Euler en het functieconcept

Lisanne Hogeveen, 3924882

Bachelorscriptie Wiskunde
Onder begeleiding van V.N.E. Blasjo

18 januari 2016

Universiteit Utrecht

Inleiding

Euler geeft in zijn boeken *Introductio in analysin infinitorum*[1] en *Institutiones calculi differentialis*[2] definities van de functie. Het is opvallend dat deze twee definities niet precies dezelfde zijn, maar dat er andere woorden gebruikt zijn.

In deze scriptie zullen we kijken naar de verandering van de definitie naar de functie en de factoren die hier invloed op hebben gehad. Zo wordt het trillende snaar debat uitgelicht en zal de discussie over het continuïteitsbegrip besproken worden.

Ook zou ik nog graag willen vermelden dat deze scriptie niet alleen interessant is voor diegene die affiniteit hebben met het concept van de functie. Maar deze scriptie kan ook interessant zijn voor de hedendaagse wiskundige. Hedendaagse schrijvers kunnen immers geneigd zijn om wiskunde uit eerdere periodes te bekijken door een hedendaagse bril. Het is goed om als moderne wiskundige te zien hoe Euler tegen de wiskunde aankijkt en hoe hij de wiskunde gebruikt. Hopelijk toont deze scriptie ook dat het belangrijk is om kritisch te kijken naar werken van hedendaagse schrijvers.

Veel leesplezier.

[1] Het boek, geschreven in het Latijn, verscheen in 1748. In 1988 publieerde John Blanton een Engelse vertaling, met als titel *Introduction to Analysis of the Infinite*. Als we in deze scriptie citeren uit dit werk van Euler, dan citeren we uit deze Engelse vertaling. Bovendien zullen we in deze scriptie regelmatig *Introductio* gebruiken als we naar dit boek referenen.

[2] Dit boek is ook geschreven in het Latijn. In 1755 publiceert John Blanton de eerste negen hoofdstukken in Engelse vertaling met als titel *Foundations of Differential Calculus*.

Inhoudsopgave

1 Concept Functie **3**
1.1 Definitie 1 . . . 3
1.2 Definitie 2 . . . 4
1.3 Continuïteit en discontinuïteit . . . 4

2 Trillende snaar debat **7**
2.1 Taylor . . . 7
2.2 D'Alembert . . . 7
2.2.1 Afleiding . . . 8
2.2.2 Interpretatie . . . 10
2.2.3 Oplossing . . . 10
2.3 Euler . . . 13
2.3.1 Oplossingen . . . 13
2.4 D'Alembert 2 . . . 14
2.5 Bernoulli . . . 15
2.6 Euler 2 . . . 17

3 Discussie **19**
3.1 Debat . . . 19
3.1.1 Beginpositie snaar . . . 19
3.1.2 Discussie . . . 21
3.2 Continuïteit/Discontinuïteit . . . 22

4 Verandering definitie **25**
4.1 Standpunt (i) . . . 25
4.1.1 Youschkevitsch . . . 25
4.1.2 Kleiner . . . 26
4.2 Standpunt (ii) . . . 27
4.2.1 Doelen . . . 27
4.2.2 Schrijfstijl . . . 28

5 Conclusie **29**

HOOFDSTUK 1

Concept Functie

1.1 Definitie 1

In 1748 publiceert Euler zijn boek *Introductio*. Hoofdstuk 1 gaat over de verschillende soorten functies en begint met definities. Zo komen de definitie van de constante en de variabele aan bod. In de vierde definitie introduceert Euler de functie als volgt

> A function of a variable quantity is an analytic expression composed in any way whatsoever of the variable quantity and numbers or constant quantities.[2, p.3]

Bij het zien van Eulers definitie is de eerste vraag die in ons opkomt: Wat is een analytische expressie? Opvallend is dat Euler in het gedeelte vóór zijn definitie van de functie helemaal niet spreekt over analytische expressies. Eulers zesde definitie geeft meer duidelijkheid over wat hij bedoelt met functies, namelijk

> The principal distinction between functions, as to the method of combining the variable quantity and the constant quantity is here set down. Indeed, it depends on the operations by which the quantities can be arranged and mixed together. These operations are addition, subtraction, multiplication, division, raising to a power, and extraction of roots. Also the solution of equations have to be considered. Besides there operations, which are usually called algebraic, there are many others which are transcendental, such as exponentials, logarithms, and others which integral calculus supplies in abundance.[2, p.4]

Dus Euler bedoelt met analytische expressies de expressies die in de integraalrekening bevat zijn, zoals polynomen, exponenten, logaritmes en trigonometrische functies. Deze kunnen worden samengevoegd met behulp van $+$, $-$, $\times$ en : en vormen dan een functie. Voorbeelden van functies zijn $\ln(z) - z^3$ en $\sin x^2 + 3x$.

Toch blijft het wat vaag welke expressies bevat zijn in de definitie van de functie. Is bijvoorbeeld $f(x) = x \mod 3$ een functie volgens Eulers definitie? Er is geen lijst beschikbaar met alle mogelijke functies om dit te checken. De vraag is natuurlijk in

hoeverre deze "vaagheid" een probleem vormt voor Euler en voor anderen. Dit is een steeds terugkerende vraag. Het steeds terugkerende antwoord is dat Euler niet snel problemen ziet in dit soort notatiekwesties, maar dat het hem vooral draait om de wiskunde die hij kan uitoefenen.

1.2 Definitie 2

Euler publiceert in 1755 zijn boek *Foundations of Differential Calculus*[1]. Hierin definieert hij opnieuw de functie, echter gebruikt hij andere woorden dan voorheen.

> Those quantities that depend on others in this way, namely, those that undergo a change when others change, are called functions of these quantities. This definition applies rather widely and includes all ways in which one quantity can be determined by others. Hence, if x designates the variable quantity, all other quantities that in any way depend on x or are determined by it are called its functions.[4, p. vi]

Erg opvallend is dat in deze tweede definitie de term "analytische expressie" helemaal niet genoemd wordt, terwijl deze centraal staat in de eerste. Als we nogmaals kijken naar de functie $f(x) = x \mod 3$, dan lijkt het dat dit een functie is volgens deze definitie. Is deze tweede definitie anders? Is deze beter? Of maakt het niets uit?

1.3 Continuïteit en discontinuïteit

Er is veel gediscussieerd door Euler en andere wiskundigen, een belangrijk punt in deze discussie zijn continue en discontinue functies. In volume 2 van *Introduction to Analysis of the Infinite* definieert Euler continue functies als volgt

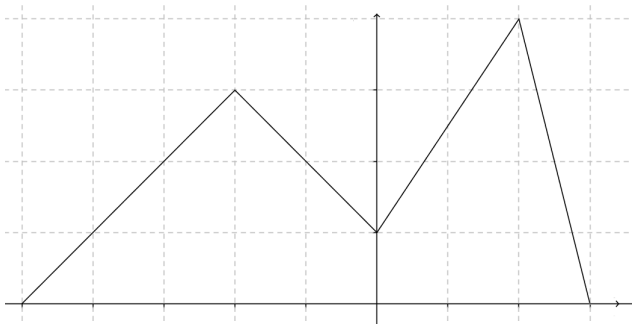
> A continuous curve is one such that its nature can be expressed by a single function of x.[3, p.6]

Merk op dat dit een verschil is met de hedendaagse definitie. De functie $y = \frac{1}{x}$ bijvoorbeeld is continu volgens Eulers definitie, maar hij is niet overal continue volgens de hedendaagse definitie. Namelijk voor $x = 0$ is deze niet gedefinieerd. De discontinue functie definieert Euler als volgt

> If the curve is of such a nature that for its various parts, [...] different functions of x are required for its expression, [...], then we call such a curve discontinous or mixed and irregular.[3, p.6]

Ook dit is niet in overeenstemming met de hedendaagse definitie. De functie in figuur 1.1 bijvoorbeeld is discontinu volgens Eulers definitie, terwijl deze volgens de hedendaagse definitie continu is.

[1] Oorspronkelijke titel is *Institutiones calculi differentialis cum eius usu in analysi finitorum ac doctrina serierum.*



Figuur 1.1: discontinue$_E$ en continue$_M$ functie.

Vanaf nu zullen we continu$_E$ en discontinu$_E$ schrijven als we respectievelijk continu en discontinu volgens Eulers definitie bedoelen. Als we deze begrippen interpreteren zoals de hedendaagse wiskundigen zullen we schrijven continu$_M$ en discontinu$_M$.

