



**Universiteit Utrecht**

BACHELORSCRIPTIE

---

# Hyperbolische Spiegelingsgroepen

---

*Auteur:*  
Nienke Uijlen  
3743624

*Begeleider:*  
Jan Stienstra

21 januari 2016

# Inhoudsopgave

<b>1</b>	<b>Inleiding</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Inversie in een cirkel</b>	<b>3</b>
2.1	Inversie in de klassieke meetkunde . . . . .	3
2.2	Inversie met behulp van complexe getallen . . . . .	4
2.3	Een spiegeling in een rechte lijn . . . . .	5
2.4	Van matrix naar spiegeling . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Het complexe bovenhalfvlak</b>	<b>7</b>
<b>4</b>	<b>Samengestelde afbeeldingen</b>	<b>8</b>
4.1	Factorisatie tot matrices met determinant -1 en spoor 0 . . . . .	9
4.2	Vaste punten . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Concrete spiegelingen</b>	<b>12</b>
5.1	Het complexe bovenhalfvlakmodel . . . . .	12
5.2	Een hyperbolische driehoek . . . . .	13
5.3	Hyperbolische spiegelingen . . . . .	15
<b>6</b>	<b>Een hyperbolische spiegelingsgroep</b>	<b>18</b>
6.1	De groepen $G$ en $G^+$ . . . . .	19
6.2	Een beschrijving van de groep $G^+$ . . . . .	20
6.3	Een beschrijving van de hyperbolische spiegelingsgroep $G$ . . . . .	22
<b>7</b>	<b>Conclusie</b>	<b>22</b>
	<b>Bijlage A De MATLAB-code</b>	<b>24</b>

# 1 Inleiding

Naast de Euclidische meetkunde die bijna iedereen wel kent, bestaan er ook andere soorten meetkunde. Eén daarvan is de hyperbolische meetkunde. In deze meetkunde kunnen we hyperbolische lijnen definiëren, waarmee we hyperbolische driehoeken kunnen maken. Door zo'n driehoek herhaaldelijk te spiegelen, kan een hyperbolische spiegelingsgroep ontstaan. In deze scriptie zullen we onderzoeken hoe zo'n groep tot stand komt.

Voordat we kunnen inzien wat een hyperbolische spiegelingsgroep precies inhoudt, moeten we een aantal tussenstappen maken. Die tussenstappen zijn gebaseerd op [2]. Allereerst zullen we in hoofdstuk 2 kijken naar inversie (of spiegeling) in een cirkel. In paragraaf 2.1 zullen we eerst zien hoe inversie in een cirkel in de Euclidische meetkunde is gedefinieerd en vervolgens zullen we in paragraaf 2.2 met behulp van complexe getallen een afbeelding vinden die spiegeling in een cirkel voorstelt. In paragraaf 2.3 zullen we hetzelfde doen voor een spiegeling in een verticale rechte lijn. We zullen zien dat de afbeeldingen die we vinden gebaseerd zijn op bijzondere matrices.

Vervolgens onderzoeken we in hoofdstuk 4 welke afbeeldingen er ontstaan als we meerdere spiegelingen na elkaar toepassen. Dit doen we door te kijken naar samenstellingen van de afbeeldingen die we in hoofdstuk 2 hebben gevonden.

In hoofdstuk 5 zullen we een aantal concrete voorbeelden bekijken van spiegelingen in een cirkel of in een verticale rechte lijn. We zullen hierbij werken in de hyperbolische meetkunde, waarvoor we het complexe bovenhalfvlakmodel gebruiken. In dit model zullen we een hyperbolische driehoek maken die we in zijn eigen zijden kunnen spiegelen met behulp van de afbeeldingen die we in hoofdstuk 2 hebben gevonden. Vervolgens kunnen we de nieuwe driehoeken die zo ontstaan ook weer spiegelen in hun eigen zijden, door middel van het samenstellen van afbeeldingen. Hierdoor zullen steeds weer nieuwe driehoeken blijven ontstaan.

