Eindige Spiegelingsgroepen

Universiteit Utrecht

Bachelorscriptie

Rodney Bixerman
Begeleider: Johan van de Leur

12 juni 2017

Inhoudsopgave

1 Inleiding 2
2 Voorkennis 2
3 Spiegelingsgroepen 3
3.1 Spiegelingen 3
3.2 Root Systems 5
4 classificatie 18
4.1 Coxeter Grafen 18
4.2 Bilineaire vormen en positief definiete grafen 19

1 Inleiding

In deze scriptie behandelen we de theorie van eindige groepen die worden voortgebracht door spiegelingen in een Euclidische ruimte, de zogeheten spiegelingsgroepen. Een simpel voorbeeld van zo'n soort groep is D_4, de groep van symmetrieën van een vierkant (deze wordt voortgebracht door de spiegelingen in de diagonaal, en de spiegeling door de lijn tussen het midden van twee zijdes). Het blijkt dat deze meetkundige groepen ondergroepen zijn van de groep van orthogonale transformaties, en dat ze in verband kunnen worden gebracht met bepaalde abstracte Coxeter groepen, wat het eerste hoofdstuk van de scriptie zal behandelen. In het tweede hoofdstuk bestuderen we deze Coxeter groepen, en met behulp van lineaire algebra kunnen we hiermee alle eindige spiegelingsgroepen classificeren.

We zullen grotendeels de opbouw van *Reflection Groups and Coxeter Groups*[1] volgen, met hier en daar wat uitwijkingen naar opdrachten in het boek die interessant zijn, of stukjes uit *Finite Reflection Groups*[2].

2 Voorkennis

De benodigde voorkennis om de tekst te kunnen volgen is lineaire algebra (WISB111) en groepentheorie (WISB211). Voor het gemak zullen we de belangrijkste resultaten die we nodig hebben hier even op een rijtje zetten.
Omdat het zal blijken dat spiegellingen orthogonale afbeeldingen zijn, lijkt het een goed idee om de definite van een orthogonale afbeelding weer even op te frissen (Zie [3, p. 162]);

Definitie 1. Orthogonale afbeelding: Zij V een vectorruimte met inproduct. Een lineaire afbeelding $U : V \to V$ heet *orthogonale afbeelding* als $||U\mathbf{x}|| = ||\mathbf{x}||$ voor elke $\mathbf{x} \in V$.

Er zijn een paar eigenschappen van orthogonale afbeeldingen die we nodig zullen hebben in sommige bewijzen, dit zijn de volgende (voor de bewijzen, zie [3], hoofdstuk 10.3 en 10.4):

Definitie 2. Eigenschappen orthogonale afbeeldingen: Zij V een vectorruimte met inproduct en $U : V \to V$ een orthogonale afbeelding. Dan geldt:

1. $(U\mathbf{x}, U\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$
2. Als $\dim(V)$ eindig is, dan is U bijectief.

De laatste eigenschap van orthogonale afbeeldingen die we nodig zullen hebben is Stelling 10.4.1 uit [3], deze luidt als volgt:

Stelling 3. *Een orthogonale afbeelding* $U : V \to V$ *met* $\dim(V) = 2$ *is ofwel een draaing, ofwel een spiegeling. In het eerste geval geldt* $\det(U) = 1$*, in het tweede geval* $\det(U) = -1$

Merk op dat, gegeven een eindig dimensionale vectorruimte V, de orthogonale transformaties een groep vormen onder compositie. Immers, compositie van twee lengtebehoudende afbeeldingen is ook lengtebehoudend, de afbeeldingen zijn bijectief (en hebben dus een inverse, die natuurlijk ook lengtebehoudend is), en compositie is associatief.

Het laatste wat we nodig hebben is de definitie van een totale orde:

Definitie 4[1]. Totale Orde: Een totale ordening op een vectorruimte V is een transitieve relatie $<$ die aan de volgende axioma voldoet:

1. Voor elk paar $\lambda, \mu \in V$, geldt precies een van $\lambda < \mu$, $\lambda = \mu$, $\mu < \lambda$.
2. Voor alle λ, μ, ν, als $\mu < \nu$, dan $\lambda + \mu < \lambda + \nu$.
3. Als $\mu < \nu$ en c een reëel getal ongelijk nul, dan geldt $c\mu < c\nu$ als $c > 0$ en $c\nu < c\mu$ indien $c < 0$.

Gegeven een (eindig dimensionale) vectorruimte V kunnen we als volgt een totale ordening op V definiëren, de zogeheten lexicografische ordening: we kiezen eerst een basis $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ van V. We zeggen nu dat $\sum a_i\lambda_i < \sum b_i\lambda_i$ als voor de laagste index k zodat $a_k \neq b_k$ geldt $a_k < b_k$. Eigenschappen 1, 2 en 3 zijn gemakkelijk na te gaan, en zal niet worden gedaan.

3 Spiegelingsgroepen

We zullen in dit hoofdstuk (en ook in hoofdstuk 4) grotendeels de behandeling uit hoofdstuk 1 van *Reflection Groups and Coxeter Groups*[1] volgen. Waar we hiervan afwijken wordt dit vermeld.

3.1 Spiegelingen

Voordat we kunnen beginnen spiegelingsgroepen te begrijpen, moeten we eerst de spiegelingen die zo'n soort groep voortbrengen begrijpen. Een spiegeling in een vectorruimte V met inproduct (vanaf nu voor de rest van het hoofdstuk gewoon V) is een lineaire afbeelding s die een niet-nulvector α naar zijn tegenovergestelde $-\alpha$ stuurt en het hypervlak $H_\alpha = \{\lambda \in V | (\lambda, \alpha) = 0\}$ orthogonaal aan α puntsgewijs vasthoud, ofwel $s(\lambda) = \lambda$ voor alle $\lambda \in H_\alpha$. Voor het gemak schrijven we $s = s_\alpha$, zodat we weten om welke spiegeling het gaat zodra we met meerdere te maken hebben. Merk op dat meetkunding gezien, s_α de spiegeling in het vlak H_α is.

Er blijkt een simpele formule voor s_α te zijn: $s_\alpha(\lambda) = \lambda - \frac{2(\lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha$. De juistheid van de formule wordt in [1] aangetoond, alleen de afleiding ervan mist. Om inzicht te geven in waar de coefficient $\frac{2(\lambda,\alpha)}{\alpha,\alpha)}$ vandaan komt, zullen de de formule hier echter wel afleiden. De spiegeling s_α in het vlak H_α kunnen we als volgt beschrijven; als we een vector $\lambda \in V$ in H_α willen spiegelen, dan moeten we hiervoor λ opsplitsen in twee delen, een deel h dat in H_α ligt, en een deel β dat loodrecht op H_a staat, zodat $\lambda = h + \beta$. De formule van de spiegeling wordt dan gegeven door $s_\alpha(\lambda) = s_\alpha(h + \beta) = h - \beta = \lambda - 2\beta$. Omdat H_a het vlak orthogonaal aan α is, geldt dat β een scalair veelvoud van α is, dus dat $\beta = c\alpha$ voor een $c \in \mathbb{R}$, waaruit volgt dat $s_\alpha(\lambda) = \lambda - 2c\alpha$. Het enige wat resteert is de coëfficient c bepalen in de opslitsing die we hierboven hebben gemaakt. Merk op dat $\lambda - \beta = \lambda - c\alpha = h \in H_a$. Er geldt $(h, \alpha) = 0$, waaruit volgt dat $(\lambda - c\alpha, \alpha) = 0$, ofwel $(\lambda, \alpha) = c(\alpha, \alpha)$ en $c = \frac{(\lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$. Invullen geeft $s_\alpha(\lambda) = \lambda - \frac{2(\lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha$, de formule die we wouden afleiden.

Met oog op de formule kunnen we gelijk zien dat $s_\beta = s_{c\beta}$ voor alle $\beta \in V$ en $c \in \mathbb{R}$. Ook kunnen we het volgende lemma afleiden:

Lemma 5. *s_α is een orthogonale afbeelding, en heeft orde 2 in de groep van orthogonale transformaties.*

Bewijs. Zij $\lambda \in V$. We willen aantonen dat $||s_\alpha(\lambda)|| = ||\lambda||$, oftewel dat $(s_\alpha(\lambda), s_\alpha(\lambda)) = (\lambda, \lambda)$. Er geldt dat $(s_\alpha(\lambda), s_\alpha(\lambda)) = (\lambda - \frac{2(\lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha, \lambda - \frac{2(\lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha)$ wat wegens lineairiteit en symmetrie van het inproduct gelijk is aan $(\lambda, \lambda) - 4\frac{(\lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}(\lambda, \alpha) + 4\frac{(\lambda,\alpha)(\lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)(\alpha,\alpha)}(\alpha, \alpha)$. De laatste twee termen vallen tegen elkaar weg, waaruit volgt dat $(s_\alpha(\lambda), s_\alpha(\lambda)) = (\lambda, \lambda)$ en $||s_\alpha(\lambda)|| = ||\lambda||$. We concluderen dat s_α een orthogonale afbeelding is.

Voor het tweede deel van het bewijs moeten we aantonen dat $s_a^2(\lambda) = \lambda$. We kunnen dit gewoon uitschrijven, $s_\alpha^2(\lambda) = s_\alpha(s_\alpha(\lambda)) = s_\alpha(\lambda - \frac{2(\lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha) = s_\alpha(\lambda) - \frac{2(\lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}s_\alpha(\alpha) = \lambda - \frac{2(\lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha + \frac{2(\lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha = \lambda$. Bij het derde =-teken hebben we de lineairiteit van s_α gebruikt. $\square$

Uit dit lemma volgt dat een eindigdimensionale spiegelingsgroep een ondergroep is van de groep van orthogonale transormaties. We zullen in wat volgt een spiegelingsgroep in V aanduiden met de letter W. Indien de onderliggende vectorruimte uitmaakt zullen we dit aangeven. Tenzij dus anders vermeld wordt met V altijd de vectorruimte waarop de spiegelingsgroep werkt bedoeld.

3.2 Root Systems

Om de spiegelingsgroepen beter te kunnen bestuderen als abstracte groep, zullen we een iets concretere structuur gebruiken die de werking van de groep weergeeft.

We zullen eerst de structuur en wat eigenschappen introduceren, en vervolgens het verband met de spiegelingsgroepen duidelijk maken.

Definitie 6. Wortelsysteem: Zij Φ een eindige verzameling vectoren (geen nulvector) in V. We noemen Φ een wortelsysteem als het aan de volgende axioma voldoet:

1. $\Phi \cap \mathbb{R}\alpha = \{\alpha, -\alpha\}$ voor alle $\alpha \in \Phi$
2. $s_\alpha \Phi = \Phi$ voor alle $\alpha \in \Phi$

De tweede eigenschap houdt in dat Φ vast blijft onder spiegelingen, dus het verband met spiegelingsgroepen lijkt niet zo ver gezocht. De vectoren in Φ worden ook wortels genoemd.

Stel nu dat we een totale ordening op de ruimte V hebben. We kunnen in dit geval onderscheid maken tussen positieve en negatieve wortels. Een wortel α heet positief indien $0 < \alpha$, en negatief in het geval dat $\alpha < 0$. Merk op dat de optie $0 = \alpha$ nooit kan, omdat Φ geen nulvectoren bevat. Het volgt dat uit elk paar wortels, één van de wortels positief is, terwijl de andere wortel negatief is.

We kunnen nu alle positieve wortels in Φ nemen, en het volgende begrip definiëren:

Definitie 7. Positief systeem: een deelverzameling Π van Φ heet een positief systeem indien het alle positieve wortels uit Φ bevat. Dat wil zeggen $\Pi = \{\alpha \in V | 0 < \alpha\}$.

Merk op dat $-\Pi$ alle negatieve wortels uit Φ bevat. We noemen $-\Pi$ een negatief systeem.

Als we nu kijken naar het aantal elementen in Φ, kan dit vele malen groter zijn dan de dimensie van V. We kunnen dus mogelijk de wortels uit Φ schrijven als een lineaire combinatie van wortels uit een deelverzameling van Φ. We willen dit graag op een manier doen zodat alle wortels een positieve of negatieve lineaire combinatie zijn van deze deelverzameling. Een deelverzameling waarvoor dit geldt noemen we ook wel een simpel systeem:

Definitie 8. Simpel systeem: We noemen een deelverzameling Δ van Φ een simpel systeem als Δ een basis is voor het opspansel van Φ en elke wortel α in Φ een lineaire combinatie van elementen uit Δ is waarbij alle coëfficiënten hetzelfde teken hebben. Elementen in Δ noemen we simpele wortels.

Hoewel het duidelijk is dat positieve systemen bestaan (immers, we kunnen een totale ordening op V krijgen zoals in het voorbeeld), is het bestaan van een simpel systeem niet gelijk duidelijk. De eis dat alle coëfficiënten hetzelde teken moeten hebben lijkt nogal lastig om controle over te krijgen (hoewel het in twee dimensies relatief makkelijk te zien is). Gelukkig blijkt uit de volgende stelling dat we toch altijd een simpel systeem kunnen vinden, en dat bij elk simpel systeem een uniek positief systeem hoort (en andersom).

