Classificatie van algebraïsche oppervlakken die invariant zijn onder S_3.

door Ruben Meuwese

1 Introductie van algebraïsche oppervlakken.

Een algebraïsche oppervlak in $\mathbb{R}^3$ wordt gegeven door een polynoom vergelijking $G(x, y, z) = 0$. Als het polynoom graad één heeft dan is het oppervlak een plat vlak dat wel of niet door de oorsprong gaat. Als het polynoom graad twee heeft dan is er bekend in welke klasse het algebraïsche oppervlak zit. Deze oppervlakken worden kwadrieken genoemd. Voorbeelden zijn kegels, cilinders, bollen, paraboloïden, hyperboloïden en ellipsoïden. Voor dit onderzoek bekijken we kubische oppervlakken. Om de classificatie te vereenvoudigen beperken we ons tot algebraïsche oppervlakken die symmetrie blijven bij rotaties van $\frac{2}{3}\pi$ en $\frac{4}{3}\pi$ met de z-as als rotatie as. En spiegelingen in de vlakken $x = 0$, $x = -\sqrt{3}y$ en $x = \sqrt{3}y$. Hierdoor ontstaat de volgende vergelijking.

$$G(x, y, z) = az^3 + bz^2 + cz + d + 3(ez + f)(x^2 + y^2) + gy(y^2 - 3x^2) = 0$$

Met $a, b, c, d, e, f, g \in \mathbb{R}$. Deze rotaties en spiegelingen vormen samen de groep S_3. Beide soorten transformaties kunnen worden gerepresenteerd door één van de volgende lineaire transformaties:

Spiegeling in $x = 0$:

$$(x, y, z) \longmapsto (-x, y, z)$$

Spiegeling in $x = -\sqrt{3}y$:

$$(x, y, z) \longmapsto \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{3}y,\ \frac{1}{2}\sqrt{3}x - \frac{1}{2}y, z\right)$$

Spiegeling in $x = \sqrt{3}y$:

$$(x, y, z) \longmapsto \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sqrt{3}y,\ -\frac{1}{2}\sqrt{3}x - \frac{1}{2}y, z\right)$$

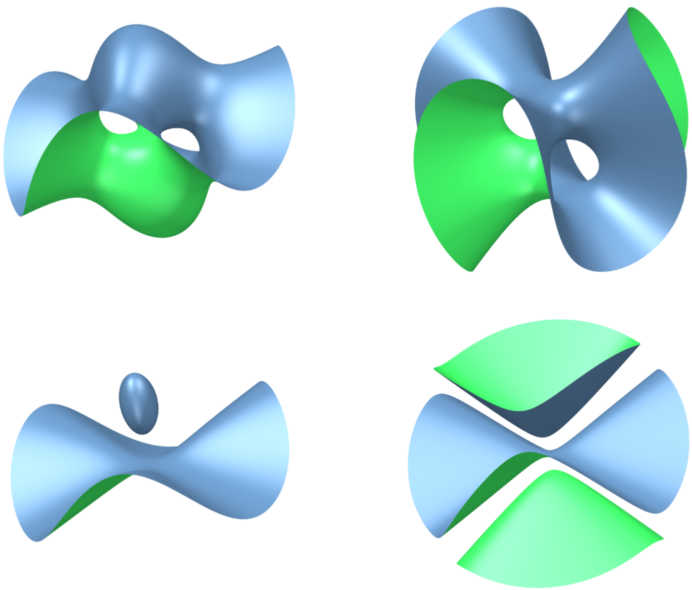
Rotatie van $\frac{2}{3}\pi$:

$$(x, y, z) \longmapsto \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{3}y,\ -\frac{1}{2}\sqrt{3}x - \frac{1}{2}y, z\right)$$

Rotatie van $\frac{4}{3}\pi$:

$$(x, y, z) \longmapsto \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sqrt{3}y,\ \frac{1}{2}\sqrt{3}x - \frac{1}{2}y, z\right)$$

$x^2 + y^2$ is altijd invariant bij alle rotaties en spiegelingen. Dus er moet alleen gecontroleerd worden of $gy(y^2 - 3x^2)$ invariant blijft. $gy(y^2 - 3x^2) = gy(y-\sqrt{3}x)(y+\sqrt{3}x)$ helpt bij het uitvoeren van de verschillende transformaties. Hier zijn een paar voorbeelden van hoe zo'n oppervlak er uit kan zien. Met van linksboven naar rechtsonder G_1, G_2, G_3 en G_4.



$$G_1(x, y, z) = z(z^2 - 1) + 3z(y^2 + x^2) + y(y^2 - 3x^2)$$

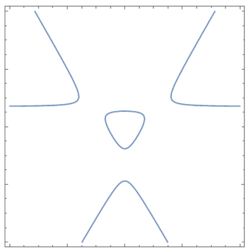
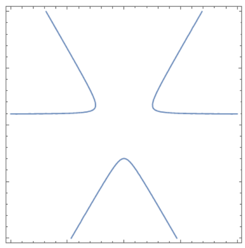
$$G_2(x, y, z) = z(z^2 - 1) + y(y^2 - 3x^2)$$

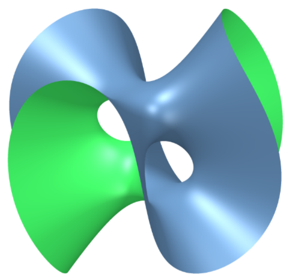
$$G_3(x, y, z) = z(z - 3)(z - 1) + 3z(y^2 + x^2) + y(y^2 - 3x^2)$$

$$G_4(x, y, z) = z(1 - 3z^2) + 3z(y^2 + x^2) + y(y^2 - 3x^2)$$

2 Eigenschappen van een oppervlak.

Voordat we kunnen beginnen met classificeren moeten we eerst kijken naar wat voor soort eigenschappen een oppervlak kan hebben. Vervolgens bekijken we waardoor deze eigenschappen ontstaan. Het is het makkelijkst om te kijken naar doorsnijdingen van het oppervlak met de vlakken $z = c$, met c een constante. Bij deze doorsnijdingen zien we de verschillende eigenschappen ontstaan. Zo zijn er de volgende doorsnedes goed te herkennen in de modellen van het vorige hoofdstuk.