Ten slotte kunnen we de groep bekijken die wordt voortgebracht door de matrices waarop de spiegelingen uit hoofdstuk 5 gebaseerd zijn. Deze groep heet een hyperbolische spiegelingsgroep, omdat de voortbrengers ervan spiegelingen in het hyperbolische vlak voorstellen. In hoofdstuk 6 zullen we deze groep beschrijven.

In deze scriptie worden enkele wiskundige principes bekend verondersteld. Zo gaan we er onder andere van uit dat de lezer kennis heeft van complexe getallen en van de basisbegrippen uit de groepentheorie.

## 2 Inversie in een cirkel

In dit hoofdstuk zullen we kijken naar een algemeen idee in de meetkunde, genaamd inversie (of spiegeling) in een cirkel. We bekijken dit idee eerst vanuit de klassieke (Euclidische) meetkunde. Hierbij zullen we laten zien hoe inversie gedefinieerd is en hoe men voor een gegeven punt het spiegelbeeld kan construeren. Vervolgens bestuderen we hoe we inversie kunnen definiëren met behulp van complexe getallen.

### 2.1 Inversie in de klassieke meetkunde

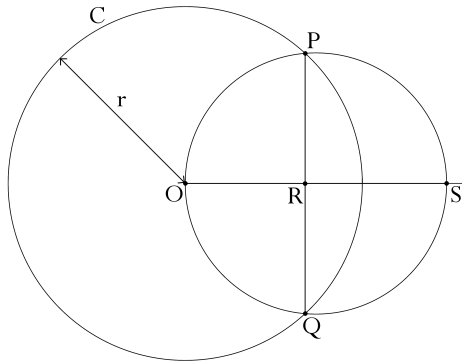
In de klassieke meetkunde werken we in het Euclidische platte vlak  $\mathcal{E}$ . In dit vlak is een cirkel  $C$  met middelpunt  $O$  en straal  $r$  gegeven. Inversie in de cirkel  $C$  is gedefinieerd als de afbeelding

$$\phi_C : \mathcal{E} \setminus \{O\} \longrightarrow \mathcal{E} \setminus \{O\}$$

met de volgende eigenschap: voor een punt  $S \neq O$  wordt het spiegelbeeld  $\phi_C(S)$  gegeven door het punt  $R$  dat op de halve lijn vanuit  $O$  door  $S$  ligt zodat

$$|OR||OS| = r^2.$$

Hierbij zijn  $|OR|$  en  $|OS|$  de afstanden van  $O$  tot  $R$  respectievelijk  $S$ . Uit deze definitie volgt dat als  $\phi_C(S) = R$ , dan  $\phi_C(R) = S$ . Ook is duidelijk dat punten op de cirkel naar zichzelf worden afgebeeld.



*Figuur 1: Inversie in een cirkel met middelpunt  $O$  en straal  $r$ . Het spiegelbeeld van een punt  $S$  is het punt  $R$  op de lijn vanuit  $O$  door  $S$  zodat  $|OR||OS| = r^2$ .*

In figuur 1 is te zien hoe voor een punt buiten of binnen de cirkel  $C$  het spiegelbeeld bepaald wordt met behulp van een meetkundige constructie. Voor een

punt  $S$  buiten de cirkel  $C$  wordt eerst de cirkel door  $O$  en  $S$  met middelpunt op de lijn  $OS$  genomen. De twee snijpunten van die cirkel met  $C$  worden  $P$  en  $Q$  genoemd. Het spiegelbeeld  $R$  van  $S$  is nu het snijpunt van de lijnen  $OS$  en  $PQ$ . Voor een punt  $R$  binnen  $C$  worden eerst de halve lijn vanuit  $O$  door  $R$  en de loodlijn op  $OR$  door  $R$  getrokken. Deze loodlijn snijdt de cirkel  $C$  in twee punten  $P$  en  $Q$ . Vervolgens wordt de cirkel genomen door de punten  $O$ ,  $P$  en  $Q$ . Het spiegelbeeld  $S$  van  $R$  is nu het snijpunt van deze cirkel en de halve lijn vanuit  $O$  door  $R$ .