Stelling 9. *1. Als Δ een simpel systeem in Φ is, dan bestaat er een uniek positief systeem dat Δ bevat.*

2. Andersom, elk positief systeem Π in Φ bevat een uniek simpel systeem.

Bewijs. We bewijzen eerst 1: Zij Δ een simpel systeem in Φ. Stel eerst dat er een positief systeem Π is dat Δ bevat. Dan geldt voor elke wortel α in Π dat α te schrijven is als lineaire combinatie van elementen uit Δ. Omdat de elementen uit Δ positief zijn, moeten de coëfficiënten wel allemaal positief zijn. Andersom, elke element dat een positieve lineaire combinatie van elementen uit Δ is, is positief en zit dus in Π. Π is dus precies de verzameling van positieve lineaire combinaties van Δ uit Φ en is dus uniek bepaald.

Om het bestaan van een positief systeem Π aan te tonen, definiëren we een totale ordening op V door Δ uit te breiden tot een basis van het opspansel van V, en de lexicografische ordening te nemen. Het is nu duidelijk dat Δ bevat is in de verzameling Π van positieve elementen.

Het bewijs dat elk positief systeem een uniek simpel systeem bevat is iets lastiger. Stel weer eerst dat we een simpel systeem Δ in Π hebben. Dan is Δ de verzameling van precies die wortels in Π die niet te schrijven zijn als lineaire combinatie van twee of meer elementen uit Π met strikt positieve coefficienten (het bewijs hiervan komt na het bewijs van deze stelling). Bijgevolg is Δ uniek.

Om het bestaan van een simpel systeem aan te tonen gaan we als volgt te werk: we kiezen eerst een zo klein mogelijke deelverzameling Δ van Π zodanig dat elke wortel in Π een niet-negatieve lineaire combinatie van elementen uit Δ is (dit is te vinden, want $\Delta = \Phi$ is in ieder geval een verzameling die hieraan voldoet). Het enige wat resteert om te bewijzen is dat Δ bestaat uit lineair onafhankelijke vectoren.

Het bewijs hiervan rust op de volgende eigenschap: voor alle $\alpha \neq \beta$ in Δ geldt dat $(\alpha, \beta) \leq 0$. Stel dat voor een paar α, β deze eigenschap niet geldt. Uit de formule voor spiegeling volgt dat $s_\alpha \beta = \beta - c\alpha$, waar $c = 2\frac{(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} > 0$ (want als de eigenschap niet geldt, is $(\beta, \alpha) > 0$). Omdat nu wegens eigenschap 2 van een wortelsysteem geldt dat $s_\alpha\beta$ een element van Φ is, geldt dat of $s_\alpha\beta$ in Π zit, of dat $-s_\alpha\beta$ in Π zit. Stel het eerste geval (dus $s_\alpha\beta$ is positief). We schrijven nu $s_\alpha\beta = \beta - c\alpha = \sum_{\gamma\in\Delta} c_\gamma\gamma$, waarin $c_\gamma \geq 0$ wegens de aanname dat $s_\alpha\beta$ positief is.

Als $c_\beta < 1$ dan volgt dat $\beta - c\alpha = c_\beta\beta + \sum_{\gamma\in\Delta\backslash\beta} c_\gamma\gamma$. oftewel, $(1-c_\beta)\beta = c\alpha + \sum_{\gamma\in\Delta\backslash\beta} c_\gamma\gamma$ en β is een positieve lineaire combinatie van elementen uit $\Delta\backslash\beta$ (deel beide kanten door $1 - c_\beta > 0$). We kunnen dus β schrijven als lineaire combinate van vectoren in $\Delta\backslash\{\beta\}$, wat in tegenspraak is de lineaire onafhankelijkheid van Δ (want Δ is een basis). Als nu $c_\beta \geq 1$ dan volgt $0 = c\alpha + (c_\beta - 1)\beta + \sum_{\gamma\in\Delta\backslash\beta} c_\gamma\gamma$, dit is een positieve lineaire combinatie met $c > 0$, dus dit kan niet gelijk aan 0 zijn. Tegenspraak. Dus $s_\alpha\beta$ kan niet in Π zitten.

Stel nu dat $-s_\alpha\beta$ in Π zit. Schrijf $-s_\alpha\beta = c\alpha - \beta = \sum_{\gamma\in\Delta} c_\gamma\gamma$, wederom met $c_\gamma \geq 0$. We onderscheiden weer twee gevallen: het eerste geval is dat $c_\alpha < c$. Hieruit volgt $(c - c_\alpha)\alpha = \beta + \sum_{\gamma\in\Delta\backslash\alpha} c_\gamma\gamma$. We kunnen nu α schrijven als lineaire combinatie uit $\Delta\backslash\{\alpha\}$, wat in tegenspraak met de lineaire onafhankelijkheid van Δ is. In het geval dat $c_\alpha \geq c$, is $0 = \beta + (c_\alpha - c)\alpha + \sum_{\gamma\in\Delta\backslash\alpha} c_\gamma\gamma$. De rechterkant kan wederom niet 0 zijn, dus hebben we een tegenspraak. Dus ook $-s_\alpha\beta$ kan niet in Π zitten. Dit is absurd, dus moet de eigenschap wel gelden.

Nu we deze eigenschap hebben aangetoond, kunnen we het bewijs van de stelling voltooien. Stel dat onze verzameling Δ niet lineair onafhankelijk is. Dan is $\sum_{\alpha\in\Delta} c_\alpha\alpha = 0$, met niet alle $c_\alpha = 0$. Haal nu alle termen met een negatieve coëfficient naar rechts, waaruit de volgende gelijkheid volgt: $\sum c_\beta\beta = \sum c_\gamma\gamma$. De sommen links en rechts worden over disjuncte deelverzameling van Δ genomen, en alle coëfficienten zijn strikt positief. Als we nu met σ de som aanduiden, dan geldt $0 < \sigma$, en dus $0 \leq (\sigma, \sigma) = (\sum c_\beta\beta, \sum c_\gamma\gamma) \leq 0$ volgens de hierboven bewezen eigenschap. Dus $\sigma = 0$, tegenspraak. De verzameling Δ moet dus wel lineair onafhankelijk zijn. $\square$

We zullen nu nog aantonen dat de karakterisatie die we voor het tweede deel van het bewijs gebruikten correct is. Zij Δ een simpel systeem in een positief systeem Π. We willen aantonen dat Δ precies de verzameling is van elementen uit Π die niet geschreven kunnen worden als lineaire combinatie (met strikt positieve coëfficiënten) van twee of meer elementen uit Π. Als een wortel α in Π niet te schrijven is als lineaire combinatie van twee of meer elementen in Π, dan moet het wel in elk simpel systeem zitten. Immers, α moet te schrijven zijn als positieve lineaire combinatie van simpele wortels, en dit kan niet als twee of meer elementen, dus moet het wel een simpele wortel zijn.

Andersom, stel dat α een simpele wortel is. Stel verder dat α wel te schrijven zou zijn als lineaire combinatie van elementen uit Π, dan hebben we $\alpha = \sum c_\gamma \gamma$, waar de som genomen wordt over een deelverzameling van Π met minstens twee elementen, en $c_\gamma > 0$ voor alle γ. We kunnen nu elke γ schrijven als lineaire combinatie van simpele wortels, zodat $\alpha = \sum c_\delta \delta$, waar de som over een deelverzameling van Δ wordt genomen, en wederom $c_\delta > 0$. We kijken nu naar de coëfficiënt van α in de som rechts. Indien α niet in de som rechts staat, is α te schrijven als lineaire combinatie van elementen uit $\Delta\backslash\{\alpha\}$, wat in tegenspraak met de lineaire onafhankelijkheid is.

Als de coëfficiënt kleiner dan 1 is, $c_\alpha < 1$, dan kunnen we door $c_\alpha \alpha$ naar links te halen, en vervolgens te delen door $1 - c_\alpha$, de wortel α schrijven als combinatie simpele wortels zonder α, dus hebben we wederom weer tegenspraak met de lineaire onafhankelijkheid van Δ.

Als de coëfficiënt groter dan 1 is, $c_\alpha > 1$, dan kunnen we de α links naar rechts halen, en dan hebben we een rechts een lineaire combinatie van simpele wortels, waarin in ieder geval de coëfficiënt van α groter dan 0 is. Wegens lineaire onafhankelijkheid van simpele wortels kan dit nooit gelijk aan 0 zijn, dus hebben we weer een tegenspraak.

De enige optie die overblijft is $c_\alpha = 1$. In dit geval moeten de andere coëfficiënten wel 0 zijn (streep α weg aan beide kanten, en dan volgt het uit lineaire onafhankelijkheid). De elementen δ in de originele som moeten dus wel scalaire veelvouden van α zijn, en hiervan is er maar één in Π. Dit is in tegenspraak met de aanname dat we α wel konden schrijven als lineaire combinatie van minstens twee elementen uit Π. We kunnen dit dus niet, waaruit volgt dat simpele wortels niet te schrijven zijn als lineaire combinatie van minstens twee elementen in Π. Hiermee is de karakterisatie bewezen.

Merk op dat omdat bij elk simpel systeem een uniek positief systeem hoort, en bij elk positief systeem een uniek simpel systeem, de eigenschap (uit het bovenstaande bewijs) dat voor elk paar α en β van simpele wortels geldt $(\alpha, \beta) \leq 0$, voor elke simpel systeem geldt.

Stel nu dat we een spiegelingsgroep W hebben. Het blijkt dat we een wortelsysteem Φ kunnen vinden, zodanig dat de groep voortgebracht door de spiegelingen in Φ gelijk is aan W. We hebben hier het volgende lemma voor nodig:

Lemma 10. *Zij W een spiegelingsgroep, T een orthogonale transformatie en $\alpha \neq 0$ een vector in V. Dan geldt dat $s_{T\alpha} = Ts_\alpha T^{-1}$. In het bijzonder geldt dat als $T \in W$, $s_{T\alpha}$ een element van W is wanneer s_α dat is.*

Bewijs. We tonen eerst aan dat $Ts_\alpha T^{-1} = s_{T\alpha}$. Zij $\lambda \in V$. Er geldt $Ts_\alpha T^{-1}\lambda = T\left(s_\alpha\left(T^{-1}\lambda\right)\right) = T\left(T^{-1}\lambda - \frac{2(T^{-1}\lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha\right) = \lambda - \frac{2(T^{-1}\lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}T\alpha$. Omdat T een orthogonale afbeelding is, volgt uit de eerste eigenschap van orthogonale afbeeldingen dat $(T^{-1}\lambda, \alpha) = (\lambda, T\alpha)$ en $(\alpha, \alpha) = (T\alpha, T\alpha)$. Invullen geeft $Ts_\alpha T^{-1}\lambda = \lambda - \frac{2(\lambda,T\alpha)}{(T\alpha,T\alpha)}T\alpha = s_{T\alpha}$

In het bijzonder, als $T \in W$, en s_α een spiegeling in W is, dan is $s_{T\alpha} = Ts_\alpha T^{-1}$ ook een spiegeling in W. □

We kijken nu naar de verzameling van alle lijnen die door spiegelingen in W gegeven worden, $L = \{\mathbb{R}\alpha | s_\alpha \in W\}$. Uit Lemma 10 volgt dat W de lijnen onderling permuteert via $w(\mathbb{R}\alpha) = \mathbb{R}(w\alpha)$. We definiëren nu Φ als de verzameling van elementen van lengte 1 van elk van de lijnen $\mathbb{R}\alpha$ waarvoor geldt $s_\alpha \in W$. Dit voldoet duidelijk aan eigenschap 1 van wortelsystemen, en uit Lemma 10 volgt dat deze verzameling ook aan eigenschap 2 voldoet.

Andersom brengt ook elk wortelsysteem een eindige spiegelingsgroep voort. Als Φ een wortelsysteem is, dan is de groep W voortgebracht door alle s_α met $\alpha \in \Phi$ duidelijk een spiegelingsgroep. Het enige wat we moeten bewijzen is dat deze groep eindig is. Als we de elementen van het wortelsysteem nummeren, dan kunnen we een homomorfisme van de groep W naar de symmetrische groep maken. We weten dat elk element in de groep het orthogonale complement van het opspansel van Φ vasthoudt, immers voor een vector v in $(\text{span}\Phi)^\perp$ geldt voor alle $\alpha \in \Phi$ dat $(v, \alpha) = 0$, dus $v \in H_\alpha$ en v wordt dus vastgehouden door de spiegeling s_α. Omdat dit alle voortbrengers zijn houdt de hele groep v vast. Dus het hele orthogonale complement wordt puntsgewijs vastgehouden. Stel nu verder dat een w uit de groep W alle wortels in Φ vasthoudt. Dit element w houdt dan ook het hele opspansel van Φ vast, wat in combinatie met de opmerking hierboven betekent dat w de hele vectorruimte V vasthoudt. Alleen $w = 1$ kan dus alle elementen op dezelde plaats houden, waaruit volgt dat dit homomorfisme injectief is (want zijn kern is triviaal). De groep W moet nu wel eindig zijn omdat W isomorf aan een ondergroep van de symmetrische groep is.

Omdat voor elke spiegelingsgroep een wortelsysteem te vinden is en andersom, kunnen we spiegelingsgroepen bestuderen door naar de wortelsystemen te kijken.

Vanaf nu zullen we spiegelingsgroepen W bestuderen samen met het bijbehorende wortelsysteem Φ. We zullen eerst kijken naar de werking van W op simpele systemen.

Zij w een element van W. Als Δ een simpel systeem is, met positief systeem Π, dan is natuurlijk $w\Delta$ ook een simpel systeem, met positief systeem $w\Pi$. Andersom blijkt ook te gelden dat elk voor paar positieve systemen een w in W te vinden is zodat $w\Pi_1 = \Pi_2$. We vatten dit samen in de volgende stelling:

Stelling 11. *Zij Π_1, Π_2 twee positieve systemen in Φ. Er is een element w in W waarvoor geldt dat $w\Pi_1 = \Pi_2$.*

Om de stelling te bewijzen kijken we eerst naar wat er gebeurt als w een spiegeling is.