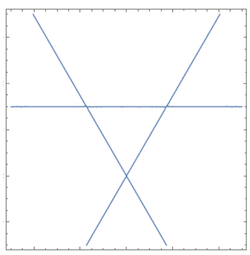



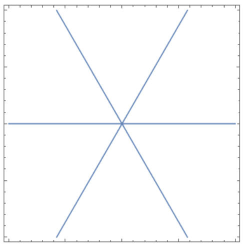
Nu is de vraag waardoor ontstaan deze doorsnedes? Hier komt de volgende herschrijving van $G(x, y, z)$ van pas.

$$G(x, y, z) = p(z) + 4r(z)^3 + (y - r(z))(2r(z) - \sqrt{3}x + y)(2r(z) + \sqrt{3}x + y)$$

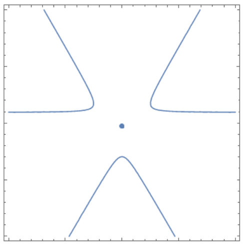
Met $p(z) = az^3 + bz^2 + cz + d$ en $r(z) = ez + f$. Op de doorsnede met het vlak $z = z_0$, met z_0 een nulpunt van $p(z)+4r(z)^3$, zien we drie rechte lijnen ontstaan. Als we kijken naar de herschrijving zien we waardoor deze lijnen ontstaan. Deze lijnen zijn $y - r(z_0) = 0$, $2r(z_0) - \sqrt{3}x + y = 0$ en $2r(z_0) + \sqrt{3}x + y = 0$. Deze eigenschap heeft een duidelijke oorzaak en is erg handig om onderscheid te maken. Daarom noteren we vanaf nu $q(z) = p(z) + 4r(z)^3$. Dus op nulpunten van $q(z)$ ontstaan er op de doorsnee drie rechten lijnen.



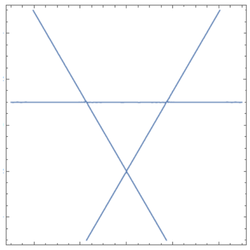
Nu zien we nog iets opmerkelijks aan deze vergelijkingen. Als we kijken naar $y - r(z_0) = 0$ zien we dat als $r(z_0)$ ook nul is dat deze lijn door de oorsprong loopt. Hetzelfde geldt voor de lijnen $2r(z_0) - \sqrt{3}x + y$ en $2r(z_0) + \sqrt{3}x + y$. Met andere woorden als zowel $q(z)$ als $p(z)$ nul zijn lopen deze drie lijnen door de oorsprong. Dit noemen we een Eckardtpunt als het oppervlak glad is. Anders is het een D_4-singulariteit.



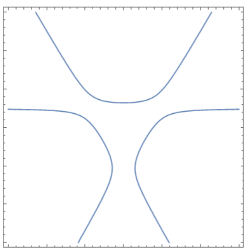
Als $p(z)$ wel nul is maar $q(z)$ niet dan verdwijnen de rechte lijnen. Maar het oppervlak doorsnijd de z-as nog steeds.



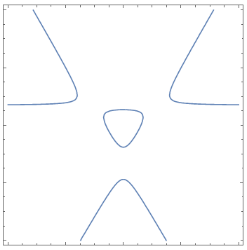
Nu bekijken we doorsnijdingen met de vlakken $z = c$ waarvoor c niet een nulpunt is van $p(z)$ of $q(z)$. Laat c zo gekozen zijn dat $r(c) > 0$. Dan lopen de asymptoten als volgt:



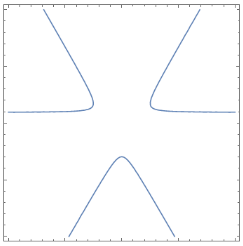
Aan de hand van het teken van $p(c) + 4r(c)^3$ weten we waar x en y moeten liggen om 0 te krijgen.



$p(c) < 0, \; q(c) < 0$

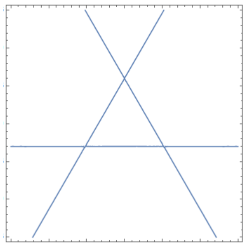


$p(c) < 0,\ q(c) > 0$

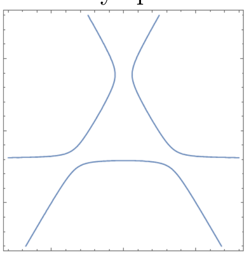


$p(c) > 0,\ q(c) > 0$

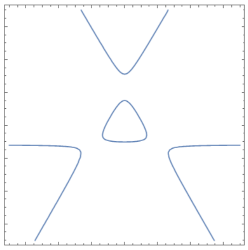
Als $r(c) < 0$ dan zijn alle doorsnedes precies hetzelfde als $r(c) > 0$ maar dan met alle relatie symbolen de andere kant op en zijn de doorsnedes omgedraaid. Dus dan krijgen we de volgende doorsnedes.



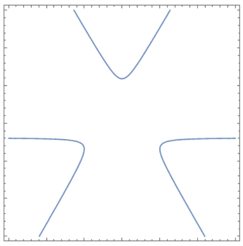
De asymptoten



$p(c) > 0,\ q(c) > 0$

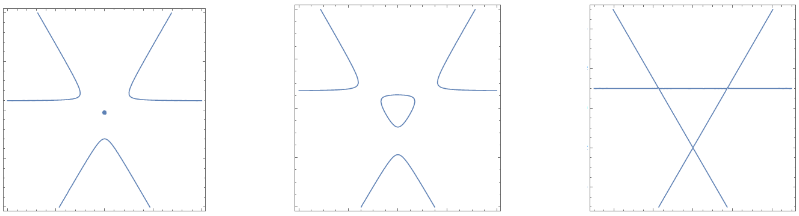


$p(c) > 0,\ q(c) < 0$

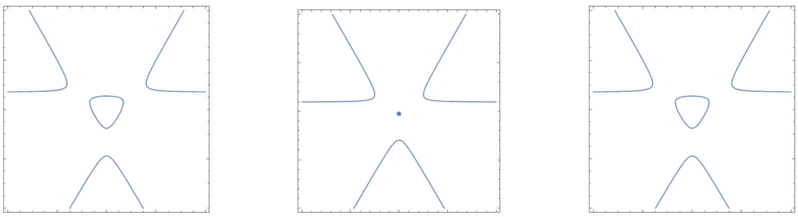


$p(c) < 0,\ q(c) < 0$

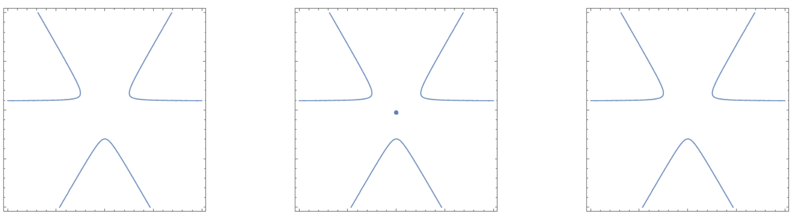
Er een paar volgorde van doorsnedes die heel kenmerkend zijn. Stel dat we de volgende volgorde hebben van doorsnijdingen:



Dan ontstaat er een soort piramide. Deze volgorde komen we in het volgende hoofdstuk weer tegen.



