rij a te schrijven onder de rij eenen $F(a)$.*

4.3 Enkele andere eigenschappen

Definitie 7. *Een Laurent polynoom is een functie die geschreven kan worden als een lineare combinatie van positieve en negatieve machten van de variabele.*

Laurent polynomen verschillen ten opzichte van reguliere polynomen in het feit dat ze negatieve machten kunnen bevatten.

Stelling 8. *De waardes in een strookpatroon zijn Laurent polynomen in de waardes in een diagonaal, met gehele coëfficienten.*

Bewijs. Zij $(x_i)_i$ een gegeven diagonaal. Met behulp van stelling 3 vinden we $a_i = \frac{x_{i-1}x_{i+1}}{x_i}$. Met behulp van stelling 4 drukken we (r, s) uit in een polynoom in de waardes $(a_i)_i$. □

De volgende stelling heb ik zelf bewezen.

Stelling 9. *Elk strookpatroon zonder nulwaardes is tam.*

In deze sectie hebben we aangenomen dat de strookpatronen geen nulwaardes hebben. Zie sectie 2 voor de definitie van een tam strookpatroon.

Bewijs. Voor strookpatronen zonder nulwaardes zijn we tot stelling 3 gekomen. Beschouw nu de drie rijen $(a, b, c), (d, e, f), (g, h, i)$ in de matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

Als gevolg van stelling 3 vinden we $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix} = a_i \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$ voor een zekere i.

Het volgt dat de rijen niet linear onafhankelijk zijn.

Dit betekent dat de determinant $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 0.$ □

5 Strookpatronen van natuurlijke getallen

In deze sectie kijken we naar tamme strookpatronen met enkel natuurlijke waardes. Dit betekent dat, op de triviale rijen na, de strookpatronen geen nullen bevatten. Uit stelling 4 volgt de volgende stelling:

Stelling 10. *Wanneer alle waardes a_i op de eerste rij natuurlijk zijn, bestaat het hele strookpatroon uit natuurlijke getallen.*

Stelling 11. *Als een strookpatroon een diagonaal bevat die uitsluitend uit eenen bestaat, zijn alle waardes in het strookpatroon natuurlijke getallen.*

Bewijs. Deze stelling volgt uit stelling 8. □

Stelling 12. *Als een strookpatroon een diagonaal x bevat zodat $x_i | x_{i-1} + x_{i+1} \quad \forall 1 \leq i \leq m$, dan bestaat het strookpatroon uit alleen natuurlijke getallen. Andersom geldt deze relatie voor elke diagonaal, als een strookpatroon uit alleen natuurlijke getallen bestaat.*

Bewijs. Uit stelling 3 volgt dat $a_i = \frac{(r,i-1)(r,i+1)}{(r,i)} \forall r$. Alle a_i zijn geheel, dan en slechts dan als de relatie geldt op een diagonaal. De stelling volgt uit stelling 10. □

Stelling 13. *Wanneer alle waardes a_i op de eerste rij natuurlijke getallen zijn, is er minstens één a_i gelijk aan 1.*

Bewijs. Stel dat alle waardes a_i groter of gelijk aan twee zijn. We beschouwen de diagonaal $(f_i)_i = \{0, 1, a_0, \dots\}$. Met stelling 3 kunnen we de rest van deze rij uitrekenen: $f_i = a_{i-1} f_{i-1} - f_{i-2}$. We zien dat voor elke $i > 3$, $f_i \geq 3$. Dit leidt tot een tegenspraak, omdat $f_{n+1} = 1$ vanwege de sluitende rij eenen. □

Merk op dat als $a_i = 1$, volgt ofwel $a_{i-1} \neq 1 \neq a_{i+1}$, ofwel $a_j = 1 \ \forall j$.

5.1 Opdelen van veelhoeken in driehoeken

In deze sectie volgen we het bewijs van [CC73b] en [CC73a]. We zullen een n-hoek ook beschrijven als de lijst van punten $\{P_0, \dots, P_{n-1}\}$.