Lemma 12. *Zij Δ een simpel systeem, met bijbehorend positief systeem Π. Als α en simpele wortel is, geldt $s_a\left(\Pi \backslash \alpha\right) = \Pi \backslash \alpha$.*

Bewijs. Zij β een element van $\Pi \backslash \alpha$. We schrijven β als combinatie van simpele wortels, $\beta = \sum_{\gamma \in \Delta} c_\gamma \gamma$, met $c_\gamma \geq 0$. Omdat $\beta \neq \alpha$, is in ieder geval voor een $\gamma \neq \alpha$ de coëfficiënt $c_\gamma > 0$. Nu geldt dat $s_\alpha \beta = \beta - c\alpha$ (met $c = 2(\beta, \alpha)/(\alpha, \alpha)$). De coëfficiënt van γ in deze uitdrukking is ook c_γ. Omdat alle coëfficiënten hetzelfde teken hebben (want Δ is een simpel systeem), zijn alle coëfficiënten dus niet-negatief, waaruit volgt dat $s_\alpha \beta$ positief is, dus een element uit Π. Merk op dat $s_a \beta \neq \alpha$, anders zou $\beta = s_\alpha s_\alpha \beta = -\alpha$ zijn, en $-\alpha$ is niet een element van Π. Omdat s_a bijectief (orthogonale afbeelding) is, volgt hieruit dat $\Pi \backslash a$ injectief op zichzelf wordt afgebeeld, wat precies het lemma is. □

We kunnen met behulp van Lemma 12 het bewijs van Stelling 11 voltooien:

Bewijs Stelling 11. Zij Π_1 en Π_2 twee positieve system in het wortelsysteem Φ, we gebruiken inductie naar $r = \#(\Pi_1 \cap -\Pi_2)$, wat het aantal elementen dat ze verschillen weergeeft (als Π_1 en Π_2 volledig disjunct zijn, dan is r het aantal elementen in $\Pi - 1$, en als $\Pi_1 = \Pi_2$, dan is r nul, want de doorsnede is dan leeg). Stel $r = 0$, dan is zoals als opgemerkt $\Pi_1 = \Pi_2$, en kiezen we $w = 1$. Als $r > 0$ (dus $\Pi_1 \neq \Pi_2$), dan is het simpele systeem Δ_1 van Π_1 niet volledig bevat in Π_2, anders zou Π_1 bevat zijn in Π_2 en dan wegens de gelijke kardinaliteit zou gelijkheid gelden. Kies nu een α uit Δ_1 dat niet bevat is in Π_2. In dit geval bevat de doorsnede $s_\alpha \Pi_1 \cap -\Pi_2$ een element minder dan de doorsnede $\Pi_1 \cap -\Pi_2$, want α zit niet meer in de eerste doorsnede en de rest blijft gelijk wegens het voorgaande lemma. Dus $\#(s_\alpha\Pi_1 \cap -\Pi_2) = r-1$. We kunnen nu weer hetzelfde inductief toepassen op $s_\alpha\Pi_1$ en Π_2, totdat $r = 0$ en we een element w hebben zodat $w\Pi_1 = \Pi_2$. □

Verder blijkt dat, als we een spiegelingsgroep W hebben met bijbehorend wortelsysteem Φ, de spiegelingen in een simpel systeem de groep W voortbrengen:

Stelling 13. *Zij W een spiegelingsgroep met wortelsysteem Φ. Kies een simpel systeem Δ van Φ, dan geldt dat W wordt voortgebracht door de spiegelingen s_α, voor $\alpha \in \Delta$.*

Bewijs. Zij W een spiegelingsgroep, Δ een simpel systeem voor het bijbehorende wortelsysteem Φ. Zij W' de ondergroep van W voortgebracht door de spiegelingen s_α voor $\alpha \in \Delta$. We laten zien dat $W' = W$.

Kies β een wortel uit het positieve systeem Π behorend bij Δ. We kijken naar de doorsnede $W'\beta \cap \Pi$. Deze doorsnede is niet leeg, want de doorsnede bevat minstens β. Kies nu een element γ waarvan de som van de coëfficiënten (in de uitdrukking van γ in simpele wortels uit Δ) minimaal is. We beweren dat γ een simpele wortel is. Schrijf $\gamma = \sum_{\alpha\in\Delta} c_\alpha\alpha$. Er geldt dat $0 < (\gamma,\gamma) = \sum_{\alpha\in\Delta} c_\alpha(\gamma,\alpha)$, dus er is een α waarvoor $(\gamma,\alpha) > 0$. Als nu $\gamma = \alpha$, dan zijn we klaar. Zo niet, dan is $s_\alpha\gamma$ een element van $\Pi\backslash\{\alpha\}$ wegens stelling 11. Omdat $s_\alpha\gamma = \gamma - c\alpha$, is de som van de coëfficiënten kleiner dan de som van de coëfficiënten van γ. Omdat $s_\alpha\gamma$ ook een element van $W'\beta$ is, zit het in de doorsnede. Dit is in tegenspraak met de aanname dat we γ met minimale coëfficiënten kozen. Dus γ kan niet ongelijk aan α zijn.

Bekijk nu $W'\Delta$. We beweren dat $W'\Delta = \Phi$. Uit het deel hierboven volgt dat voor elke β uit Φ er een w in W' zit zodat $w\beta = \alpha$ een simpele wortel is. Dit komt overeen met $\beta = w^{-1}\alpha$, dus β zit in $W'\Delta$. Omdat β een willekeurige positieve wortel was, geldt dat heel Π bevat is in $W'\Delta$. Als β niet positief is, dus negatief, dan zit $-\beta$ in $W'\Delta$, en dus is $-\beta = w\alpha$ voor een bepaalde w uit W en α uit Δ. Hieruit volgt $\beta = (ws_a)\alpha$, dus ook negatieve wortels zitten in $W'\Delta$. Dus heel Φ zit in $W'\Delta$.

De laatste stap is om een willekeurige voortbrenger s_β van W te pakken. We kunnen nu $\beta = w\alpha$ schrijven, en uit Lemma 10 volgt nu s_β een element van W' is, dus $W' = W$. □

We hebben nu een minimale set voortbrengers voor de spiegelingsgroep W gevonden, als we ook de relaties tussen deze voortbrengers weten, kunnen we W volledig beschrijven. Het blijkt dat alle relaties volgen uit de relaties $(s_\alpha s_\beta)^{m(s_\alpha,s_\beta)} = 1$, waar $m(s_\alpha,s_\beta)$ de orde van $s_\alpha s_\beta$ in W is. Merk op dat in het speciale geval dat $s_\alpha = s_\beta$, er geldt dat $s_\alpha s_\beta = s_\alpha^2 = 1$ en dus $m(s_\alpha, s_\beta) = 1$. Dit leidt tot de volgende stelling:

Stelling 14. *Zij Δ een simpel systeem in het wortelsysteem Φ. Dan wordt de bijbehorende spiegelingsgroep W voortgebracht door de verzameling $S := \{s_\alpha | \alpha \in \Delta\}$, de spiegelingen door de hypervlakken orthogonaal aan de simpele wortels. Verder is de vermenigvuldiging in W volledig vastgelegd door de relaties $(s_\alpha s_\beta)^{m(s_\alpha, s_\beta)} = 1$ voor elke paar $s_\alpha, s_\beta \in S$.*

Een groep W en een verzameling voortbrengers S die op deze manier kan worden weergegeven heet een **Coxeter Systeem**, dat we zullen noteren met (W, S). De groep W wordt ook wel een **Coxeter groep** genoemd.

Het bewijs van deze stelling vereist iets meer werk dan de voorgaande bewijzen, maar zodra we de stelling bewezen hebben zijn we bijna in staat om alle spiegelingsgroepen te classificeren.

Om te beginnen zullen we de **lengte** van een element w uit W definiëren. Omdat W voortgebracht wordt door de spiegelingen in een simpel systeem Δ, kunnen we elke w uit W schrijven als $w = s_1 \cdots s_r$, waarbij elke s_i een spiegeling s_α is met $\alpha \in \Delta$. De **lengte** van w is nu de kleinste r waarvoor we zo'n uitdrukking hebben. In het geval dat $w = 1$ zeggen we dat w lengte 0 heeft. We noteren de lengte van w met $l(w)$ (ook wel de **lengtefunctie** genoemd), en een uitdrukking voor w met deze lengte noemen we gereduceerd.

We kunnen al een paar dingen over de lengtefunctie zeggen. Het eerste is dat $l(w) = 1$ dan en slechts dan als $w = s_\alpha$ voor een $\alpha \in \Delta$. Verder is $l(w) = l(w^{-1})$, en is de determinant van w als orthogonale transformatie gelijk aan $(-1)^{l(w)}$ (want de determinant van een spiegeling is -1, en de determinant is multiplicatief). Verder geldt, voor w, w' elementen uit W dat $(-1)^{l(ww')} = \det(ww') = \det(w)\det(w') = (-1)^{l(w)}(-1)^{l(w')} = (-1)^{l(w)+l(w')}$, dus $l(ww')$ en $l(w) + l(w')$ hebben dezelfde pariteit. In het bijzonder volgt hieruit dat voor een w, s_α in W, met α een simpele wortel, dat de pariteit van $l(s_\alpha w)$ (merk op dat het product net zo goed andersom genomen kon zijn) gelijk is aan de pariteit van $l(s_a) + l(w) = l(w) + 1$. De lengte van $s_\alpha w$ is dus $l(w) + 1$, of $l(w) - 1$, immers, langer dan $l(w) + 1$ kan niet, want we hebben een uitdrukking van lengte $l(w) + 1$, en korter dan $l(w) - 1$ kan ook niet, want dan zou $s_\alpha w = s_1 \cdots s_r$ met $r < l(w) - 1$, en hebben we de uitdrukking $w = s_\alpha s_1 \cdots s_r$ met lengte kleiner dan $l(w)$, tegenspraak.

Een andere functie die interessant is, is het aantal positieve wortels dat een element w negatief maakt. We definiëren $\Pi(w) := \Pi \cap w^{-1}(-\Pi)$, en $n(w) := \#\{\Pi(w)\}$. Net als bij de lengtefunctie geldt dat $n(w) = n(w^{-1})$. Merk eerst op dat geldt $\Pi \cap w^{-1}(-\Pi) = w^{-1}(w\Pi \cap -\Pi) = -w^{-1}(\Pi \cap w(-\Pi))$.

De eerste gelijkheid is redelijk voor de hand liggend, dus zullen we deze niet bewijzen.

De tweede gelijkheid is iets lastiger, dus zullen we deze wel bewijzen. We bewijzen eerst de inclusie $w^{-1}(w\Pi \cap -\Pi) \subseteq -w^{-1}(\Pi \cap w(-\Pi))$. Zij α een element van $w^{-1}(w\Pi \cap -\Pi)$. Dan is $\alpha = w^{-1}\beta$ voor een β in $w\Pi \cap -\Pi$. Omdat $\beta \in w\Pi$, is $\beta = w\gamma$ voor een $\gamma \in \Pi$. Nu geldt dat $\alpha = w^{-1}\beta = w^{-1}(- - \beta) = -w^{-1}(-\beta) = -w^{-1}(-w\gamma) = -w^{-1}(w(-\gamma))$. Merk op dat $\gamma \in \Pi$, dus geldt dat $-\gamma \in -\Pi$ en dus dat $w(-\gamma) \in w(-\Pi)$. Verder is $w(-\gamma) = -\beta \in \Pi$ (want $\beta \in -\Pi$). Dus $w(-\gamma)$ is bevat in de doorsnede $\Pi \cap w(-\Pi)$, dus $\alpha = -w^{-1}(w(-\gamma))$ is bevat in $-w^{-1}(\Pi \cap w(-\Pi))$.

Voor de omgekeerde inclusie, $w^{-1}(w\Pi \cap -\Pi) \supseteq -w^{-1}(\Pi \cap w(-\Pi))$, stel dat α een element is van $-w^{-1}(\Pi \cap w(-\Pi))$. Dan is $\alpha = -w^{-1}\beta$, met β een element uit $\Pi \cap w(-\Pi)$. Omdat $\beta \in w(-\Pi)$ is $\beta = w(-\gamma)$ voor een $\gamma \in \Pi$. Hieruit volgt dat $\alpha = -w^{-1}(\beta) = -w^{-1}(w(-\gamma)) = w^{-1}(w\gamma)$. Merk op dat $w\gamma = -w(-\gamma) \in -\Pi$ (want $w(-\gamma) = \beta \in \Pi$). Natuurlijk is ook $w\gamma$ een element van $w\Pi$, en dus zit $w\gamma$ in de doorsnede $w\Pi \cap -\Pi$. Dus $\alpha = w^{-1}w\gamma$ zit in $w^{-1}(w\Pi \cap -\Pi)$. Dus $w^{-1}(w\Pi \cap -\Pi) = -w^{-1}(\Pi \cap w(-\Pi))$

Hieruit volgt dat de verzamelingen $\Pi \cap w(-\Pi)$ en $\Pi \cap w^{-1}(-\Pi)$ gelijke kardinaliteit hebben, dus is $n(w) = n(w^{-1})$. In tegenstelling tot de lengtefunctie, kunnen we voor de functie n wel precies zeggen wat er met $n(w)$ gebeurt als we w links of rechts vermenigvuldigen met een simpele spiegeling. We vatten dit samen in het volgende lemma;

Lemma 15. *Zij $\alpha \in \Delta$, $w \in W$. Dan geldt;*

1. *Als $w\alpha$ positief is ($w\alpha > 0$), dan is $n(ws_\alpha) = n(w) + 1$*
2. *Als $w\alpha$ negatief is ($w\alpha < 0$), dan is $n(ws_\alpha) = n(w) - 1$*
3. *Als $w^{-1}\alpha$ positief is, dan is $n(s_\alpha w) = n(w) + 1$*
4. *Als $w^{-1}\alpha$ negatief is, dan is $n(s_\alpha w) = n(w) - 1$*

Bewijs. We bewijzen eerst 1): We zullen aantonen dat $\Pi(ws_\alpha)$ de disjuncte vereniging is van $s_\alpha\Pi(w)$ en $\{\alpha\}$. Omdat de kardinaliteit van $s_\alpha\Pi(w)$ gelijk is aan de kardinaliteit van $\Pi(w)$ impliceert dit dat $n(ws_\alpha) = n(w) + 1$. Merk op dat als $w\alpha$ positief is, $-w\alpha$ een negatieve wortel is. Dit betekent dat $-\alpha = w^{-1}(-w\alpha)$ een element van $w^{-1}(-\Pi)$ is, en dus $\alpha \in s_\alpha w^{-1}(-\Pi)$. Omdat α ook een positieve wortel is, zit α in $\Pi(ws_\alpha) = \Pi \cap (ws_\alpha)^{-1}(-\Pi) = \Pi \cap s_\alpha w^{-1}(-\Pi)$.