Wat hier gebeurt is dat $p(z)$ negatief is en richting 0 gaat, 0 wordt en daarna weer negatief is. Met andere woorden $p(z)$ heeft een dubbel nulpunt. Hierdoor zien we lokaal een A_1-singulariteit. Stel nu dat $p(z)$ positief is, 0 wordt en weer positief.



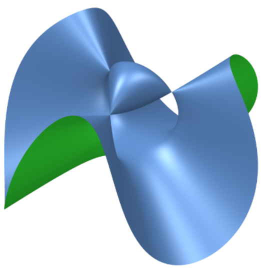
Dan raakt het A_1-singulariteit geïsoleerd. Deze singulariteiten kunnen hierdoor lastig te herkennen zijn. Omdat ze bij het afbeelden niet zichtbaar zijn. Zo zijn er nog veel meer mogelijkheden van volgordes. Maar die komen we vanzelf tegen dus gaan we ze niet allemaal apart behandelen.

3 Wat wordt een klasse?

We kunnen nu onderscheid gaan maken tussen twee oppervlakken door te kijken naar de doorsnedes met de vlakken $z = c$ als we langs de z-as lopen. Twee oppervlakken met dezelfde volgorde behoren dan tot dezelfde klassen.

Laten we kijken naar de doorsnedes van twee oppervlakken die ontstaan door de volgende twee vergelijkingen.

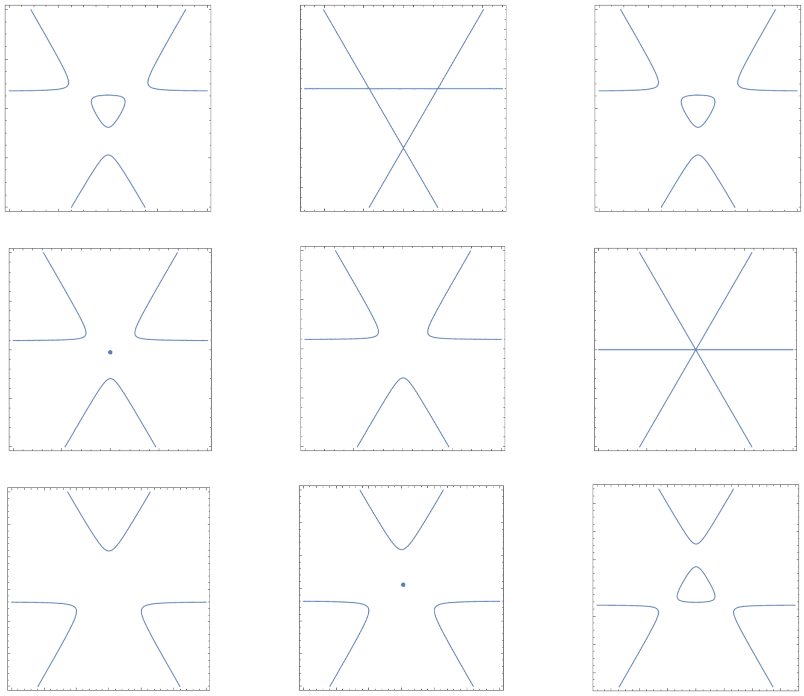
$$G_1(x, y, z) = z(z-1)^2 - 4z^3 + 3z(y^2 - x^2) + y(y^2 - 3x^2)$$



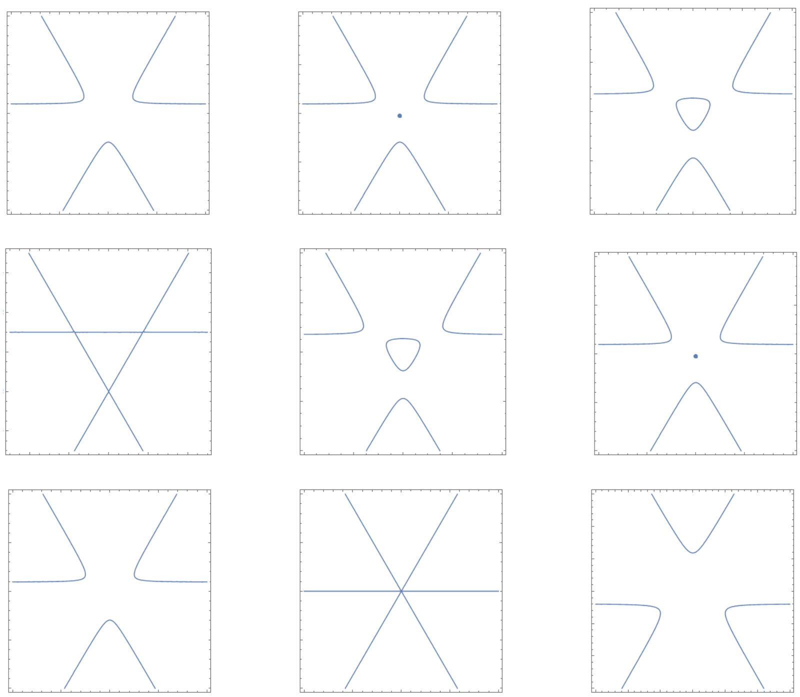
$$G_2(x, y, z) = z(z-1)(z-2) + 3(2^{-\frac{5}{3}}z)(y^2 - x^2) + y(y^2 - 3x^2)$$

We beginnen bij een positieve z waarden en lopen van oneindig, linksboven, naar min oneindig, rechtsonder.

$G_1(x, y, z)$



$G_2(x, y, z)$



Wat we zien als we deze doorsnedes bekijken is dat ze best veel op elkaar lijken. Het is zelfs zo dat wanneer we naar een doorsnede van G_1 kijken en dan naar die van G_2 die twee lager ligt, we zien dat de lijst bijna overal exact hetzelfde is. Het enige probleem zijn de doorsnedes die helemaal onderaan liggen. Dit kunnen we oplossen door te denken dat dit een soort cirkel is. Als je van boven naar beneden gaat begin je opnieuw boven aan als je de laatste doorsnede hebt gehad. Dus als we nu naar de laatste doorsnede kijken van G_1 zien we wanneer we twee stappen naar beneden gaan, hierbij tellen we van min oneindig naar plus oneindig niet mee als een stap, we bij een doorsnede van G_2 komen die omgedraaid is. Dit is juist goed. Want stel dat we de nulpunten van G_1 een plek doorschuiven dan komt deze doorsnede op dezelfde hoogte te liggen en wordt hij ook gedraaid omdat het teken van $r_1(z) = z$ mee verandert. Dus door middel van dit soort projectieve transformaties kunnen we een oppervlak naar een andere sturen. Dit geeft een idee over wanneer we twee oppervlakken hetzelfde kunnen beschouwen en wanneer niet. Dit is de manier waarop we gaan classificeren.