Stelling 14. *Er bestaat een bijectie tussen strookpatronen van natuurlijke getallen van orde n en breedte $m = n - 3$, en opdelingen van een convexe n-hoek $\{P_0, \dots, P_{n-1}\}$ in driehoeken. Als $(a_i)_i$ de n getallen zijn op de eerste rij na de rij met eenen, is a_i het aantal driehoeken dat grenst aan punt P_i.*

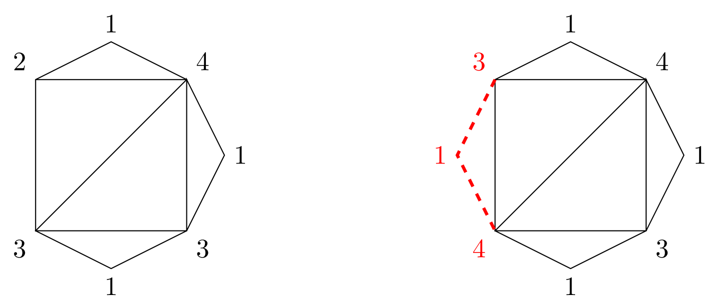
Om deze stelling te bewijzen, hebben we de volgende stelling nodig:

Stelling 15. *Zij $F(a)$ een strookpatroon van orde n, dan is $F(b)$ een strookpatroon van orde $n+1$ waarbij b gegeven wordt door de twee opeenvolgende waardes $\{a_j, a_{j+1}\}$ te vervangen door de drie waardes $\{a_j + 1, 1, a_{j+1} + 1\}$.*

Bewijs. Beschouw een diagonaal in $F(a)$. Met behulp van stelling 3 zien we dat er in deze diagonaal de sequentie $\{A, B, C, D\}$ voorkomt zodat $a_j = \frac{A+C}{B}$ en $a_{j+1} = \frac{B+D}{C}$. Als we dit deel van de diagonaal veranderen in $\{A, B, B+C, C, D\}$ en een nieuw strookpatroon genereren van deze diagonaal, zal deze orde $n+1$ hebben. Verder zien we dat de rij $(a_i)_i$ nu op de veranderde plek de volgende waardes bevat: $\{\frac{A+B+C}{B} = a_j + 1, \frac{B+C}{B+C} = 1, \frac{B+C+D}{C} = a_{j+1} + 1\}$ $\square$

Omdat er in de eerste rij onder de rij met eenen altijd minstens een één is (zie stelling 13), en deze altijd buren heeft die groter zijn dan 1, kan een strookpatroon van orde $n > 3$ altijd worden verkleind naar een strookpatroon van orde $n - 1$ door de inverse van bovenstaande stelling toe te passen. Met andere woorden, elk strookpatroon van orde $n > 1$ is te krijgen door Stelling 15 toe te passen op een strookpatroon van orde $n - 1$.

Beschouw de opdeling van een veelhoek $\{P_1, \ldots, P_n\}$ in driehoeken door een aantal niet-kruisende diagonalen tussen twee hoeken te tekenen. Ook geven we elke hoek P_i een waarde gelijk aan het aantal driehoeken waar de hoek aan grenst. Merk op dat elke opdeling van een n-hoek kan worden uitgebreid naar een opdeling van een $n+1$-hoek door een driehoek aan de buitenkant toe te voegen (zie een voorbeeld in figuur 3). Ook kan elke opdeling van een $n > 3$-hoek worden beperkt naar een opdeling van een $n-1$-hoek door een hoekpunt met precies twee zijdes weg te halen.



Figuur 3: Een 7-hoek en een 8-hoek, opgedeeld in driehoeken.

We kunnen stelling 14 nu bewijzen.