HOOFDSTUK 2

Trillende snaar debat

Stel er is een snaar gespannen en deze wordt in beweging gezet. Het debat gaat erover welke functie deze beweging wiskundig beschrijft. Tijdens het debat werd er niet alleen gediscusieerd over de juiste functie die de snaar beschrijft, maar ook werd er gediscussieerd over allerlei andere functies. Behalve Euler spelen ook Jean Le Rond D'Alembert en Daniel Bernoulli een belangrijke rol. In het debat is er een voortdurende tweestrijd tussen wiskundige correctheid en natuurkundige geloofwaardigheid. D'Alembert focust zich vooral op wiskundige correctheid, terwijl Bernoulli zich vooral richt op de natuurkundige geloofwaardigheid. Euler zoekt juist naar een tussenweg tussen deze twee. Een officieel beginpunt van het debat is lastig aan te geven. Wel is het zo dat het werk van Brook Taylor dient als belangrijke voorgeschiedenis.

2.1 Taylor

In 1714 publiceert Taylor zijn artikel *On the motion of a tense string*, hierin vindt hij de differentiaalvergelijking waaraan de snaar voldoet. In moderne wiskundetaal zou deze genoteerd worden als

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \tag{2.1}$$

waarbij c een constante is. Deze vergelijking wordt in de hedendaagse literatuur de golfvergelijking genoemd. Merk op dat Taylor in zijn werken geen gebruik maakt van partiële afgeleide, hij gebruikt woorden om zijn ideeën uit te drukken. Ondanks dat Taylor zich niet mengt in het trillende snaar debat verricht hij belangrijk voorwerk.

2.2 D'Alembert

Het echte beginpunt van het debat kan gezet worden in 1747, met de publicatie van Jean D'Alemberts artikel *Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration*. D'Alembert is op zoek naar een algemene functie y die de vorm van de snaar weergeeft. Omdat de vorm van de snaar verandert met de tijd is y een functie van t. Anderzijds is de positie x op de snaar van belang. Daarom is de y ook een functie van

x. Kortom de functie, waar D'Alembert op zoek naar is, heeft de vorm $y(x,t)$. Zijn beginpunt is de partiële differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \tag{2.2}$$

waarbij c een constante is. D'Alembert maakt dus gebruikt van Taylors formule en verwijst hier ook naar.

2.2.1 Afleiding

We hebben gezien dat D'Alemberts zoektocht naar de functie die de snaar beschrijft begint met vergelijking (2.2). Deze vergelijking is niet direct op te lossen met behulp van integratie. Daarom wil D'Alembert deze vergelijking reduceren zodat integreren wel mogelijk is. Hij gebruikt substitutie om vergelijking (2.2) te reduceren naar een vergelijking die wel op te lossen is met behulp van integratie: $\frac{d^2y}{d\xi d\eta} = 0$. De substitutie die hij toepast is $\xi = x - ct$ en $\eta = x + ct$. Het idee van D'Alemberts aanpak is nu geschetst, nu zullen we ingaan op de details.

Ondanks dat de substitutie ervoor zorgt dat de variabelen x en t gemengd worden zijn ξ en η onafhankelijk. Stel namelijk dat $\xi = 2$ en $\eta = 4$, in dat geval geldt $x = 1$ en $t = 3$. We kunnen nu ξ veranderen, bijvoorbeeld naar $\xi = 4$, terwijl η gelijk blijft. Voor $\xi = 4$ en $\eta = 4$ geldt namelijk $x = 0$ en $t = 0$. Hieruit concluderen we dat ξ en η onafhankelijk zijn en dat de substitutie toegestaan is.

Uit de substitutie volgt $x = \frac{\eta+\xi}{2}$, met andere woorden x is uitgedrukt in η en ξ. Een verandering in x komt dus voort uit een verandering van ξ en/of η. Als we nu $\frac{dy}{dx}$ bekijken, dat wil zeggen de verandering van y ten opzichte van x, bekijken we dus eigenlijk de verandering van y ten opzichte van η en ξ. Het toepassen van de kettingregel geeft

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\xi}\frac{d\xi}{dx} + \frac{dy}{d\eta}\frac{d\eta}{dx}. \tag{2.3}$$

Merk op dat $\frac{d}{d\xi}$ de partiële afgeleide naar ξ is waarbij η constant is. Op dezelfde manier is $\frac{d}{d\eta}$ de partiële afgeleide naar η, hierbij is ξ constant.

Uit de substitutie $\xi = x - ct$ volgt $\frac{d\xi}{dx} = \frac{d}{dx}(x - ct) = 1$. En uit de substitutie $\eta = x + ct$ volgt $\frac{d\eta}{dx} = \frac{d}{dx}(x + ct) = 1$. Deze twee waardes substitueren in (2.3) geeft

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\xi} + \frac{dy}{d\eta}.$$

Deze vergelijking nogmaals afleiden naar x geeft

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{d\xi} + \frac{dy}{d\eta}\right)\\ &= \frac{d}{d\xi}\left(\frac{dy}{d\xi} + \frac{dy}{d\eta}\right) + \frac{d}{d\eta}\left(\frac{dy}{d\xi} + \frac{dy}{d\eta}\right)\\ &= \frac{d^2y}{d\xi^2} + 2\frac{d^2y}{d\eta d\xi} + \frac{d^2y}{d\eta^2}.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Merk op dat we in deze laatste stap gebruik maken van het feit dat $\frac{d^2y}{d\eta d\xi} = \frac{d^2y}{d\xi d\eta}$.

Uit de substitutie volgt ook $t = \frac{\eta-\xi}{2c}$, met andere woorden t is uitgedrukt in η en ξ. Een verandering in t komt dus voort uit een verandering van ξ en/of η. Dus als we nu y afleiden naar t, kunnen we met behulp van de kettingregel schrijven

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\xi}\frac{d\xi}{dt} + \frac{dy}{d\eta}\frac{d\eta}{dt}. \tag{2.5}$$

Uit de substitutie $\xi = x - ct$ volgt $\frac{d\xi}{dt} = \frac{d}{dt}(x - ct) = -c$. En uit de substitutie $\eta = x + ct$ volgt $\frac{d\eta}{dt} = \frac{d}{dt}(x + ct) = c$. Deze twee waardes substitueren in (2.5) geeft

$$\frac{dy}{dt} = -c\frac{dy}{d\xi} + c\frac{dy}{d\eta}.$$

Deze vergelijking nogmaals afleiden naar t geeft

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{d}{dt}\left(-c\frac{dy}{d\xi} + c\frac{dy}{d\eta}\right)\\ &= -c\frac{d}{d\xi}\left(-c\frac{dy}{d\xi} + c\frac{dy}{d\eta}\right) + c\frac{d}{d\eta}\left(-c\frac{dy}{d\xi} + c\frac{dy}{d\eta}\right)\\ &= c^2\frac{d^2y}{d\xi^2} - 2c^2\frac{d^2y}{d\eta d\xi} + c^2\frac{dy^2}{d\eta^2}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Als we nu de uitdrukkingen gevonden in (2.4) en (2.6) invullen in (2.2) volgt hieruit direct dat

$$\frac{d^2y}{d\xi d\eta} = 0.$$

Deze partiële differentiaalvergelijking kunnen we oplossen door y eerst te integreren naar η en vervolgens naar ξ.[1] Als we integreren naar η zien we dat de constante van integraal een functie is van ξ. Dus er geldt

$$\frac{dy}{d\xi} = \Psi(\xi),$$

waarbij Ψ een onbekende functie is. Vervolgens integreren we naar ξ. Er geldt

$$y = \int \Psi(\xi)d\xi + \Phi(\eta).$$

Oftewel

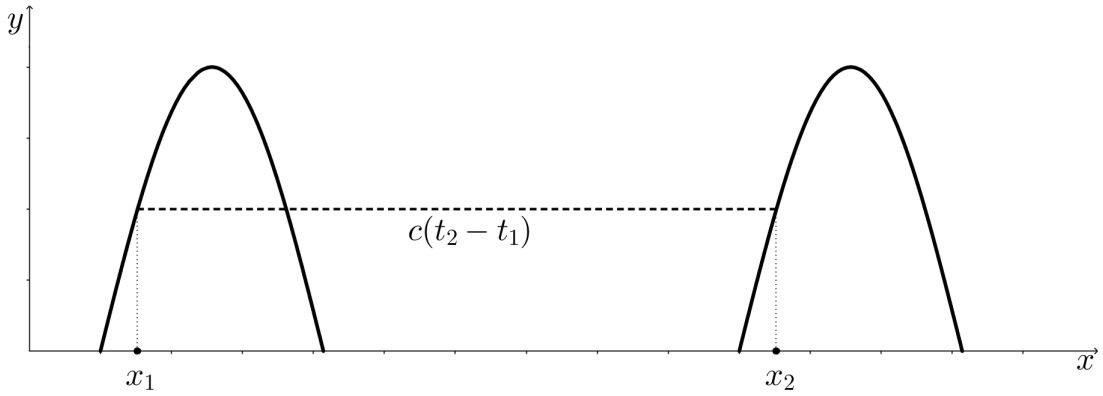
$$y = \Gamma(\xi) + \Phi(\eta),$$

waarbij Γ en Φ onbekende functies zijn. Het terugsubstitueren van $\xi = x - ct$ en $\eta = x + ct$ geeft