Nu we weten dat α in $\Pi(ws_\alpha)$ zit, kunnen we $\Pi(ws_\alpha) = \Pi \cap s_\alpha w^{-1}(-\Pi)$ schrijven als de disjuncte vereniging van $\Pi\backslash\{\alpha\} \cap s_\alpha w^{-1}(-\Pi)$ en $\{\alpha\}$. Met oog op Lemma 12, kunnen we dit schrijven als de disjuncte vereniging van $s_\alpha(\Pi\backslash\{\alpha\}) \cap s_\alpha w^{-1}(-\Pi) = s_\alpha(\Pi\backslash\{\alpha\} \cap w^{-1}(-\Pi))$ en $\{\alpha\}$. Merk nu op dat α niet in $w^{-1}(-\Pi)$ kan zitten, omdat anders α te schrijven zou zijn als $\alpha = w^{-1}\gamma$ met γ een negatieve wortel. Dit zou impliceren dat $w\alpha$ negatief zou zijn, wat in tegenspraak is met de aanname $w\alpha > 0$.

Het kan dus geen kwaad om in de bovenstaande doorsnede $\Pi\backslash\{\alpha\}$ te vervangen door Π. We kunnen dus $\Pi(ws_\alpha)$ schrijven als de disjuncte vereniging van $s_\alpha(\Pi \cap w^{-1}(-\Pi)) = s_\alpha\Pi(w)$ en $\{\alpha\}$. Hiermee is 1) bewezen.

Voor het bewijs van 2) merken we op dat als $w\alpha < 0$, α niet in $\Pi(ws_\alpha)$ zit, dit zou immers impliceren dat α in $s_\alpha w^{-1}(-\Pi)$ zit, waaruit volgt dat $-\alpha$ in $w^{-1}(-\Pi)$ zit, dus $-\alpha = w^{-1}(-\gamma)$ voor een positieve wortel γ. Een beetje herschrijven geeft $w\alpha = \gamma$, dus $w\alpha$ is positief, tegenspraak. De wortel α zit dus niet in $\Pi(ws_\alpha)$. De stappen in het bewijs van 1) kunnen we nu grotendeels overnemen (echter hoeven we niet de steeds de vereninging met α te nemen, want deze zit er niet in), tot de stap waar $\Pi(ws_\alpha) = s_\alpha(\Pi\backslash\{\alpha\} \cap w^{-1}(-\Pi))$. Omdat als $w\alpha < 0$ er wel geldt dat α in $w^{-1}(-\Pi)$ zit, kunnen we $\Pi\backslash\{\alpha\}$ niet zomaar vervangen door Π. We compenseren hiervoor door α er weer uit te halen, en krijgen dat $\Pi(ws_\alpha) = s_\alpha((\Pi \cap w^{-1}(-\Pi))\backslash\{\alpha\}) = s_a(\Pi(w)\backslash\{\alpha\})$. Hieruit volgt dat de kardinaliteit van $\Pi(ws_\alpha)$ gelijk is aan de kardinaliteit van $\Pi(w) - 1$, dus geldt $n(ws_\alpha) = n(w) - 1$.

Het bewijzen van 3) en 4) is nu redelijk eenvoudig. Als $w^{-1}\alpha > 0$, dan is $n(s_\alpha w) = n(w^{-1}s_\alpha) = n(w^{-1}) + 1 = n(w) + 1$ wegens 1), en als $w^{-1}\alpha < 0$ volgt uit 2) dat $n(s_\alpha w) = n(w) - 1$. $\square$

Een gevolg van Lemma 15 is dat $n(w) \leq l(w)$. Immers, als we w schrijven als een gereduceerd product van spiegelingen $s_1 \cdots s_{l(w)}$, dan kunnen we $n(w)$ berekenen door te beginnen met $n(1) = 0$, en steeds rechts te vermeningvuldigen (beginnend met s_1) totdat we $n(s_1 \cdots s_{l(w)}) = n(w)$ hebben berekend. Omdat in elke stap de waarde maar maximaal met 1 omhoog kan, geldt dat $n(w) \leq l(w)$.

Het blijkt verder ook dat de functie n alle eerder genoemde eigenschapppen van de lengtefunctie bezit. Het eerste wat we opmerken is dat $n(w)$ dezelfde pariteit heet als $l(w)$. Uit Lemma 15 volgt dat $n(w)$, als we de uitdrukking opbouwen zoals hierboven, per stap 1 omhoog of 1 omlaag gaat. Stel dat de uitdrukking a keer met 1 omhoog gaat, en b keer met 1 omlaag, dan is $n(w) = a - b$. Natuurlijk geldt $a + b = l(w)$. Stel nu dat $l(w)$ even is, dus w heeft even lengte. Dan zijn a en b allebei even of allebei oneven. In beide gevallen is $n(w) = a - b$ even, dus $n(w)$ en $l(w)$ hebben dezelfde pariteit. Als $l(w)$ oneven, dan is of a even en b oneven, of andersom. Wederom is in beide gevallen $n(w)$ oneven, dus ook dan heeft $n(w)$ dezelfde pariteit als $l(w)$. Kortom, $n(w)$ en $l(w)$ hebben dezelfde pariteit.

Uit de gelijke pariteit volgt gelijk dat $\det(w) = (-1)^{l(w)} = (-1)^{n(w)}$. Verder geldt als $w, w' \in W$ dat $n(ww') \leq n(w) + n(w')$. Immers, stel dat w' een aantal positieve wortels negatief maakt. Dan wordt door vervolgens w uit te voeren $n(w)$ van deze nieuwe positieve wortels negatief gemaakt. Andersom worden ook $n(w)$ negatieve wortels weer positief gemaakt. Als geen van de wortels die door w' negatief zijn gemaakt door w weer positief worden gemaakt, is $n(ww') = n(w) + n(w')$, indien wel, dan worden er $n(ww') = n(w) + n(w') - r$ wortels negatief gemaakt, waarin r het aantal wortels is, die door w' negatief zijn gemaakt, dat w positief maakt. In dit geval is $n(ww') < n(w) + n(w')$. Als we dit samen nemen krijgen we $n(ww') \leq n(w) + n(w')$. Als laatste hebben de dat de pariteit van $n(ww')$ gelijk is aan de pariteit van $l(ww')$, wat weer gelijk is aan de pariteit van $l(w) + l(w')$, dus aan de pariteit van $n(w) + n(w')$.

De functie n bezit dus alle genoemde eigenschappen van de lengtefunctie.

We zullen nu een stelling bewijzen die aangeeft hoe we een uitdrukking voor w korter kunnen maken, indien de uitdrukking niet minimale lengte heeft. Dit resultaat zullen we ook kunnen gebruiken om aan te tonen dat de lengtefunctie l en de functie n hetzelfde zijn.

Stelling 16. *Zij W een spiegelingsgroep, met bijbehorend wortelsysteem Φ. Kies een simpel systeem Δ voor Φ. Zij nu w een element uit de spiegelingsgroep en $w = s_1 \cdots s_r$ een uitdrukking voor w waarin de $s_i = s_{\alpha_i}$ voor een zekere $\alpha_i \in \Delta$. Stel dat $n(w) < r$. Dan bestaan er indices $1 \leq i < j \leq r$ zodat:*

1. $\alpha_i = (s_{i+1} \cdots s_{j-1})\alpha_j$
2. $s_{i+1} \cdots s_j = s_i \cdots s_{j-1}$
3. $w = s_1 \cdots \hat{s_i} \cdots \hat{s_j} \cdots s_r$.

Wat de stelling zegt, is dat je voor de kortste uitdrukking van w niet meer spiegelingen nodig hebt dan het aantal wortels dat w negatief maakt. Oftewel $l(w) \leq n(w)$, waaruit de beloofde gelijkheid volgt.

Bewijs. We beginnen met op te merken dat in de opbouw van $n(w)$ via simpele spiegelingen de waarde minstens één keer gedaald moet zijn, omdat anders $n(w) = r$, terwijl we aannemen dat $n(w) < r$. Dit betekent dat er een index $j \leq r$ is, waarvoor geldt dat $n(s_1 \cdots s_j) = n(s_1 \cdots s_{j-1}) - 1$. Dit kan alleen als $s_1 \cdots s_{j-1}\alpha_j < 0$. Nu is α_j een positieve wortel, dus er moet een spiegeling s_i zijn (met $i < j$) waarvoor $(s_{i+1} \cdots s_{j-1})\alpha_j$ negatief wordt (in het geval $i = j-1$ interpreteren we $s_{i+1}\cdots s_{j-1}$ als 1). Omdat s_i alleen α_i negatief maakt, moet dus wel gelden dat $(s_{i+1}\cdots s_{j-1})\alpha_j = \alpha_i$.

We laten nu $w' = s_{i+1}\cdots s_{j-1}$. Dit is een element in W, dus uit Lemma 10 volgt dat $s_i = s_{\alpha_i} = s_{w'\alpha_j} = w's_{\alpha_j}(w')^{-1} = w's_j(w')^{-1}$, ofwel $s_iw' = w's_j$. Uitschrijven geeft $s_i\cdots s_{j-1} = s_{i+1}\cdots s_j$, de gelijkheid in 2).

Uit 2) volgt $s_i\cdots s_j = s_{i+1}\cdots s_{j-1}$, waaruit volgt dat w gelijk is aan $s_1\cdots\hat{s}_i\cdots\hat{s}_j\cdots s_r$. □

Nu we deze stelling hebben bewezen, kunnen we de gelijkheid van de functies l en w aantonen. Stel $n(w)\neq l(w)$. Omdat $n(w)\leq l(w)$, betekent dit dat $n(w) < l(w) = r$. Wegens Stelling 16 kunnen we dan $w = s_1\cdots s_r$ schrijven als $w = s_1\cdots\hat{s}_i\cdots\hat{s}_j\cdots s_r$. Dit zou echter betekenen dat $l(w) = r-2$ en dit is absurd. Dus moet wel $n(w) = l(w)$.

Omdat $l(w)$ gelijk is aan $n(w)$, kunnen we de aanname $n(w) < r$ in de stelling vervangen door $l(w) < r$. Wat de stelling dus precies zegt is dat, indien een uitdrukking $w = s_1\cdots s_r$ niet gereduceerd is, er steeds twee spiegelingen verwijderd kunnen worden totdat de uitdrukking wel gereduceerd is.

We hebben nu alle resultaten die we nodig hebben om Stelling 14 te bewijzen.

Bewijs Stelling 14. Zij W een spiegelingsgroep met bijbehorend wortelsysteem Φ en zij Δ een simpel systeem van Φ. We zullen laten zien dat we elke relatie $s_1\cdots s_r = 1$ kunnen afleiden van de relaties $(s_\alpha s_\beta)^{m(s_\alpha,s_\beta)} = 1$ waar $s_\alpha, s_\beta, s_i \in \Delta$. Merk in eerste instantie op dat, omdat $\det(1) = 1$, er moet gelden dat $\det(s_1\cdots s_r) = (-1)^r = 1$. Dus r is even. We zullen nu inductie op $r = 2q$ toepassen. In het basisgeval dat $q = 2$, hebben we $s_1s_2 = 1$, waaruit volgt $s_1 = s_2^{-1} = s_2$. De relatie is dus gelijk aan $(s_2)^2 = 1$ wat een van de gegeven relaties is ($s_\alpha = s_\beta = s_2$ en $m(s_\alpha, s_\beta) = 1$).