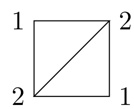
Bewijs. We gebruiken inductie. We zien in figuur 4 en figuur 5 dat stelling 14 geldt voor $n = 4$. Het strookpatroon geeft de sequentie $\{\ldots, 1, 2, 1, 2, \ldots\}$. In de opgedeelde vierhoek hebben de hoeken Noord-West en Zuid-Oost een aangrenzende driehoek, en de hoeken Noord-Oost en Zuid-West twee aangrenzende driehoeken. Het geval $n = 3$ met een strookpatroon van breedte 0 is triviaal.

De inductiestap:
Stel stelling 14 geldt voor $n = x$.

- Zij een strookpatroon van orde $x + 1$ (breedte $x - 2$) gegeven. Volgens stelling 15 volgt dit strookpatroon uit het uitvoeren van de daarinbeschreven operatie op een strookpatroon van orde x. Als op deze manier tussen

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \cdots \\
\cdots & & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & 2 & & 1 & & \cdots \\
\cdots & & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \cdots
\end{array}
$$

Figuur 4: Het strookpatroon van breedte 1



Figuur 5: De opdeling in driehoeken van een vierhoek

a_i en $a_i + 1$ een 1 wordt toegevoegd, kunnen we een bijpassende opdeling van een $x+1$-hoek vinden door van de lijn tussen hoeken P_i en P_{i+1} een driehoek te maken, als in figuur 3. Dit voegt een nieuw hoekpunt toe met waarde 1, en hoeken P_i en P_{i+1} grenzen nu aan een extra driehoek. Dit komt overeen met de verandering aan de rij $(a_i)_i$. De injectie van strookpatroon naar opdeling van $x+1$-hoek is nu bewezen.

- Zij een opgedeelde $x+1$-hoek gegeven. Deze heeft minstens één hoekpunt dat aan precies één driehoek grenst. Door dit hoekpunt weg te halen, krijgen we een opgedeelde x-hoek. Volgens de inductiehypothese komt deze overeen met een strookpatroon van orde x. Door op dit strookpatroon de techniek in stelling 15 toe te passen vinden we het strookpatroon dat overeenkomt met de gegeven $x+1$-hoek. De injectie van opgedeelde $x+1$-hoek naar strookpatroon is nu ook bewezen, en daarmee is de bijectie compleet.

$\square$

5.2 Combinatorische interpretatie

In deze sectie zullen we kijken naar twee combinatorische interpretaties van alle waardes in een strookpatroon aan de hand van de bijhorende opgedeelde veelhoek.

Voor de duidelijkheid zal eerst enkele notatie worden herhaald met hun relatie tot elkaar. We beschouwen de combinatie van een strookpatroon en de bijhorende opdeling van een veelhoek $\{P_0, \ldots, P_{n-1}\}$. Deze punten zijn cyclisch genummerd, dat wil zeggen P_i grenst aan P_{i-1} en P_{i+1} met indices i mod n. Het strookpatroon wordt voorzien van het volgende coördinatenstelsel:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & (0,0) & & (1,1) & & (2,2) & & (3,3) & & (4,4) & & \dots \\
\dots & & (0,1) & & (1,2) & & (2,3) & & (3,4) & & (4,5) & \\
 & (-1,1) & & (0,2) & & (1,3) & & (2,4) & & (3,5) & & \dots \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & \\
 & & (-1,n-1) & & (0,n) & & (1,n+1) & & (2,n+2) & & (3,n+3) &
\end{array}$$

Hierbij gelden de volgende relaties:

- $(x, x) = (x, x + n) = 0$;
- $(x, x + 1) = (x, x + n - 1) = 1$;
- $(x, x + 2) = a_{x+1}$
- Het aantal driehoeken dat P_i raakt is a_i.