De correctheid van deze constructie kan worden bewezen met behulp van congruente driehoeken. Omdat wij in deze scriptie enkel het idee gebruiken, zullen we dit bewijs hier niet geven.

## 2.2 Inversie met behulp van complexe getallen

In deze paragraaf maken we de overstap van de klassieke meetkunde naar meetkunde met coördinaten. Hiervoor maken we gebruik van complexe getallen. We vervangen het Euclidische platte vlak  $\mathcal{E}$  door het complexe vlak  $\mathbb{C}$ , waarbij we punten in het vlak identificeren met complexe getallen. De absolute waarde van het verschil tussen  $z$  en  $w$ , oftewel  $|z - w|$ , is nu gelijk aan de afstand tussen de twee overeenkomstige punten in het platte vlak.

Nu laten we in figuur 1 het punt  $O$  corresponderen met het complexe getal  $m$ ,  $R$  met  $w$  en  $S$  met  $z$ . Omdat er moet gelden dat  $|OR||OS| = r^2$  en omdat we weten dat  $R$  op de halve lijn vanuit  $O$  door  $S$  ligt, kunnen we de volgende vergelijkingen opstellen:

$$|w - m||z - m| = r^2 \quad \text{en} \quad w - m = \lambda(z - m) \quad \text{met} \quad \lambda \in \mathbb{R}_{>0} .$$

We zullen, net als we in paragraaf 2.1 meetkundig hebben gedaan, voor een punt buiten de cirkel het spiegelbeeld bepalen. Nu doen we dit echter door bovenstaande vergelijkingen te herschrijven en te combineren. Uit  $w - m = \lambda(z - m)$  volgt  $|w - m| = |\lambda(z - m)| = \lambda|z - m|$ . Hieruit volgt weer  $\lambda = |w - m||z - m|^{-1}$ . Omdat  $|w - m||z - m| = r^2$ , geldt  $|w - m| = r^2|z - m|^{-1}$ . Als we bovenstaande bevindingen combineren, zien we  $\lambda = r^2|z - m|^{-2}$ , waaruit volgt dat

$$w = m + \lambda(z - m) = m + r^2 \frac{z - m}{|z - m|^2} = m + r^2 \frac{z - m}{(z - m)(\overline{z - m})} = m + \frac{r^2}{\overline{z - m}} .$$

Neem nu aan dat  $m$  een reëel getal is, dus dat  $\overline{m} = m$ . Dan kunnen we bovenstaande formule voor  $w$  als volgt omschrijven:

$$w = m + \frac{r^2}{\overline{z - m}} = \frac{m\overline{z} - m^2 + r^2}{\overline{z} - m} = \frac{a\overline{z} + b}{c\overline{z} + d} ,$$

waarbij we  $a$ ,  $b$ ,  $c$  en  $d$  definiëren als:

$$a = \frac{m}{r}, \quad b = \frac{r^2 - m^2}{r}, \quad c = \frac{1}{r} \quad \text{en} \quad d = -\frac{m}{r} .$$

We zien dus dat het spiegelbeeld van een complex getal  $z$  het complexe getal  $\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$  is. Omdat  $m$  en  $r$  reëel zijn, zijn  $a$ ,  $b$ ,  $c$  en  $d$  ook reëel. Bovendien zijn het bijzondere reële getallen, omdat voor de matrix  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  geldt dat  $\det(A) = ad - bc = -1$  en  $\text{spoor}(A) = a + d = 0$ .