$$y = \Gamma(x - ct) + \Phi(x + ct). \tag{2.7}$$

Het is overigens leuk om te vermelden dat D'Alembert in zijn artikel de notatie $\Phi s + \Psi - s$ gebruikt. Opvallend is wel dat hij wel haakjes gebruikt op het moment dat er meerdere variabelen voorkomen, bijvoorbeeld $\Psi(t + l) - \Psi(t - l)$.

[1] Merk op dat we ook eerst naar ξ kunnen integreren en daarna naar η als we dat leuker vinden.



Figuur 2.1: [23, p.51]

2.2.2 Interpretatie

In (2.7) heeft D'Alembert dus een uitdrukking gevonden waaraan de snaar voldoet. Maar wat betekent deze nu? We zullen nu bekijken hoe we zijn uitdrukking natuurkundig kunnen interpreteren. We beginnen met het bekijken van functie $\Gamma(x - ct)$, zie figuur 2.1. Deze uitdrukking wordt ook wel de rechtsreizende golf genoemd, waarom dat zo is zal snel duidelijk worden. We gaan deze functie bekijken op twee verschillende tijdstippen. Deze tijdstippen nomen we t_1 en t_2, waarbij we aannemen dat $t_1 < t_2$. De hoogte van de golf op tijdstip t_1 in een specifiek punt x_1 is gelijk aan $\Gamma(x_1 - ct_1)$.

Als we nu t_1, t_2 en x_1 als vast veronderstellen, dan vragen we ons af voor punt x_2 de golf op dezelfde hoogte is als het punt x_1 op tijdstip t_1. Dit is het geval als $\Gamma(x_1 - ct_1) = \Gamma(x_2 + ct_2)$, dus als $x_1 - ct_1 = x_2 + ct_2$. Hieruit volgt dat de snaar op gelijke hoogte is als $x_2 = x_1 + c(t_2 - t_1)$. Met andere woorden, op afstand $c(t_2 - t_1)$ van x_1 is de golf precies even hoog. De golf beweegt dus in positieve richting en wordt daarom ook wel aangeduid als de rechtsreizende golf. De snelheid waarmee de golf zich verplaatst is c. Op dezelfde manier beweegt de golf $\Phi(x + ct)$ in negatieve richting met snelheid c, deze wordt ook wel de linksreizende golf genoemd.

Dit laat zien dat de uitdrukking die D'Alembert geeft bestaat uit de som van twee golven. Er beweegt dus één golf in negatieve richting en één golf in positieve richting.

2.2.3 Oplossing

Vervolgens gebruikt D'Alembert de begincondities van de snaar om de uitdrukking voor y wat concreter te maken. We hebben gezien dat D'Alembert een uitdrukking vond voor de snaar, welke eruit zag als

$$y = \Gamma(x - ct) + \Phi(x + ct). \tag{2.8}$$

D'Alembert definieert hierbij respectievelijk de beginsnaar en de beginsnelheid als volgt

$$\begin{aligned} f(x) &:= y(x,0) \\ v_0(x) &:= \frac{dy(x,t)}{dt}\Big|_{t=0}. \end{aligned}$$

De vorm die de snaar aan het begin aanneemt noemt D'Alembert dus $f(x)$. We zullen in hoofdstuk 3 zien dat er over deze functie f discussie ontstaat tussen D'Alembert en Euler. Met behulp van (2.8) kunnen we de begincondities schrijven als

$$f(x) = \Gamma(x) + \Phi(x) \tag{2.9}$$

$$v_0(x) = -c\Gamma'(x) + c\Phi'(x). \tag{2.10}$$

Als we vergelijking (2.10) delen door c en vervolgens integreren naar x levert dit

$$\begin{aligned} \frac{1}{c}\int_0^x v_0(s)ds &= \int_0^x \left[-\Gamma'(s) + \Phi'(s)\right] ds \\ &= \Big[-\Gamma(s) + \Phi(s)\Big]_{s=0}^{s=x}. \\ &= -\Gamma(x) + \Phi(x) - \big(-\Gamma(0) + \Phi(0)\big). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Uit $f(0) = \Gamma(0) + \Phi(0) = 0$ volgt $\Phi(0) = -\Gamma(0)$, dus we kunnen schrijven

$$\frac{1}{c}\int_0^x v_0(s)ds = -\Gamma(x) + \Phi(x) + 2\Gamma(0). \tag{2.12}$$

Vervolgens kunnen we met behulp van (2.9) en (2.12) een uitdrukking voor Γ vinden. Uit (2.9) volgt

$$\Gamma(x) = f(x) - \Phi(x).$$

Met behulp van (2.12) kunnen we schrijven

$$\Gamma(x) = f(x) - \left(\frac{1}{c}\int_0^x v_0(s)ds + \Gamma(x) - 2\Gamma(0)\right).$$

Hieruit volgt

$$2\Gamma(x) = f(x) - \frac{1}{c}\int_0^x v_0(s)ds + 2\Gamma(0).$$

Dus

$$\Gamma(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x v_0(s)ds + \Gamma(0). \tag{2.13}$$

Vervolgens gaan we een uitdrukking voor Φ vinden, uit (2.9) volgt

$$\Phi(x) = f(x) - \Gamma(x).$$

Met behulp van (2.13), de uitdrukking die we zojuist gevonden hebben voor Γ, kunnen we direct schrijven

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= f(x) - \left(\frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x v_0(s)ds + \Gamma(0)\right)\\ &= \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x v_0(s)ds - \Gamma(0). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Nu hebben we dus ook een uitdrukking voor Φ gevonden. Als we nu in plaats van x, $x - ct$ en $x + ct$ invullen in respectievelijk (2.13) en (2.14) verkrijgen we

$$\begin{aligned}\Gamma(x-ct) &= \frac{1}{2}f(x-ct) - \frac{1}{2c}\int_0^{x-ct} v_0(s)ds + \Gamma(0)\\ \Phi(x+ct) &= \frac{1}{2}f(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} v_0(s)ds - \Gamma(0).\end{aligned}$$

We zagen in (2.8) dat $y(x,t)$ gelijk is aan de som van deze twee uitdrukkingen, oftewel

$$\begin{aligned}y(x,t) &= \frac{1}{2}f(x-ct) - \frac{1}{2c}\left(\int_0^{x-ct} v_0(s)ds + \int_0^{x+ct} v_0(s)ds\right)\\ &= \frac{f(x-ct)+f(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} v_0(s)ds. \end{aligned} \tag{2.15}$$

We zien dus dat de vorm van de snaar bepaald wordt door de functie van de beginsnaar en de beginsnelheid. We herkennen opnieuw de linksreizende en rechtsreizende golf in de expressie.

Speciaal geval

D'Alembert bekijkt het speciale geval dat de beginsnelheid op elk punt van de snaar gelijk is aan 0, oftewel $v_0(x) = 0$ voor alle x. In dat geval valt is de integraal in (2.15) gelijk aan 0, dus kan y geschreven worden als

$$y(x,t) = \frac{f(x-ct)+f(x+ct)}{2}. \tag{2.16}$$

De functie die de vorm van de snaar weergeeft is dus uitgedrukt in de beginsnaar. In deze expressie herkennen we opnieuw een linksreizende en een rechtsreizende golf.

