Samen meer Symbol Sense

Leidt groepswerk tot dieper begrip bij algebra?

Corwin van Schendel

Januari 2017

Bachelorscriptie wiskunde, Universiteit Utrecht

Onder begeleiding van prof. dr. Paul Drijvers

INHOUD

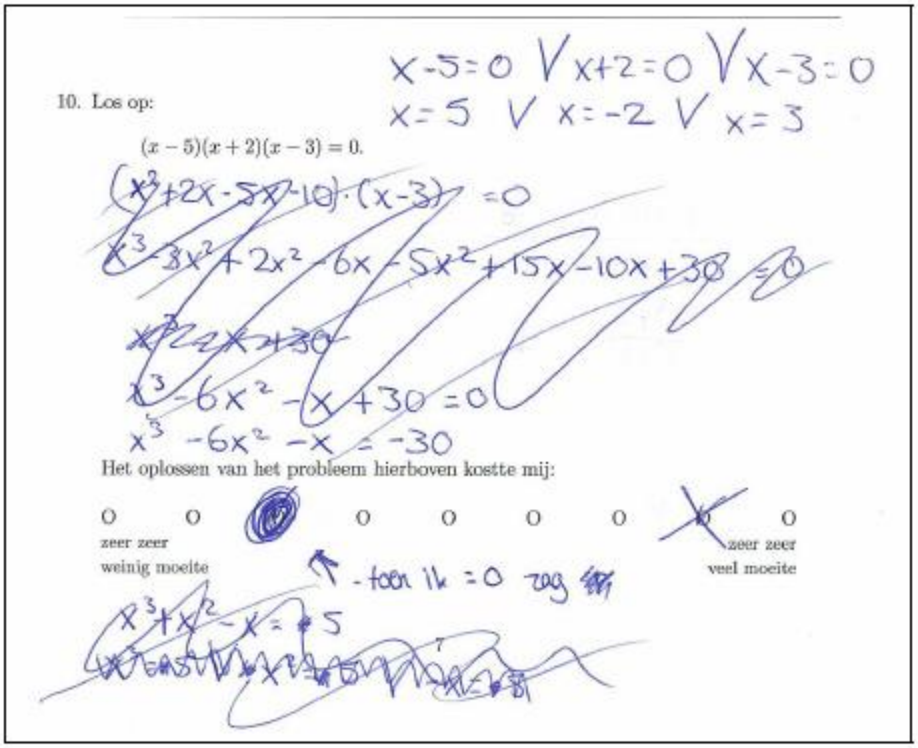
SAMENVATTING

De nieuwe wiskundecurricula voor havo en vwo leggen meer nadruk op wiskundig denken. Een onderdeel hiervan is symbol sense, waarin begrip en “gevoel” voor algebra centraal staan, in plaats van de routineprocedures die bij algebra aan de orde zijn. De vraag is nu wat een goede werkvorm is voor leerlingen om tot betere symbol sense te komen. We onderzoeken of groepswerk een geschikte werkvorm is om symbol sense te ontwikkelen bij leerlingen en, zo ja, onder welke omstandigheden. Hiervoor is een kleinschalig kwalitatief onderzoek onder bovenbouwleerlingen op het vwo met wiskunde B uitgevoerd, waarbij zowel groepen van drie leerlingen als individuele leerlingen een drietal algebraopgaves moesten maken. Hierbij hebben we waargenomen dat de groepen vaker discussiëren over de stof en vaker tot een symbol senseaanpak komen dan individuele probleemoplossers. Derhalve is het aannemelijk dat groepswerk een goede leerstrategie is om tot symbol sense te komen. Dit beperkte onderzoek vormt hiervoor slechts een indicatie. Voor harder bewijs dient verder onderzoek gedaan te worden.

Graag wil ik Paul Drijvers bedanken voor zijn positieve, constructieve manier van feedback geven en het regelmatig meedenken over het onderzoek en het verslag. Daarnaast wil ik O.R.S. Lek en Linge te Culemborg en de betrokken leerlingen en docenten bedanken voor het mede-mogelijk maken van dit onderzoek. Verder bedank ik iedereen die meegelezen, me geholpen of ondersteund heeft of simpelweg geïnteresseerd was in mijn onderzoek, in het bijzonder mijn ouders. Tot slot dank ik Gustav Mahler voor zijn ondersteuning bij het schrijven.

1 INTRODUCTIE

Leerlingen komen bij wiskunde in aanraking met allerlei opgaven waarbij ze algebra dienen te gebruiken. In figuur 1 lost een leerling een opgave op.



Figuur 1: 13-jarige lost opgave op (van Stiphout, 2011)

Je ziet in de doorgehaalde uitwerking dat de leerling allereerst als een soort Pavlovreactie direct haakjes wegwerkt. Voor veel leerlingen hebben haakjes een visuele aantrekkingskracht (*visual salience)* om direct weggewerkt te worden. Hier zijn ze immers vaak uitvoerig op getraind. Nadat de leerling erachter komt dat een derdegraads vergelijking niet oplosbaar is met de geleerde methoden, volgt het besef dat er een product gelijk aan nul staat, wat betekent dat een van de factoren nul moet zijn. Hierna volgt de oplossing direct.

Van Stiphout (2011) becijferde dat minder dan 25% van de onderzochte leerlingen van 13 jaar en ouder dit vraagstuk kan oplossen. Leerlingen zijn mogelijk te geroutineerd om stil te staan bij wat er nu eigenlijk gevraagd wordt en wat ze hierover weten en gaan in plaats daarvan haakjes wegwerken. Met meer afstand naar een vraagstuk kijken, proberen betekenis hieraan te geven en meer *inzicht* in of *gevoel* voor vraagstukken hebben, kan helpen.

Voor dergelijk *dieper* begrip in algebra introduceerde James Fey in 1990 het begrip symbol sense, als logisch vervolg op wat er in de jaren ervoor geschreven is over number sense, het inzicht in de structuur van getallen.

1.1 SYMBOL SENSE ALS DENKACTIVITEIT

Symbol sense past in een groter geheel. In het wiskundeonderwijs komt meer nadruk te liggen op zogeheten wiskundige denkactiviteiten, WDA, bijvoorbeeld in nieuwe examenprogramma's, waar de denkactiviteiten als rode draad door de wiskundevakken gaan lopen (cTWO, 2012). Dit wordt gedaan om meer nadruk te leggen op conceptuele kennis.

> *Bij het vak wiskunde nemen twee soorten kennis en vaardigheid een belangrijke plaats in. De eerste betreft procedurele kennis en vaardigheid, zoals bijvoorbeeld het automatiseren van het oplossen van vergelijkingen of het uitwerken van haakjes. De tweede is conceptuele kennis en behelst inzicht in de onderliggende wiskundige concepten, vermogen om problemen te overzien en vervolgens geschikte oplossingsstrategieën te kiezen. (cTWO, 2012, p.29)*

Deze denkactiviteiten worden omschreven met een aantal kernconcepten: modelleren en algebraïseren, ordenen en structureren, analytisch denken en probleemoplossen, formules manipuleren, abstraheren, logisch redeneren en bewijzen. In het bijzonder gaat het hier dus niet om standaardprocedures en 'trucjes.' Alhoewel wiskundigen deze kenmerken van wiskundige denkactiviteiten herkennen als karakteristieke onderdelen van wiskunde, zijn ze in curricula niet goed zichtbaar of slechts impliciet aanwezig (cTWO, 2012). In de omschrijving van formules manipuleren wordt symbol sense expliciet genoemd:

> *Formules Manipuleren. Het gericht omvormen van formules vraagt om inzicht in de structuur van de formule en om zicht op het te volgen oplossingsproces als geheel. Daarnaast dient de leerling over handmatige vaardigheden te beschikken om deze processen correct uit te voeren. Het gaat dus om een combinatie van 'symbol sense' en formulevaardigheid. Met name hier is het zaak een goede balans te vinden tussen procedurele en conceptuele vormen van kennis. (cTWO, 2012, p.30-31)*

Wiskundige denkactiviteiten, specifiek toegepast op algebra, kunnen we dus zien als symbol senseactiviteiten. Van Streun (2014) legt een soortgelijke link. Symbol sense past dus binnen curriculahervormingen. Symbol sense en de wiskundige denkactiviteiten richten zich namelijk op het belang van conceptuele kennis, hetgeen vaak onderbelicht blijft.

1.2 AANPAK

Verschillende auteurs geven definities en omschrijven wat bijdraagt aan symbol sense. De vraag is echter hoe je in de klas de ontwikkeling van symbol sense kunt bevorderen. Leerlingen samen, in groepjes, laten nadenken over wiskunde wordt in de literatuur niet besproken als manier om symbol sense te bevorderen, terwijl het toch mogelijk is dat groepswerk bijdraagt aan symbol sense. Dit is waar ons onderzoek over gaat. Eerst zullen we de theorie van symbol sense en de theorie van de werkvorm groepswerk afzonderlijk bespreken, waarna we kijken naar of groepswerk leidt tot meer symbol sensegedrag dan individueel leren. Dit doen we aan de hand van de literatuur, waarna we een onderzoeksopzet formuleren en we dit onderzoek uitvoeren om eventuele connecties waar te kunnen nemen. Uit het literatuuronderzoek en waarnemingen uit het praktijkonderzoek kunnen we vervolgens conclusies trekken over of en hoe groepswerk een goede werkvorm is om dieper algebrabegrip te bevorderen.

2 THEORIE VAN SYMBOL SENSE EN GROEPSWERK

Eerst zullen de theorie van symbol sense en de theorie van de klassikale werkvorm van het groepswerk afzonderlijk besproken worden, waarna we deze theorieën met elkaar in verband zullen brengen.

2.1 WAT IS SYMBOL SENSE?

Algebra is meer dan het toepassen van bewerkingen en regels. Je hebt namelijk ook een strategie nodig om bij je doel te kunnen komen. Hiervoor is het handig om inzichten en vaardigheden te hebben die verder gaan dan het plat toepassen van basisprocedures. Iets breder bekeken hebben we het dan over een gevoel voor of inzicht in symbolen, hetgeen we symbol sense zullen noemen. Er is echter geen eenduidige definitie voor dit concept omdat het niet gemakkelijk is om een eenduidige definitie te geven van een begrip dat een soort gevoel voor symbolen aanduidt. Er zijn wel omschrijvingen en definities die op elkaar lijken.

Arcavi omschrijft symbol sense in 1994 en zet het hiermee op de kaart. Hij beschrijft acht vormen van gedrag die uitingen zijn van symbol sense:

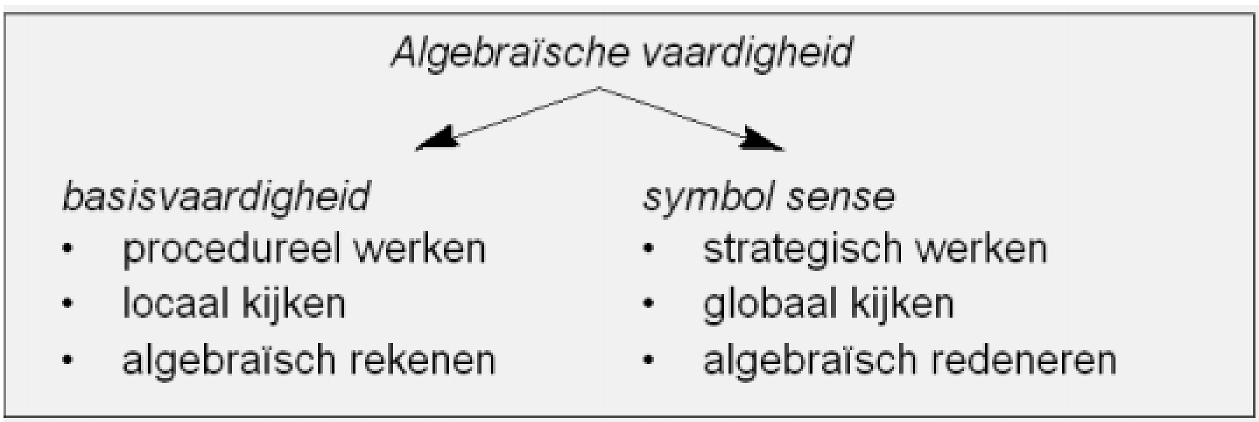
1. Het laten zien van intuïtie voor wanneer wel en niet symbolen te gebruiken.
2. Het uitvoeren van manipulaties met gevoel voor het op te lossen vraagstuk en de betekenis van de symbolen voor dit probleem. Hieronder valt het a priori inspecteren van expressies.
3. Het zelf kunnen construeren en waarderen van expressies.
4. Betekenisvollere definities destilleren door het resultaat van manipulaties te interpreteren.
5. Definities en symbolen handig uitkiezen en deze wijzigen als een methode niet blijkt te werken.
6. Flexibel omgaan met manipulaties: expressies globaal overzien (*gestalt view*) en een doel hebben waar je naartoe werkt en daarmee voorkomen dat je in cirkels werkt door bijvoorbeeld terug te komen op de oorspronkelijke vergelijking (*circularity)*.
7. Niet alleen aan het begin en aan het einde betekenis toekennen aan symbolen, maar ook in tussenstappen gebruik maken van de gekozen betekenis van symbolen.
8. Een gevoel hebben voor dat symbolen verschillende rollen kunnen spelen (bijvoorbeeld variabele, onbekende) en uit de context kunnen herkennen welk symbool wanneer welke rol speelt.