### 2.3 Een spiegeling in een rechte lijn

In de voorgaande paragrafen hebben we gekeken naar spiegeling in een cirkel in de klassieke meetkunde en hebben we met behulp van complexe getallen een uitdrukking gevonden voor het spiegelbeeld van een punt. In deze paragraaf zullen we aandacht besteden aan een spiegeling in een verticale rechte lijn. Hierbij zullen we, net als in paragraaf 2.2, werken in het complexe vlak  $\mathbb{C}$ .

Zij  $p$  een reëel getal en zij  $P$  de lijn door  $p$  die loodrecht op de reële as staat. We berekenen nu het spiegelbeeld  $w$  van een complex getal  $z = x + yi$  wanneer we  $z$  spiegelen in lijn  $P$ . Dat spiegelen gaat hierbij op de manier zoals we het in de Euclidische meetkunde gewend zijn. Er zal dus gelden dat  $\Im(w) = \Im(z)$ , waarbij  $\Im(w)$  het imaginaire deel van  $w$  is. Voor het reële deel van  $w$  geldt dat  $\Re(w) = x - 2(x - p) = 2p - x$ . We kunnen nu de volgende uitdrukking voor  $w$  geven:

$$w = 2p - x + yi = 2p - (x - yi) = 2p - \bar{z}.$$

Zo zien we dat het spiegelbeeld van een complex getal  $z$  gegeven wordt door het complexe getal  $2p - \bar{z}$ . Koppelen we hier op dezelfde manier als in paragraaf 2.2 een matrix aan, dan krijgen we de matrix  $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  of de matrix  $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2p \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Ook voor deze matrices geldt dat  $\det(A_1) = \det(A_2) = -1$  en  $\text{spoor}(A_1) = \text{spoor}(A_2) = 0$ .

### 2.4 Van matrix naar spiegeling

In paragraaf 2.2 hebben we gezien dat inversie in een cirkel opgevat kan worden als de afbeelding die het getal  $z$  naar het getal  $\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$  stuurt, waarbij  $a$ ,  $b$ ,  $c$  en  $d$  van de straal en het middelpunt van de cirkel afhangen zoals eerder beschreven. In deze paragraaf zullen we het omgekeerde laten zien.

Zij  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  een reële  $2 \times 2$ -matrix met  $\det(A) = -1$  en  $\text{spoor}(A) = 0$  en zij  $S = \{-\frac{d}{c}\}$  als  $c \neq 0$  en  $S = \emptyset$  als  $c = 0$ . We definiëren nu de afbeelding

$$\phi_A : \mathbb{C} \setminus S \rightarrow \mathbb{C}, \quad \phi_A(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}.$$

We zullen laten zien dat dit een spiegeling is in een cirkel  $C$  in het complexe vlak  $\mathbb{C}$ . Hiervoor onderzoeken we eerst de vaste punten van  $\phi_A$ , oftewel de complexe getallen  $z$  waarvoor geldt  $\phi_A(z) = z$ . Voor zo'n vast punt moeten we dus de vergelijking  $z = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$  oplossen. Uitwerken geeft

$$cz\bar{z} + dz - a\bar{z} - b = 0$$

en omdat  $\text{spoor}(A) = 0$ , geldt  $d = -a$  en dus

$$cz\bar{z} - a(z + \bar{z}) - b = 0 .$$

Veronderstel nu dat  $c \neq 0$ . Dan schrijven we bovenstaande vergelijking als volgt om:

$$z\bar{z} - \frac{a}{c}(z + \bar{z}) - \frac{b}{c} = 0 ,$$

oftewel

$$\left(z - \frac{a}{c}\right)\left(\bar{z} - \frac{a}{c}\right) - \frac{a^2}{c^2} - \frac{b}{c} = 0 .$$