Zij nu $r = 2q$ en stel dat de stelling waar is voor alle $2k < 2q$. Zij $s_1\cdots s_r = s_1\cdots s_{2q} = 1$. We vermenigvuldigen links en rechts met $s_{2q}s_{2q-1}\cdots s_{q+2}$ en gebruiken dat $s_i^2 = 1$ voor alle s_i, waaruit volgt dat $s_1\cdots s_{q+1} = s_{2q}s_{2q-1}\cdots s_{q+2}$. De uitdrukking links bevat $q+1$ termen, de uitdrukking rechts bevat $q-1$ termen. De uitdrukking links kan dus niet gereduceerd zijn, dus wegens Stelling 16 zijn er indices $1\leq i<j\leq q+1$ zodat $s_{i+1}\cdots s_j = s_i\cdots s_{j-1}$. Door links en rechts te vermenigvuldigen met $s_js_{j-1}\cdots s_{i+1}$ vinden we dat dit gelijk is aan de uitdrukking $s_i\cdots s_{j-1}s_js_{j-1}\cdots s_{i+1} = 1$. Het aantal spiegelingen links is gelijk aan $2(j-i)$. Tenzij $j-i = q$, wat zou betekenen dat $j = q+i$ en dus $j = q+1$ en $i = 1$, is de lengte van de linkerzijde kleiner dan r. Uit de inductiehypothese volgt dus de uitdrukking $s_i\cdots s_{j-1}s_js_{j-1}\cdots s_{i+1} = 1$ en dus de gelijkheid $s_{i+1}\cdots s_j = s_i\cdots s_{j-1}$ uit de gegeven relaties is af te leiden.

We mogen nu in de oorspronkelijke uitdrukking $s_{i+1} \cdots s_j$ vervangen door $s_i \cdots s_{j-1}$. Immers als het na de vervanging uit de relaties af te leiden is, en de vervanging dat ook is, dan is de oorspronkelijk uitdrukking dat ook. We krijgen dan $s_1 \cdots s_{2q} = s_1 \cdots \hat{s_i} \cdots \hat{s_j} \cdots s_{2q} = 1$ omdat de lengte van $s_1 \cdots \hat{s_i} \cdots \hat{s_j} \cdots s_{2q}$ gelijk is aan $2(q-1) < 2q$, is de bovestaande uitdrukking een gevolg van de gegeven relaties, en dus is $s_1 \cdots s_{2q} = 1$ een gevolg van de gegeven relaties.

Als nu $j-i$ wel gelijk is aan q, en dus $i = 1$ en $j = q+1$, dan is het bovestaande argument niet mogelijk. In dit geval is $s_1 \cdots s_q = s_2 \cdots s_{q+1}$. We permuteren nu de originele uitdrukking $s_1 \cdots s_{2q} = 1$ cyclisch, zodat we de uitdrukking $s_2 \cdots s_{2q} s_1 = 1$ krijgen. Het is duidelijk dat als dit uit de relaties volgt, de originele uitdrukking dat ook doet, en andersom. We herhalen de stappen hierboven, en vermenigvuldigen links en rechts met $s_1 s_{2q} \cdots s_{q+3}$ en vinden $s_2 \cdots s_{q+2} = s_1 s_{2q} \cdots s_{q+3}$. Wederom is de lengte links weer $q+1$ en rechts $q-1$, dus is links niet gereduceerd, en kunnen we indices $2 \leq i < j \leq q+2$ vinden. Tenzij nu $i = 2$ en $j = q+2$, kunnen we het argument hierboven volgen en zijn we klaar.

Als $i = 2$ en $j = q+2$, dan is $s_2 \cdots s_{q+1} = s_3 \cdots s_{q+2}$. Hieruit volgt dat door links met s_3 te vermenigvuldigen dat $s_3(s_2 \cdots s_{q+1}) = s_4 \cdots s_{q+2}$. Links heeft weer lengte $q+1$, dus wederom kunnen we weer Stelling 16 toepassen. We hebben nu weer indices $1 \leq i < j \leq q+1$, waarbij met $i = 1$ de eerste factor s_3 in $s_3(s_2 \cdots s_{q+1})$ wordt bedoeld. Tenzij $i = 1$, $j = q+1$ zijn we klaar, en kunnen we weer het argument hierboven volgen.

Als $i = 1$, $j = q+1$, dan is $s_3(s_2 \cdots s_q) = s_2 \cdots s_{q+1}$. Maar $s_2 \cdots s_{q+1} = s_1 \cdots s_q$, waaruit volgt dat $s_1 = s_3$.

We kunnen nu nogmaals cyclisch permuteren en naar $s_3 \cdots s_{2q} s_1 s_2 = 1$ kijken. We herhalen alle argumenten bovenstaande argumenten, en concluderen of dat $s_1 \cdots s_{2q} = 1$ uit de relaties is af te leiden, of dat $s_2 = s_4$.

We kunnen blijven cyclisch permuteren, en vinden tijdens dit proces dat $s_1 \cdots s_{2q} = 1$ uit de relaties af te leiden is, of we vinden dat $s_1 = s_3 = \ldots = s_{2q-1}$ en $s_2 = s_4 = \ldots s_{2q}$. In dit geval volgt dat $s_1 \ldots s_{2q} = (s_1 s_2)^q = 1$, wat een van de gegeven relaties is.

Elke relatie is dus af te leiden uit de gegeven relaties.

□

Wat we nu hebben bewezen is dat elke spiegelingsgroep W te schrijven is als een Coxeter systeem (W, S). Om nu alle spiegelingsgroepen te classificeren, zullen we deze Coxetergroep structuur gebruiken.

4 classificatie

4.1 Coxeter Grafen

Wat we uit de voorstelling van W als Coxeter systeem (W, S) kunnen halen, is dat W als groep volledig bepaald is door de getallen $m(s_\alpha, s_\beta)$ voor α, β simpele wortels.

We kunnen deze informatie als volgt in een graaf Γ weergeven; voor elke simpele wortel α voegen we een (gelabeld) punt toe. We verbinden nu twee punten $\alpha \neq \beta$ met een lijn als $m(s_\alpha, s_\beta) \geq 3$. Als twee punten α, β niet verbonden zijn, dan is $m(s_\alpha, s_\beta) = 2$. Deze graaf noemen we de Coxeter graaf van W. In het algemeen definiëren we een Coxeter graaf als een verzameling punten S, waarbij alle kanten in de graaf gelabeld zijn met een geheel getal groter of gelijk aan 3, of het symbool ∞. Met $m(s, s')$ voor $s, s' \in S$ bedoelen we dan het label van de kant die s en s' verbind. Indien er geen kant tussen s en s' is, interpreteren we $m(s, s')$ als 2. Verder is $m(s, s) = 1$.

We zullen de spiegelingsgroepen classificeren door te kijken naar wat voor soort grafen mogelijk zijn.

We zeggen dat een Coxeter systeem (W, S) **irreducibel** is als de graaf Γ verbonden is. Als een graaf Γ niet verbonden is, dan bevat het verbonden deelgrafen $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_r$ (elk met een bijbehorend irreducibel systeem). Merk op dat voor simpele wortels α, β uit verschillende componenten geldt dat $m(s_\alpha, s_\beta) = 2$, dus $(s_\alpha, s_\beta)^2 = 1$, wat betekent dat $s_\alpha s_\beta = s_\beta s_\alpha$. Als Γ dus niet verbonden is, zijn de simpele wortels op te splitsen in deelverzamelingen $S_1, \ldots, S_r$ die onderling commuteren.

Het volgende resultaat zal duidelijk maken dat in dit geval de groep W een direct product is van groepen W_{S_i}, ondergroepen van W voortgebracht door de deelverzamelingen S_i van S.

Stelling 17. *Zij (W, S) een Coxeter systeem met Coxeter graaf Γ, bestaande uit de verbonden componenten $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_r$. Zij $S_1, S_2, \ldots, S_r$ de bijbehorende deelverzamelingen van S. Dan is W het directe product van de groepen $W_{S_1}, W_{S_2}, \ldots, W_{S_r}$.*

Bewijs. We herinneren ons eerst de definitie van een direct product (zie bijvoorbeeld [4, Thm. 9, p. 171]). Een groep G is te schrijven als een direct product van groepen H en K indien H en K normale ondergroepen van G zijn, en de doorsnede van H en K triviaal is.

We zullen nu inductie toepassen op r. Als $r = 1$, dan is er niks te doen en zijn we klaar.

Stel nu $r = 2$. Merk eerst op dat W_{S_1} en W_{S_2} ondergroepen van W zijn, en wegens het feit de de simpele wortels in S_1 commuteren met de simpele wortels in S_2, zijn W_{S_1} en W_{S_2} allebei normaal. Merk ook op dat $W_{S_1}W_{S_2} = W$ (we kunnen namelijk de spiegelingen in S_2 naar rechts halen, en de spiegelingen in S_1 naar links, omdat deze onderling commuteren). We hoeven alleen nog te laten zien dat de doorsnede van de twee groepen triviaal is. Om dit te bewijzen gebruiken we het idee in Finite Reflection Groups[2, p. 94]. Bekijk het externe directe product $W_{S_1} \times W_{S_2}$. We indexeren $S = \{s_1, s_2, \ldots s_n\}$ zodanig dat $S_1 = \{s_1, \ldots s_k\}$ en $S_2 = \{s_{k+1}, \ldots s_n\}$ voor een zekere $1 \leq k < n$. Deze groep wordt voortgebracht door de elementen $s'_i = (s_i, 1)$ voor $1 \leq i \leq k$ en $s'_i = (1, s_i)$ voor $k + 1 \leq i \leq n$. Het is redelijk simpel om te zien dat de verzameling $\{s'_1, \ldots s'_n\}$ aan de zelfde relaties voldoet als de relaties van het Coxeter systeem (W, S). We kunnen nu een homomorfisme $\varphi : W \to W_{S_1} \times W_{S_2}$ dat de voortbrenger s_i naar s'_i stuurt definiëren. Merk op dat φ surjectief is, dus geldt dat $|W_{S_1} \times W_{S_2}| \leq |W|$. We hebben nu de volgende ketting aan (on)gelijkheden; $|W| = |W_{S_1}W_{S_2}| = |W_{S_1}||W_{S_2}|/|W_{S_1} \cap W_{S_2}| = |W_{S_1} \times W_{S_2}|/|W_{S_1} \cap W_{S_2}| \leq |W|/|W_{S_1} \cap W_{S_2}| \leq |W|$. Uit $|W| \leq |W|/|W_{S_1} \cap W_{S_2}| \leq |W|$ volgt dat $|W_{S_1} \cap W_{S_2}| = 1$, dus de doorsnede is triviaal, en W is een direct product van W_{S_1} en W_{S_2}.

Stel nu dat $r > 2$ en stel dat we de stelling hebben bewezen voor alle $k < r$. We kijken naar de groepen W_{S_1} en $W_{S_2 \cup \ldots \cup S_r}$. Met hetzelde argument als hierboven vinden we dat $W = W_{S_1} \times W_{S_2 \cup \ldots \cup S_r}$, en uit de inductiehypothese volgt $W = W_{S_1} \times \cdots \times W_{S_r}$, waarmee de stelling bewezen is. $\square$

Wat deze stelling ons vertelt, is dat elke Coxetergroep waarvoor de graaf niet verbonden is een direct product is van Coxetergroepen met verbonden grafen. Voor de classificatie kunnen we onze aandacht dus beperken tot de Coxetergroepen waarvan de graaf verbonden is.

4.2 Bilineaire vormen en positief definiete grafen

We zullen nu voor elke Coxeter graaf Γ een bilineaire vorm opstellen. Dit stelt on in staat om vervolgens een graaf positief (semi-)definiet te noemen afhankelijk van of de bijbehorende bilineaire vorm dat is. We definiëren voor een graaf Γ (waarbij we er van uitgaan dat de punten $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ geindexeerd zijn) de $n \times n$ matrix $A := (a_{ij})$ waar $a_{ij} = -\cos\left(\dfrac{\pi}{m(s_i, s_j)}\right)$. In het geval dat $m(s_i, s_j) = \infty$ interpreteren we $\frac{\pi}{m(s_i,s_j)}$ als 0. Merk op omdat $m(s_i, s_j) = m(s_j, s_i)$ (want s_is_j en s_js_i zijn elkaars inverse en hebben dus gelijke orde) de matrix A symmetrisch is. Omdat A symmetrisch is, zijn alle eigenwaarden reëel. Voor een bewijs hiervan, zie het bewijs van Lemma 10.1.4 in [3].

De matrix A definiëert een bilineaire vorm $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ via $(x, y) \to x^t Ay$ waarin x^t de getransponeerde van x is. Merk op dat $y^t Ax = y^t A^t x = (x^t Ay)^t = x^t Ay$, dus dit is een symmetrische bilineaire vorm en heeft als gevolg een bijbehorende kwadratische vorm $x \to x^t Ax$. We noemen nu de matrix A positief-definiet als voor alle vectoren $x \neq 0$ geldt dat $x^t Ax > 0$, en positief semi-definiet indien $x^t Ax \geq 0$.

Een equivalente definitie is dat alle eigenwaardes strikt positief, danwel niet-negatief zijn. Stel immers dat we een symmetrische matrix A hebben, die positief definiet is. Omdat A symmetrisch is, volgt uit Stelling 10.1.3 van [3] dat er een orthonomale basis van $\mathbb{R}^n$ is met reëele eigenwaarden ten opzichte van A. Als nu P de coördinatentransformatie is van de standaardbasis naar deze basis, dan is $x^t Ax$ te schrijven als $y^t Dy$, waar $y = Px$. Merk op dat de matrix D diagonaal is, omdat het de matrix A is ten opzichte van de basis van eigenvectoren. Als nu $x^t Ax > 0$ voor alle $x \neq 0$, dan is ook $y^t Dy > 0$ voor alle $y \neq 0$. Anders opgeschreven betekent dit dat $y^t Dy = \sum_{i=1}^n y_i d_{ii} y_i = \sum_{i=1}^n d_{ii} y_i^2 > 0$ voor alle $y \neq 0$. In het bijzonder geldt dit voor $y'_j = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, de vector met een 1 op de j-de plaats, en 0 op de rest, waaruit volgt dat $\sum_{i=1}^n d_{ii} y_i'^2 = d_j j > 0$. Dus de eigenwaardes zijn positief.