Hiermee wordt symbol sense iets als “a complex and multifaceted ‘feel’ for symbols” (Arcavi, 1994, p.31).

Drijvers en Kop (2012, p.66) stellen dat symbol sense de volgende vaardigheden omvat:

1. *Strategische vaardigheden* en heuristieken om tot een probleemaanpak te komen, het vermogen om daarop overzicht te houden, om daarbinnen handige keuzes te maken of, als een strategie vastloopt, om een andere invalshoek te zoeken.
2. Het vermogen om *globaal naar expressies en formules te kijken*, om de structuur van expressies en subexpressies te herkennen, om de betekenis van symbolen in de context te zien en om expressies op een andere manier weer te geven. Hierbij speelt de proces-object dualiteit een rol.
3. Het vermogen tot *algebraïsch redeneren*. Denk hierbij aan veelal kwalitatieve beschouwingen over termen en factoren in expressies, aan symmetrieoverwegingen of redeneringen met randgevallen.

Het tweede punt hangt samen met *gestalt* view zoals Arcavi (1994) het omschrijft. Verder is de visuele aantrekking (*visual salience*) van delen van expressies belangrijk. Enerzijds is het erkennen hiervan handig, maar anderzijds is het weerstaan van aangeleerde reacties belangrijk. Deze reacties zijn vooral sterk vlak na het leren van nieuwe algebraïsche vaardigheden en creatief hiermee omgaan komt vaak pas later (Tabach & Friedlander, 2013). Haakjes wegwerken bij haakjes of kwadrateren bij wortels helpt je bijvoorbeeld niet altijd verder (Bokhove & Drijvers, 2010).



Figuur 2: Twee kanten van algebraïsche vaardigheid (Drijvers & Kop, 2012)

Wat is wel symbol sense en wat niet? Hoe staat dit zogenaamd diepere begrip in symbolen in relatie tot het simpelweg uitvoeren van algoritmen of, soms nog denigrerender verwoord, trucjes? Drijvers en Kop (2012) stellen dat basisvaardigheden en symbol sense een tweedeling binnen algebraïsche vaardigheid vormen. Onder basisvaardigheden vallen procedures en berekeningen met een lokale focus. Symbol sense is daarentegen strategischer en beredenerend met een globale focus. Dit wordt samengevat in figuur 2. Symbol sense is hiermee niet superieur aan routinevaardigheden, omdat symbol sense en basisvaardigheid soms in elkaar overgaan, ze elkaar versterken en niet zonder elkaar kunnen bestaan, omdat "redeneren pas goed mogelijk is als je de bewerkingen enigszins 'in de vingers hebt', andersom zal bij het algebraïsch rekenen ook enig redeneren nodig zijn, zeker als ze 'automatische piloot' hapert of als de situatie afwijkt van de gebruikelijke" (Drijvers, 2006, p.5).

2.1.1 Voorbeelden van symbol sense

Hier wat voorbeelden van opgaven die met symbol sense gemakkelijker op te lossen zijn dan met voor de hand liggende standaardprocedures.

Voorbeeld 1 (Arcavi, 1994) Los de volgende vergelijking op:

$$|x-2| > |x-6|$$

Een oplossing zonder symbol sense kan bestaan uit het onderscheiden van een aantal gevallen, waarop veel rekenwerk volgt. Echter, het niet gebruiken van symbolen, maar naar een andere representatie overstappen, zoals bij gedragsvorm 1 van Arcavi, is handiger. Door betekenis te geven aan deze uitdrukkingen kan een leerling ontdekken dat er eigenlijk staat: *Voor welke getallen is de afstand tot 2 groter dan de afstand tot 6?* Met een getallenlijn volgt de oplossing direct. Een alternatief is het maken van grafieken bij $f(x) = |x-2|$ en $g(x) = |x-6|$ en aflezen voor welke x geldt dat $f(x) > g(x)$. In beide gevallen volgt redelijk snel dat de ongelijkheid geldt voor alle x groter dan 4.

Voorbeeld 2 (Wenger, 1987) Los op naar v:

$$v\sqrt{u} = 1 + 2v\sqrt{1+u}$$

Een leerling die toegeeft aan de *visual salience* van de wortels en direct gaat kwadrateren maakt het zichzelf erg lastig. Het wordt makkelijker als je door de brei met symbolen heen kijkt, oftewel blijk geeft van *gestalt view* zoals bij gedragsvorm 6 van Arcavi en vervolgens opmerkt dat de wortels slechts afleiden en de vergelijking lineair is in *v*:

$$av = b + cv$$

Veel leerlingen kunnen dit soort vergelijkingen wel oplossen en kunnen afleiden dat de oplossing van deze vorm is (mits $a \neq c$):

$$v = b/(a-c)$$

Voorbeeld 3 (Arcavi, 1994) Vind coördinaten van het midden van de cirkel door (a, b), $(-a, b)$ en $(0,0)$.

We volgen de beschrijving van Arcavi van de aanpak van een leerling.

Allereerst zou het helpen om een (abstract) plaatje bij dit vraagstuk te maken. Dan weet je in welke richting je moet zoeken, wat er nu echt aan de hand is en wat de symmetrieën van dit vraagstuk zijn. Zo kan je bijvoorbeeld concluderen dat het gezochte middelpunt op de *y*-as ligt.

Er kan verwarring optreden als leerlingen dit koppelen aan de standaardcirkelvergelijking van de cirkel, $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$. Hier is (a, b) het midden van de cirkel, terwijl in ons vraagstuk (a, b) een punt op de cirkel is. Het is hier belangrijk om te weten dat variabelen verschillende rollen kunnen hebben (gedragsvorm 8 van Arcavi). De leerling stelt het volgende stelsel op met (m, n) het gezochte middelpunt:

$$(a-m)^2 + (b-n)^2 = r^2$$

$$(-a-m)^2 + (b-n)^2 = r^2$$

$$m^2 + n^2 = r^2$$

Door de eerste en tweede vergelijking te combineren vindt je $ma = 0$. Vervolgens geldt dus dat m of a gelijk aan 0 is. Maar welke? Hier komt symbol sense aan te pas. Door terug te gaan naar de context kan je concluderen dat er bij $a = 0$ geen cirkel is, want alle gegeven punten liggen dan op de y-as. Anderzijds is a willekeurig gegeven en mag derhalve niet gekozen worden. Dus er volgt dat $m = 0$, en dus ligt het gezochte midden inderdaad op de y-as. Het stelsel kan nu verder opgelost worden.

2.1.2 Het ontwikkelen van symbol sense

Het diepere begrip in de structuur van symbolen dat we symbol sense noemen is dus onderdeel van de algebraïsche vaardigheden van leerlingen. Als je de omschrijving van symbol sense bekijkt, dan is het logisch om te concluderen dat het belangrijk is voor leerlingen en dat het dus ontwikkeld moet worden. In lesboeken zijn er vragen die aansturen op het op meerdere manieren kijken naar situaties, zoals opgaven die je op twee manieren laten differentiëren en vervolgens vragen of beide uitkomsten hetzelfde zijn. Kennis over meerdere oplosmethoden en kunnen kiezen wanneer welke het handigste is, past bij symbol sense. De vraag is echter in hoeverre leerlingen een opgave laten maken voldoende is om symbol sense te ontwikkelen:

> *No matter how interesting or innovative a task may appear, it will be the activity the students are led to engage in that will determine if it supports the construction of symbol sense (Arcavi, 1994, p.33).*

In de context van het voorbeeld dat je verschillende manieren van differentiëren moet toepassen, kan een leerling deze manieren simpelweg toepassen en vervolgens opschrijven dat ze inderdaad hetzelfde antwoord opleveren. Hieruit merkt de leerlingen niet noodzakelijk op dat je dus kan kiezen welke methode je gebruikt en dat de ene methode in bepaalde gevallen handiger kan zijn dan de andere. Het is dus belangrijk wat een leerling met een vraag doet. Bepaalde opgaven worden gemakkelijker door een grotere mate van symbol sense. Echter, een dergelijke opgave is niet per definitie een vraagstuk om symbol sense mee te *ontwikkelen*, maar kan dit door leerlingactiviteit wel worden. Wat van invloed is op hoe leerlingen met een opgave omgaan, is het gedrag van de docent. Drijvers (2012, p.41) doet hiervoor een aantal suggesties:

> *Leerlingen zelfstandig laten werken leidt lang niet altijd tot symbol sense. Een goed klassengesprek, waarin een leerling uitlegt hoe hij tot een bepaalde aanpak is gekomen, kan wel helpen. Of u kunt zelf als 'algebra-expert' hardop denkend voordoen hoe u naar een vergelijking of ander algebraïsch probleem kijkt, wat u daarin ziet en hoe dit uw afweging stuurt van de verschillende manieren waarop het kan worden aangepakt. Ook aandacht voor strategieën kan symbol sense bevorderen. Geef leerlingen bijvoorbeeld een groot aantal vergelijkingen om op te lossen, of expressies om te vereenvoudigen, en vraag hen om aan te geven wat een geschikte eerste stap zou zijn en waarom.*

Arcavi (2005) stelt dat het handig is om studenten te vragen naar het niet automatisch gebruiken van symbolen, maar een gewoonte te maken van het eerst maken van een grafiek of plaatje, om hen aan te moedigen om te beschrijven wat ze *zien* en daarover na te denken. Plaatjes maken het gemakkelijker voor leerlingen om het overzicht over het vraagstuk en de oplosmethode te bewaren. Computerhulpmiddelen kunnen hierbij helpen. Hierdoor worden symmetrieën ook eerder zichtbaar.

Drijvers (2006) geeft verder aan dat onderhouden en oefenen niet hetzelfde zijn. Onderliggende inzichten, zoals globaal weten waarom een stelling waar is, dienen ook onderhouden te worden. We merken op dat dit tussendoor koppelen aan en benadrukken van onderliggende inzichten goed door de docent gedaan kan worden.

Concreet is er een aantal vragen die je als docent kan stellen. Met dergelijke vragen laat je leerlingen nadenken over hun manier van vraagstukken oplossen en laat je ze er met meer afstand naar kijken. Wat voorbeelden zijn:

- Waar wil je op uitkomen, waar moeten we heen?
- Wat kan een verstandige eerste stap zijn?
- Hoe kun je de complexiteit terugbrengen?
- Kun je het probleem in verband brengen met iets waar we wel raad mee weten?
- Zijn er randgevallen die je kunt controleren?
- Hoe kwam het dat je dit niet zelf zag?
- Welk idee maakte dat je hiermee verder kon? (Drijvers, 2006, p.6)

Voor het ontwikkelen van basisvaardigheden is het belangrijk om gelijksoortige opgaven te maken om te oefenen, voor symbol sense is het belangrijk dat opgaven divers zijn, "zodat zich af en toe verrassingen voordoen, of zelf[s] crises die uitnodigen tot een frisse kijk op het probleem en mogelijk tot een nieuwe aanpak" (Drijvers, 2012, p.41). In het verlengde hiervan kan het handig zijn om routineoefeningen en opgaven waarbij je inzicht moet tonen en na moet denken over je strategie, te integreren, in de vorm van *productive practise* (Kindt, 2011). Dit zijn bijvoorbeeld opgaven waarbij vergelijkingen gecategoriseerd moeten worden, je meerdere oplossingen moet zoeken en leerlingen meer oplosvrijheid hebben (Arcavi, Drijvers & Stacey, 2017).