4 Projectieve transformaties

We gaan veel gebruik van projectieve transformaties omdat deze ons dus helpen bij het onderscheiden van oppervlakken. We maken gebruik van projectieve transformaties die de S_3 symmetrie van het oppervlak behouden.

$$z \longmapsto \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

$$x \longmapsto \frac{x}{\gamma z + \delta}$$

$$y \longmapsto \frac{y}{\gamma z + \delta}$$

Op deze manier kunnen we nulpunten van $p(z)$ en $q(z)$ verplaatsen. In dit voorbeeld wordt $z(z^2 - 1)$ gestuurd naar $(z - s)(z - t)(z - u)$:

$$0 \longmapsto s$$

$$1 \longmapsto t$$

$$-1 \longmapsto u$$

$$z \longmapsto \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

Deze vergelijkingen zijn op te lossen in $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Dit resulteert, na invullen en mooier maken, in de volgende transformatie:

$$z \longmapsto \frac{(2tu - su - st)z + s(u - t)}{(t + u - 2s)z + u - t}$$

$$x \longmapsto \frac{x(u - t)}{(t + u - 2s)z + u - t}$$

$$y \longmapsto \frac{y(u - t)}{(t + u - 2s)z + u - t}$$

Dit is te doen voor elk drie paar nulpunten. Dus als $f(z)$ en $g(z)$ dezelfde soort nulpunten hebben, zelfde aantal reële nulpunten, zelfde multipliciteit dan bestaan er α, β, γ, $\delta \in \mathbb{R}$ zodat $g_i = \frac{\alpha f_i + \beta}{\gamma f_i + \delta}$ voor $i = 1, 2, 3$.

Nu hoeven we met behulp van deze projectieve transformaties alleen nog maar te kijken naar de mogelijkheden van nulpunten van $p(z)$ en $q(z)$.

5 De eerste paar klassen.

Nu kunnen we beginnen met enkele klassen te maken. Er zijn een paar opties voor a tot en met g die snel afgehandeld kunnen worden.

1. $a = b = c = d = 0$
2. $g = 0$
3. $e = f = 0$

Situatie 1 geeft de vergelijking $3(ez + f)(x^2 + y^2) + gy(y^2 - 3x^2) = 0$. Met een projectieve transformatie kan $ez + f$ naar z gestuurd worden. Vervolgens gebruiken we nog een projectieve transformatie $z \longmapsto \frac{1}{z}$, $x \longmapsto \frac{x}{z}$ en $y \longmapsto \frac{y}{z}$. Hierdoor hebben we $z^{-3}(3(x^2 + y^2) + y(y^2 - 3x^2)) = 0$. Dit geeft een cylinder. Deze sluiten we uit. Situatie 2 geeft de vergelijking $az^3 + bz^2 + cz + d + 3(ez + f)(x^2 + y^2) = 0$. Het oppervlak wat hierbij hoort is invariant onder elke rotatie met de z-as. Met andere woorden dit is een omwentelingsoppervlak rond de $z - as$ van het kubisch kromme $p(z)$. Deze zijn al geclassificeerd.

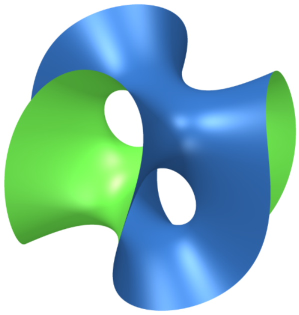
Situatie 3 heeft meerdere opties omdat in dit geval $p(z)$ meerdere opties heeft. Door middel van een projectieve transformatie is dit te reduceren tot één van de vier opties.

1. $az(z^2 - 1)$
2. $az(z^2 + 1)$
3. $az^2(z - 1)$
4. az^3

Hierdoor ontstaat het oppervalk uit één van de volgende vier vergelijkingen:

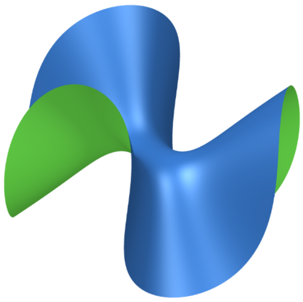
1. $az(z^2 - 1) + gy(y^2 - 3x^2) = 0$
2. $az(z^2 + 1) + gy(y^2 - 3x^2) = 0$
3. $az^2(z - 1) + gy(y^2 - 3x^2) = 0$
4. $az^3 + gy(y^2 - 3x^2) = 0$

Bij alle vergelijkingen kunnen we $g = a = 1$ krijgen door eerst te delen door g en vervolgens de herschaling $x \longmapsto x\sqrt[3]{a/g}$, $y \longmapsto y\sqrt[3]{a/g}$ uit te voeren. De eerste vergelijking geeft een klasse met drie Eckardtpunten.



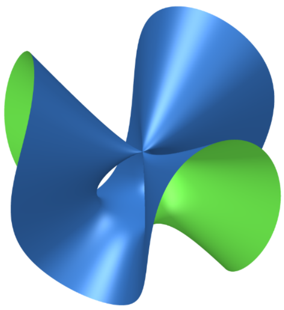
$z(z^2-1)+y(y^2-3x^2)=0$

De tweede vergelijking lijkt heel erg op de eerste. Alleen nu zijn er 2 Eckardt-punten verdwenen omdat twee nulpunten van $p(z)$ complex zijn geworden.



$z(z^2+1)+y(y^2-3x^2)=0$

Bij de derde vergelijking zijn twee Eckardtpunten samen getrokken waardoor er op dat punt een D_4-singulariteit is ontstaan.



$z^2(z-1)+y(y^2-3x^2)=0$

Bij de vierde vergelijking kunnen we weer de transformatie $z \longmapsto \frac{1}{z}$, $x \longmapsto \frac{x}{z}$ en $y \longmapsto \frac{y}{z}$ uitvoeren. Hierdoor hebben $z^{-3}(1+y(y^2-3x^2)=0$. Dit geeft weer een cylinder en die was uitgesloten.