Omdat voor ieder complex getal  $w$  geldt dat  $w\bar{w} = |w|^2$  en omdat  $\bar{z} - \frac{a}{c} = \overline{z - \frac{a}{c}}$ , volgt nu dat

$$\left|z - \frac{a}{c}\right|^2 = \frac{a^2 + bc}{c^2} .$$

Er geldt  $\det(A) = ad - bc = -1$  en  $d = -a$ , waaruit volgt dat  $-a^2 - bc = -1$  en dus  $a^2 + bc = 1$ . Zo zien we dat

$$\left|z - \frac{a}{c}\right|^2 = \frac{1}{c^2} .$$

We concluderen dat als  $c \neq 0$ , de vaste punten van  $\phi_A$  een cirkel  $C$  vormen in het complexe vlak  $\mathbb{C}$  met het middelpunt op de reële as, namelijk  $\frac{a}{c}$ , en met straal  $\frac{1}{|c|}$ . Dit doet ons vermoeden dat de afbeelding  $\phi_A$  opgevat kan worden als een spiegeling in deze cirkel  $C$ . We zullen nu aantonen dat dat inderdaad het geval is.

Als  $\phi_A$  een spiegeling in cirkel  $C$  voorstelt, dan zou volgens paragraaf 2.2 moeten gelden dat  $\frac{m}{r} = a$ ,  $\frac{r^2 - m^2}{r} = b$ ,  $\frac{1}{r} = c$  en  $-\frac{m}{r} = d$ , waarbij  $m = \frac{a}{c}$  en  $r = \frac{1}{c}$ . Wanneer we dit controleren, zien we inderdaad dat

$$\frac{m}{r} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{1}{c}} = a \quad \text{en dat} \quad \frac{r^2 - m^2}{r} = \frac{\frac{1}{c^2} - \frac{a^2}{c^2}}{\frac{1}{c}} = \frac{1 - a^2}{c} = b ,$$

omdat  $-a^2 - bc = -1$  en dus  $1 - a^2 = bc$ . Verder zien we dat

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\frac{1}{c}} = c \quad \text{en} \quad -\frac{m}{r} = -\frac{\frac{a}{c}}{\frac{1}{c}} = -a = d .$$

Hieruit volgt dat de afbeelding  $\phi_A$  inderdaad een spiegeling is in een cirkel met het middelpunt op de reële as, namelijk  $\frac{a}{c}$ , en met straal  $\frac{1}{|c|}$ .

We hebben hierboven verondersteld dat  $c \neq 0$ . Nu zullen we onderzoeken wat de vaste punten van  $\phi_A$  zijn als  $c = 0$ . Uit  $cz\bar{z} - a(z + \bar{z}) - b = 0$  volgt dan

$$-a(z + \bar{z}) - b = 0 .$$

Omdat  $ad - bc = -1$  en omdat  $c = 0$ , geldt  $a \neq 0$  en kunnen we bovenstaande vergelijking als volgt omschrijven:

$$z + \bar{z} = -\frac{b}{a} .$$

Omdat  $z + \bar{z} = 2 \cdot \Re(z)$ , vormen deze vaste punten een lijn loodrecht op de reële as, die door het punt  $-\frac{b}{2a}$  gaat. Dit doet ons denken aan een spiegeling in een verticale rechte lijn, zoals in paragraaf 2.3 gedefinieerd. Om aan te tonen dat, als  $c = 0$ , de afbeelding  $\phi_A$  inderdaad een spiegeling voorstelt in de verticale lijn door het punt  $-\frac{b}{2a}$ , moeten we volgens paragraaf 2.3 laten zien dat ofwel  $a = -1$ ,  $b = 2p$  en  $d = 1$ , ofwel  $a = 1$ ,  $b = -2p$  en  $d = -1$ .