Een aantal artikelen stelt dat herkennen van gevallen als $A * B = 0 \rightarrow A = 0$ of $B = 0$ getuigt van symbol sense. Echter, in een aantal wiskundemethodes, zoals Moderne Wiskunde vwo, wordt dit als regel gepresenteerd en trainen opgaven leerlingen hierin. Het is paradoxaal (Drijvers, 2012), maar zodra je expliciet bepaalde vormen van symbol sense gaat trainen, is het resultaat eigenlijk geen symbol sense meer, maar een basisvaardigheid. Desalniettemin is het goed om bepaalde symbol-sensevaardigheden expliciet te oefenen.

2.2 THEORIE VAN GROEPSWERK

Onder groepswerk verstaan we groepen leerlingen die samen werken aan vraagstukken en op deze wijze samen leren. Soms wordt groepswerk breder gezien en vallen samenzittende leerlingen die individueel aan opgaven werken onder groepswerk. Onder andere hierdoor zijn groepswerk en samenwerkend leren, zoals het in de literatuur vaak genoemd wordt, strikt genomen niet hetzelfde, maar zullen we ze toch als zodanig beschouwen. *Adequaat* groepswerk – zonder samenzittende individuele sommenmakers – zoals wij dat zullen bekijken is namelijk een prominente vorm van samenwerkend leren. Afhankelijk van wat leerlingen doen, wat de docent doet en hoe de opdrachten vormgegeven zijn kan groepswerk positieve effecten hebben op het leren van leerlingen. Cohen (1994) noemt hiervoor een aantal doelen:

- Meer leeropbrengst (onthouden en begrijpen, feitenkennis)
- Betere conceptuele kennis en hogereordeleren en -denken
- Gelijkwaardigheid tussen leerlingen

Daar voegen we aan toe dat leerlingen ook *leren samenwerken*, een vaardigheid die leerlingen later in hun leven regelmatig nodig kunnen hebben.

In Lessen in Orde (Ebbens, 2013) staat een opsomming van (meta-)studies die laten zien dat de leerdoelen van Cohen inderdaad behaald worden en dat samenwerkend leren een effectieve leerstrategie is, zeker in relatie tot strategieën voor individueel leren. Dit kunnen we verklaren door te kijken naar voordelen van groepswerk, waarvan Burke (2011) er een aantal noemt. Door gecombineerde kennis en andere achtergronden kan een groep problemen beter en creatiever oplossen. Zo stimuleert groepswerk creativiteit. Verder worden groepsdiscussies beter herinnerd dan materiaal uit andere presentatieformats, onder andere omdat de leerling hier actief betrokken is geweest bij het creëren van het antwoord. Hierdoor zorgen groepsoplossingen voor meer voldoening dan oplossingen die de docent voordoet. Bennett (2015) merkt hierbij echter op dat dergelijke argumenten voortborduren op de constructivistische leertheorie. Hierbij kan het zo zijn dat zelf een stelling, methode of antwoord construeren tot misconcepten of ineffectieve besteding van lestijd leidt.

Ebbens (2013) noemt vijf belangrijke kenmerken van adequaat groepswerk, waarvan de eerste drie als primair worden gezien:

- Positieve wederzijdse afhankelijkheid: de leerlingen hebben elkaar nodig.
- Individuele aanspreekbaarheid: leerlingen zijn afzonderlijk aanspreekbaar en verantwoordelijk voor de eigen bijdrage en het groepsresultaat.
- Directe interactie: leerlingen moeten direct met elkaar kunnen overleggen en spreken. Groepsgrootte en opstelling zijn hierop van invloed.
- Sociale vaardigheden: betere sociale vaardigheden leiden tot een beter functionerende groep.
- Reflectie op inhoud en leerprocessen: dit zorgt ervoor dat leerlingen leren om in groepen te werken en dat groepen steeds effectiever functioneren.

Anderen zoomen specifiek in op leerlinggedrag, docentenrollen en soorten opgaven om adequaat groepswerk te omschrijven.

2.2.1 Leerlinggedrag

Het leerlinggedrag dat door onder andere Dekker & Elshout-Mohr (2007) beschreven wordt als positief voor groepswerk, omvat vier elementen: het tonen van eigen (denk)werk, het uitleggen van dit werk, het verantwoorden van dit werk en het reconstrueren ervan. Tonen en vertellen maakt je bewust van je werk, bij uitleggen ga je er dieper over nadenken. Verantwoorden is belangrijk om eventuele foute stappen op te kunnen sporen. Het reconstrueren of beter maken van je werk doe je zodra je erachter komt dat het beter kon. Deze stappen dragen allemaal bij aan het verhogen van het niveau van het (denk)werk.

Om deze elementen effectiever te maken dienen leerlingen in gesprek te gaan met elkaar over het werk. Ze discussiëren dan bijvoorbeeld over welke van strategie het beste is. Fouten komen aan het licht als een leerling het werk tegenover een kritische groepsgenoot niet kan verantwoorden.

Er is veel geschreven over welke groepsgrootte optimaal is. Burke (2011) vat dit samen. Groepen van twee worden buiten beschouwing gelaten, omdat ze te klein zijn en zo het voordeel van gecombineerde kennis te klein is. Zodra een groep te groot wordt, hebben sommigen eerder niks te doen en ontstaat meeliftgedrag. Tegelijkertijd is er bij grotere groepen meer kennis en kunde om te combineren. Daarom worden groepen met drie of vier deelnemers aangeraden. Daarnaast is het bij korte of kleine taken beter om kleinere groepen te nemen.

2.2.2 Rol van de docent

Als docent is het belangrijk om rekening te houden met de vijf kenmerken van adequaat samenwerkend leren van Ebbens (2013). Bijvoorbeeld door de werkvorm, klasopstelling en eventuele feedback of becijfering erop aan te passen. Door individuele leerlingen in een klassengesprek te vragen naar de werkwijze van het groepje weet ieder groepslid bijvoorbeeld dat hij mee moet doen en ontstaat individuele aanspreekbaarheid.

Burke (2011) raadt aan om als docent de groepen te selecteren. Leerlingen zelf groepen laten vormen leidt tot vriendengroepen die meer sociaal gedrag vertonen dan dat ze met de opdracht bezig zijn. Het is een goed idee om groepen langdurig te laten bestaan, zodat de leerlingen op elkaar ingewerkt raken, hetgeen voor betere samenwerking en gemeenschappelijke doelen zorgt, en altruïstisch en meeliftgedrag kan voorkomen (Davies, 2009).

Het is verder belangrijk om leerling-leerling interactie te creëren. Dekker & Elshout-Mohr (2007) benadrukken dat je als docent louter procesmanager dient te zijn. Dit houdt in dat je geen inhoudelijke vragen beantwoordt, maar alleen procesmatige wedervragen stelt, om leerlingen zo zelf antwoorden te laten vinden. Je hoopt dat leerlingen dan soortgelijke vragen aan elkaar gaan stellen. Zodra je als docent inhoudelijk feedback gaat geven aan leerlingen, zou dit tot verwerping van eigen denkwerk van leerlingen leiden en niet tot verantwoording of uitleg van het denkwerk. We willen bij goed groepswerk discussie tussen leerlingen, waarbij de docent niet als alwetende het goede antwoord geeft.

2.2.3 Geschikte opdrachten

Opdrachten zijn niet per definitie geschikt voor groepswerk. Simpele rijtjessommen om standaardvaardigheden op tempo uit te kunnen voeren zijn an sich minder geschikt voor groepswerk. Dekker & Elshout-Mohr (2007) geven een aantal criteria voor opgaven die goed geschikt zijn voor groepswerk. Er hoeft niet per se aan alle criteria voldaan te worden.

- Realistische opgaven: de opgaven moeten betekenisvol zijn voor leerlingen; aansluiten op de leefwereld.
- De opgave moet voldoende complex zijn, waardoor de kennis van een individueel groepslid vaak niet voldoende is, zodat wederzijdse afhankelijkheid ontstaat.
- Er moet iets geconstrueerd worden, want zodra je iets creëert als een grafiek of formule wordt het denkwerk zichtbaar en kan daarover gediscussieerd worden.
- Niveauverhoging: er is geen oplossing op een lager niveau mogelijk die tot een even goed antwoord leidt.

Davies (2009) benoemt dat opdrachten die niet te verdelen zijn, of dergelijke opdrachten waarbij de deelnemers geen instructie krijgen over hoe ze moeten samenwerken, leiden tot disjuncte opdrachten waar slechts één groepslid aan werkt. Dit is een risico bij wiskundeopdrachten. Als je de groepen niet aanstuurt op het samen nadenken en proberen, loop je het risico dat de beste student de opdracht alleen oplost en de rest meelift. Instructies zoals ‘zoek meerdere antwoorden,’ of het creëren van individuele aanspreekbaarheid kunnen dit meeliften voorkomen.

2.2.4 Adequaat groepswerk

We kunnen dus stellen dat er veel voorwaarden zijn voor groepswerk en dat er op allerlei niveaus manieren zijn om hieraan bij te dragen. Om hier later gemakkelijker naar terug te kunnen verwijzen zullen we hieronder adequaat groepswerk afbakenen. Hierin zijn aspecten geselecteerd die volgens ons de kern van het brede verhaal bevatten en relatief snel haalbaar zijn om toe te passen, zoals in een eerste les met een nieuwe klas of bij ons onderzoek. De kern hiervoor bestaat uit de eerste criteria voor goed groepswerk van Ebbens (2013), aangevuld met wat Dekker & Elshout-Mohr (2007) over leerling-leerlinginteractie bij goed groepswerk zeggen.

- **Positieve wederzijdse afhankelijkheid:** de leerlingen hebben elkaar nodig om de opdracht op te lossen, terwijl dit kan worden bereikt door opdrachten waarbij overleg handig is ('zoek meerdere oplossingen') of door de instructie ('overleg over je antwoord').
- **Individuele aanspreekbaarheid:** leerlingen zijn afzonderlijk aanspreekbaar en verantwoordelijk voor hun eigen bijdrage en het resultaat. Dit kan door middel van individuele becijfering, maar ook door willekeurige groepsleden te vragen om klassikaal antwoorden toe te lichten. Als je dit vooraf communiceert, weten individuele leerlingen dat ze moeten begrijpen wat de groep voor stappen zet.
- **Directe leerling-leerlinginteractie met een docent als procesmanager:** leerlingen moeten direct met elkaar kunnen overleggen en spreken. Een groepsgrootte van drie of vier is hiervoor handig. Daarnaast is er louter contact tussen leerlingen, waarbij ze overleggen en discussiëren over het werk. Hierbij treedt de docent op als procesmanager. Door alleen wedervragen te stellen ('Probeer eens iets. Wat doe je normaalgesproken bij dit soort vragen?') voorkom je dat je als docent als alwetende het antwoord souffleert en zorg je ervoor dat leerlingen meer op elkaar zijn aangewezen.

2.3 KAN GROEPSWERK SYMBOL SENSE BEVORDEREN?

Ons vermoeden is dat groepswerk als werkvorm een goede bijdrage kan leveren aan de ontwikkeling van symbol sense bij leerlingen. Dit zullen we onderbouwen aan de hand van de besproken theorie van beide begrippen.

Allereerst kunnen we symbol sense zien als hogereordedenken en een vorm van conceptuele kennis. Dit is precies een van de doelen voor groepswerk van Cohen (1994).

Drijvers (2012) schreef over klassengesprekken om te laten zien hoe je tot een bepaalde aanpak komt, om leerlingen te laten zien dat er verschillende mogelijkheden zijn en welke afwegingen hieraan bijdragen. Hierdoor laat je leerlingen nadenken over strategieën. Dergelijke afwegingen hoop je dat leerlingen bij groepswerk zelf gaan maken, doordat leerlingen met elkaar in discussie gaan over de stof en verschillende aanpakken en opties afwegen. Vraagstukken die leerlingen vragen om meerdere opties te geven, sturen hier expliciet op aan.