Vanaf nu geldt dat $a \neq 0$, $g=1$ en $(e,f) \neq (0,0)$.

6 Klassen die ontstaan uit $p(z)$.

Om het voor ons makkelijker te maken gebruiken we een projectieve transformatie om er voor te zorgen dat $ez + f$ gelijk is aan z. Door deze transformatie kunnen we onderscheid tussen de opties van $p(z)$. Namelijk heeft $p(z)$ een nulpunt in 0 of niet. We bekijken eerst alle gevallen dat $p(0) = 0$.

6.1 $p(z)$ met drie simpele nulpunten.

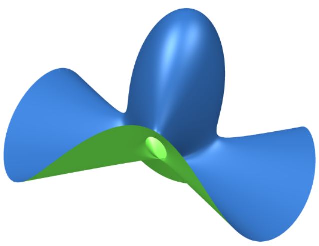
Stel dat $p(z)$ drie verschillende nulpunten heeft die allemaal reëel zijn. Rond nulpunten z_0, z_1 en z_2 ziet het er lokaal uit als een paraboliede. Als een nulpunt 0 is en het oppervlak is glad dan ontstaat er een Eckardtpunt. Zo ontstaat er een familie van klassen in één dimensie. $az(z^2-1)+3z(x^2+y^2)+y(y^2-3x^2) = 0$. Hier kijken we later nog een keer naar.

6.2 $p(z)$ met twee complexe nulpunten.

Stel dat $p(z)$ twee complexe nulpunten heeft. Dan zien we maar één nulpunt dat lokaal een paraboliede is of een Eckardpunt. Zo ontstaat er een familie van klassen in één dimensie, $az(z^2+1)+3z(x^2+y^2)+y(y^2-3x^2) = 0$. Hier kijken we later ook weer naar.

6.3 $p(z)$ met een dubbel nulpunt.

Stel dat $p'(z)$ een dubbel nulpunt heeft. Dan ontstaan er zoals eerder genoemd een A_1 of D_4-singulariteit. Stel het dubbel nulpunt $z_0 = 0$ dan is het punt $(0, 0, 0)$ een D_4-singulariteit. Door projectieve transformatie uit te voeren krijgen we weer een nieuwe klassen.

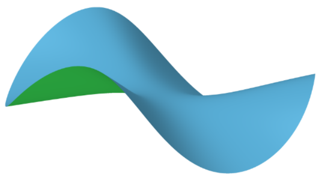


$$(z-1)z^2 + 3z(x^2+y^2) + y(y^2-3x^2) = 0$$

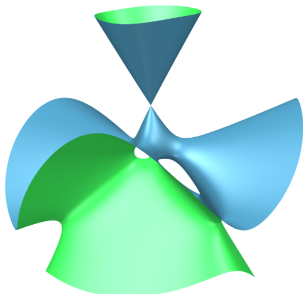
Stel dat het dubbel nulpunt $z_0 \neq 0$. Dan mag worden aangenomen door middel van schaling van z dat $z_0 = 1$. Dit doen we door het dubbel nulpunt naar 1 en het andere nulpunt naar 0 te sturen. Vervolgens door de volgende projectieve transformatie te gebruiken krijgen we $\frac{a}{(\alpha+1)^2}z(z-1)^2+3z(x^2+y^2)+y(y^2-3x^2) = 0$.

$$x \longmapsto \frac{(\alpha+1)x}{\alpha z+1}$$
$$y \longmapsto \frac{(\alpha+1)y}{\alpha z+1}$$
$$z \longmapsto \frac{(\alpha+1)z}{\alpha z+1}$$

Door α zo te kiezen wordt $\frac{a}{(\alpha+1)^2} = \pm 1$. Dit geeft ons twee klassen.



$z(z-1)^2 + 3z(x^2+y^2) + y(y^2-3x^2) = 0$



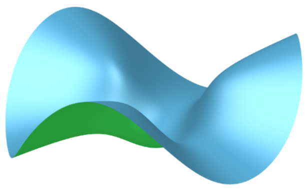
$-z(z-1)^2 + 3z(x^2+y^2) + y(y^2-3x^2) = 0$

6.4 $p(z)$ met een driedubbel nulpunt.

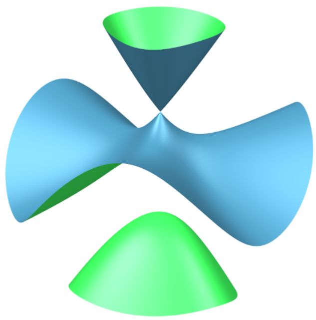
Stel dat $p'(z)$ een driedubbel nulpunt heeft. Dan krijgen we de vergelijking $az^3 + 3z(x^2+y^2) + y(y^2-3x^2) = 0$. Dit geeft een kegel over een kubische kromme en die was uitgesloten.

6.5 $p(z)$ zonder een nulpunt in 0.

Stel dat $p(z)$ een dubbel nulpunt heeft. Omdat 0 geen nulpunt is kunnen we door schaling het dubbel nulpunt 1 maken en het andere nulpunt -1. Hierdoor krijgen we de vergelijking $a'(z+1)(z-1)^2 + 3z(x^2+y^2) + y(y^2-3x^2) = 0$. Wat een familie van klassen geeft in één dimensie.



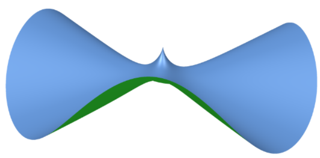
$$(z+1)(z-1)^2 + 3z(x^2+y^2) + y(y^2-3x^2) = 0$$



$$-(z+1)(z-1)^2 + 3z(x^2+y^2) + y(y^2-3x^2) = 0$$

Merk op dat bij $(z+1)(z-1)^2 + 3z(x^2+y^2) + y(y^2-3x^2) = 0$ het dubbele nulpunt is geïsoleerd.

Stel dat $p(z)$ een driedubbel nulpunt heeft. Dan kunnen we het nulpunt naar 1 sturen. Dan wordt de vergelijking $(z-1)^3 + 3z(x^2+y^2) + y(y^2-3x^2) = 0$. Zo ontstaat er een A_2-singulariteit op het punt $(0,0,z_0)$ met imaginaire raakvlakken. Dit geeft weer een nieuwe klasse.



$$(z-1)^3 + 3z(x^2+y^2) + y(y^2-3x^2) = 0$$

We hebben vijf nieuwe klassen gekregen door middel van ontleding van $p(z)$. Hetzelfde kan nu worden gedaan met $q(z)$.