Vervolgens bekijkt D'Alembert twee voorwaardes waar de snaar, met lengte l, aan voldoet. Namelijk $y(0,t) = 0$ en $y(l,t) = 0$, deze voorwaardes geven aan dat de snaar vastzit aan het begin- en eindpunt. Het invullen van deze eerste voorwaarde in (2.16) geeft

$$\frac{f(-ct)+f(ct)}{2} = 0, \qquad \text{oftewel} \qquad -f(-ct) = f(ct). \tag{2.17}$$

Hieruit volgt dat f een oneven functie is. Het invullen van de tweede voorwaarde in (2.16) geeft

$$\frac{f(l-ct)+f(l+ct)}{2} = 0, \qquad \text{oftewel} \qquad -f(l-ct) = f(l+ct).$$

Met behulp van (2.17) kunnen we dit schrijven als

$$f(-l+ct) = f(l+ct). \tag{2.18}$$

Hieruit volgt dat f een periodieke functie is met periode $2l$. D'Alembert laat dus zien dat in dit geval de beginsnaar een periodieke oneven functie is.

2.3 Euler

In 1750 publiceert Euler zijn paper *Sur la vibration des cordes*, net als D'Alembert zoekt hij een functie die de trillende snaar beschrijft. De functie die Euler uiteindelijk vindt blijkt niet veel te verschillen van die van D'Alembert. Of zoals Truesdell opmerkt

> D'Alembert has given "a very beautiful solution", but, believing he has added important observations, Euler will give his own, though "not very different".[19, p.245]

Het doel van Euler is om een zo algemeen mogelijke oplossing te geven voor het probleem. Daarmee bedoelt hij dat hij wil dat de beginpositie van de snaar, de functie f, willekeurig is. Eulers oplossing is als volgt

$$y = \frac{f(x-ct)+f(x+ct)}{2}. \tag{2.19}$$

Deze functie is gelijk aan de functie die D'Alembert vond in (2.16). Ook deze functie bestaat uit twee functies met als variabelen $x-ct$ en $x+ct$, oftewel uit een rechtsreizend en linksreizend gedeelte.

Voor Euler is het niet noodzakelijk dat f een analytische expressie heeft. Omdat f de beginpositie van de snaar weergeeft is deze gedefinieerd op $[0,l]$. De functiewaardes buiten het interval $[0,l]$ kunnen bepaald worden door f periodiek en oneven voort te zetten. Op deze manier kunnen de functiewaarden van y, ook voor grote waardes van t, bepaald worden op het domein $[0,l]$.

2.3.1 Oplossingen

Euler heeft de uitdrukking gegeven waaraan de kromme voldoet, zie functie (2.19). Toch is hij er niet van overtuigd dat er altijd een analytische oplossing mogelijk is, de functie f hoeft namelijk niet per se een analytische expressie te hebben. Wel beschrijft hij de specifieke situatie waarop er volgens hem wel een expliciete oplossing bestaat. Dit is het geval waarin de beginsnaar een analytische expressie heeft en geschreven kan worden als

$$y(x,0) = \sum a_i \sin\frac{n\pi x}{l}.$$

In dat geval zegt Euler dat de functie die de snaar weergeeft te schrijven is als

$$y(x,t) = \sum a_i \sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi ct}{l}. \tag{2.20}$$

2.4 D'Alembert 2

In sectie 2.2 hebben we gezien dat D'Alembert in zijn eerste artikel uit 1747 uitdrukkingen geeft voor de kromme. Met het paper *Réflexions et éclaircissemens sur les nouvelles vibrations des cordes exposées dans les mémoires de l'Académie de 1747 et 1748* dat gepubliceerd wordt in 1750 geeft D'Alembert een vervolg aan het debat. In dit artikel beschrijft D'Alembert dat hij een directe manier heeft gevonden om het probleem op te lossen. Namelijk met behulp van het scheiden van variabelen. Zijn uitgangspunt is dat y te schrijven is als

$$y(s,t) = \Delta(t)\Gamma(x). \tag{2.21}$$

De functie y is dus uitgedrukt in een functie van t en een functie van x. De functie $\Delta(t)$ vertelt ons hoeveel invloed de tijd heeft op $\Gamma(x)$. Omdat $\Delta(t)$ alleen van t afhangt en $\Gamma(x)$ alleen van x afhangt volgt hieruit

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \Delta(t)\frac{d^2\Gamma(x)}{dx^2} \qquad \text{en} \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2\Delta(t)}{dt^2}\Gamma(x). \tag{2.22}$$

Deze twee waardes substitutieren in in de golfvergelijking levert

$$\Delta(t)\frac{d^2\Gamma(x)}{dx^2} = \frac{1}{c^2}\frac{d^2\Delta(t)}{dt^2}\Gamma(x).$$

Het scheiden van variabelen geeft

$$\frac{1}{\Gamma(x)}\frac{d^2\Gamma(x)}{dx^2} = \frac{1}{\Delta(t)c^2}\frac{d^2\Delta(t)}{dt^2} = -p^2.$$

De linkerkant van deze vergelijking is afhankelijk van x en de rechterkant van de vergelijking van t. Daarom kunnen we schrijven dat deze vergelijking gelijk is aan een constante $-p^2$. Dit geeft ons twee differentiaalvergelijkingen, namelijk

$$\begin{aligned}\frac{d^2\Gamma(x)}{dx^2} &= -p^2\Gamma(x)\\ \frac{d^2\Delta(t)}{dt^2} &= -c^2p^2\Delta(t).\end{aligned}$$

Oplossingen voor deze differentiaalvergelijkingen zijn

$$\Gamma(x) = c_1\sin(px) + c_2\cos(px) \tag{2.23}$$

$$\Delta(t) = c_3\sin(cpt) + c_4\cos(cpt), \tag{2.24}$$

waarbij c_1, c_2, c_3 en c_4 constanten zijn. Merk op dat voor $t = 0$ geldt dat $\Delta(0) = c_4$. Dit betekent dat $y(x,0) = c_4\Gamma(x)$, we zien dus dat Γ de functie is die de beginsnaar weergeeft. Met behulp van (2.23) en (2.24) kunnen we y schrijven als

$$\begin{aligned}y(x,t) &= \big(c_1\sin(px) + c_2\cos(px)\big)\big(c_3\sin(cpt) + c_4\cos(cpt)\big) \\ &= \hat{c_1}\sin(px)\sin(cpt) + \hat{c_2}\sin(px)\cos(cpt)\\ &\quad + \hat{c_3}\cos(px)\sin(cpt) + \hat{c_4}\cos(px)\cos(cpt),\end{aligned} \tag{2.25}$$

waarbij $\hat{c_1}, \hat{c_2}, \hat{c_3}$ en $\hat{c_4}$ constanten zijn. Er zijn twee voorwaardes waar de snaar, met lengte l, aan voldoet. De snaar zit namelijk vast aan het begin- en eindpunt, oftewel $y(0,t) = 0$ en $y(l,t) = 0$. Deze eerste invullen in (2.25) geeft

$$y(0,t) = \hat{c_3}\sin(cpt) + \hat{c_4}\cos(cpt) = 0.$$

Dit is waar voor alle t als $\hat{c_3} = \hat{c_4} = 0$. Dus we kunnen (2.25) schrijven als

$$\begin{aligned} y(x,t) &= \hat{c_1}\sin(px)\sin(cpt) + \hat{c_2}\sin(px)\cos(cpt) \\ &= \sin(px)\big(\hat{c_1}\sin(cpt) + \hat{c_2}\cos(cpt)\big). \end{aligned}$$

De tweede voorwaarde invullen in (2.25) geeft

$$y(l,t) = \sin(pl)\big(\hat{c_1}\sin(cpt) + \hat{c_2}\cos(cpt)\big) = 0.$$

Dit is alleen waar voor alle t als $\hat{c_1} = \hat{c_2} = 0$ of $\sin(pl) = 0$. Merk op dat $\hat{c_1} = \hat{c_2} = 0$ een triviale oplossing geeft. De enige mogelijkheid is dus dat $\sin(pl) = 0$. Hieruit volgt $p = \frac{k\pi}{l}$, met $k \in \mathbb{N}$. Dus is de oplossing die D'Alembert vindt met behulp van het scheiden van variabelen te schrijven als

$$y(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\frac{k\pi x}{l}\left(\hat{c_1}\sin\frac{ck\pi t}{l} + \hat{c_2}\cos\frac{ck\pi t}{l}\right).$$