Andersom volgt hieruit dat als alle eigenwaarden positief zijn, wanneer $x \neq 0$ een vector in $\mathbb{R}^n$, met $y = Px$, er geldt dat $x^t Ax = \sum_{i=1}^n d_{ii} y_i^2 > 0$, omdat minstens één van de y_i ongelijk 0 is. De matrix A is dus positief definiet. Dit argument gaat ook op voor het bewijs dat een positief semi-definiete matrix niet-negatieve eigenwaarden heeft, alleen wordt het $>$-teken dan vervangen voor een $\geq$-teken.

Een andere equivalente definitie die we nodig zullen hebben voor berekeningen wordt gegeven via **leidende hoofdminoren** van A. Dit zijn de determinanten van de submatrices van A die je krijgt als je de laatste k $(0 \leq k < n)$ rijen en kolommen van A weghaalt. Een matrix A is dan positief definiet dan en slechts dan alle leidende hoofdminoren strikt positief zijn. Voor een bewijs hiervan zie referentie 17, p. 152 of referentie 21, p. 167 van [2].

Stel nu dat we een spiegelingsgroep W hebben. Het blijkt dat de Coxeter graaf Γ positief definiet is. Hiertoe hebben we het volgende lemma nodig (dit is Propositie 5.1.1 in [2], in het speciale geval dat de wortels lengte 1 hebben):

Lemma 18. *Zij W een spiegelingsgroep met simpel systeem Δ, (W, S) het bijbehorende Coxetersysteem. Dan geldt dat voor $\alpha, \beta \in \Delta$ dat $(\alpha, \beta) =$*

$$-\cos\left(\frac{\pi}{m(s_\alpha, s_\beta)}\right).$$

Bewijs. We bewijzen dit eerst in het speciale geval dat de dimensie van het opspansel van Δ gelijk is aan 2. Zij α, β simpele wortels. Als $\alpha = \beta$ dan is $m(s_\alpha, s_\beta) = 1$. Verder geldt dat de hoek tussen α en β gelijk is aan 0 radialen. Hieruit volgt dat $-\cos\dfrac{\pi}{m(s_\alpha, s_\beta)} = -\cos\pi = \cos 0 = (\alpha, \beta)$. Stel nu dat $\alpha \neq \beta$. In dit geval is de hoek tussen de twee hypervlakken (lijnen) orthogonaal aan α en β gelijk aan $\pi - \angle(\alpha, \beta)$ (teken een plaatje). De spiegelingen achtereenvolgens uitvoeren geeft een draaiing van $2(\pi - \angle(\alpha, \beta))$ om de oorsprong.

Dit kunnen we als volgt aantonen; de matrix van een spiegeling door een lijn die een hoek θ met de x-as maakt heeft matrix

$$\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

Als we nu de matrix bekijken van de spiegeling door de lijn die een hoek van ϕ met deze lijn maakt, heeft deze de matrix

$$\begin{pmatrix} \cos 2\theta' & \sin 2\theta' \\ \sin 2\theta' & -\cos 2\theta' \end{pmatrix},$$

waar geldt dat $\theta' = \theta + \phi$. Achterelkaar uitvoeren geeft

$$\begin{pmatrix} \cos 2\theta' & \sin 2\theta' \\ \sin 2\theta' & -\cos 2\theta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos 2\theta' \cos 2\theta + \sin 2\theta' \sin 2\theta & \cos 2\theta' \sin 2\theta - \sin 2\theta' \cos 2\theta \\ \sin 2\theta' \cos 2\theta - \cos 2\theta' \sin 2\theta & \sin 2\theta' \sin 2\theta + \cos 2\theta' \cos 2\theta \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos 2(\theta' - \theta) & -\sin 2(\theta' - \theta) \\ \sin 2(\theta' - \theta) & \cos 2(\theta' - \theta) \end{pmatrix},$$

een rotatie om een hoek van $2\theta' - \theta = 2\phi$ radialen.

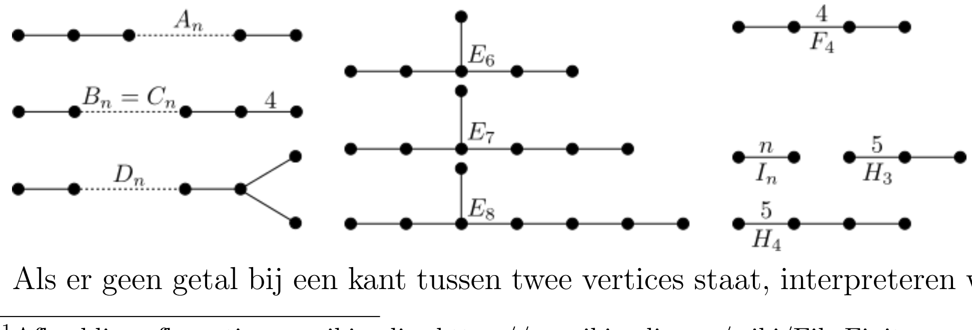
In ons geval hebben we dus een draaiing van $2(\pi - \angle(\alpha, \beta))$ radialen. Merk op dat de draaiing orde $m(s_\alpha, s_\beta)$ heeft, dus $m(s_\alpha, s_\beta) * 2(\pi - \angle(\alpha, \beta)) = 2\pi$, waaruit volgt dat $\pi - \angle(\alpha, \beta) = \dfrac{\pi}{m(s_\alpha, s_\beta)}$ en dus dat $\angle(\alpha, \beta) = \pi - \dfrac{\pi}{m(s_\alpha, s_\beta)}$. Nu geldt dat $(\alpha, \beta) = \cos\angle(\alpha, \beta) = \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{m(s_\alpha, s_\beta)}\right) = -\cos\dfrac{\pi}{m(s_\alpha, s_\beta)}$, hetgeen we wilde bewijzen.

Als nu de dimensie van het opspansel van Δ groter dan twee is, zeg $n > 2$, dan passen we het argument als volgt aan: noem W het opspansel van de vectoren α en β, merk op dat $\dim W = 2$. de spiegelingen s_α en s_β fixeren beiden een hypervlak van dimensie $n-1$ orthogonaal aan α respectievelijk β. De doorsnede van deze twee hypervlakken is een $n-2$ dimensionaal hypervlak W, dat door beide spiegelingen puntsgewijs gefixeerd blijft. Dit is tevens orthogonaal aan W. We kunnen nu dus elke vector uniek schrijven in de vorm $w + w'$ met $w \in W$ en $w \in W^\perp$. De werking van $s_\alpha s_\beta$ op het opspansel is dus een draaiing om een hoek van $2(\pi - \angle(\alpha, \beta))$ in W, terwijl $W^\perp$ puntsgewijs vast blijft. We kunnen nu weer hetzelfde argument als boven toepassen waaruit het lemma volgt. $\square$

We kunnen nu Lemma 18 gebruiken om te bewijzen dat de graaf Γ van een spiegelingsgroep W positief is. Wegens het lemma geldt dat de matrix die bij de graaf Γ hoort als elementen inproducten van de vorm (α, β) heeft, met α, β simpele wortels. We indexeren S weer als $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ en definiëren α_i als het element uit Δ waarvoor geldt dat $s_i = s_{\alpha_i}$. Nu geldt voor willekeurige $x \in \mathbb{R}^n$ ongelijk nul dat $x^t A x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\alpha_i, \alpha_j) x_i x_j = (\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j) = |\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i|^2$. De laatste gelijkheid volgt uit de definitie van de euclidische norm. Merk op dat dit strikt positief is; omdat $|\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i|^2 = 0$ dan en slechts dan als $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ gelijk is aan 0, wat alleen kan als alle $x_i = 0$ wegens lineaire onafhankelijkheid van de α_i. Omdat niet alle $x_i = 0$, moet de som dus wel ongelijk aan 0 zijn, waardoor $|\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i|^2 > 0$ is. De graaf Γ is dus positief definiet.

Nu we weten dat elke spiegelingsgroep een positief definiete graaf heeft, kunnen we proberen alle positief definiete grafen te enumereren. Alle spiegelingsgroepen zitten hier tussen, dus kunnen we hopen om ze allemaal te vinden.

We beweren dat de volgende grafen alle verbonden positief definiete grafen zijn:[1]



Als er geen getal bij een kant tussen twee vertices staat, interpreteren we

[1] Afbeelding afkomstig van wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/File:Finite_coxeter.svg

dit alsof het gelabeld is met het getal 3.

We zullen aantonen dat deze grafen positief definiet zijn via de equivalente definitie dat alle leidende hoofdminoren van de bijbehorende matrix A positief zijn. Merk op dat voor de families A_n, B_n en D_n, als we de vertices op de juiste manier nummeren, de hoofdminoren de determinanten zijn van andere matrices in deze familie. Merk verder op dat in het geval van A_n, B_n en D_n, de index n het aantal vertices weergeeft. In het geval A_n is $n \geq 1$, bij B_n is $n \geq 2$, en bij D_n is $n \geq 4$.

Voor het gemak zullen we de determinanten van de hoofdminoren van de matrix $2A$ berekenen, in plaats van de matrix A. Dit mag omdat als deze positief zijn de detereminanten van de hoofdminoren dat ook zijn, immers $\det 2A$ is gelijk aan $\det A$ vermenigvuldigd met een positieve macht van 2. De reden dat we dit doen is omdat het label 3 heel veel voorkomt, dus de matrix heel veel elementen met waarde $-\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ bevat.

Merk op dat voordat we ook maar uberhaubt de matrix kunnen opstellen om de determinant te berekenen, we een nummering van de vertices moeten kiezen. We zouden dus graag willen dat de waarde van de determinant onafhankelijk is van de gekozen nummering. Dit blijkt inderdaad het geval te zijn.

Stel namelijk dat we een genummerde graaf hebben; elke andere nummering van de graaf kan dan gekregen worden door achter elkaar het nummer van twee vertices om te wisselen. Stel dat we nu in een graaf de nummers van de vertices i en j omwisselen. In de matrix wisselen dan de elementen a_{ii} en a_{jj} van plek om, a_{ij} wisselt om met a_{ji}, a_{ki} wisselt om met a_{kj} voor $k \neq i, j$ en a_{ik} wisselt om met a_{jk} voor $k \neq i, j$. Dit komt overeen met het omwisselen van rij i met rij j en vervolgens het omwisselen van kolom i met kolom j, of andersom. Zoals bekend klapt het teken van de determinant om als we twee rijen of kolommen omwisselen. Het teken van de determinant klapt dus precies twee keer om, en blijft hetzelfde. De nummering van de vertices maakt dus niets uit voor de waarde van de determinanten.

We beginnen met de familie A_n: We nummeren de vertices van links naar rechts. Voor het gemak noteren we de matrix die bij de graaf A_n hoort ook gewoon met A_n. We beweren nu dat $\det 2A_n = n+1$. We zullen dit aantonen voor A_1 en A_2, en vervolgens inductie naar n gebruiken. Merk op dat voor A_1 de matrix $2A_1$ gewoon de 1×1 matrix is met als enige element het getal 2. De determinant van $2A_1$ is dus 2. De formule is dus juist voor $n = 1$.

Voor A_2 krijgen we de matrix

$$2A_2 = 2\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

De determinant van deze matrix is 3, dus ook voor $n = 2$ klopt de formule. Stel nu dat de formule juist is voor alle $k < n$, waar $n \geq 3$. Bekijk de matrix $2A_n$. De $n-1 \times n-1$ deelmatrix die we krijgen door de n-de rij en kolom weg te halen is gelijk aan de matrix $2A_{n-1}$, op dezelfde manier is de $n-2 \times n-2$ matrix die we krijgen door de laatste 2 rijen en kolommen weg te halen gelijk aan $2A_{n-2}$. De matrix $2A_n$ ziet er als volgt uit:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Als we rijontwikkeling op de laatste rij toepassen krijgen we $\det 2A_n = 2\det 2A_{n-1} + \det D$, waar D de matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cancel{0} & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & \cancel{0} & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & \cancel{0} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cancel{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \cancel{2} & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{2} \end{pmatrix}$$

is. De doorgestreepte elementen zijn de verwijderde rij en kolom. Als we nu ontwikkelen naar de laatste kolom, vinden we dat $\det D = -\det 2A_{n-2}$. Als we dit combineren met $\det 2A_n = 2\det 2A_{n-1} + \det D$ vinden we $\det 2A_n = 2\det 2A_{n-1} - \det 2A_{n-2} = 2n - (n-1) = n+1$. De formule is dus juist voor alle n.

Merk op dat $\det 2A_n = n + 1 > 0$. Gecombineerd met de observatie dat alle leidende hoofdminoren van de matrix $2A_n$ de determinanten van matrices $2A_k$ $(1 \leq k \leq n)$ zijn, kunnen we concluderen dat de grafen A_n positief definiet zijn.

Voor de familie B_n en D_n kunnen we precies dezelfde inductie gebruiken, alleen moeten we de beginwaardes anders berekenen. We kijken eerst naar B_n: We nummeren de vertices van rechts naar links. Net zoals hierboven geven we de matrix behorend bij B_n aan met B_n, en zullen we weer de determinanten de leidende hoofdminoren van $2B_n$ bereken. Voor de graaf B_2 ziet de matrix $2B_2$ er als volgt uit:

$$\begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$$

De determinant van deze matrix is gelijk aan 2. Voor B_3 hebben we de volgende matrix $2B_3$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

De determinant hiervan is wederom gelijk aan 2. We beweren nu dat $\det 2B_n = 2$. Basisgevallen hebben we al laten zien, dus stel dat het klopt voor alle $k < n$, met $n \geq 4$. Via dezelfde rij en kolomontwikkeling als voor de familie A_n vinden we dat $\det 2B_n = 2 \det 2B_{n-1} - \det 2B_{n-2} = 2 * 2 - 2 = 2$, waarmee de inductiestap voltooid is. Wederom zijn de leidende hoofdminoren van $2B_n$ de determinanten van de matrices $2B_k$ $(1 \leq k \leq n)$, dus ook de grafen B_n zijn positief definiet.