Omdat  $\det(A) = ad - bc = -1$  en omdat  $c = 0$ , geldt dat  $ad = -1$ . Verder geldt ook dat  $\text{spoor}(A) = a + d = 0$ , waaruit volgt dat  $a = \pm 1$  en  $d = \mp 1$ . Wanneer  $a = 1$  en  $d = -1$ , zien we dat de lijn van vaste punten van  $\phi_A$  door het punt  $-\frac{b}{2}$  gaat, waaruit volgt dat  $-\frac{b}{2} = p$  en dus  $b = -2p$ . Als  $a = -1$  en  $d = 1$ , dan gaat de lijn van vaste punten door  $\frac{b}{2}$ . We zien dan dat  $\frac{b}{2} = p$ , oftewel  $b = 2p$ . Uit bovenstaande bevindingen concluderen we dat, als  $c = 0$ , de afbeelding  $\phi_A$  inderdaad een spiegeling voorstelt in een verticale rechte lijn in het complexe vlak  $\mathbb{C}$ .

### 3 Het complexe bovenhalfvlak

Tot nu toe hebben we gekeken naar een afbeelding met als domein het gehele complexe vlak  $\mathbb{C}$ , behalve het punt  $-\frac{d}{c}$ . Vanaf nu zullen we ons beperken tot het complexe bovenhalfvlak ( $\mathfrak{H}$ ), dat als volgt gedefinieerd is:

$$\mathfrak{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\} ,$$

Wanneer we de eerder beschreven afbeelding  $\phi_A$  laten werken op een complex getal  $z$  waarvan het imaginaire deel positief is, dan is ook het imaginaire deel van  $\phi_A(z)$  positief. Stel namelijk dat  $\Im(z) > 0$ , dan  $z = x + yi$  met  $x \in \mathbb{R}$  en



$y \in \mathbb{R}_{>0}$ . We zien dan dat

$$\begin{aligned}\phi_A(z) &= \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} = \frac{(a\bar{z} + b)(cz + d)}{(c\bar{z} + d)(cz + d)} = \frac{acz\bar{z} + ad\bar{z} + bcz + bd}{c^2z\bar{z} + cd(z + \bar{z}) + d^2} \\ &= \frac{ac|z|^2 + ad\bar{z} + bcz + bd}{c^2|z|^2 + cd(z + \bar{z}) + d^2}.\end{aligned}$$

Wanneer we nu  $z$  vervangen door  $x + yi$ , volgt daaruit dat

$$\begin{aligned}\phi_A(z) &= \frac{ac(x^2 + y^2) + ad(x - yi) + bc(x + yi) + bd}{c^2(x^2 + y^2) + cd(2x) + d^2} \\ &= \frac{ac(x^2 + y^2) + (ad + bc)x + bd + (bc - ad)yi}{(cx + d)^2 + (cy)^2}.\end{aligned}$$

Uit de bovenstaande vergelijking en uit het feit dat  $\det(A) = ad - bc = -1$ , concluderen we dat

$$\Im(\phi_A(z)) = \frac{(bc - ad)y}{(cx + d)^2 + (cy)^2} = \frac{y}{(cx + d)^2 + (cy)^2} > 0.$$

Omdat we nu hebben aangetoond dat een complex getal in  $\mathfrak{H}$  door  $\phi_A$  weer in  $\mathfrak{H}$  wordt afgebeeld, kunnen we de afbeelding nu ook als volgt definiëren:

$$\phi_A : \mathfrak{H} \longrightarrow \mathfrak{H}, \quad \phi_A(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}.$$

## 4 Samengestelde afbeeldingen

In paragraaf 2.4 zagen we dat de afbeelding  $\phi_A$  opgevat kan worden als een spiegeling in een cirkel met middelpunt  $\frac{a}{c}$  en straal  $\frac{1}{|c|}$  of, in het geval  $c = 0$ , als een spiegeling in een verticale lijn in  $\mathbb{C}$ . In deze paragraaf onderzoeken we wat er gebeurt als meerdere van deze afbeeldingen na elkaar worden toegepast en kijken we dus naar samengestelde afbeeldingen.