Stelling 16. *Beschouw de volgende regel:*

1. *Kies een punt P_i op een in driehoeken opgedeelde veelhoek.*
2. *Geef dit punt de waarde 0, en elk punt dat rechtstreeks is verbonden met P_i de waarde 1.*
3. *Voor elke driehoek die precies twee waardes s, t heeft, geef het derde punt de waarde $s + t$.*

Deze methode geeft een waarde aan elk punt. De waarde bij punt P_j komt overeen met (i, j) in het bijhorende strookpatroon.

Figuren 4 en 5 dienen ook hier als voorbeeld: afhankelijk van welk punt in stap 1 wordt gekozen geeft de regel de diagonaal $\{0, 1, 2, 1, 0\}$ of $\{0, 1, 1, 1, 0\}$. Het strookpatroon bestaat uit de afwisseling van deze diagonalen.
Het volgende bewijs word in [CC73a] gegeven.

Bewijs. We bewijzen deze stelling met inductie. Het is met de hand eenvoudig na te gaan voor het geval $n = 3$.
Stel nu dat de stelling geldt voor n. We kijken naar alle waardes in de diagonaal $(u, \cdot)$ van het strookpatroon. Deze waardes zijn gelijk aan het toepassen van bovenstaande regel met als beginpunt P_u. Laat de punten P_x en P_{x+1} respectievelijk de waardes a en b hebben. Dit betekent dat $(i, x) = a$ en $(i, x + 1) = b$. We voegen nu een extra punt P_{nieuw} toe aan de veelhoek, verbonden aan P_x en P_{x+1}. De waarde van P_{nieuw} wordt volgens bovenstaande regel $a + b$. Het strookpatroon van orde $n + 1$ dat bij de nieuwe veelhoek hoort zal op deze diagonaal, tussen de waardes a en b, ook de waarde $a + b$ bevatten, zoals we in het bewijs van stelling 15 hebben gezien. $\square$

Merk op dat deze stelling in het bijzonder betekent dat $(i, j) = 1$ dan en slechts dan als P_i rechtstreeks verbonden is met P_j.

In [MG15][4.2.(1)] wordt ook verwezen naar de "lengte" van de diagonaal met recursief gebruik van de stelling van Ptolemaeus, waarbij de gegeven zijdes en diagonalen lengte 1 hebben:

$$|AD| \cdot |BC| = |AB| \cdot |CD| + |AC| \cdot |BD|$$

Het is eenvoudig om na te gaan dat dit equivalent is aan stelling 16.
Het gebruik van de term "lengte" is hier misleidend, omdat deze stelling alleen geldt op een koordevierhoek. Deze "lengte" zal ook niet voldoen aan bijvoorbeeld de driehoeksongelijkheid: het is mogelijk dat $|AB| + |BC| < |AC|$.

De volgende stelling is mijn interpretatie van 4.2.(3) in [MG15]. Daar wordt geen bewijs gegeven.

Stelling 17. *Zij een strookpatroon van orde n en de bijhorende opdeling in driehoeken van een n-hoek gegeven. De waarde (i, j) in het strookpatroon is gelijk aan het aantal manieren om de $n - 2$ driehoeken elk aan een uniek punt $P_x \mid x \neq i, j$ toe te kennen, zó dat elke driehoek een punt krijgt waar het aan grenst.*

In zekere zin is deze stelling equivalent aan stelling 16, en mijn bewijs is ook geïnspireerd op bovenstaand bewijs van stelling 16.