De familie D_n is positief definiet via wederom hetzelfde argument. We nummeren D_n als volgt; de knoop nummeren we met 1, de vertex rechtsonder nummeren we met 2, de vertex rechtsboven nummeren we met 3, de rest van de vertices nummeren we van rechts naar links beginnend met 4. De matrix van $2D_4$ is gelijk aan

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

De determinant van deze matrix is gelijk aan 4 (de berekening is simpel, maar een beetje lang). De matrix $2D_5$ is gelijk aan

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

De determinant van deze matrix blijkt ook 4 de te zijn (het gemakkelijst te berekenen via rijontwikkeling naar de laatste rij), en uit dezelfde inductie als twee keer hierboven volgt $\det 2D_n = 4$. Wederom zijn weer alle leidende hoofdminoren determinanten van matrices $2D_k$, dus zijn ook de grafen D_n positief definiet.

Voor de grafen E_6, E_7 en E_8 nummeren we de vertices als volgt: we beginnen linksonder, en nummeren van links naar rechts. De laatste vertex die naar boven uitsteekt nummeren we respectievelijk met 6, 7 en 8. Merk nu op dat de deelmatrices die je krijgt door uit $2E_{6/7/8}$ de laatste k kolommen (met $k \geq 1$, en kleiner dan 6, 7, of respectievelijk 8) weg te halen matrices van de vorm $2A_{6/7/8-k}$ zijn. Deze hoofdminoren zijn dus positief. De laatste hoofdminor (de determinant van $E_{6/7/8}$) is ook positief. We zullen dit voor E_6 laten zien, E_7 en E_8 zullen we niet doen (het proces is exact hetzelfde). De matrix $2E_6$ is gelijk aan

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ontwikkelen naar de laatste rij en vervolgens kolom geeft

$$\det 2E_6 = 2\det 2A_5 - \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Wat via meer rij en kolomontwikkeling gelijk is aan

$$2\det 2A_5 - 3\det 2A_2 = 12 - 9 = 3$$

Dus $\det 2E_6 = 3$. De graaf E_6 is dus positief definiet. Voor E_7 vinden we $\det 2E_7 = 2$ en voor E_8 vinden we $\det 2E_8 = 1$, dus ook E_7 en E_8 zijn positief definiet.

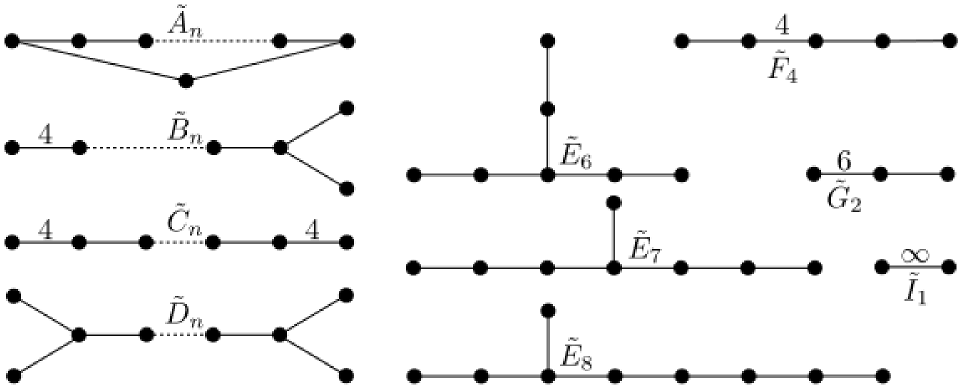
Voor F_4 vinden we dat, wanneer we de matrix uitschrijven en ontwikkelen naar de eerste rij en vervolgens kolom dat $\det 2F_4 = 2\det 2B_3 - \det 2A_2 = 4 - 3 = 1$. Dus ook F_4 is positief definiet (de andere hoofdminoren zijn makkelijk te berekenen).

De berekeningen voor de familie $I_2(n)$, H_3 en H_4 staan in [1] en zullen we niet hier herhalen.

We hebben aangetoond dat alle grafen in de afbeelding positief definiet zijn, we moeten nu alleen nog aantonen dat dit alle positief definiete grafen zijn.

Om dit aan te tonen hebben we de volgende positieve semi-definiete grafen nodig:[2]

[2] Afbeelding afkomstig van https://en.wikipedia.org/wiki/File:Affine_coxeter.svg



Deze grafen zijn gekregen door aan de grafen uit de vorige figuur op een bepaalde manier een extra vertex toe te voegen. De grafen $\tilde{A}_n$, $\tilde{B}_n$, $\tilde{C}_n$ en $\tilde{D}_n$ bevatten dus elk $n+1$ vertices. Voor $\tilde{A}_n$ en $\tilde{C}_n$ is $n \geq 2$, voor $\tilde{B}_n$ is $n \geq 3$ en voor $\tilde{D}_n$ is $n \geq 4$. De types komen natuurlijk overeen met de types waaraan we de vertex hebben toegevoegd. Als we deze vertex weghalen hebben we dus weer een graaf die positief definiet is, dus om aan te tonen dat deze grafen positief semi-definiet zijn moeten we aantonen dat de determinant van de bijbehorende matrix gelijk aan 0 is.

Voor $\tilde{I}_1$ is het duidelijk dat de determinant gelijk aan 0 is, dus deze graaf is positief semi-definiet.

Voor de familie $\tilde{A}_n$ merken we op dat elke rij van de matrix $2\tilde{A}_n$ precies één element bevat dat gelijk is aan 2, 2 elementen gelijk aan -1, en de rest 0. Als we alle kolomvectoren bij elkaar optellen krijgen we dus de nulvector. De kolomvectoren vormen dus een afhankelijk stelsel, en wegens Stelling 6.3.1[3] volgt hieruit dat $\det 2\tilde{A}_n = 0$. Dus ook $\tilde{A}_n$ is positief semi-definiet.

Voor $\tilde{B}_n$ nummeren we als in D_n. Bekijk eerst het geval $n \geq 5$. Voor de bijbehorende matrix $2\tilde{B}_n$ is dan de $n \times n$ deelmatrix die je krijgt door de laatste rij en kolom weg te halen gelijk aan $2D_n$, het element rechtsonder is gelijk aan 2, en de elementen op rij n, kolom $n+1$ en rij $n+1$, kolom n zijn gelijk aan $-\sqrt{2}$. Rijontwikkeling naar de laatste rij en dan kolom geeft $\det 2\tilde{B}_n = 2\det 2D_n - 2\det 2D_{n-1} = 0$. Dus $\tilde{B}_n$ is positief semi-definiet voor $n \geq 5$. Voor $n = 4$ krijgen we door rijontwikkeling naar de laatste rij en vervolgens naar de laatste kolom dat $\det 2\tilde{B}_4 = 2\det 2D_4 - 2\det 2A_3 = 2\cdot 4 - 2\cdot 4 = 0$. Voor $n = 3$ is de matrix $2\tilde{B}_3$ gelijk aan (via rijontwikkleing naar laatste rij, en vervolgens ontwikkeling naar laatste kolom) $2\det 2A_3 - 2\det 2I = 0$, waarin I de 2×2 identiteitsmatrix is.

Voor $\tilde{C}_n$ vinden we met exact hetzelfde argument (alleen dan met B_n in plaats van D_n) voor $n \geq 3$ dat $\det 2\tilde{C}_n = 2\det B_n - 2\det B_{n-1} = 0$. Voor

$n = 2$ is de matrix gelijk aan

$$\begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 2 & -\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$$

Dit is een afhankelijk stelsel (de middelste kolom is $-1/\sqrt{2}$ keer de som van de eerste en derde kolom), dus $\det 2\tilde{C}_2 = 0$. Hieruit volgt dat ook $\tilde{C}_n$ positief semi-definiet is.

Voor de familie $\tilde{D}_n$ kunnen we voor $n \geq 6$ een soortgelijke techniek gebruiken; we nummeren zodanig dat de vertex linksboven label $n+1$ heet, de linkerknoop label n, de vertex linksonder label $n-1$, de rest nummeren we als in D_n. Via rijontwikkeling naar de laatste rij en vervolgens kolom, vinden we dat $\det 2\tilde{D}_n = 2\det 2D_n - 2\det 2D_{n-2} = 0$. Merk op dat de matrix $2D_n$ in dit geval niet dezelde matrix is als in de originele berekening voor de familie D_n, vertices $n-1$ en n zijn namelijk ongewisseld, maar dit verandert zoals bewezen niks aan de determinant. De matrix $2D_{n-2}$ is wel hetzelfde.

De berekeningen voor $\tilde{D}_4, \tilde{D}_5, \tilde{E}_6, \tilde{E}_7$ en $\tilde{E}_8$ zijn makkelijk na te gaan, en ook hier komt steeds 0 uit. We zullen dit hier niet doen omdat de matrices best groot zijn en het niet veel meer is dan bezigheidstherapie. $\tilde{F}_4$ wordt in [1] berekend en voor $\tilde{G}_2$ hebben we de volgende matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Rijontwikkeling naar laatste rij en vervolgens kolom geeft dat de determinant gelijk is aan 0.

Alle grafen in de afbeelding zijn dus positief semi-definiet.

We hebben verder nog twee andere (niet positieve) grafen nodig: de grafen $\tilde{H}_3$ en $\tilde{H}_4$, de we krijgen door respectievelijk bij H_3 een vertex links toe te voegen en te verbinden met de linkervertex van H_3 met label 3 en bij H_4 een vertex rechts toe te voegen en met de rechtervertex te verbinden wederom met label 3. Deze grafen komen overeen met de grafen Z_4 en Z_5 uit [1, p. 35]

Voor $\tilde{H}_3$ is de bijbehorende matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

met determinant $\det 2\tilde{H}_3 = 2\det 2H_3 - 3 = 3 - 2\sqrt{5} < 0$. Voor $\tilde{H}_4$ is de matrix gelijk aan

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

met determinant $\det 2\tilde{H}_4 = 2\det 2H_4 - \det 2H_3 = (7 - 3\sqrt{5}) - (3 - \sqrt{5}) = 4 - 2\sqrt{5} < 0$. De grafen $\tilde{H}_3$ en $\tilde{H}_4$ zijn dus niet positief.

De reden dat we deze grafen nodig hebben is omdat het blijkt dat alle deelgrafen van een verbonden positief definiete graaf ook positief definiet zijn. Met behulp van deze grafen kunnen we andere opties dan die op de lijst uitsluiten, waardoor het volgt dat dit alle positief definiete grafen zijn.

Een **deelgraaf** Γ' van een Coxeter graaf Γ is een graaf die we krijgen door uit Γ vertices (en bijbehorende kanten) weg te laten, of het getal van een label te verlagen, of allebei. Met een deelgraaf bedoelen we een strikte deelgraaf, Γ is dus niet een deelgraaf van zichzelf.

Voordat we kunnen aantonen dat deelgrafen van een positief definiete graaf dat ook zijn, hebben we een resultaat uit lineaire algebra nodig. Zij A een $n \times n$ matrix met reëele elementen. De matrix A noemen we reducibel indien er een partitie van de indexvariabelen is in twee niet lege deelverzamelingen I en J, waarvoor geldt dat $a_{ij} = 0$ voor alle $i \in I, j \in J$. Als een matrix reducibel is, dan kunnen we door rijen en kolommen om te wisselen de matrix in blok-diagonaal vorm zetten. Een matrix die niet reducibel is noemen we irreducibel.

De matrix van een Coxeter graaf is reducibel dan en slechts dan als de graaf niet verbonden is (en equivalent is de graaf verbonden dan en slechts dan als de matrix irreducibel is). Immers als de matrix reducibel is, dan is voor alle $i \in I$ en $j \in J$ het element $a_{ij} = 0$, gecombineerd met $a_{ij} = -\cos\dfrac{\pi}{m(s_i, s_j)}$ volgt dat $m(s_i, s_j) = 2$. Geen enkele vertex in I is dus verbonden met een vertex in J, dus de graaf is niet verbonden. Andersom als de graaf niet verbonden is hebben we een partitie van de vertices S in twee deelverzamelingen I en J. Voor alle $i \in I$ en $j \in J$ geldt $m(s_i, s_j) = 2$, waaruit volgt dat $a_{ij} = 0$ en de matrix reducibel is.

We bewijzen nu de volgende stelling:

Stelling 19. *Zij A een irreducibele, positief semi-definiete, symmetrische $n \times n$ matrix met reële elementen. Stel verder dat ook $a_{ij} \leq 0$ wanneer $i \neq j$. Dan geldt*

1. $N := \{x \in \mathbb{R}^n | x^t Ax = 0\}$ is precies de kern van A en $\dim N \leq 1$.