Eerst zullen we dezelfde afbeelding twee keer toepassen op een complex getal  $z$ . Neem  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  een reële  $2 \times 2$ -matrix met  $\det(A) = ad - bc = -1$  en  $\text{spoor}(A) = a + d = 0$ . Als we de bijbehorende afbeelding  $\phi_A$  twee keer toepassen, zien we dat

$$\begin{aligned}\phi_A \circ \phi_A(z) &= \frac{\overline{a\phi_A(z)} + b}{c\overline{\phi_A(z)} + d} = \frac{a\overline{\frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}} + b}{c\overline{\frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}} + d} = \frac{a\frac{az+b}{cz+d} + b}{c\frac{az+b}{cz+d} + d} \\ &= \frac{(a^2 + bc)z + (ab + bd)}{(ac + cd)z + (bc + d^2)} = z.\end{aligned}$$

In de laatste stap hebben we gebruik gemaakt van het feit dat  $d = -a$  en  $ad - bc = -1$ , waardoor geldt dat  $ab + bd = ac + cd = 0$  en  $a^2 + bc = bc + d^2 = 1$ . Wanneer we naar de definitie van inversie kijken die in paragraaf 2.1 gegeven is, zien we dat als  $\phi_A(z)$  het spiegelbeeld van  $z$  is,  $z$  inderdaad het spiegelbeeld van  $\phi_A(z)$  moet zijn, en dat twee keer dezelfde afbeelding toepassen dus inderdaad weer hetzelfde punt moet opleveren.

We kunnen ook twee verschillende afbeeldingen na elkaar toepassen. Zij opnieuw  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  en zij  $E = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ , waarbij  $A$  en  $E$  reële  $2 \times 2$ -matrices zijn met  $\det(A) = \det(E) = -1$  en  $\text{spoor}(A) = \text{spoor}(E) = 0$ .

Wanneer we de afbeeldingen  $\phi_A$  en  $\phi_E$  na elkaar toepassen op een complex getal  $z$ , zien we dat

$$\begin{aligned} \phi_E \circ \phi_A(z) &= \frac{e\overline{\phi_A(z)} + f}{g\overline{\phi_A(z)} + h} = \frac{e\frac{\overline{az+b}}{cz+d} + f}{g\frac{\overline{az+b}}{cz+d} + h} = \frac{e\frac{az+b}{cz+d} + f}{g\frac{az+b}{cz+d} + h} \\ &= \frac{(ae + cf)z + (be + df)}{(ag + ch)z + (bg + dh)}. \end{aligned}$$

Vatten we dit op als een zelfde soort afbeelding als  $\phi_A$  en  $\phi_E$ , dan zien we dat  $\phi_E \circ \phi_A$  de afbeelding is die voortkomt uit de matrix  $\begin{pmatrix} ae + cf & be + df \\ ag + ch & bg + dh \end{pmatrix}$ . In deze matrix herkennen we de matrix die ontstaat door matrixvermenigvuldiging van  $E$  met  $A$ , oftewel de matrix  $EA$ . Hieruit blijkt dat het samenstellen van dit soort afbeeldingen gebaseerd is op het vermenigvuldigen van matrices. Een opvallend verschil tussen de samengestelde afbeelding  $\phi_E \circ \phi_A$  en de oorspronkelijke afbeeldingen  $\phi_A$  en  $\phi_E$  is de conjugatiestreek boven  $z$  die bij  $\phi_E \circ \phi_A$  ontbreekt. Dit komt doordat  $\phi_A$  en  $\phi_E$  afbeeldingen zijn die voortkomen uit matrices met determinant  $-1$ , terwijl  $\det(EA) = \det(E)\det(A) = -1 \cdot -1 = +1$ .