In het verlengde hiervan draagt het uitleggen van je eigen werk bij aan symbol sense (Drijvers, 2012). Dit uitleggen is de kern van het leerlinggedrag bij samenwerkend leren van Dekker & Elshout-Mohr (2007), waarbij leerlingen hun werk tonen, in discussie gaan en gedachten bijstellen. Door als docent dergelijk gedrag uit te lokken, draagt het groepswerk dus bij aan symbol sense. Hiernaast is het belangrijk voor symbol sense om na te denken over je methodes en te beschrijven wat je doet en ziet (Arcavi, 2005). Dit kan je tevens uitlokken door leerlingen te laten discussiëren over hun aanpakken.

De zeven vragen van Drijvers (2006) die je aan leerlingen kan stellen om bij te dragen aan symbol sense, zijn hoofdzakelijk procesvragen. Dit is dan ook het soort vragen dat Dekker & Elshout-Mohr (2007) willen dat je stelt als procesmanager om goed groepswerk te bewerkstelligen. Verder is dit het type vraag waarvan je wil dat leerlingen ze aan elkaar stellen. We kunnen uit deze parallellen concluderen dat groepswerk bijdraagt aan leerling-leerlinginteractie en dat hierbij vragen en overwegingen die bijdragen aan symbol sense aan bod komen.

We zien dat de criteria voor groepswerk- en symbol senseopgaven op elkaar lijken. Diverse opgaven met verrassingen en onverwachte wendingen die leiden tot crises, een frisse kijk en een andere aanpak van het probleem, dragen bij aan symbol sense (Drijvers, 2012). Dit komt overeen met de criteria voor goede groepswerkopgaven van Dekker & Elshout-Mohr (2007), in het bijzonder dat het werk voldoende complex moet zijn en moet leiden tot niveauverhoging. Echter, de mogelijkheid tot een oplossing op een lager niveau kan goed zijn bij symbol sense opgaven, terwijl Dekker & Elshout-Mohr (2007) stellen dat dit juist niet goed is bij groepswerkopgaven. Onderdeel van diezelfde kenmerkenlijst is dat er iets geconstrueerd moet worden bij groepswerk, iets dat ook bij symbol sense de voorkeur geniet: symbolen effectief gebruiken om je doel te bereiken.

Het is derhalve aannemelijk dat groepswerk leidt tot symbol sense. Echter, het groepswerk moet dan wel zo goed mogelijk plaatsvinden met geschikte opgaven, zoals beschreven in sectie 2.2.4. Het is zelfs mogelijk dat deze bijdrage aan symbol sense beter gebeurt dan bij directe instructie, aangezien samenwerkend leren – mits goed uitgevoerd – een effectievere leerstrategie is dan bijvoorbeeld directe instructie (Ebbens, 2013).

2.4 ONDERZOEKSVRAAG

We zullen deze theoretische ondersteuning van ons idee dat groepswerk een goede werkvorm is om symbol sense te bevorderen, proberen waar te nemen. De vragen die we willen beantwoorden met het beperkte praktijkonderzoek zijn:

Kan groepswerk bijdragen aan de ontwikkeling van symbol sense bij leerlingen?

Indien deze vraag positief beantwoord kan worden:

Onder welke omstandigheden draagt groepswerk bij aan symbol sense bij leerlingen?

Concreet zullen we kijken naar of de manier van probleemaanpak verschilt tussen groepen en individuen en of de groepen inderdaad meer symbol sensegedrag vertonen. Daarnaast zagen we in sectie 2.3 dat goed groepswerk symbol sense zou moeten bevorderen. Het is derhalve interessant en relevant om bij vraag twee in het bijzonder te kijken naar in hoeverre het groepswerk *goed* plaatsvindt, zoals omschreven in sectie 2.2.4. Het is belangrijk om op te merken dat de 'omstandigheden' van de tweede vraag niet gevarieerd gaan worden. We gaan kijken naar welke omstandigheden we zien die bijdragen aan symbol sense en hoe dit verschilt tussen groepen en individuen: hoe verschilt hun aanpak?

Onder groepswerk verstaan we een groepje leerlingen dat samen aan de opdracht werkt, aangemoedigd om samen te discussiëren over probleemaanpak en strategie, waarbij de docent louter procesmanager is. Hierbij laten we ons inspireren door de manieren om groepswerk *adequaat* vorm te geven (2.2.4). Onder symbol sensegedrag verstaan we gedrag zoals beschreven in sectie 2.1. We zullen dit bij de onderzoeksopzet specifiek afbakenen. Verder ligt de focus op bovenbouwleerlingen vwo met wiskunde B.

3 METHODE

We willen kijken of we de in sectie 2.3 beschreven connectie ook terug kunnen zien: kunnen we waarnemen dat groepswerk inderdaad geschikt is om symbol sense te ontwikkelen? Het is niet haalbaar om in een kleine scriptie langetermijngevolgen te onderzoeken, dus we zullen alleen kijken naar het verschil in aanpak en gedrag tussen groepswerk en individueel werk. De vormgeving van dit onderzoek wordt hieronder beschreven. Globaal gezien was het plan om drie opgaven aan leerlingen voor te leggen in twee condities: in groepen en individueel, om vervolgens te kijken of we een verschil in aanpak kunnen waarnemen.

3.1 ONDERZOEKSGROEP EN OPZET

De groep waarbij het onderzoek werd uitgevoerd bestaat uit bovenbouwleerlingen op het vwo met wiskunde B. Onderbouwleerlingen hebben namelijk een groot deel van de algebraïsche basisvaardigheden nog niet geleerd. De leerlingen komen uit diverse klassen, namelijk één vijfde klas vwo en twee zesde klassen vwo. We kiezen voor verschillende klassen om de uitvoerbaarheid te vergroten, want anders zou één docent gedurende een aantal lessen steeds leerlingen moeten missen. Per klas werden steeds vier leerlingen door de docent gekozen, met de vraag of de docent *communicatieve leerlingen van gemiddeld niveau* wilde selecteren, om te voorkomen dat de docent hele sterke of zwakke leerlingen selecteert of dat groepjes amper communiceren. Vervolgens bepaalde een dobbelsteenworp welke van de vier leerlingen als individu aan de slag zou gaan, waarna de overige drie leerlingen als groep aan de slag gingen. Door deze dobbelsteenworp kunnen we stellen dat de verdeling over groepen en individuen eerlijk en willekeurig plaatsvindt en hier dus geen selectiebias is. Er zijn acht groepen en acht individuen onderzocht. Voor elke klas waar we leerlingen uit onderzoeken, willen we dat de verhouding groepjes en individuen gelijk is, om de kans dat iets recent behandeld is en daardoor beter gaat, minder belangrijk te maken. Steeds kregen ze 20 minuten om aan de drie vragen te werken. Deze keuze is gemaakt om binnen één lesuur gemakkelijk twee groepjes en twee individuen te kunnen onderzoeken. We zullen hieronder de aanpak voor de groepjes en de individuen toelichten.

De groepen bestaan uit drie leerlingen, mede door wat we in 2.2.1 beschreven dat Burke (2011) erover zegt. Het betreft een korte taak en we willen dat leerlingen met zo weinig mogelijk training in of uitleg over groepswerk actief meedoen. Daarnaast willen we niet te veel meeliftgedrag, wat bij grotere groepen een risico is. Hierom kiezen we voor 3 in plaats van 4 leden per groep. Een groep van twee wordt als aparte categorie beschouwd, die we buiten beschouwing laten.

De groepen en individuen kregen een gezamenlijke uitleg over de opdracht, met een specificatie die op het opdrachtenblad staat (zie Appendix A). De uitleg was als volgt:

> Jullie gaan voor een onderzoek twintig minuten lang aan drie opgaven werken. De eerste twee opgaven zijn het belangrijkste, de derde is een bonusopgave voor als je snel klaar bent. Drie van jullie gaan dit in een groepje doen, de ander werkt individueel. Met een dobbelsteen bepaal ik zo wie er individueel aan de opdracht zal werken. Je krijgt er geen cijfer voor en de video om dit te filmen wordt alleen gebruikt voor het onderzoek. Lees voordat je begint goed wat er op het opdrachtblad staat.

3.1.1 Aanpak bij groepen

De volgende specifieke instructies stonden bovenaan het opdrachtblad voor de groepen:

- Overleg als groep en kom samen tot één uitgeschreven oplossing.
- Als je er niet uit komt, probeer wat dingen, en vraag je af of het beter, handiger of efficiënter kan.
- Maak eerst opgave 1 en 2. Opgave 3 is extra.

De leerlingen mochten vervolgens twintig minuten aan de drie vragen werken. Als ze na 10 minuten nog met de eerste vraag bezig waren, kregen ze de vraag om door te gaan met de tweede vraag. Onduidelijkheden over de opdracht werden eventueel toegelicht, maar inhoudelijke vragen werden niet beantwoord.

De mogelijkheid om na afloop van het maken van de opgaven, wat vragen over de aanpak te stellen, werd opengehouden voor bij groepjes die te weinig communiceren. Er kon eventueel, mocht dit communiceren evident fout gaan, tijdens het groepswerk worden ingegrepen.

3.1.2 Aanpak voor individuen

De volgende instructies stonden bovenaan het opdrachtblad voor de individuen:

- Schrijf zoveel mogelijk op, waarbij je ook probeersels leesbaar opschrijft.
- Als je er niet uit komt, probeer wat dingen, en vraag je af of het beter, handiger of efficiënter kan.
- Maak eerst opgave 1 en 2. Opgave 3 is extra.

Het is belangrijk om de instructies voor individuen en groepen voldoende vergelijkbaar te maken, daarom lijkt deze instructie sterk op die van de groepen.

Achteraf was er steeds een nagesprek met het individu om eventueel te vragen naar de aanpak en om erachter te komen of bepaalde stappen gebeurden vanuit symbol sense of vanuit procedurele kennis.

3.2 De opgaven en het hierbij te observeren gedrag

Voor de opgaven hadden we een aantal eisen en wensen. Ten eerste moet de opgave algebraïsch van aard zijn. Verder moet de opgave uitgebreid maar uitvoerbaar zijn. We willen namelijk niet dat groepen of individuen in stap één vastlopen en niks kunnen proberen. Daarom gaat de voorkeur uit naar vragen die lijken op wat de leerlingen geleerd hebben, waardoor we tevens naar *visual salience* kunnen kijken. De vraag heeft bij voorkeur meerdere mogelijke oplosmethodes, waaronder een evidente lange routine-uitwerking en een korte, handige symbol senseaanpak. Verder dient het totaal van de vragen in 20 minuten op te lossen te zijn. Hiervoor zijn kale vergelijkingen handig, want een contextopgave is waarschijnlijk te lang om te passen in de beschikbare tijd.

Per opgaven zullen we beschrijven welk gedrag we als *symbol sense* zullen zien. Daarnaast zullen we aangeven welk gedrag we als *geen symbol sense* zullen zien. Dit kan overkomen als een overbodige nuance, maar het is niet per se zo dat er *symbol sense* is als er niet wordt gekozen voor een aanpak die getuigt van *geen symbol sense* en vice versa. Het niet wegwerken van haakjes als dat niet nodig is, getuigt bijvoorbeeld niet direct van symbol sense, maar het wel wegwerken hiervan getuigt van geen symbol sense.

Opgave 1 (Arcavi, 1994) Voor welke x geldt:

$$\frac{2x+3}{4x+6}=2$$

De opmerking dat de noemer tweemaal de teller is en dat het daarom nooit waar is, wordt als symbol sense gezien. Het oplossen van de vergelijking en $x=-\frac{3}{2}$ vinden, zien we als de (foutieve) routineaanpak. Een oplosser die door het invullen van deze x ontdekt dat deze potentiële oplossing niet voldoet, toont in onze ogen (nog) geen symbol sense. Zodra de oplosser hierdoor gaat nadenken over wat er aan de hand is, waarom deze oplossing niet voldoet en alsnog tot bovenstaand inzicht komt, zien we dit als symbol sense. Een methode waarbij niet wordt gecontroleerd, wordt bestempeld als 'geen symbol sense.'

Deze vergelijking test het betekenis toekennen aan vergelijkingen en het a priori inspecteren en factoriseren om meer betekenis te kunnen geven. Verder wordt het controleren van oplossingen getest.

Heel concreet observeerden we het volgende gedrag, aanpak of type antwoord:

1.1 *Controleren van de oplossing.* Het niet doen betekent geen symbol sense

1.2 *Concluderen dat er geen oplossing is.* Dit getuigt van symbol sense.

1.3 *Het herkennen van (a) de verhouding die er moet zijn en (b) de verhouding die er is* ($\frac{1}{2}\neq 2$). Dit getuigt van symbol sense.