2.5 Bernoulli

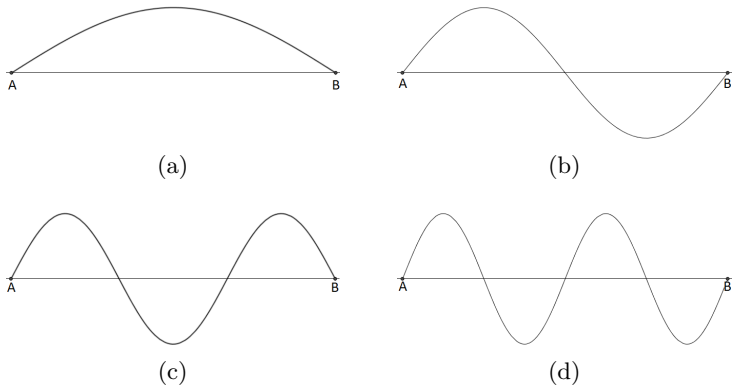
In 1753 publiceert Daniel Bernoulli zijn artikel *Réflexions et éclaircissemens sur les nouvelles vibrations des cordes exposées dans les mémoires de l'Académie de 1747 et 1748.*

Voordat we duidelijk maken wat Bernoulli betekent heeft voor het trillende snaar debat is het belangrijk om de verhouding tussen hem en zijn voorgangers duidelijk te maken. Bernoulli is in tegenstelling tot Euler en D'Alembert geen puur wiskundige. Zo schrijft Bernoulli over zijn voorgangers:

> I do not the less esteem the calculations of Messrs. D'Alembert and Euler, which certainly contain all that analysis can have at its deepest and most sublime, but which show at the same time that an abstract analysis which is accepted withoud any synthetic examination of the question under discussion is liable to surprise rather than enlighten us. [14, p.361]

Bernoulli leidt net als Euler en D'Alembert een vergelijking voor de krommen van de trillende snaar af. Zijn methode is veel minder technisch, daarover zegt hij het volgende.

> It seems to me that we have only to pay attention to the nature of the simple vibrations of the strings.[14, p.361]



Figuur 2.2: Uniforme vibraties

Hij geeft dus de voorkeur aan een eenvoudige benadering van het probleem, zonder daarbij ingewikkelde wiskunde te gebruiken. Taylor had reeds gekeken naar de vibraties die de snaar kan maken en de daarbijbehorende periodes. Hij zei dat elke vibratie van de snaar opgebouwd is uit uniforme vibraties zoals weergegeven in figuur 2.2. Bernoulli bekijkt dus de vibraties van Taylor, maar hij voegt daaraan toe dat het mogelijk is dat de snaar bestaat uit een superpositie van vibraties. Hij bekijkt de snaar met lengte l. De grootste uitwijking van de snaar ten opzichte van de evenwichtsstand zijn respectievelijk $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$. Op deze manier kan voor elk van de figuren de formule afgeleid worden die de beginpositie van de snaar weergeeft, namelijk

$$\begin{aligned}
y =& a_1 \sin \frac{\pi x}{l} && \text{voor figuur (a)} \\
y =& a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} && \text{voor figuur (b)} \\
y =& a_3 \sin \frac{3\pi x}{l} && \text{voor figuur (c)} \\
y =& a_4 \sin \frac{4\pi x}{l} && \text{voor figuur (d)} \\
&\vdots && \vdots
\end{aligned}$$

Bernoulli bekijkt dus de mogelijkheid van superpositie en stelt dat het mogelijk is om de constantes a_n zo te kiezen zodat alle mogelijke begincurves bevat zijn in

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

En de functie die de snaar weergeeft is volgens Bernoulli te schrijven als

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi ct}{l}. \tag{2.26}$$

Merk op dat deze functie gelijk is aan de oplossing die Euler vond in (2.20). Bernoulli is zelf erg content met de manier waarop hij de vergelijking heeft afgeleid. Zo zegt hij

> Here we have therefore found this infinity of curves without any computation, and our equation is the same as that of Mr. Euler. [14, p.364]

Toch is er een verschil aan te wijzen in de oplossing van Euler en Bernoulli. Euler beschouwd zijn oplossing namelijk als speciaal geval, namelijk het geval dat de beginkromme weergegeven is door een continue$_E$ kromme. Over dit onderwerp zijn Euler en Bernoulli het dus oneens, hierover meer in sectie 2.6.

2.6 Euler 2

Het debat wordt vervolgd met Eulers artikel *Remarques sur les memoires precedens de M. Bernoulli*. We hebben in de voorgaande sectie gezien dat Bernoulli en Euler beide dezelfde oplossing vinden.

Ondanks dat de oplossingen gelijk zijn heeft Euler kritiek op Bernoulli, deze kritiek uit hij in het eerste deel van het artikel. In het tweede deel van het artikel bekijkt Euler nogmaals het trillende snaar probleem en gebruikt hij voor het eerst de notatie voor partiële differentiaalvergelijkingen zoals wij deze tegenwoordig kennen. Bernoulli ziet zijn oplossing als het meest algemene geval. Hij zegt hierbij niet dat het altijd mogelijk is om de coëfficienten a_n op de juiste manier te kiezen. Hij zegt hierover

> I am not yet quite clear about it: if there are still other curves, then I do not see in what sense they can be admitted.[14, p.362]

Euler twijfelt aan deze bevindingen van Bernoulli en vraagt zich af

> The principal question which I must face is therefore: are all curves of a string set in motion contained in this formula, or are they not?[14, p.366]

Euler bespreekt de mogelijkheid dat de beginsnaar een willekeurige kromme is. Er zijn dan twee mogelijkheden: deze willekeurige kromme is wel óf niet bevat in vergelijking (2.26). Euler bekijkt het tweede geval, wat dus betekent dat de kromme niet te schrijven is als een som van sinussen. Het lijkt Euler onwaarschijnlijk dat de snaar na een kleine tijdseenheid ineens wel te vatten is in vergelijking (2.26).

Euler uit hierbij dus zijn twijfels over Bernoullis bevindingen en zegt dat het hem onwaarschijnlijk lijkt dat het in elke situatie mogelijk is om de coëfficienten a_n op de juiste manier te kiezen. Het is dus niet zo dat Euler beweert dat Bernoullis standpunt onjuist is, maar hij daagt hem juist uit te bewijzen dat zijn standpunt juist is.

HOOFDSTUK 3

Discussie

We hebben in hoofdstuk 1 gezien dat Euler in zijn *Introductio* een definitie van de functie geeft. Met de artikelen van Euler, D'Alembert en Bernoulli is er een discussie ontstaan over de juiste functie. Ondanks dat de wiskundigen het niet eens werden over de oplossing is het debat belangrijk geweest voor de ontwikkeling van de analyse en het concept van de functie.

Bovendien definieert Euler in zijn boeken de continue en discontinue functies. Ook hierover zijn veel discussies ontstaan, welke ook weer invloed hadden op de analyse en het concept van de functie.

3.1 Debat

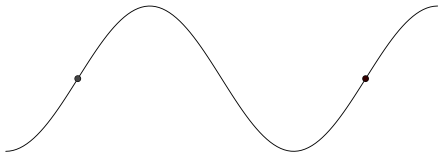
Zoals in hoofdstuk 2 beschreven staat geeft zowel D'Alembert als Euler een functie waaraan de golfvergelijking voldoet. We hebben deze naast elkaar gezet en gezien dat deze veel overeenkomsten vertonen. We bekijken opnieuw de vergelijking

$$y(x,t) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2}.$$

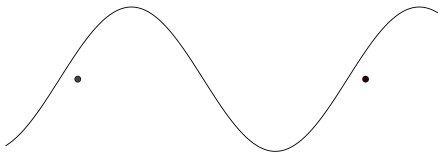
3.1.1 Beginpositie snaar

Het grootste meningsverschil tussen D'Alembert en Euler zit in $f(x)$, oftewel de beginpositie van de snaar. Laten we allereerst een voorbeeld bekijken. Stel dat de functie $f(x)$ op $[0,l]$ eruit ziet zoals in figuur 3.1a. In het geval dat $ct = \frac{1}{8}l$ zien de functie $f(x+ct)$ en $f(x-ct)$ eruit als in respectievelijk figuur 3.1b en 3.1c. Deze twee golven noemen we dus de "linksreizende" en "rechtsreizende" golf. Het samenvoegen en middelen van de twee golven die in tegengestelde richting bewegen levert de functie $y(x,t)$, zoals zichtbaar in figuur 3.1d.