Bewijs. We bewijzen eerst 1). Zij $x \in \mathbb{R}^n$ een element uit de kern van A. Er geldt dan $Ax = 0$, dus ook $x^t Ax = 0$ en x zit in N. De kern van A is dus bevat in N. Zij nu $x \in N$. We kunnen A diagonaliseren, net als in het bewijs voor de equivalente definiete van het positief definiet zijn van de bilineaire vorm, en vinden $A = P^t DP$, waar P een orthogonale matrix is en D een matrix met op de diagonaal de eigenwaarden $d_1, \ldots, d_n$ van A is. Als nu $y^t Dy = 0$ is voor een $y \in \mathbb{R}^n$, dan volgt door de vermenigvuldiging uit te schrijven dat $\sum_{i=1}^n d_i y_i^2 = 0$. Hieruit volgt omdat alle $d_i \geq 0$ (want A is positief semi-definiet, dus alle eigenwaarden zijn niet-negatief) dat of $d_i = 0$ of $y_i = 0$ of allebei. Als nu $x^t Ax = 0$, dan is ook $(Px)^t DPx = 0$, dus zit Px in de kern van D. Hieruit volgt dat $Ax = P^t DPx = P^t 0 = 0$, dus x zit in de kern van A. N is dus precies de kern van A.

Stel nu dat N strikt positief dimensie heeft, en zij $x \in N$ een element van deze verzameling. Laat $z = (|x_1|, \ldots, |x_n|)$, Omdat $a_{ij} \leq 0$ voor $i \neq j$ volgt $a_{ij}|x_i||x_j| \leq a_{ij}x_i x_j$ voor $i \neq j$. Voor $i = j$ is $a_{ij}|x_i||x_j| = a_{ii}|x_i|^2 = a_{ii}x_i^2 = a_{ij}x_i x_j$. Als we dit combineren krijgen we $0 \leq z^t Az \leq x^t Ax = 0$. De eerste ongelijkheid is de aanname dat A positief semi-definiet is. Er geldt dus $z^t Az = 0$, dus ook z is een element van N. We zullen nu aantonen dat alle coordinaten van z strikt positief zijn. Zij I de verzameling van indices i waarvoor geldt $z_i = 0$ en zij J de verzameling die de rest van de indices bevat (dus voor $j \in J$ is $z_j \neq 0$). Omdat z in de kern van A zit, is voor alle $i \in I$ de som $\sum_{j=1}^n = a_{ij}z_j = 0$. Omdat $z_k = 0$ wanneer $k \in I$ kunnen we de som ook gewoon over de verzameling J nemen, dus $\sum_{j \in J} a_{ij}z_j = 0$. Uit $a_{ij} \leq 0$ en $z_j > 0$ volgt $a_{ij}z_j \leq 0$. Omdat dit uiteindelijk naar 0 sommeert, moet wel elke $a_{ij} = 0$. Als nu dus I niet leeg is, hebben we een partitie I, J waarvoor geldt dat $a_{ij} = 0$ voor alle $i \in I$ en $j \in J$. Dit zou betekenen dat A reducibel is, wat een tegenspraak is met de aanname dat A irreducibel is. Dus I is de lege verzameling en alle coördinaten van z zijn strikt positief. De vector x heeft dus geen coördinaten gelijk aan 0.

Omdat de vector x willekeurige was, heeft geen enkel element van N coördinaten gelijk aan 0. Als nu de dimensie van N groter of gelijk aan 2 is, kunnen we gewoon twee onafhankelijke vectoren pakken en deze zodanig schalen dat de eerste coördinaat gelijk is. Deze vectoren van elkaar aftrekken geeft een element in N met eerste coördinaat 0, wat een tegenspraak oplevert. De dimensie van N is dus kleiner of gelijk aan 1.

□

Een gevolg van deze stelling is dat elke positieve graaf Γ alleen maar positieve deelgrafen kan bevatten. Immers, zij Γ' een deelgraaf van Γ. Zij A' de $k \times k$ matrix behorend bij Γ', A de $n \times n$ matrix behorend bij A.

Er geldt dat $k \leq n$. Omdat $m'(s_i, s_j) \leq m(s_i, s_j)$, is $-\cos\dfrac{\pi}{m'(s_i, s_j)} \geq -\cos\dfrac{\pi}{m(s_i, s_j)}$, dus $a'_{ij} \geq a'_{ij}$ (We gaan er hier van uit de we de vertices zo genummerd hebben dat de eerste k in beide grafen zitten). Stel nu dat Γ' niet positief is, dus dat A' niet positief definiet is. Dan is er een vector $0 \neq x \in \mathbb{R}^k$ waarvoor geldt dat $x^t A' x \leq 0$. Er geldt dat $\sum_{i,j \leq k} a_{ij}|x_i||x_j| \leq \sum_{i,j \leq k} a'_{ij}|x_i||x_j|$, want $a_{ij} \leq a'_{ij} \leq 0$. Verder geldt $0 \leq \sum_{i,j \leq k} a_{ij}|x_i||x_j|$ en $\sum_{i,j \leq k} a'_{ij}|x_i||x_j| \leq \sum_{i,j \leq k} a'_{ij}x_i x_j \leq 0$. Hieruit volgt $\sum_{ij} a_{ij}|x_i||x_j| = 0$. Als we nu x uitbreiden met nullen tot een vector in $\mathbb{R}^n$, zit deze in de nulruimte van A. Omdat elementen in de nulruimte van A geen coëfficienten gelijk aan 0 kunnen hebben, moet dus wel k gelijk zijn aan n.

Uit de ongelijkheden volgt ook dat $0 \leq \sum_{i,j \leq k} a_{ij}|x_i||x_j| \leq \sum_{i,j \leq k} a'_{ij}|x_i||x_j| \leq 0$, dus $\sum_{i,j \leq k} a_{ij}|x_i||x_j| = \sum_{i,j \leq k} a'_{ij}|x_i||x_j|$. Omdat nu $k = n$ is dit een som over alle elementen van A en A' waaruit volgt $a_{ij} = a'_{ij}$ voor alle i, j. Er geldt dus ook $m(s_i, s_j) = m'(s_i, s_j)$. De graaf Γ' is dus precies Γ, wat geen deelgraaf van Γ is. De aanname dat Γ' niet positief definiet is klopt niet, dus Γ' is positief definiet.

We zijn nu in staat om alle positieve grafen te classificeren:

Stelling 20. *Zij Γ een verbonden positief definiete Coxeter graaf. Dan geldt dat Γ een van de grafen A_n, B_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4, I_n, H_3 en H_4 is.*

Bewijs. We zullen laten zijn dat we niet een verbonden positief definiete graaf kunnen vinden die niet in deze lijst staat. Stel namelijk dat Γ een verbonden positief definiete graaf is, die niet een van de bovenstaande is. Zij n het aantal vertices van de graaf, en zij m het hoogste label van een kant. Als $n = 2$, dan weten we als Γ positief is dan en slechts dan als $m < \infty$, in dit geval is $\Gamma = I_m$, dus zit het in de lijst. We moeten dus hebben dat $n \geq 3$.

Omdat nu de graaf $\tilde{I}_1$ geen deelgraaf kan zijn (want $\tilde{I}_1$ is niet positief definiet), kan geen enkel label tussen twee kanten gelijk zijn aan ∞. We moeten dus hebben dat $m < \infty$. Verder, omdat voor geen enkele $k \geq 2$ geldt dat $\tilde{A}_k$ positief definiet is, kan ook $\tilde{A}_k$ geen deelgraaf zijn. Dit betekent dat Γ geen cykels kan bevatten.

Stel nu dat $m = 3$. Als de graaf geen knopen bevat, dan geldt dat $\Gamma = A_n$, wat niet kan omdat we aannemen dat Γ niet een van de bovenstaande grafen is. De graaf Γ bevat dus minstens één knoop. Omdat voor $k \geq 5$ de graaf $\tilde{D}_k$ niet positief definiet is, en deze graaf twee knopen heeft, kan de graaf Γ niet twee knopen bevatten (indien wel, zeg met i kant(en) ertussen, dan is $\tilde{D}_{i+4}$ een deelgraaf, tegenspraak met het feit dat Γ positief definiet is). De graaf bevat dus precies één knoop.

Verder geldt, omdat ook $\tilde{D}_4$ niet positief definiet is, en dit een graaf is die één knoop bevat met 4 uitgaande kanten, dat de graaf Γ maar 3 uitgaande kanten bij de knoop heeft. Stel nu dat de drie uitsteeksels van de knoop respectievelijk a, b en c kanten bevatten, waar voor het gemak we dit zo kiezen dat $a \leq b \leq c$. Als nu elk uitsteeksel meer dan 2 kanten zou bevatten, dus a, b en c zijn alle drie groter dan 2, dan zou gelden dat $\tilde{E}_6$ een deelgraaf is. Omdat $\tilde{E}_6$ niet positief definiet is kan dit niet, dus minstens één uitsteeksel bevat maar 1 kant. Wegens de aanname $a \leq b \leq c$ kunnen we zeggen dat $a = 1$.

Stel nu dat de twee uitsteeksels die bij b en c horen elk minstens 3 kanten bevatten, dus b en c zijn groter of gelijk aan 3. In dit geval is de niet positief definitie graaf $\tilde{E}_7$ een deelgraaf, dus dit kan niet. We kunnen dus er van uitgaan dat $b \leq 2$. Als nu $b = 1$, dan zou $\Gamma = D_{c+3}$, wat niet kan omdat dit een element van de lijst is. Dus $b = 2$. Omdat nu $\tilde{E}_8$ niet een deelgraaf kan zijn, moet gelden dat $2 \leq c \leq 4$, maar in dit geval zou dan Γ een van de grafen E_6, E_7 of $E - 8$ zijn, en die staan op de lijst.

De aanname dat $m = 3$ geeft dus een tegenspraak, dus moet wel gelden dat $m \geq 4$. Omdat nu $\tilde{C}_k$ geen deelgraaf kan zijn voor alle $k \geq 2$, kan er maar maximaal een kant zijn met een label wat groter of gelijk is aan 4 (sterker nog, dit label is m), de rest van de labels is gelijk aan 3. Omdat nu ook $n \geq 3$, zit er sowieso nog een andere kant vast aan een van de twee vertices van de kant met label m. Omdat nu $\tilde{G}_2$ geen deelgraaf kan zijn, moet gelden dat $m \leq 5$, dus $m = 4$ of $m = 5$. Verder geldt ook Γ geen enkele deelgraaf $\tilde{B}_k$ voor $k \geq 3$ kan bevatten, dus Γ heeft geen knopen.

Stel nu dat $m = 4$. Als de kant met label 4 aan een van de twee uiteindes van Γ zou zitten, dan zou $\Gamma = B_n$, wat niet kan. Dus de uiteindes van Γ hebben label 3. Omdat Γ niet $\tilde{F}_4$ kan bevatten, moet dus gelden dat Γ minder dan 5 vertices heeft, dus dat $3 \leq n \leq 4$. Omdat $n = 3$ zou betekenen dat het label 4 aan een uiteinde zit, moet dus gelden dat $n = 4$. Maar dan is $\Gamma = F_4$, wat niet kan omdat dit in de lijst zit. Er geldt dus niet dat $m = 4$.

De enige optie die overblijft is $m = 5$. Omdat de graaf Z_4 niet een deelgraaf kan zijn, moet het element met label m wel aan een uiteinde zitten. Nu geldt dat omdat ook Z_5 geen deelgraaf kan zijn, we minder dan 5 vertices hebben, dus $n = 3$ of $n = 4$. Maar dan is Γ respectievelijk H_3 of H_4, welke allebei op de lijst staan.

Het blijkt dus dat er geen enkele keuze van m en n is waarvoor we een verbonden positief definiet graaf kunnen maken die niet op de lijst staat. Kortom, de verbonden positief definiete grafen in de bovenstaande lijst zijn daadwerkelijk alle verbonden positief definiete grafen. □

We hebben nu dus aangetoond dat elke eindige spiegelingsgroep een positief definiete graaf heeft en we hebben alle verbonden positief definiete grafen gevonden. Het blijkt dat elke van deze verbonden positieve definiete grafen ook daadwerkelijk bij een spiegelingsgroep hoort. Om dit te bewijzen kunnen we een beroep doen op Stelling 6.4 uit [1], of we kunnen voor elk van deze grafen de bijbehorende spiegelingsgroep vinden. We zullen beide niet in deze scriptie doen, maar de constructie van de groepen kan in hoofdstuk 2 van [1] gevonden worden (vanaf deel 2.8), waarmee de classificatie voltooid is.

Wat we ons nog kunnen afvragen is wat er gebeurd als we een spiegelingsgroep W hebben waarvan de graaf niet verbonden is. Uit Stelling 17 volgt dan dat deze groep een direct product is van ondergroepen van W met verbonden grafen (de verbonden componenten). Omdat ondergroepen van een spiegelingsgroep dat zelf ook zijn, is W dan een direct product van spiegelingsgroepen. Andersom is het direct product van twee spiegelingsgroepen ook een spiegelingsgroep. Als bijvoorbeeld W en W' spiegelingsgroepen zijn werkend op vectorruimtes V en V' met respectievelijk dimensie n en n', kunnen we $W \times w'$ laten werken op $V \times V'$, waar we de werking van W en W' zodanig uitbreiden dat W op de eerste n coördinaten werkt en de laatste n' vasthoud en W' op de laatste n' werkt en de eerste n vasthoud. We kunnen dus met wat we gevonden hebben elke spiegelingsgroep vinden.

Bibliografie

[1] James E. Humphreys, *Reflection Groups and Coxeter Groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 1st edition, 2000.

[2] L.C. Grove, C.T. Benson, *Finite Reflection Groups*, Springer, New York, 2nd edition, 1996.

[3] F. Beukers, *Lineaire Algebra (WISB121)*, Departement Wiskunde, UU, Dictaat, 2014.

[4] David S. Dummit, Richard M. Foote, *Abstract Algebra*, John Wiley & Sons, Inc., New Jersey, Third edition, 2004