Opgave 2 (Geïnspireerd door Van Stiphout, 2011)[1] Voor welke x geldt:

$$x(x-1)(x+2)=0$$

Het gehoorzamen aan de *visual salience* waardoor haakjes worden weggewerkt, zien we als geen symbol sense. Het direct zien van de oplossingen kan getuigen van symbol sense, maar kan ook het simpel toepassen van $A*B=0\rightarrow A=0$ of $B=0$ zoals dat in sommige leerboeken wordt gepresenteerd, zijn.

[1] De eerste twee groepen hebben deze vraag niet gekregen. Het bleek na de eerste onderzoeksronde dat opgave 1 erg snel gedaan werd, maar opgave drie te lastig was voor velen. Daarom hebben we opgave 2 geïntroduceerd bij de latere sessies. Opgave 3 werd hier in eerste instantie als 'bonus' bestempeld, maar alle groepen zullen hieraan toe komen.

We kijken specifiek naar of de haakjes alsnog worden weggewerkt, omdat dit informatie kan geven over het controleren van twijfel. Het kan ook betekenen dat een oplosser overbodig werk doet.

We verwachten dat leerlingen op het vwo wel een factor x kunnen uitdelen, maar geen lastigere polynoomdelingen kunnen uitvoeren. We hebben dan ook voor een eerste factor x gekozen, als aanpassing op wat Van Stiphout (2011) gebruikte, om de routineaanpak toegankelijker te maken dan bij een andere eerste factor dan x.

We waren bij deze vraag op zoek naar het volgende gedrag:

2.1 *Haakjes wegwerken*. Dit getuigt van geen symbol sense.

2.2 *Direct oplossing herkennen*. Dit betekent symbol sense.

2.3 *Na het herkennen van de oplossing alsnog haakjes wegwerken.* Hieraan kennen we geen speciale betekenis toe, maar het kan een teken zijn van proberen, discussiëren of verifiëren.

Opgave 3 (Wenger, 1987) Voor welke *v* geldt:

$$v\sqrt{u} = 1 + 2v\sqrt{1+u}$$

We hebben deze vergelijking eerder besproken. Door te gehoorzamen aan *visual salience* belandt de oplosser in *circularity*: er blijven wortelvormen in de vergelijking aanwezig. We zijn benieuwd naar of en hoe deze cirkel doorbroken wordt. Het doorbreken hiervan past bij symbol sense. Het opmerken, met of zonder vaktaal, dat deze vergelijking lineair is in *v* getuigt van *gestalt view*; dat de oplosser inzicht en overzicht heeft

We bekeken hierbij het volgende gedrag, aanpak of type antwoord:

3.1 *Kwadrateren.* Dit betekent een afwezigheid van symbol sense.

3.2 *Foutief kwadrateren*. Dit getuigt van het niet onder controle hebben van de routineaanpak.

3.3 Herkennen dat delen die afhankelijk van u zijn, niet relevant zijn voor de aanpak. Dit getuigt van symbol sense.

3.4 *Eindantwoord onafhankelijk van v*. Het niet adequaat beantwoorden van de vraag getuigt van slecht lezen ofwel het op de automatische piloot enkele trucjes uitvoeren.

3.5 *De correcte oplossing vinden.* Dit getuigt van symbol sense.

3.3 DATA EN ANALYSE

Voor alle deelnemende partijen (groep of individu) werd het ingeleverde werk geanalyseerd. Hierbij noteren we uit welke klas ze komen, om effecten met betrekking tot stof die net behandeld is te kunnen benoemen. Daarnaast worden de geslachten genoteerd. Los van of mannen of vrouwen verwacht worden beter te presteren in groepen of als individu, is het goed om dit erbij te zetten mochten dergelijke kanttekeningen gemaakt worden.

Groepen die aan het werk zijn en nagesprekken met de individuen werden gefilmd. Tijdens het terugkijken van dit materiaal werd een verslag gemaakt van de gebeurtenissen, waarbij werd genoteerd welke aanpak werd gekozen en waarom. Er werd niet voor een transcript gekozen, omdat dit veel arbeidsintensiever is. Specifiek werd hierbij gelet op de gedragsvormen die we beschreven bij de opgaven, alsmede twee algemene gedragsvormen die we nog zullen beschrijven. Hierdoor konden we zien of de aanpak verschilt en of we kwalitatief iets over deze aanpakken konden zeggen: hoe komen groepen of individuen tot een symbol sense-oplossing en verschilt dit?

De volgende twee algemene gedragsvormen werden bestudeerd:

> **A1.** *Discussie of twijfel of iets mag.* Dit getuigt van het nadenken over strategie. Het discussiëren over de stof draagt bij aan symbol sense (zie 2.1.2). Twijfel of iets mag kan leiden tot het nagaan of dingen waar zijn, hetgeen bijdraagt aan symbol sense. We kiezen bewust voor zowel discussie als twijfel, omdat discussie bij een individu niet mogelijk is en twijfel of iets mag in groepen leidt tot discussie.
>
> **A2.** *Het proberen van methoden.* Het proberen van dingen voorkomt dat sommigen direct na het lezen van de vraag al vastlopen, omdat ze simpelweg niet weten hoe te beginnen. Het niet beginnen aan een vraagstuk maakt het lastiger om op te lossen dan wel iets proberen.

4 RESULTATEN

Een globale beschrijving van de door de leerlingen gebruikte oplosmethoden en het verloop van de aanpak, met een nadruk op de dertien omschreven gedragsvormen van hoofdstuk 3, staat in Appendix B.[2]

De resultaten voor respectievelijk groepen en individuen vatten we samen in tabel 1 en 2. We lichten de vorm van deze tabellen toe. We noteren een 1 als iets wel plaatsvond, anders een 0. In enkele gevallen zorgt twijfel ervoor dat we 0,5 noteren. *Tot.* geeft vervolgens het totaal van hetgeen omschreven is weer. *M/V* geeft de man/vrouw-verhouding aan. Het eerste getal bij *klas* geeft het leerjaar vwo aan, het tweede geeft de klas aan. Alle klassen behalve *6-1* zijn van dezelfde docent.

4.1 RESULTATEN GROEPSWERK

	Nummer	1	2	3	4	5	6	7	8	Tot.
	Klas	5-1	5-1	6-1	6-1	5-1	5-1	6-2	6-2	
	M/V	0/3	0/3	1/2	2/1	0/3	0/3	1/2	1/2	5/19
A1	Discussie of twijfel of iets mag	1	1	0	1	1	1	1	1	7
A2	Proberen	1	1	1	0	0	1	1	0	5
1.1	Controleren	0	1	0	1	1	1	0,5	1	5,5
1.2	Concluderen dat er geen oplossing is	0	1	0	1	1	1	0	1	5
1.3a	Verhouding herkennen die er moet zijn. (2)	0	1	0	1	1	0	0	0	3
1.3b	Verhouding herkennen die er is (1/2)	0	0	0	1	1	0,5	0	0	2,5
2.1	Haakjes wegwerken			0	0	0	0	0	0	0
2.2	Direct de oplossing herkennen			1	1	1	1	1	1	6
2.3	Naderhand haakjes wegwerken			1	0	1	0	0	0	2
3.1	Kwadrateren	1	1	1	0	1	1	1	0	6
3.2	Kwadrateren en hierbij een fout maken	0	1	1	0	0	0	1	0	3
3.3	Herkennen dat u niet relevant is.	1	0	0	0	0	0	0	0	1

[2] De papieren opgavebladen die de groepen en individuen gemaakt hebben zijn op aanvraag bij de auteur beschikbaar. De videobeelden zijn in speciale gevallen op aanvraag ter inzage beschikbaar.

3.4	Eindantwoord is onafhankelijk van v	1	0	1	1	0	0	1	1	5
3.5	De goede oplossing vinden	0	0	0	1	0	0	0	1	2

Tabel 1: Resultatentabel groepen

Tabel 1 vat de resultaten van het onderzoek naar de groepen samen. Hierin valt op dat alle groepjes op één na discussie hebben over de aanpak. De geringe sturing van het onderzoek was voldoende om leerling-leerling interactie te creëren in bijna alle groepen. Deze discussie leidt tot gesprekken over de stof. Deze discussie ontstaat vooral wanneer de gevonden waarde bij de eerste opgave niet blijkt te voldoen. Verder ontstaan er bij opgave 3 vaak discussie over de aanpak, zo weet de vijfde groep dat haakjes wegwerken een mengterm oplevert, maar “dat is er eentje minder.” Deze discussies dragen bij aan symbol sense, zoals we eerder zagen in sectie 2.3. Verder zien we dat meer dan de helft van de groepen wat probeert. Een kanttekening hierbij is dat twee van de groepen die niets probeerden, direct de juiste oplossingen vonden. Proberen heeft niet per se met symbol sense aanpak te maken, maar draagt wel bij aan het probleemoplossend vermogen van leerlingen.

Twee à drie groepen gebruikten de symbol sensemethode bij opgave 1, soms pas na de foute x te hebben ingevuld. Twee à drie groepen die niet de symbol senseaanpak vonden, controleerden hun antwoord ook niet. Van de groepjes die controleerden, wisten de meeste correct te concluderen dat er dan geen oplossingen zijn of dat de gevonden waarde ‘niet kan.’ Er was overigens één groepje, namelijk groep 7, dat besloot het te laten. Ze dachten “het zal wel” toen ze ontdekten dat hun oplossing niet voldeed.

Geen van de groepen werkte de haakjes bij opgave 2 in eerste instantie weg en ze vonden dus allemaal de juiste oplossing. Twee groepjes werkten nog wel haakjes weg ter controle. Geen afwezigheid van symbol sense dus, hier. Overigens duidt dit niet per se op symbol sense. Groep 4 benoemde namelijk expliciet dat het een rekenregel was die ze gebruikten om te zien dat een van de termen nul moet zijn.

Zes groepjes kwadrateerden bij opgave 3, waarbij dit bij drie groepjes fout ging. De eerste groep wist te benoemen dat u niet relevant is en zo de vraag te doorgronden: “Wat hier eigenlijk staat, is een getal keer de wortel van u want u is niet belangrijk.” “Je moet een getal voor v vinden.” Echter, deze groep wist de vraag niet verder op te lossen. Twee groepjes vonden het juiste antwoord, vaak door het al dan niet toevallig kiezen van de juiste aanpak. Het is dus niet per se duidelijk of dit door symbol sense komt of niet.

4.2 Resultaten individuen

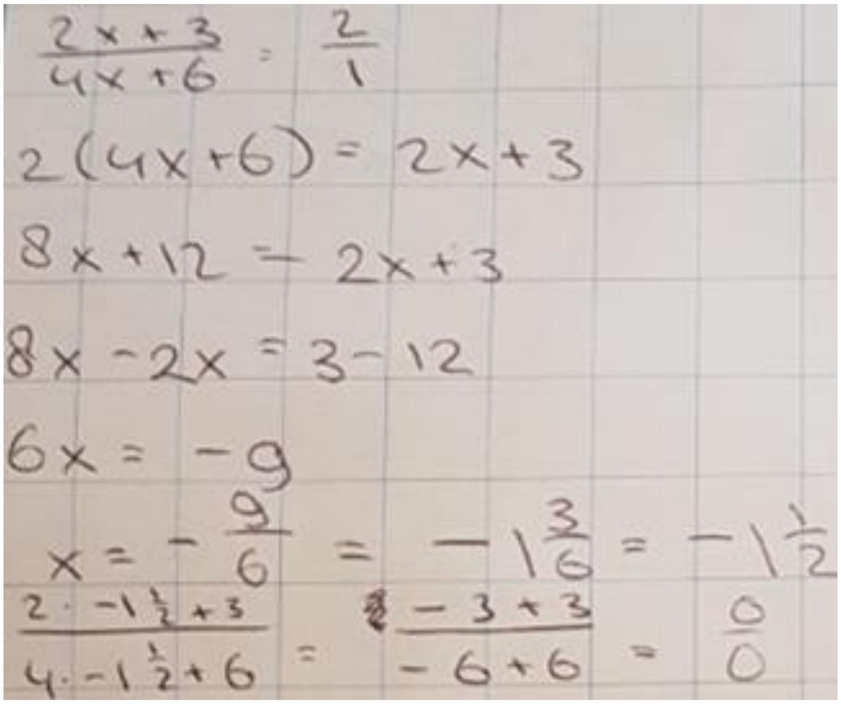
	Nummer	1	2	3	4	5	6	7	8	Tot.
	Klas	5-1	5-1	6-1	6-1	5-1	5-1	6-2	6-2	
	M/V	V	V	M	V	V	V	V	V	1/8
A1	Discussie of twijfel of iets mag	0	0	0	1	0	1	0	1	3