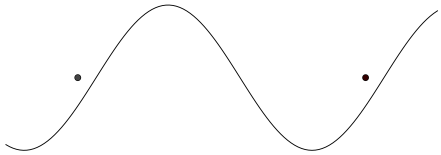
Uit deze figuren wordt bovendien duidelijk dat het nodig is dat f ook gedefinieerd is buiten het interval $[0,l]$. Dit zorgt voor een belangrijke punt van discussie tussen Euler en D'Alembert. D'Alembert bekijkt namelijk de situatie dat de beginpositie van de snaar te beschrijven is door een analytische expressie, oftewel een continue$_E$ functie.



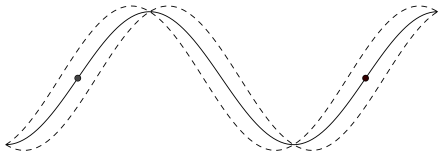
(a) $f(x)$



(b) $f(x + \frac{1}{8}lt)$



(c) $f(x - \frac{1}{8}lt)$



(d) $\frac{1}{2}\big(f(x + ct) + f(x - ct)\big)$

Figuur 3.1

Daarbij laat hij zien dat de functie f periodiek en oneven is. Volgens D'Alembert is het niet altijd mogelijk om een functie te vinden waaraan de snaar voldoet op het moment dat de beginkromme geen analytische expressie heeft.

Euler zelf daarentegen staat ook nog andere, niet continue$_E$, krommen toe voor de beginsnaar $f(x)$, zoals bijvoorbeeld de functie in figuur 3.2. Eulers enige eis is dat de functie f gedefinieerd is op $0 \leq x \leq l$. Hij ziet geen probleem de functie oneven en periodiek te maken. Stel namelijk dat de functie f voor $x \in [0, l]$ gedefinieerd is. Door te eisen dat $f(-x) = -f(x)$ op $[-l, 0]$ is de functie oneven. Ook de periodiciteit vormt geen probleem, $f(x)$ kan simpelweg uitgebreid worden op $(-\infty, -l] \cup [l, \infty)$. Het is erg opvallend dat Euler niet probeert om de beginsnaar uiterst precies te definiëren, hij vindt een grafische beschrijving prima. Zo zegt hij

> one repeats it in the reversed situation on each side [...], and one conceives the continual repetition of this curve in each direction to infinity according to this same law.[19, p. 247]

Met het toestaan van dit soort beschrijvingen voldoet Eulers f niet meer aan zijn eerste

Figuur 3.2: Mogelijke beginpositie van de snaar

definitie van de functie, f heeft immers niet per se een analytische expressie. Dit vormt voor Euler geen probleem bij het vinden van zijn oplossing. Hij is namelijk op zoek naar een zo algemeen mogelijke oplossing, een restrictie opleggen aan de beginsnaar zou juist ten kostte gaan van deze algemeenheid.

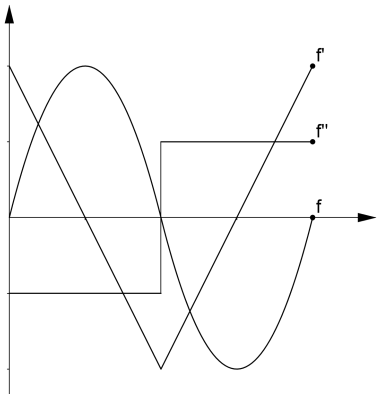
Kortom: D'Alembert en Euler verschillen van mening. Euler staat toe dat de beginpositie van de snaar beschreven wordt door een discontinue$_E$ functie en D'Alembert niet.

3.1.2 Discussie

We hebben gezien dat het voor Euler niet van belang is dat de functie f continu$_E$ is. D'Alembert reageert hierop met zijn artikel *Recherches sur les vibrations des cordes sonores*. Hij laat zien dat er een probleem is op de punten waarop twee analytische expressies samenkomen.

Als voorbeeld bekijkt hij de oplossing $y = \frac{1}{2}(f(x-ct) - f(x+ct))$, waarbij f bestaat uit twee symmetrische parabolen, zie figuur 3.3. In dit geval is f dus geen continue$_E$ functie, de functie bestaat immers uit twee analytische expressies. D'Alembert zegt dat f in het midden, dus in het punt waar de twee parabolen elkaar ontmoeten, niet voldoet aan de golfvergelijking. In dit punt is f niet differentieerbaar en dit vormt een probleem. Hieruit concludeert D'Alembert dat f een continue$_E$ functie moet zijn, dan komen situaties als deze niet voor.

In het artikel *Sur le mouvement d'une corde qui au commencement n'a été ébranlée que dans une partie* reageert Euler op D'Alembert. Hij zegt dat het probleem zit in



Figuur 3.3: f, f', f''[11, p.303]

f', deze bevat namelijk een knik op deze middelpunten. Euler stelt dat het mogelijk is om f te veranderen naar $\tilde{f}$ zodat $\tilde{f}'$ minder scherp is. Dan voldoet $\tilde{f}$ oook op de punten waar twee parabolen samenkomen aan de golfvergelijking. In analyse worden kleine veranderingen genegeerd en daarom is dit toegestaan. Voor Euler is het dus niet nodig dat de functie f een continue$_E$ functie is.

3.2 Continuïteit/Discontinuïteit

Het debat rondom de trillende snaar zorgt niet alleen voor ontwikkeling in de natuurkunde, maar ook voor ontwikkeling van de grondslagen van de wiskunde. In Eulers definitie zijn discontinue functies de functies samengesteld uit meerdere analytische expressies. Deze funties noemt hij ook wel "mixed" of "irregular". Euler wilde de calculus van de discontinue functie ontwikkelen om een aantal redenen. (1) In de natuurkunde komen veel discontinue krommen voor. (2) Discontinue functies zijn belangrijk in het vinden van oplossingen voor partiële differentiaalvergelijkingen. (3) Euler gelooft in de generalisatie van de wiskunde.

Eulers definitie van discontinuiteit zorgde voor veel ophef. Zo waren er kritieken op de representatie van functies. De eerste vorm van kritiek kan geillustreerd worden met een voorbeeld, daarbij bekijken we de volgende functie.

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Deze functie bestaat uit twee analytische expressies en is dus discontinu$_E$. Echter kan deze functie ook gepresenteerd worden door $g(x) = \sqrt{x^2}$, deze functie is continu$_E$. Dus we zien hier een voorbeeld waarbij g continu$_E$ is, maar ook discontinu$_E$. Op basis van deze functie en andere vergelijkbare functies is veel kritiek geleverd, onder andere door Youschkevitsch en Kleiner. Zo schrijft Youschkevitsch in zijn boek *The concept of function*

> Thus the discrimination between mixed and continuous functions proved itself theoretically untenable.[10, p.73]

Kleiner schrijft hierover in zijn boek *Excursions in the History of Mathematics* het volgende

> The work on Fourier series showed the untenability of the eighteenth-century notion of continuity. Indeed, a function such as [...] could be represented (as we have seen) by a single analytic expression, namely its Fourier series, hence it was both continuous and discontinuous in the eighteenthcentury sense of that concept.[8, p.142]

In het artikel *Evolution of the Function Concept: A Brief Survey* schrijft Kleiner iets vergelijkbaars, namelijk

> As for its impact on the evolution of the function concept, Fourier's work: [...] Showed that Euler's concept of "discontinuous" was flawed.[17, p.290]

Kleiner en Youschkevitsch staan dus aan dezelfde kant, ze gebruiken zelfs beide de term "untenable".

Op het eerste gezicht ogen de redenaties van Youschkevitsch en Kleiner erg overtuigend. Bovendien moedigt dit voorbeeld de moderne wiskundige aan om helemaal los te gaan en nog meer functies te bedenken als functie (3.1). Maar hierbij zou men zich moeten afvragen wat het nut is van dit soort tegenvoorbeelden? Is het niet zo dat Euler enkel heeft gedefinieerd wanneer een functie continu$_E$ is en wanneer een functie discontinu$_E$ is. Hij heeft niet uitgesloten dat een functie zowel continu$_E$ als discontinu$_E$ kan zijn. Het enige wat hij hierover zegt in zijn *Introductio* is het volgende

> From this concept of a curve, there follows immediately a division into continious and discontinious or mixed.[3, p.6]

Deze verdeling hoeft, naar mijn interpretatie van Eulers mening, dus niet strikt te zijn. Het is prima mogelijk dat een functie continu$_E$ en discontinu$_E$ is. Er lijkt mij dus vrij weinig "untenable" of "flawed", om in de woorden van Kleiner en Youschkevitsch te spreken, aan Eulers definities.