7 Klassen die ontstaan uit $q(z)$.

Ter herinnering is hier nog een keer de herschrijving van $G(x, y, z)$ in termen van $q(z)$, $p(z)$ en $r(z)$:

$$G(x, y, z) = p(z) + 4r(z)^3 + (y - r(z))(2r(z) - \sqrt{3}x + y)(2r(z) + \sqrt{3}x + y)$$

Met $p(z) = az^3 + bz^2 + cz + d$ en $r(z) = ez + f$. Net zoals bij de ontleding van $p(z)$ wordt er eerst $(ez + f)$ naar z gestuurd. En ook weer net zoals bij $p(z)$ bekijken we eerst de situaties dat $q(0) = 0$.

7.1 $q(z)$ met drie simpele nulpunten.

Stel $q(z)$ heeft 3 verschillende nulpunten 0, z_1, z_2. Dan ontstaan er twee doorsnedes met drie rechte lijnen en één met een Eckardtpunt. Hierdoor krijgen we een familie van klassen in één dimensie $az(z^2-1) - 4z^3 + 3z(x^2+y^2) + y(y^2 - 3x^2) = 0$. Ook hier komen we later op terug. Deze familie heeft overlap met de familie waarin $p(z)$ drie nulpunten, complexe of alleen reële, heeft en $p(0) = 0$.

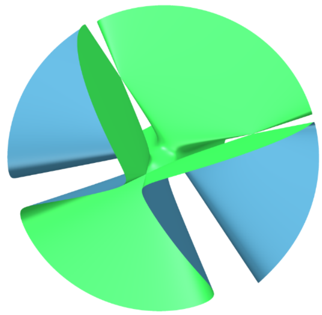
7.2 $q(z)$ met twee complexe nulpunten.

Stel dat $q(z)$ twee complexe nulpunten heeft. Dan krijgen we net als bij $p(z)$ met complexe nulpunten een familie van klassen in één dimensie, $az(z^2 + 1) - 4z^3 + 3z(x^2 + y^2) + y(y^2 - 3x^2) = 0$. Ook deze zal weer overlap hebben met families van $p(z)$ met drie nulpunten, complex of alleen reëel.

7.3 $q(z)$ met een dubbel nulpunt.

Stel dat $q(z)$ een dubbel nulpunt heeft en stel het dubbel nulpunt $z_0 = 0$. Dan moet ook gelden dat $p(z)$ een dubbel nulpunt heeft in 0, omdat $q(z) = p(z)+4z^3$. Dus dan is het al bekend tot welke klasse dit oppervlak behoort. Namelijke $(z - 1)z^2 + 3z(x^2 + y^2) + y(y^2 - 3x^2) = 0$. Stel dat $z_0 \neq 0$ dan mag weer aangenomen worden dat $z_0 = 1$. Op dezelfde manier als bij $p(z)$ met een dubbel nulpunt in 1 krijgen we $\pm z(z - 1)^2 - 4z^3 + 3z(x^2 + y^2) + y(y^2 - 3x^2) = 0$. Dit geeft ons twee klassen.

$z(z - 1)^2 - 4z^3 + 3z(x^2 + y^2) + y(y^2 - 3x^2) = 0$



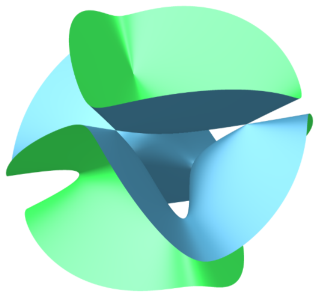
$$-z(z-1)^2 - 4z^3 + 3z(x^2+y^2) + y(y^2-3x^2) = 0$$

7.4 $q(z)$ met een driedubbel nulpunt.

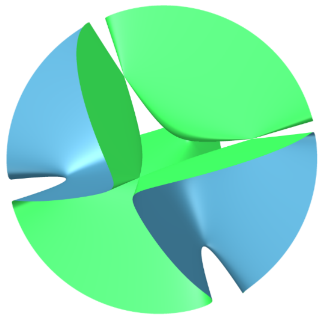
Dit is eigenlijk een herhaling als bij de situatie wanneer $p(z)$ een driedubbel nulpunt heeft in 0. Dit geeft ook een kegel over een kubische kromme.

7.5 $q(z)$ zonder een nulpunt in 0.

Stel dat $q(z)$ een dubbel nulpunt heeft. Dan krijgen we weer een dubbel nulpunt in 1 en de ander in -1. Hierdoor krijgen we weer een familie van klassen in één dimensie $a(z+1)(z-1)^2 - 4z^3 + 3z(x^2+y^2) + y(y^2-3x^2) = 0$.



$$(z+1)(z-1)^2 - 4z^3 + 3z(x^2+y^2) + y(y^2-3x^2) = 0$$



$$-(z+1)(z-1)^2 - 4z^3 + 3z(x^2+y^2) + y(y^2-3x^2) = 0$$

Stel dat $q(z)$ een driedubbel nulpunt heeft. Door een schaling mogen we weer aannemen dat $z_0 = 1$. Met behulp van een projectieve transformatie komen we op een klasse dat op de doorsnijding met het vlak z_0 drie A_2-singulariteiten heeft op de snijpunten van de lijnen.

$$(z-1)^3 - 4z^3 + 3z(x^2+y^2) + y(y^2-3x^2) = 0$$

Dus nu zijn er meer klassen bekend en is er nog één situatie die moet worden bekeken. Welke klassen zijn er als zowel $p(z)$ en $q(z)$ drie verschillende nulpunten hebben?

8 De laatste klassen.

Nu dat er geldt dat $p(z)$ en $q(z)$ allebei drie verschillende nulpunten hebben kunnen we een goeie onderscheiding maken in de relaties tussen de nulpunten van $p(z)$ en $q(z)$. Ze kunnen wel of geen gemeenschappelijk nulpunt hebben. Stel dat ze minstens één nulpunt delen. Dan kan dat nulpunt naar nul gestuurd worden door $ez+f$ naar z te sturen. Ze kunnen niet meer dan één gedeelde nulpunten hebben want $q(z) = p(z) + 4(ez+f)^3$. Dus na de transformatie zodat een nulpunt nul is geld $\tilde{q}(z) = \tilde{p}(z) + 4(z)^3$. Wanneer hier door z wordt gedeeld is te zien dat als ze nog een ander nulpunt zouden delen dat dit opnieuw gelijk aan nul moet zijn. Op deze manier komen we uit op een klasse in de familie $az(z^2-1) + 3z(x^2+y^2) + y(y^2-3x^2) = 0$ of $az(z^2-1) - 4z^3 + 3z(x^2+y^2) + y(y^2-3x^2) = 0$. Dus nu gaan we kijken naar de families van klassen die ter spraken kwamen in het begin van hoofdstuk 6 en 7.