A2	Proberen	1	1	1	1	0	0	0	0	4
1.1	Controleren	1	1	1	0	0	0	0	0	3
1.2	Concluderen dat er geen oplossing is	1	0	0	0	0	0	0	0	1
1.3a	Verhouding herkennen die er moet zijn. (2)	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.3b	Verhouding herkennen die er is (1/2)	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.1	Haakjes wegwerken			0	0	1	0	0	0	1
2.2	Direct de oplossing herkennen			1	1	0	1	1	1	5
2.3	Naderhand haakjes wegwerken			0	1	0	1	0	1	3
3.1	Kwadrateren	1	0	1	1	1	1	1	0	6
3.2	Kwadrateren en hierbij een fout maken	1	0	0	1	1	1	1	0	5
3.3	Herkennen dat u niet relevant is.	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3.4	Eindantwoord is onafhankelijk van v	0	0	0	1	0	0	0	0	1
3.5	De goede oplossing vinden	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabel 2: Resultatentabel individuen

Tabel 2 vat de resultaten van de onderzoeken bij de individuen samen. Ook hierin valt een aantal zaken op. Bij drie individuen was er twijfel over de methode en vier individuen probeerden wat. Sommigen probeerden niks en kwamen dus niet verder. Individu 8 heeft bijvoorbeeld bij opgave 3 alleen de vraag overgeschreven. Ze gaf aan dat ze niet wist hoe te beginnen en dat dan ook niet deed. Ze had wel nagedacht over kwadrateren, maar: “Met twee verschillende wortels kan je niet echt kwadrateren.”

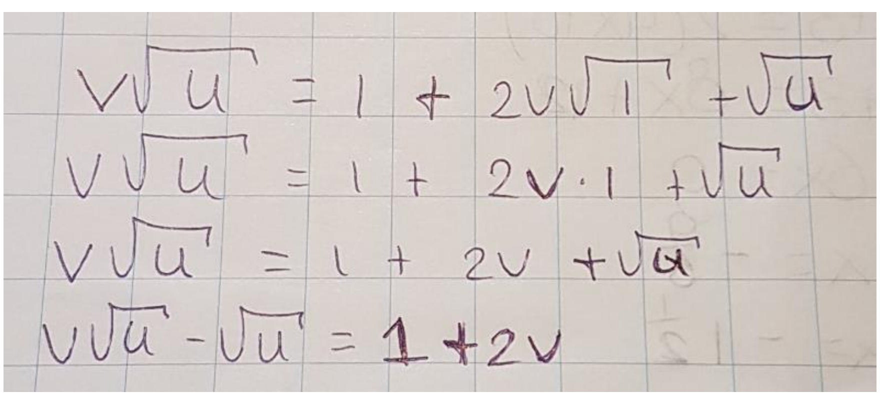
Bij opgave 1 werd door geen van de individuen de symbol senseaanpak ontdekt en drie individuen controleerden hun antwoord. Bij de individuen die wel controleerden en ontdekten dat er $0/0$ staat, is het twijfelachtig of bedoeld wordt dat het antwoord fout is of dat er geen antwoord is, bijvoorbeeld bij individu 2: “Dus het klopt niet.” Individu 2 controleerde wel, maar verbond er geen conclusie aan, zie figuur 3.



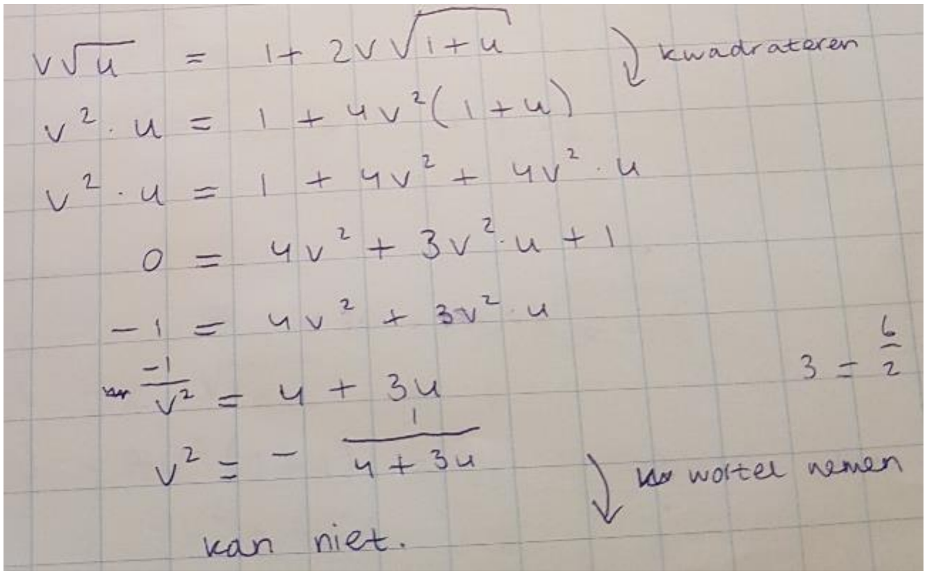
Figuur 3: Individu 2 bij opgave 1

Bij opgave 2 werkte individu 5 de haakjes weg. Dat individu zag ook niet dat voor en na het haakjeswegwerken en weer factoriseren, er dezelfde uitdrukking stond. Er is hier dus weinig bewustheid van de strategie of wat er aan de hand is en dus is er hier geen symbol sense. De rest herkende de oplossing. Drie individuen werkten ter controle de haakjes alsnog weg.

Zes individuen kwadrateerden bij de laatste opgave, waarbij dit bij vijf individuen fout ging. Hier is dus veel foute routineaanpak zichtbaar en geen symbol sense. Geen van de individuen vond hier de juiste oplossing. Er is wel een groot aantal verschillende foute antwoorden zichtbaar, veelal gebaseerd op meerdere algebraïsche fouten, zoals in de uitwerkingen van individu 4 en 7 in respectievelijk figuur 4 en figuur 5.



Figuur 4: Individu 4 bij opgave 3



Figuur 5: Individu 5 bij opgave 3

4.3 VERSCHILLEN TUSSEN GROEP EN INDIVIDU

	Gedrag	Groepen	Individuen
A1	Discussie of twijfel of iets mag	7	3
A2	Proberen	5	4
1.1	Controleren	5,5	3
1.2	Concluderen dat er geen oplossing is	5	1
1.3a	Verhouding herkennen die er moet zijn. (2)	3	0
1.3b	Verhouding herkennen die er is (1/2)	2,5	0
2.1	Haakjes wegwerken	0	1
2.2	Direct de oplossing herkennen	6	5
2.3	Naderhand haakjes wegwerken	2	3
3.1	Kwadrateren	6	6
3.2	Kwadrateren en hierbij een fout maken	3	5

3.3	Herkennen dat u niet relevant is.	1	0
3.4	Eindantwoord is onafhankelijk van v	5	1
3.5	De goede oplossing vinden	2	0

Tabel 3: Samenvatting resultaten

Zoals blijkt uit tabel 3 hebben groepen dus vaker symbol sense vertoond dan de individuen en de individuen hebben vaker geen symbol sense vertoond dan de groepen. We zien vooral dat de groepen meer proberen, twijfelen en discussiëren over de methode. Daarnaast werd er vaker gecontroleerd. Bij vraag 1 en 3 werd door een aantal groepen de symbol senseoplossing gevonden, tegenover geen van de individuen.

Verder lijkt het of de individuen vaker moeite hebben met routineaanpak. Ze controleren minder vaak en ze kwadrateren vaker fout. Als er een fout antwoord werd gegeven, stond het ook vaker in de verkeerde vorm dan bij de groepen. Er is dus minder bewustheid van de strategie en er is minder controle op kleine algebraïsche stappen.

De visual salience van de haakjes lijkt bij beide groepen weerstaan te worden. Dit kan echter komen doordat hier in sommige boeken expliciet op getraind wordt en ze het type vraag herkennen. Bij de wortels was de visual salience wel sterk, vooral bij individuen.

5 Conclusie

5.1 Kan groepswerk bijdragen aan de ontwikkeling van symbol sense bij leerlingen?

Bij het theoretisch kader (2.3) zagen we al dat groepswerk een goede werkvorm zou moeten zijn om symbol sense te bevorderen. Het is immers een effectieve manier van kennisoverdracht (Ebbens, 2013) en er is een aantal verbanden tussen beide theorieën.

We hebben in het beperkte onderzoek ook daadwerkelijk waargenomen dat groepen meer symbol sensegedrag vertonen dan individuen. De groepen kiezen vaker de symbol senseaanpak dan de individuen en de individuen laten vaker zien dat ze geen symbol sense hebben. Het is hierom aannemelijk dat de leerlingen in de groepen gedurende de opdracht ook meer symbol sense bijgebracht krijgen dan de individuen met een vergelijkbare opdracht.

5.2 Onder welke omstandigheden draagt groepswerk bij aan symbol sense bij leerlingen?

Op theoretisch niveau (2.3) zagen we dat de bijdrage komt door discussies tussen leerlingen over de stof en het uitleggen van eigen werk. Verder is de docent een procesmanager, waardoor leerlingen op elkaar aangewezen zijn. De leerling-leerlinginteractie die ontstaat draagt bij aan symbol sense. We plaatsten de kanttekening dat groepswerk dan wel zo goed mogelijk plaats moet vinden. Als we in het praktijkonderzoek kijken naar de aspecten van goed groepswerk uit 2.2.4 zien we het volgende.

Positieve wederzijdse afhankelijkheid: Ten aanzien van positieve wederzijdse afhankelijkheid kunnen we zeggen dat deze er niet per se was bij het groepswerk: je had de groepsgenoten strikt genomen niet nodig. We zien wel dat een aantal individuele leerlingen niet heel ver kwam of veel agebrafouten maakten, wat zou kunnen betekenen dat leerlingen elkaar goed kunnen gebruiken bij dergelijke stappen en groepswerk hiervoor dus handig is.

Individuele aanspreekbaarheid: De groepsleden waren in zekere zin individueel aanspreekbaar, omdat ze slechts met drie leerlingen met een onderzoeker in een ruimte waren. Hierdoor ontstond individuele verantwoordelijkheid.

Directe leerling-leerlinginteractie met een docent als procesmanager: Er was een goede setting voor directe interactie, doordat de omgeving rustig was en ze alle drie bij de papieren konden en konden meekijken. Verder was het leerlinggedrag erg goed voor groepswerk. Er was vooral bij de groepen veel discussie en ze legden elkaar veel uit. Wel lag er weinig nadruk op strategie en aanpak, maar dit was bij de individuen mogelijk nog minder. Dit is misschien iets dat leerlingen niet zomaar gaan doen zonder aanwijzingen. Er was bovendien zeker leerling-leerlinginteractie waarbij de ‘docent’ (hier: onderzoeker) louter procesmanager was. Deze leerling-leerling interactie waarbij je je werk uitlegt draagt bij aan symbol sense. Deze voornaamste onderbouwing voor de link die we vooraf aangaven is dus inderdaad waargenomen.

Als we inzoomen op welke aspecten van symbol sense opvallen, valt op dat we vooral naar *visual salience* hebben gekeken. Bij haakjes werd hier vaak goed gehandeld, maar bij wortels trapten leerlingen vaak in de *visual salience*. Het is hierom belangrijk om aandacht te besteden aan *gestalt view* en strategieaanpak. Onverwachte vragen kunnen hier goed voor zijn. Sommige leerlingen leunden erg op wat ze al eerder gezien of geoefend hadden of zijn gewend aan dat vergelijkingen een oplossing moeten hebben.

Daarnaast hebben individuen zelden *algebraïsche redenaties* getoond en groepen regelmatiger, bijvoorbeeld bij de eerste vraag. *Strategische vaardigheden* bleken bij de derde vraag vaak afwezig. Er werd alleen bij de tweede vraag vaak *a priori geïnspecteerd*, terwijl dit ook bij de andere vragen handig is.