Bewijs. We gebruiken inductie. Ga zelf na dat stelling 17 geldt voor $n = 3$.
Stel dat stelling 17 geldt voor n. Zij een opgedeelde n-hoek gegeven. We geven elk punt een waarde op de manier van stelling 16, waar $P_i = 0$. Uit de inductiehypothese volgt dat de waarde op punt P_j overeenkomt met het aantal toekenningen van driehoeken aan de punten $P_x \mid x \neq i, j$. Laat de waardes bij P_x en P_{x+1} respectievelijk a, b zijn. We voegen nu een punt P_{nieuw} toe, verbonden aan P_x en P_{x+1}.
We zijn nu geïnteresseerd in het aantal mogelijke toekenningen van alle $n - 1$ driehoeken aan de $n - 1$ punten $P_u \mid u \neq i, nieuw$, zó dat elke driehoek precies één punt krijgt en dat punt grenst aan de driehoek.
We zien dat de nieuwe driehoek $\Delta = P_x P_{x+1} P_{nieuw}$ slechts twee opties heeft: P_x of P_{x+1}. Er zijn a manieren om de rest van de driehoeken te verdelen wanneer Δ aan P_x wordt toegekend, en er zijn b manieren om de rest van de driehoeken te verdelen wanneer Δ aan P_{x+1} wordt toegekend. Dit geeft in totaal $a + b$ manieren. De rest van het bewijs volgt als het einde van het bewijs van stelling 16. □

6 Conclusie

Het doel van deze scriptie was om de bewijzen in [MG15] uit te werken. Gaanderweg zijn er meer bronnen bij gekomen. Er is een introductie in de theorie van strookpatronen gegeven, met instructieve bewijzen voor de belangrijkste stellingen: de symmetrie en perodiciteit van strookpatronen; de expliciete formules voor waardes in een strookpatroon als functie van de eerste rij of een gegeven diagonaal; en een noodzakelijke en voldoende voorwaarde voor de eerste rij van een strookpatroon. Ook is er, als voorbeeld voor het verband tussen strookpatronen en andere gebieden in de wiskunde, gekeken naar enkele combinatorische interpretaties van strookpatronen met enkel natuurlijke getallen.

7 Discussie

De hoofdbron van deze scriptie is [MG15]. Zoals in sectie 5.2 is genoemd, wordt in [MG15] in sectie 4.2 verwezen naar de stelling van Ptolemaeus. Het gebruik van deze stelling in de gegeven context is een equivalente, maar omslachtigere, manier om de regel in stelling 16 uit te rekenen. In [MG15] wordt hier [CC73b] voor geciteerd. Dit is naar mijn mening een onhandige toepassing, want in [CC73b] wordt de stelling van Ptolemaeus alleen gebruikt om strookpatronen met constante rijen te construeren, aan de hand van regelmatige veelhoeken. Desalniettemin is dit wel een correcte bewering.

De meest voor de hand liggende richting om dieper in strookpatronen te duiken is de generalisatie naar SL_{k+1} strookpatronen. Een SL_{k+1} strookpatroon komt overeen met de definitie gegeven in sectie 2, behalve de unimodulaire regel. Waar een 'normaal' strookpatroon de eis geeft dat elke 2×2 submatrix determinant 1 heeft, heeft een SL_{k+1} strookpatroon de eis dat elke $k+1 \times k+1$ submatrix determinant 1 heeft. De in deze scriptie behandelde strookpatronen zijn SL_2 strookpatronen. De voorwaarde voor tamheid in een SL_{k+1} strookpatroon is dat elke $k+2 \times k+2$ submatrix determinant 0 heeft.

Referenties

[CC73a] JH Conway and HSM Coxeter. Triangulated polygons and frieze patterns (continued). *The Mathematical Gazette*, 57(401):175–183, 1973.

[CC73b] John H Conway and Harold SM Coxeter. Triangulated polygons and frieze patterns. *The Mathematical Gazette*, 57(400):87–94, 1973.

[Cox71] Harold Scott Macdonald Coxeter. Frieze patterns. *Acta arithmetica*, 18(1):297–310, 1971.

[MG15] Sophie Morier-Genoud. Coxeter's frieze patterns at the crossroads of algebra, geometry and combinatorics. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 47(6):895–938, 2015.

[Wal10] Hans Walser. Pentagramma mirificum, 2010. http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/P/Pentagramma/Pentagramma-Dateien/image003.png [Online; Bezocht op 15 juni 2018].