8.1 Vijf verschillende nulpunten.

Stel dat $p(z)$ en $q(z)$ een nulpunt gemeen hebben. Dan is dit nulpunt 0, dus kunnen we delen door z wat we ook doen. Dan krijgen we $\tilde{q}(z) = \tilde{p}(z) + 4z^2$, met $\tilde{p}(z)$ en $\tilde{q}(z)$ polynomen van graad twee. We zijn geïnteresseerd in de mogelijke volgorde van nulpunten. Hiervoor introduceren we een notatie. In deze notatie staan x en o voor een nulpunten van $\tilde{q}(z)$ en $\tilde{p}(z)$ respectievelijk. Dit geeft de volgende opties.

$$-x-o-o-x-$$

$$-o-x-x-o-$$

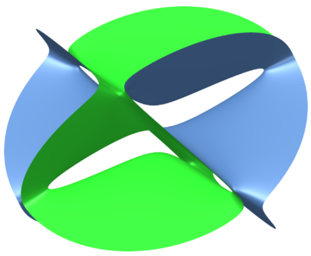
$$-x-x-$$

$$-o-o-$$

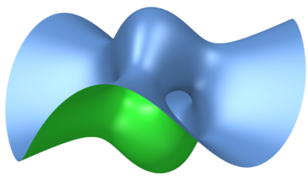
$$--$$

Het kan zijn dat $q'(z)$ en $p'(z)$ complexe nulpunten hebben. Dan wordt er niks genoteerd omdat we alleen geïnteresseerd zijn in reële nulpunten. Als we nu weer met z vermenigvuldigen verandert er niks aan de relatie van de nulpunten. Dit maakt het voor ons makkelijker om de klassen te noteren. Merk hierbij op dat $--$ verandert in $-xo-$. Hier staat xo voor een gemeenschappelijk nulpunt. Deze klasse wordt dan $z(z^2+1)+3z(y^2+x^2)+y(y^2-3x^2)=0$. Als we kijken naar de nulpunten zien we ook iets anders. $z(z^2+1)+y(y^2-3x^2)=0$ heeft dezelfde reële nulpunten. Dus behoren ze tot dezelfde klasse.

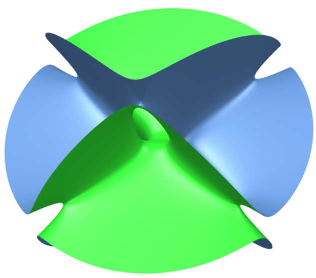
De nieuwe klassen zijn.



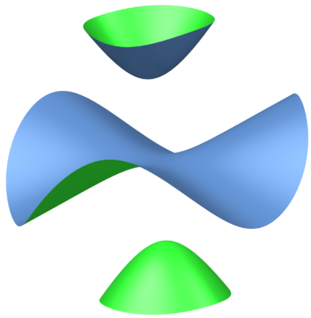
$$-z(z^2-1)-4z^3+3z(x^2+y^2)+y(y^2-3x^2)=0$$



$$z(z^2-1)+3z(x^2+y^2)+y(y^2-3x^2)=0$$



$$z(z^2-1)-4z^3+3z(x^2+y^2)+y(y^2-3x^2)=0$$



$$-z(z^2-1)+3z(x^2+y^2)+y(y^2-3x^2)=0$$

8.2 Zes verschillende nulpunten.

Stel dat $p(z)$ en $q(z)$ geen nulpunt gemeen hebben. Dan is de vraag wat wel de relatie is tussen deze nulpunten. Om deze relatie te vinden worden $p(z)$ en $q(z)$ eerst weer herschreven. Deze herschrijvingen worden bereikt door drie transformaties uit te voeren.

1. $$z \longmapsto z - \frac{f}{e}$$

2. $$z \longmapsto \frac{1}{z}$$

Als laatste vermenigvuldigen we beide kanten met z^3. Na al deze tramformaties zijn $p(z)$ en $q(z)$ veranderd zodat $\tilde{q}(z) = \tilde{p}(z) + 4(e)^3$. Deze herschrijving zorgt er voor dat het snel is in te zien wat de opties zijn voor de nulpunten van $\tilde{p}(z)$ en $\tilde{q}(z)$.

$$-x-o-o-x-x-o-$$

$$-o-x-x-o-o-x-$$

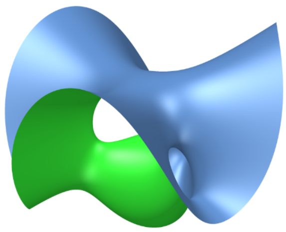
$$-x-x-x-o-$$

$$-x-o-o-o-$$

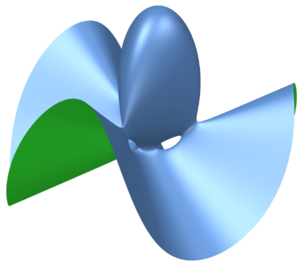
$$-x-o-$$

$$-o-x-$$

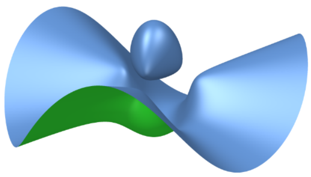
Ook hier is het ontbreken van nulpunten omdat $\tilde{q}(z)$ en $\tilde{p}(z)$ complexe nulpunten kunnen hebben. Nu moet deze informatie terug vertaald worden naar $p(z)$ en $q(z)$. Dit doen we door te kijken naar wat de inversie transformaties doen met de relatie tussen de nulpunten. Als we dit weten, weten we ook welke klassen er ontstaan. De eerste transformatie doet helemaal niks met de nulpunten. Ze worden alleen opgeschoven maar de volgorde verandert niet. Hetzelfde geld voor de tweede transformatie. De derde transformatie spiegelt alles aan dezelfde kant van de verticale as. Zo zou $-x-o-|-o-x-x-o-$, met $|$ voor de locatie van de verticale as, vertaald worden naar $-o-x-|-o-x-x-o-$ en $-x-o-o-|-x-x-o-$ naar $-o-o-x-|-o-x-x-$. Maar als we goed kijken zien we dat deze twee oppervlakken naar elkaar gestuurd kunnen worden als we de nulpunten doordraaien. Met andere woorden het maakt niet uit waar de verticale as komt te staan. Hetzelfde geld als de volgorde helemaal is omgedraaid. We kunnen het hele oppervlak ronddraaien door voor iedere z en min te zetten. Zo wordt $-x-o-o-x-x-o-$ naar $-o-x-x-o-o-x-$ gestuurd. Dit geeft ons vier nieuwe classen.