Daarnaast is er nog een opvallend aspect dat de geschiktheid van groepswerk om bij te dragen aan symbol sense onderschrijft. Zo maken de individuen vaker routinefouten. We hebben eerder gezien dat symbol sense en routineaanpak hand in hand gaan (Drijvers, 2006). Mogelijk speelt door de gecombineerde kennis van de groep, algebraïsche vaardigheid een kleinere rol, waardoor meer aandacht is voor adequate probleemaanpak. Dit pleit, alhoewel we niet primair naar routinevaardigheden zouden kijken in ons onderzoek, toch in het voordeel van ons idee dat groepswerk leidt tot symbol sense.

6 DISCUSSIE

In de inleiding stelden we dat Ten aanzien van de opzet van het onderzoek plaatsen we een aantal kanttekeningen. De onderzoeksgroep bestond uit acht groepen en acht individuen, hetgeen erg weinig is. De verschillen waar we mogelijk naar kijken, kunnen gebaseerd zijn op willekeur of niet significant zijn. Verder was de selectie niet altijd zoals omschreven. Zo vroeg de docent soms algemeen wie er mee wilde. De groep is hiernaast erg homogeen. We kunnen op basis van het theoretisch kader dingen verwachten over bijna alle leerlingen, maar hebben dit alleen bij een aantal blanke bovenbouw vwo-leerlingen met wiskunde B op één school waargenomen. Misschien is het gedrag bij groepswerk van andere leerlingen heel anders. Mogelijk is het voor leerlingen op andere scholen, jaren of niveaus lastiger om in groepen samen te werken. Het verbreden en vergroten van een onderzoek zoals dit onderzoek kan de link mogelijk voor bredere groepen aantonen.

Ten aanzien van de setting is het niet te zeggen of deze link ook buiten de testsituatie waar te nemen is. Met een camera erop “voor een onderzoek voor de universiteit” gaan leerlingen mogelijk serieuzer met de opdracht om en wordt aan voorwaarden voor adequaat groepswerk gemakkelijker voldaan. Nu ging het direct goed om in groepen te werken bij bijna alle groepen, maar mogelijk zou dergelijk groepswerk op de lange termijn lastiger worden of komt er minder nadruk op discussie en strategie te liggen. Verder hebben we nu alleen om ‘communicatieve leerlingen van gemiddeld niveau gevraagd,’ terwijl het mogelijk juist voor sterke of zwakke leerlingen of leerlingen die niet communicatief zijn, heel anders uit zou pakken. Bovendien is het ook mogelijk dat de leerlingen elkaar nu heel goed of juist niet goed kenden. Zo vroeg een leerling aan een groepsgenoot hoe ze “ook al weer heette?” Factoren als hoe goed de groep gebonden en ingespeeld is, kunnen invloed hebben op de resultaten. Om dit uit te sluiten kunnen willekeurige leerlingen van een aantal scholen in groepen worden geplaatst of kan bij het onderzoek beter geïnventariseerd worden hoe de groepsdynamiek is.

Wat opvalt in de resultaten is dat, zoals we in de inleiding al aangaven, Van Stiphout (2011) becijferde dat minder dan 25% van de door haar onderzochte leerlingen van 13 jaar en ouder $(x-5)(x+2)(x-3)=0$ kon oplossen. Deze vraag lijkt sterk op onze tweede opgave, die juist erg goed werd gemaakt. Het verschil is dus erg groot. We geven wat opties voor wat dit zou kunnen betekenen. Misschien was onze vraag veel simpeler. Maar maakte de eerste factor x het écht zoveel simpeler dan een ander nulpunt? Het kan ook betekenen dat er sinds Van Stiphouts onderzoek veel verbeterd is met betrekking tot symbol sense in de lesmethodes en in de Nederlandse klassen. Daarnaast kan het ‘toeval’ zijn en komen door de onderzochte groep en de docenten en methode die onze onderzoeksgroep gebruikt heeft. Nader onderzoek zou dit grote verschil kunnen verklaren.

We hebben bewust geen uitsplitsing gemaakt op klas of geslacht, omdat de groep daar simpelweg te klein voor is. We hebben deze gegevens verzameld om eventuele grote onverwachte verschillen te kunnen benoemen. In het verlengde hiervan hebben we niet echt signalen dat bepaalde stof recent behandeld was, afgezien van wat leerlingen uit klas *5-1* die dachten dat differentiëren hen zou helpen bij de derde vraag.

Gedragsonderzoek is lastig. Een deel van de gedane ‘observaties’ zijn eigenlijk interpretaties. Het is bijvoorbeeld niet eenvoudig om aan te geven of het groepje niet discussieert omdat ze het simpelweg eens zijn, dat het komt door gezag van het groepslid dat een voorstel doet of dat het komt door geen behoefte aan discussie. Bij de individuen probeerden we dit op te lossen door het nagesprek, maar de vragen kunnen hierin onbedoeld sturend zijn.

Onze opgaven richtten zich op niet alle aspecten van symbol sense van Drijvers & Kop (2012) of Arcavi (1994). Zo waren toegepaste sommen afwezig, in verband met de tijd. Er werden ook geen formules opgesteld of grafieken geplot. Ten aanzien van visual salience hebben we wel een goed beeld. Het kan een idee zijn om in een volgend onderzoek meer aandacht aan discussiëren over strategie te besteden, omdat dit nu amper gebeurde.

De link tussen onze hoofdvraag over symbol sense versterken door groepswerk en ons onderzoek waarin we dingen proberen waar te nemen, verdient wat kanttekeningen. Zo hebben we helaas niet gekeken naar langetermijngevolgen. We hebben waargenomen waar meer symbol sense ís, in plaats van waar meer symbol sense door komt. Het is aannemelijk dat dit dan ook bijdraagt aan symbol sense, maar dit volgt niet direct uit deze waarneming. Het is dan ook een goed idee om ook naar langetermijngevolgen te kijken.

Kortgezegd komt onze redenatie erop neer dat groepen beter in staat zijn om symbol sense te doen. Het is mogelijk dat onze groepen simpelweg beter presteerden omdat de gezamenlijke kennis van drie leerlingen gemiddeld groter is dan die van één. Alhoewel dit een belangrijke kanttekening is, is het de vraag of dit erg is. Als het meer symbol sense vertonen louter door kennis zou komen, diskwalificeert dat groepswerk niet per se als werkvorm. Er is immers aangetoond dat groepswerk meer leeropbrengst heeft dan directe instructie (Ebbens, 2013). Het kan interessant zijn om deze link te bekijken in relatie tot symbol sense. We hebben gezien dat groepswerk symbol sense oproept, maar hoe goed? Geldt ook hier dat het beter werkt dan directe instructie? Een dergelijke vergelijking zou mee kunnen worden genomen in een langetermijnonderzoek.

We zagen dat de individuen ook slechtere routineaanpak vertoonden. Mogelijk staat dit hun symbol sense in de weg. Het kan interessant zijn om onderzoek te doen naar de relatie tussen routinevaardigheden en symbol sense.

7 REFERENTIES

Arcavi, A. (1994). Symbol Sense: Informal Sense-making in Formal Mathematics. *For the Learning of Mathematics, 14*(3), 24-35.

Arcavi, A. (2005). Developing and using symbol sense in mathematics. *For the Learning of Mathematics, 25*(2), 42-48.

Arcavi, A., Drijvers, P., & Stacey, K. (2017). *The Learning and Teaching of Algebra: Ideas, Insights and Activities.* New York: Routledge.

Bennett, T. (2015). Group Work for the Good: Unpacking the Research behind One Popular Classroom Strategy. *American Educator*(voorjaarsuitgave), 32-37.

Bokhove, C., & Drijvers, P. (2010). Symbol Sense behavior in digital activities. *For the Learning of Mathematics, 30*(3), 43-49.

Burke, A. (2011). Group Work: How to Use Groups Effectively. *The Journal of Effective Teaching, 11*(2), 87-95.

Cohen, E. (1994). Restructuring the Classroom: Conditions for Productive Small Groups. *Review of Educational Research, 64*(1), 1-35.

cTWO. (2012). *Denken & doen: wiskunde op havo en vwo per 2015.* Utrecht: commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs.

Davies, M. (2009). Groupwork as a form of assessment: common problems and recommended solutions. *Higher Education*(58), 563-584.

Dekker, R., & Elshout-Mohr, M. (2007). *Niveauverhoging door samenwerkend leren.* Amsterdam: Vossiuspers UvA.

Drijvers, P. (2006). Algebraïsche basisvaardigheden en symbol sense in de tweede fase van HAVO en VWO. *Nieuwe Wiskrant, 25*(3), 4-10.

Drijvers, P. (2012). Wat bedoelen ze toch met... symbol sense? *Nieuwe Wiskrant, 31*(3), 39-42.

Drijvers, P., & Kop, P. (2012). Variabelen en Vergelijkingen. In P. Drijvers, A. v. Streun, & A. Zwaneveld, *Handboek wiskundedidactiek* (pp. 53-83). Utrecht: Epsilon Uitgaven.

Ebbens, S. (2013). *Effectief leren.* Groningen / Houten: Noordhoff Uitgevers bv.

Fey, J. (1990). Quantity. In L. A. Steen (Red.), *On the shoulders of giants: New approaches to numeracy* (pp. 61-95). Washington D.C.: National Academy Press.

Kindt, M. (2011). Principles of practise. In P. Drijvers, *Secondary Algebra Education* (pp. 137-179). Sense Publishers.

Stiphout, I. v. (2011). *The Developments of Algebraic Proficiency.* Eindhoven: Printservice TU/e.

Streun, A. v. (2014). *Onderwijzen en toetsen van wiskundige denkactiviteiten.* Enschede: SLO.

Tabach, M., & Friedlander, A. (2013). School mathematics and creativity at the elementary and middle-grade levels: how are they related? *The International Journal on Mathematics Education, 45*(2), 227-238.

Wenger, R. (1987). Cognitive science and algebra learning. In A. Schoenfeld (Red.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 217-251). Hillsdale, NJ: L. Erlbaum Associates, Inc.

APPENDIX A: OPDRACHTBLADEN

Opdracht – Groep

Tijdsduur: 20 minuten

- Overleg als groep en kom samen tot één uitgeschreven oplossing
- Als je er niet uit komt, probeer wat dingen, en vraag je af of het beter, handiger of efficiënter kan
- Maak eerst opgave 1 en 2. Opgave 3 is extra.

Opgave 1.

Voor welke x geldt:

$$\frac{2x+3}{4x+6}=2$$

Opgave 2.

Voor welke x geldt:

$$x(x-1)(x+2)=0$$

Opgave 3.

Voor welke v geldt:

$$v\sqrt{u}=1+2v\sqrt{1+u}$$

Opdracht – Individueel

Tijdsduur: 20 minuten

- Schrijf zoveel mogelijk op, waarbij je ook probeersels leesbaar opschrijft.
- Als je er niet uit komt, probeer wat dingen, en vraag je af of het beter, handiger of efficiënter kan.
- Maak eerst opgave 1 en 2. Opgave 3 is extra.

Opgave 1.

Voor welke x geldt:

$$\frac{2x+3}{4x+6}=2$$

Opgave 2.

Voor welke x geldt:

$$x(x-1)(x+2)=0$$

Opgave 3.

Voor welke v geldt:

$$v\sqrt{u}=1+2v\sqrt{1+u}$$

APPENDIX B: SAMENVATTING OBSERVATIES

Hier wordt globaal het verloop van de aanpak van de groepen en individuen beschreven per opgave, met nadruk op het gedrag waarop geobserveerd zou gaan worden. Tussen haakjes staat de man/vrouw-verhouding van de groep ofwel het geslacht van het individu. Hierachter staat de vwo-klas, waarbij het eerste getal voor het jaar staat en het tweede getal de verschillende klassen uit hetzelfde jaar onderscheidt. Op basis van deze samenvatting en op basis van de opdrachtenbladen met het werk van de leerlingen die op aanvraag bij de auteur in te zien zijn, zijn de tabellen van secties 4.1 en 4.2 die het gedrag beschrijven, opgesteld.