Dit is niet het enige voorbeeld waarbij Eulers definities verkeerd geinterpreteerd worden. Zo schrijft Ivor Grattan-Guinness in zjn boek *Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann* het volgende

> Euler's terminology is different from ours [...]. Euler's term "continious" is synonymous with our "differentiable," [...]; but his "discontinious" corresponds to our "continious," and includes the new functions each of which was to be considered as being composed of the algebraic expressions appropriate to their "continious" portions.[16, p.6-7]

Het voorbeeld, dat ik gegeven heb in sectie 1.3, van een continue$_E$ functie is $y = \frac{1}{x}$. Deze functie is niet differentieerbaar in $x = 0$. Het is dus niet zo dat een continue$_E$ functie per definitie differentieerbaar$_M$ is.

HOOFDSTUK 4

Verandering definitie

Zoals we in hoofdstuk 1 gezien hebben verandert Euler zijn definitie van de functie op een bepaald moment. We vragen ons af wat hiervoor de reden is. In deze discussie kunnen verschillende standpunten aangenomen worden, wij bekijken de volgende twee standpunten.

(i) Euler verandert zijn definitie omdat hij vindt dat zijn oude definitie ontoereikend is.

(ii) Euler verandert zijn definitie om didactische en stilistische redenen en niet omdat hij vindt dat er iets mis is met zijn oude definitie.

Natuurlijk zijn er in een discussie altijd verschillende standpunten en meningen, dat maakt het immers een discussie. In dit hoofdstuk zullen we de twee standpunten behandelen. Daarbij bekijken we wat verschillende auteurs, hedendaagse en historische, hierover geschreven hebben. Ook bekijken we de aangedragen argumenten bij de standpunten. Het is belangrijk om duidelijk te maken dat het op dit punt niet onze bedoeling is om een kant te kiezen. We zijn niet op zoek naar één waarheid, maar proberen zo objectief mogelijk te zijn. Het is aan de lezer om de argumenten kritisch te lezen en hierover een mening te vormen.

4.1 Standpunt (i)

Het eerste standpunt dat wij hier zullen behandelen is (i). Deze zegt dat Euler van mening is dat zijn eerste definitie niet meer voldoet en dat hij daarom zijn definitie verandert. We zullen een aantal auteurs en argumenten benoemen die dit standpunt ondersteunen.

4.1.1 Youschkevitsch

Youschkevitsch schrijft in zijn boek *The concept of function* het volgende

> Since, according to Euler, discontinuous functions generally are not analytically representable, the definition of a function given in Volume 1 of the Introductio and somewhat modified in its Volume 2 became too narrow. So as to formulate another definition comprising all known classes of relation Euler turned to a notion which was always present albeit not explicitly expressed in any method of introducing functions: the general notion of correspondence between pairs of elements, each belonging to its own set of values of variable quantities.[10, p.69]

Youschkevitsch impliceert dus dat Euler zijn definitie verandert omdat de oude niet meer voldoet. De eerste definitie bevat enkel analytische functies, dit terwijl de discontinue functies belangrijk blijken in het trillende snaar debat. De tweede definitie geeft alle soorten relaties weer en hierin zijn ook de discontinue functies bevat.

Kort samengevat: Youschkevitsch is van mening dat Euler zijn definitie bewust verandert omdat deze niet alle soorten relaties weergeeft, zoals de discontinue$_E$ functies. Euler kijkt nu dus naar functies als een algemene manier om de correspondentie tussen elementen weer te geven.

4.1.2 Kleiner

Ook Israel Kleiner ondersteunt in zijn boek *Excursions in the History of Mathematics* standpunt (i). Daarin schrijft hij

> To see how Euler's view of functions evolved over a period of several years, compare the definition given in his 1748 Introductio with the following definition, given in 1755, in which the term "analytic expression" does not appear.[8, p.110]

Ook hij impliceert dus, vergelijkbaar met Youschkevitsch, dat Euler de definitie van de functie verandert omdat hij vindt dat de oude ontoereikend is. Daarbij is Kleiners argument dus dat Eulers kijk op functies ontwikkeld is.

Als we eens kritisch kijken naar andere werken van Kleiner vallen ons een aantal dingen op. In zijn boek *Excursions in the history of mathematics* schrijft hij over analytische functies en noemt daarbij de term "article of faith". Hierover schrijft hij het volgende

> [...] "article of faith" of eighteenth-century mathematics: If two analytic expressions agree on an interval, they agree everywhere. This was not an unnatural assumption, given the type of functions (analytic expressions) considered at the time. On this view, the whole course of a curve given by an analytic expression is determined by any small part of the curve.[8, p.107]

Kleiner maakt in zijn boek duidelijk dat hij het hier niet mee eens is, en noemt daarbij een tegenvoorbeeld. Hij bekijkt namelijk de functies $f_1 = \frac{\pi - x}{2}$ en $f_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$. Op het domein $[0, 2\pi]$ zijn de functiewaardes van f_1 en f_2 gelijk. Echter is dit buiten het domein $[0, 2\pi]$ niet het geval.

Het nut van deze opmerking van Kleiner is niet duidelijk voor de lezer. In de tweede zin van het hierboven genoemde citaat lijkt Kleiner zich namelijk te realiseren dat wiskundigen in de tijd van Euler op een andere wijze naar functies kijken dan hedendaagse wiskundigen. Dit impliceert dat hij zich realiseert dat "problemen" die zich voordoen in functies als (3.1) geen belangrijke rol spelen. Het oogt dan wat vreemd dat hij vervolgens wel een tegenvoorbeeld geeft.

Kort samengevat: Kleiner zegt dat Euler zijn definitie van de functie verandert omdat de oude niet meer voldoet. Argument hierbij is dat Euler zijn visie ontwikkeld heeft in de loop der jaren.

4.2 Standpunt (ii)

Een ander standpunt in de discussie is dat Euler zijn definitie verandert om didactische en stilistische redenen. Dit standpunt kan ondersteund worden met behulp van de doelen van Eulers boeken *Introductio* en *Foundations of Differential Calculus* en met zijn manier van schrijven.

4.2.1 Doelen

Allereerst gaan we kijken naar de boeken waarin Euler de functie definieert. Eulers *Introductio* is een puur wiskundig boek en bevat veel definities. Eulers *Foundations of Differential Calculus* bevat juist veel toegepaste, natuurkundige problemen. Het gegeven dat deze twee boeken van een ander soort zijn, en dus een ander doel hebben, speelt een belangrijke rol in de verandering van de definitie. In het voorwoord van *Foundations of Differential Calculus* schrijft Euler het volgende

> I have established in this book the whole of differential calculus, deriving it from true principles and developing it copiously in such a way that nothing pertaining to it that has been discovered so far has been omitted.[4, p.vi]

Daarbij staat een voorbeeld beschreven van een kanon, geladen met buskruit, die een kogel afschiet. Dit voorbeeld geeft weer dat een verandering in één variabele invloed kan hebben op een andere variabele. Deze algemene manier om naar variabelen te kijken is precies wat de tweede definitie van de functie weergeeft. Bovendien schrijft Euler over zijn definitie het volgende

> This definition applies rather widely and includes all ways in which one quantity can be determined by others.[4, p.vi]

Dit impliceert dus dat Eulers tweede definitie van de functie op dat moment beter voldoet aan Eulers doelen. De definitie past dus gewoon beter bij het onderwerp van het boek en Eulers intenties. Hij bedoelt dus niets anders met zijn definitie.