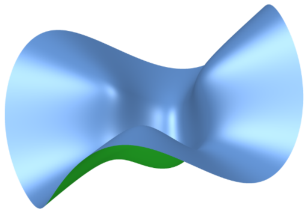
$$(z^2-1)(z+4)+3(\frac{1}{2}z)(x^2+y^2)+y(y^2-3x^2)=0$$



$$z(z^2-1)-4(\frac{1}{2}z+1)^3+3(\frac{1}{2}z+1)(x^2+y^2)+y(y^2-3x^2)=0$$



$$z(z^2-1)+3(z-\tfrac{1}{4})(x^2+y^2)+y(y^2-3x^2)=0$$



$$z(z^2-1)+\frac{1}{2}+3(y^2+x^2)+y*(y^2-3*x^2)=0$$

9 Alle klassen.

Nu zijn alle klassen bekend. Hier volgt een lijst van alle gevonden klassen in termen van nulpunten van $p(z)$ en $q(z)$ in de geïntroduceerde notatie. Maar eerst onze definitie van een klasse.

Een klasse van een oppervlak dat ontstaat door de vergelijking $G(x,y,z)=0$ wordt gedefineerd door:

- Het aantal reële nulpunten van $p(z)$.
- Het aantal reële nulpunten van $q(z)$.
- De multipliciteit van deze nulpunten.
- De volgorde waarin deze nulpunten staan. Hierbij wordt geen onderscheid gemaakt als de nulpunten zijn doorgeschoven of alle relatie symbolen de andere kant op staan.

Klassen met $p(z)=q(z)$.

- $z^2(z-1)+y(y^2-3x^2)=0$
- $z(z^2-1)+y(y^2-3x^2)=0$
- $z(z^2+1)+y(y^2-3x^2)=0$

Klassen met een dubbel nulpunt.

- $z(z-1)^2+3z(x^2+y^2)+y(y^2-3x^2)=0$
  $-xo-oo-$
- $-z(z-1)^2-4z^3+3z(x^2+y^2)+y(y^2-3x^2)=0$
  $-xo-xx-$
- $(z-1)z^2+3z(x^2+y^2)+y(y^2-3x^2)=0$
  $-xxoo-x-o-$
- $-z(z-1)^2+3z(x^2+y^2)+y(y^2-3x^2)=0$
  $-x-xo-x-oo-$
- $z(z-1)^2-4z^3+3z(x^2+y^2)+y(y^2-3x^2)=0$
  $-o-xo-o-xx-$

Klassen met een driedubbel nulpunt.

- $(z-1)^3 + 3z(x^2+y^2) + y(y^2-3x^2) = 0$
  $-x - ooo-$
- $(z-1)^3 - 4z^3 + 3z(x^2+y^2) + y(y^2-3x^2) = 0$
  $-o - xxx-$

Klassen met drie verschillende nulpunten.

- $-z(z^2-1) - 4z^3 + 3z(x^2+y^2) + y(y^2-3x^2) = 0$
  $-x - o - xo - o - x-$
- $z(z^2-1) + 3z(x^2+y^2) + y(y^2-3x^2) = 0$
  $-o - x - xo - x - o-$
- $z(z^2-1) - 4z^3 + 3z(x^2+y^2) + y(y^2-3x^2) = 0$
  $-x - xo - x-$
- $-z(z^2-1) + 3z(x^2+y^2) + y(y^2-3x^2) = 0$
  $-o - xo - o-$
- $(z^2-1)(z+4) + 3(\frac{1}{2}z)(x^2+y^2) + y(y^2-3x^2) = 0$
  $-x - o - o - x - x - o-$
- $z(z^2-1) - 4(\frac{1}{2}z+1)^3 + 3(\frac{1}{2}z+1)(x^2+y^2) + y(y^2-3x^2) = 0$
  $-x - x - x - o-$
- $z(z^2-1) + 3(z-\frac{1}{4})(x^2+y^2) + y(y^2-3x^2) = 0$
  $-o - o - o - x-$
- $z(z^2-1) + \frac{1}{2} + 3(y^2+x^2) + y*(y^2-3*x^2) = 0$
  $-o - x-$

Klassen met vier complexe nulpunten.

- $z(z^2+1) + 3z(x^2+y^2) + y(y^2-3x^2) = 0$

Familie van klassen.

- $a(z+1)(z-1)^2 + 3z(x^2+y^2) + y(y^2-3x^2) = 0$
  Hier kan $q(z)$ een of drie reële nulpunten hebben.
- $a(z+1)(z-1)^2 - 4z^3 + 3z(x^2+y^2) + y(y^2-3x^2) = 0$
  Hier kan $p(z)$ een of drie reële nulpunten hebben.

9.1 Het laatste probleem.

Deze laatste twee families, $a(z+1)(z-1)^2 + 3z(x^2+y^2) + y(y^2-3x^2) = 0$ en $a(z+1)(z-1)^2 - 4z^3 + 3z(x^2+y^2) + y(y^2-3x^2) = 0$, zorgen voor een probleem dat meer aandacht en onderzoek nodig heeft. Als we kijken naar $G_3(x,y,z) = (z+1)(z-1)^2 + 3z(y^2-x^2) + y(y^2-3x^2)$ en $G_4(x,y,z) = -(z+1)(z-1)^2 + 3z(y^2-x^2) + y(y^2-3x^2)$ zien we dat de volgorde van nulpunten exact gelijk is. Alleen bij G_3 is het dubbel nulpunt van $p(z)$ geïsoleerd en bij G_4 niet. Dit geeft aan dat de classificatie een goed begin heeft maar het moet worden aangepast als er meer onderscheid wil worden gemaakt tussen de oppervlakken. Een begin is verder kijken naar de tweede afgeleiden als er sprake is van dubbele nulpunten. Kijken welk invloed dat heeft op de mogelijkheden voor $p(z)$ en $q(z)$. Heeft een dubbel nulpunt van $q(z)$ een eigenschap dat een zelfde soort eigenschap is als het geïsoleerde dubbel nulpunt van $p(z)$? Wat zijn de gevolgen voor $q(z)$ als $p(z)$ een geïsoleerd punt heeft? Wat voor een invloed hebben de complexe nulpunten op de klassen? Is er een relatie dat niks te maken heeft met $p(z)$ en $q(z)$ die verder helpt bij het classificeren?