AANTEKENINGEN VERLOOP VAN DE GROEPEN

Groep 1 (0/3): 5-1

1. De notulist neemt de leiding en gaat aan de gang. Als ze vastloopt of iets dergelijks springt de groep bij. Ze vermenigvuldigen met $(4x+6)$. Ze lossen vervolgens op naar $x=-1{,}5$. Ze praten over hoe ze de balansmethode toepassen om op te lossen naar x en controleren niet.
2. Niet van toepassing.
3. “Wat lastiger jongens.” Ze herkennen het vraagstuk als een vergelijking met twee onbekenden, maar weten niet wat hiermee te doen. Ze overwegen om om te schrijven naar tot de macht $-0{,}5$, maar zien niet in dat dit notatie is en dus niet helpt, maar er volgt wel een gesprek hierover. “Wat hier eigenlijk staat, is een getal keer de wortel van u want u is niet belangrijk.” “Je moet een getal voor v vinden.” Oftewel, de opdracht wordt na wat opties goed begrepen. Ze proberen te kwadrateren. “Leuke poging, maar niet goed uitgepakt. Alleen maar erger geworden.” Dus de circularity wordt na één stap herkend. Ze proberen nu de tot de macht $-0{,}5$ optie, die ze al eerder hadden benoemd. Ze denken dat ze nu ineens haakjes kunnen wegwerken, maar weten niet hoe. Met een cijfervoorbeeld komen ze erachter dat dit niet mag. Uiteindelijk delen ze door wortel u, en erna door $2v$, maar verkeerd: ze denken dat $v/2v=v$. Een leerling zegt dit zo overtuigend dat de ander dit niet in twijfel trekt, na in eerste instantie wel te twijfelen of dit klopt.

Groep 2 (0/3): 5-1

1. Een leerling zegt “Dus de bovenste moet twee keer zo groot zijn als de onderste.” Maar een andere leerling gaat hier niet op door en overschreeuwt met haar eigen idee. Ze gaan uiteindelijk kruislings vermenigvuldigen. Ze vinden $x=-1{,}5$. Ze ontdekken dat ze door nul delen, als ze het invullen. Ze denken dat hun antwoord daardoor fout is. “Dit kan je makkelijk door elkaar delen,” ziet een leerling. Echter gaat dit delen fout. Ze vinden een x, maar die voldoet niet. Ze proberen een aantal dingen, maar dat werkt steeds niet. Ze staan soms op het punt te ontdekken wat er écht aan de hand is, maar overschreeuwen elkaar vaak. Een leerling wil naar de grafiek kijken, maar dit wordt belachelijk gemaakt. Ze concluderen: voor geen x.
2. Niet van toepassing.
3. “Voor welke v geldt. Betekent niet dat er geen u in het antwoord mag zitten.” Ze kwadrateren: visual salience. Dit kwadrateren gaat echter fout. In hun antwoord staat nog een v, ze weten dat dit niet oké is maar laten het.

Groep 3 (1/2): 6-1

1. Ze vermenigvuldigen kruislings en vinden $x = -2/3$ (fout). Ze gaan snel verder en twijfelen niet over het antwoord.
2. Ze zien direct de oplossing, maar twijfelen vervolgens en werken toch weg. Ze werken erg snel.
3. Ze delen door u, doen wat algebra, maar vinden een antwoord dat niet v uitdrukt in u. Ze proberen ook nog te kwadrateren, maar dit kwadrateren gaat fout. Het uiteindelijke antwoord is wel onafhankelijk van v.

Groep 4 (2/1): 6-1

1. Ze werken haakjes weg, vinden $-1{,}5$ en denken klaar te zijn. Later komen ze terug bij deze vraag: delen door nul, kan niet. Ze proberen wat dingen<u>, discussiëren</u> erover. “Komt altijd ½ uit.” Ze zien dat de noemer deelbaar is door $(2x + 3)$ en noteren vervolgens ½ $= 2$. Dus kan niet.
2. “Er moet één van die dingen nul zijn.” Ze benoemen dit als rekenregel en zijn ervan overtuigd dat het klopt.
3. Ze halen v buiten haakjes. Denken even dat ze $A * B = 1 \rightarrow A = 1$ of $B = 1$ kunnen en mogen gebruiken. Maar “dan moet er een nul staan,” volgt na <u>discussie</u>. Ze overwegen te kwadrateren, maar de mengterm zou vervelend zijn, bedenken ze vooraf. <u>Strategie. </u>Ze delen door het deel binnen de haakjes en vinden de oplossing. Twijfelen lang of het wel klaar is erna omdat de expressie niet heel elegant eruitziet. “Zullen we dit gewoon het antwoord noemen?”

Groep 5 (0/3): 5-1

1. Ze vermenigvuldigen kruislinks en controleren de oplossen, met als conclusie “Voor geen enkele x.” Na wat extra nadenken herkent iemand dat de noemer altijd tweemaal de teller is: altijd ½.
2. Ze willen haakjes wegwerken, maar iemand herkent dat de oplossingen direct af te lezen zijn. Ter controle gaan ze toch nog even uitwerken, omdat het kan.
3. Ze delen door wortel u en willen de rechterkant delen door $2v$, maar dat werkt niet. Schrijven “Voor geen enkele v.” eronder onder. Vervolgens gaan <u>ze nadenken</u> over wat er staat: ‘kan niet nul, kan niet negatief, kan niet positief zijn.’ Dergelijke overwegingen zijn goed, maar hij gebeurde in dit geval niet goed. Ze proberen nog te kwadrateren terwijl ze op voorhand weten dat je dan een wortel (mengterm) overhoudt, maar dat is er maar één en “dat is er eentje minder.” Ze komen echter niet verder hiermee.

Groep 6 (0/3): 5-1

1. Ze lossen hem op door vermenigvuldigen en vinden $x = -1{,}5$. Na invullen volgt dat het niet klopt. <u>Ze praten erover verde</u>r. Een leerling wijst aan ‘Iets kleins gedeeld door iets groots kan nooit 2 zijn.” Het is onduidelijk of ze goed ziet waarom het altijd klein is.
2. Ze noteren de oplossingen direct uit de vergelijking.
3. Ze kwadrateren en vinden vervelende mengtermen. Dat helpt niet dus. En delen door v helpt ze ook niet verder.

Groep 7 (1/2): 6-2

1. Door vermenigvuldigen en oplossen vinden ze $x = -1{,}5$. Ze vullen niet in en gaan snel verder. Als ze met opgave 3 bezig zijn bedenken ze dat controleren moet, ze ontdekken $0/0 = 2$, maar denken "het zal wel."
2. Ze zien direct de oplossingen.
3. Denken na over strategie maar halen het door de war met stelsels oplossen: ze willen eerst u oplossen en dat dan invullen. Vervolgens kwadrateren ze, maar fout. Hiermee werken ze verder. In een tussenstap gebruiken ze $A * B = 1 \rightarrow A = 1$ of $B = 1$ en staan hier door tijdsdruk onvoldoende bij stil.

Groep 8 (1/2): 6-2

1. Ze lossen het op en vinden $x = -1{,}5$. Ze besluiten later dat ze moeten vermelden dat de noemer niet nul mag zijn. Als ze dit uitwerken ontdekken ze dat x juist niet $-1{,}5$ mag zijn. Er volgt verwarring en discussie. Ze besluiten dat er dus geen oplossing is.
2. Ze zien de oplossingen direct.
3. Ze halen de wortels naar één kant en halen v buiten haakjes. Hiermee lossen ze het vervolgens correct op. Één leerling stelt dit alles simpelweg voor, ze doen het en het lukt.

AANTEKENINGEN VERLOOP VAN DE INDIVIDUEN

Individu 1 (V): 5-1:

1. "Bovenkant moet twee keer zo groot zijn." Vervolgens vermenigvuldigt ze en vindt $x = -1{,}5$. Na invullen geeft ze aan: "Nee dat klopt dus niet." Ze geeft vervolgens aan nog een aantal andere dingen geprobeerd te hebben, maar ontdekte dan geen oplossingen.
2. Niet van toepassing.
3. Ze "Wist echt niet wat ik moest doen." Ze deelde door $2v$, vervolgens kwadrateerde ze, maar dit ging fout.

Individu 2 (V): 5-1:

1. Ze berekent de breuk voor een paar x'en en ontdekt dat het steeds ½ is. Echter concludeert ze hier niks uit. Bij de aanpak die ze bespreekt zegt ze dat ze vermenigvuldigd heeft, $x = 1{,}5$ vond, dat invulde en vond dat het $0/0$ was. "Dus het klopt niet." Het is onduidelijk of ze op het antwoord of op de methode doelt.
2. Niet van toepassing.
3. Ze "Doet maar gewoon wat." Ze berekent oplossingen voor $u = 0$ en $u = 1$, omdat ze niet wist wat te doen, maar vult deze u alleen aan de linkerkant in. Dit lijkt op proberen, maar een strategie was afwezig.

Individu 3 (M): 6-1

1. Hij vermenigvuldigt kruislings en vond $x = 4{,}5$. Dit vult hij in en hij geeft aan dat dit ook echt klopte. De leerling blijkt een overschrijffout gemaakt te vinden waarbij 6 en 3 verwisseld zijn.

2. De leerling herkent direct de oplossingen. Hij kan dit echter niet verklaren en hard maken waarom $A * B * C = 0 \rightarrow A, B$ of $C = 0$. Ook voor $A * B = 0$ wist hij dit niet. Hij geeft aan dit op intuïtie gedaan te hebben.
3. Hij kwadrateert, maar komt door de mengtermen niet verder. In een latere poging deelt hij de v uit, maar noteert vervolgens dat $v = -1$ of het deel binnen de haakjes is 1. De leerling was dus goed op weg, maar miste de strategie of het inzicht om de laatste stap te zetten.

Individu 4 (V): 6-1

1. Kruislings vermenigvuldigen en vervolgens $x = -1{,}5$ in. Geeft desgevraagd aan dat ze alleen bij 'logaritmes enzo' invult. "Maar eigenlijk moet het bij breuken ook bedenk ik me nu."
2. Ze leest de oplossingen direct af, maar omdat ze twijfelde of je bij een drieterm $ook\ AxB = 0 \rightarrow A = 0$ of $B = 0$ mag gebruiken, werkte ze toch de haakjes weg om het vervolgens op te lossen.
3. Ze deelt eerst door v, en kwadrateert vervolgens, maar dit gaat fout. In een latere poging haalt ze de wortel uit elkaar: $\sqrt{1+u} = \sqrt{1} + \sqrt{u}$. Een teken van foute routinevaardigheden.

Individu 5 (V): 5-1

1. Na kruislings vermenigvuldigen vindt ze volgens $x = -2/3$ door foute berekeningen. Ze geeft aan dat ze alleen controleert als ze écht twijfelt of "wel met écht toetsen, maar daar heb ik vaak geen tijd voor."
2. Ze werkt haakjes weg en schrijft het vervolgens weer binnen haakjes. Het is haar niet opgevallen dat $(x-1)(x+2)$ eerder langsgekomen is. Er is dus weinig bewustheid van de strategie.
3. Ze kwadrateert, maar dat gaat fout. Ze komt niet verder.

Individu 6 (V): 5-1

1. De leerling heeft $x = -1{,}5$ gevonden, maar niet gecontroleerd.
2. De leerling zag de drie oplossingen direct, maar wilde ter controle toch even haakjes wegwerken "Misschien heb ik iets fout gedaan."
3. Kwadrateert, maar dit gaat fout, waarna de leerling niet verder komt.

Individu 7 (V): 6-2

1. Wederom: Kruislings vermenigvuldigen en $x = -1{,}5$ vinden. Ze geeft aan dat ze niet gecontroleerd heeft. Ze weet niet waarom en "vergeet het soms gewoon."
2. Door twee keer $A * B = 0 \rightarrow A = 0$ of $B = 0$ te gebruiken vindt ze de drie oplossingen.
3. Ze kwadrateert, maar dit gaat fout, waarna ze een foute oplossing vindt.

Individu 8 (V): 6-2

1. Door kruislings vermenigvuldigen vindt ze $x = -1{,}5$. Dit antwoord heeft ze niet gecontroleerd. "Doe ik normaal wel, maar bij deze heb ik gewoon de berekeningen nog een keer nagelopen. Ik heb het gevoel dat ik deze wel goed had."
2. Eerst schrijft ze direct de antwoorden op, maar twijfelt of dit wel mag "Nog nooit zo in een opgave gezien." Dus ze werkt toch haakjes weg en concludeert hierdoor dat dit toch wel mocht.
3. Ze wist niet hoe te beginnen en deed dit dan ook niet. Ze wilde wel kwadrateren, maar deed dit toch niet: "Met twee verschillende wortels kan je niet echt kwadrateren."