4.2.2 Schrijfstijl

Een ander argument, dat standpunt (ii) ondersteunt, heeft te maken met Eulers schrijfstijl. Zo begint hij in volume 1 van zijn *Introductio* met het geven van definities. Het valt hierbij op dat hij voorbeelden geeft om intuïtief duidelijk te maken wat hij bedoelt met zijn definities. Zo definieert hij

> A two-valued function of z is one which gives a pair of values for each determined value of z. Functions of this kind display a square root, such as $\sqrt{2z + z^2}$.[2, p.7]

Moderne wiskundigen zijn gewend definities strikt weer te geven. Zo definiëren Steven Givant en Paul Halmos in *Introduction to Boolean Algebras* hetzelfde begrip op een andere manier, namelijk

> Let X be an arbitrary set, and $2X$ the set of all functions from X into 2. The elements of $2X$ will be called 2-valued functions on X.[13, p.4]

Als we intuïtief duidelijk willen hebben wat er bedoeld wordt met een twee-waardige functie is Eulers definitie het meest voor de hand liggend. Maar als we precies willen weten wat er bedoeld wordt is de hedendaagse definitie mogelijk wat geschikter. Men kan zich op dit punt afvragen wat het doel was van Euler. Wilde hij zijn definities strikt geven of wilde hij juist intuïtief duidelijk maken wat hij bedoelt? In de inleiding van *Introduction to Analysis of the Infinite* staat het volgende geschreven

> Often I have considered the fact that most of the difficulties which block the progress of students trying to learn analysis stem from this: that although they understand little of ordinary algebra, still they attempt this more subtle art.[...] However, in the ordinary treatise on the elements of algebra, these topics are either completely omitted or are treated carelessly. For this reason, I am certain that the material I have gathered in this book is quite sufficient to remedy that defect.[2, p.v]

Hieruit kan men opmaken dat Euler het belangrijk vindt dat zijn lezers inzicht verkrijgen in de onderwerpen waarover hij schrijft. Euler is tevreden met zijn definities als hij hiermee de wiskunde kan beoefenen die hij graag wil. Dit alles sluit aan bij zijn rol in het trillende snaar debat. Euler eist niet dat de functie die de snaar beschrijft aan zijn eigen definitie voldoet, hij staat ook andere functies toe omdat de fysische situatie hierom vraagt. We zouden ook kunnen stellen: Euler stond niet in dienst van de analyse, de analyse stond in dienst van hem.

Deze redenatie kunnen we ook toepassen op de definitie van de functie. We kunnen hieruit concluderen dat de woorden waarmee hij zijn definitie weergeeft niet zo veel uitmaken. Hij past zijn definitie dus niet aan omdat hij vindt dat deze niet meer voldoet.

HOOFDSTUK 5

Conclusie

We hebben in hoofdstuk 1 gezien dat Euler in zijn *Introductio* de functie definieert. In zijn boek *Foundations of Differential Calculus* geeft hij opniew een definitie van de functie, echter gebruikt hij andere woorden als voorheen. Daarbij hebben we twee verschillende standpunten bekeken.

(i) Euler verandert zijn definitie bewust, hij is van mening dat zijn oude definitie ontereikend is. Een belangrijke oorzaak hiervan ligt in Eulers rol in het trillende snaar debat.

(ii) Euler verandert zijn definitie om didactische en stilistische redenen en niet omdat hij vindt dat er iets mis is met zijn oude definitie.

Het schrijven van deze scriptie heeft me tot de conclusie gebracht dat hedendaagse wiskundigen veel kunnen leren van Euler. Of zoals Lützen schrijft

> This can only increase our admiration for his readiness to overthrow his own framework of analysis when physical reality called for it. His conduct reveals an undogmatic and flexible attitude toward the foundational problems, from which much could be learned by modern mathematicians.[11, p.305]

Hier kunnen we ons, naar mijn mening, volledig bij aansluiten. De manier waarop hedendaagse wiskundigen redeneren is vaak erg strikt en laat weinig ruimte voor discussie. We hebben in deze scriptie gezien dat Eulers definities nog wel eens voor discussie zorgen. Deze discussies hebben de wiskunde verder gebracht. De ontwikkeling van de analyse en de ontwikkeling van het concept van de functie waren anders niet zo snel gegaan.

Toch zijn er hedendaagse wiskundigen, zoals Kleiner, die kritiek geven op Euler omdat zijn aanpak verschilt van de hedendaagse. Het is belangrijk om ons af te vragen of het uitmaakt dat de wiskundige van vroeger zaken op een andere manier aanpakt dan dat wij tegenwoordig zouden doen. Het zorgvuldig lezen van oorspronkelijke teksten kan hierbij helpen. In het geval van Euler maakt het, naar mijn idee, niet uit dat zijn definitie van de functie wat ruimte laat voor discussie. Dit laat ons juist nadenken over de wiskunde van die tijd en over de manier waarop het aangepakt werd.

Bovendien denk ik dat Euler niet belemmert werd door zijn definities in de wiskunde die hij uit wilde voeren. Naar mijn mening moet men zich pas zorgen maken als de wiskunde niet verder beoefend kan worden doordat de notaties achterblijven. Zolang de wiskunde beoefend kan worden die men graag wil, zoals bij Euler het geval wordt, is er naar mijn idee geen probleem.

Bibliografie

[1] Absil, J., 2007, *Nouvelle Biographie Nationale*, deel 9, Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique, le Groupe Graphique Chauveheid. Stavelot-Liège

[2] Euler L., Blanton J.D., 1988, *Introduction to Analysis of the Infinite*, volume 1, Springer-Verlag, New York.

[3] Euler L.,Blanton J.D., 1989, *Introduction to Analysis of the Infinite*, volume 2, Springer-Verlag, New York.

[4] Euler L., Blanton J.D., 2000, *Foundations of differential calculus*, New York, Springer-Verlag, New York.

[5] Blåsjö V.N.E., 2015, *Intuitive Infinitesimal Calculus*, via `intellectualmathematics.com`.

[6] Katz, V.J., 1998, *A History of Mathematics: An Introduction*, 2nd edition, Addison-Wesley.

[7] Bottazini U, 1986, *The higher calculus. A history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass*, Springer.

[8] Kleiner I., 2012, *Excursions in the History of Mathematics*, Birkhäuser Basel.

[9] Boyer C.B., 1951, The Foremost Textbook of Modern Times, *The American Mathematical Monthly*, volume 58, pag 223-226.

[10] Youschkevitch A.P., 1976, The concept of function up to the middle of the 19th century, *Archive for History of exact Sciences*, vol 16, pag 37-85.

[11] Lutzen J., 1983, Euler's Vision of a General Partial Differential Calculus for a Generalized Kind of Function, *Mathematics Magazine*, volume 56, pag 299-306.

[12] Calinger R., 1996, Leonhard Euler: The First St. Petersburg Years (1727–1741), *Historia Mathematica*, volume 23, pag 121-166.

[13] Halmos P., Givant S., 2009, *Introduction to Boolean algebras*, Springer-Verlag, New York.

[14] Struik D.J., 1969, *A Source Book in Mathematics, 1200-1800*, Harvard University Press, Cambridge, Massachussets.

[15] Taylor B., 1809, On the motion of a tense string, *The Philosophical Transactions of the Royal Society of London, from Their Commencement in 1665 to the Year 1800*, pag 14-18, London.

[16] Grattan-Guinness I., 1970, *The development of the foundations of mathematical analysis from Euler to Riemann*, MIT Press.

[17] Kleiner I., 1989, Evolution of the Function Concept: A Brief Survey, *The College Mathematics Journal*, volume 20, pag 282-300.

[18] Euler L., 1947, Sur le mouvement d'une corde qui au commencement n'a été ébranlée que dans une partie, *Commentationes mechanicae ad theoriam corporum flexibilium et elasticorum pertinentes.*

[19] Euler L., Truesdell C.A., 1980, *The Rational Mechanics Of Flexible Or Elastic Bodies 1638 - 1788: Introduction to Leonhardi Euleri Opera Omnia. Vol. X et XI.*

[20] Katz V.J., 1987, The calculus of the trigonometric functions, *Historia Mathematica*, volume 14, pag 311-324.

[21] D'Alembert, 1747, Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration, *Histoire de l'Académie Royale Berlin*, volume 3, pag 214-219. Geraadpleegd van `http://bibliothek.bbaw.de/bbaw/bibliothek-digital/digitalequellen/schriften/anzeige?band=02-hist/1747`.

[22] D'Alembert, 1750, Addition au mémoire sur la courbe que forme une corde tendue, mise en vibration, *Histoire de l'Académie Royale, Berlin*, volume 6, pag 355-360. Geraadpleegd van `http://bibliothek.bbaw.de/bbaw/bibliothek-digital/digitalequellen/schriften/anzeige?band=02-hist/1750`.

[23] Bland D. R., 1960, *Vibrating Strings*, Thee Free Press, Glencoe, Illinois.

[24] Ravetz J.R., 1961, *Vibrating strings and arbitrary functions*, Logic of personal knowledge, Essays presented to M. Polanyi on his 70th birthday, Londen, pag 71-88.

[25] Kline M., 1990, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, volume 2, pag 503-514, Oxford University Press.

[26] Körner T.W., 1989, *Fourier Analysis*, pag 324-326 , Cambridge University Press