#### 4.1 Factorisatie tot matrices met determinant -1 en spoor 0

Tot nu toe is de afbeelding  $\phi_A$  alleen gedefinieerd voor reële  $2 \times 2$ -matrices met determinant  $-1$  en spoor  $0$ , of voor een product van twee van deze matrices. Nu zullen we aantonen dat we de afbeelding voor elke reële  $2 \times 2$ -matrix  $A$  met determinant  $+1$  of  $-1$  kunnen definiëren. We kunnen namelijk laten zien dat elke reële  $2 \times 2$ -matrix  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  met determinant  $+1$  of  $-1$  te schrijven is als het product van reële  $2 \times 2$ -matrices met determinant  $-1$  en spoor  $0$ .

Stel eerst dat  $\det(A) = +1$  en  $a \neq 0$ . Dan geldt dat

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{c}{a} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a} \\ a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

dus  $A$  is het product van reële  $2 \times 2$ -matrices met determinant  $-1$  en spoor  $0$ .

In het geval dat  $\det(A) = +1$  en  $a = 0$ , vermenigvuldigen we  $A$  met de matrix  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , waardoor we krijgen

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ 0 & b \end{pmatrix},$$

oftewel

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -c & -d \\ 0 & b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c & -d \\ 0 & b \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De matrix  $\begin{pmatrix} -c & -d \\ 0 & b \end{pmatrix}$  heeft determinant  $-bc = \det(A) = +1$ . Hierdoor kunnen we deze matrix schrijven als product van matrices met determinant  $-1$  en spoor  $0$ , op de manier die hierboven gedemonstreerd is. Omdat de matrix  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  zelf ook een product is van twee matrices met determinant  $-1$  en spoor  $0$ , namelijk

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

zien we dat  $A$  te schrijven is als een product van matrices met determinant  $-1$  en spoor  $0$ .

Wanneer  $\det(A) = -1$ , kunnen we  $A$  vermenigvuldigen met de matrix  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , die determinant  $-1$  heeft en spoor  $0$ . Dit resulteert in de matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix},$$

wat betekent dat

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De matrix  $\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$  heeft determinant  $bc - ad = -\det(A) = +1$ . Deze matrix is daarom te schrijven als een product van matrices met determinant  $-1$  en spoor  $0$  en daardoor is  $A$  dat zelf ook.

We kunnen nu, als  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  een reële  $2 \times 2$ -matrix is met  $\det(A) = +1$  of  $\det(A) = -1$ , de volgende afbeelding definiëren:

$$\phi_A : \mathfrak{H} \longrightarrow \mathfrak{H}, \quad \phi_A(z) = \begin{cases} \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} & \text{als } \det(A) = -1 \\ \frac{az + b}{cz + d} & \text{als } \det(A) = +1 \end{cases}.$$

Omdat de matrix  $A$  altijd een product is van reële  $2 \times 2$ -matrices met determinant  $-1$  en spoor  $0$ , is  $\phi_A$  volgens paragraaf 2.4 altijd een samenstelling van spiegelingen in cirkels met hun middelpunt op de reële as en spiegelingen in verticale lijnen in het complexe vlak  $\mathbb{C}$ .

## 4.2 Vaste punten

In paragraaf 2.4 hebben we de vaste punten van  $\phi_A$  onderzocht als  $\det(A) = -1$  en  $\text{spoor}(A) = 0$ . Nu zullen we kijken of  $\phi_A$  ook vaste punten heeft als  $\text{spoor}(A) \neq 0$ . Daarvoor lossen we opnieuw de vergelijking  $z = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$ , oftewel  $cz\bar{z} + dz - a\bar{z} - b = 0$  op. Dit keer gebruiken we echter het gegeven dat  $a + d \neq 0$ . Omdat het domein van  $\phi_A$  het complexe bovenhalfvlak is, zijn we alleen geïnteresseerd in de vaste punten die in  $\mathfrak{H}$  liggen. Daarom concentreren we ons slechts op de complexe getallen  $z$  waarvoor geldt dat  $z = x + yi$  met  $x \in \mathbb{R}$  en  $y \in \mathbb{R}_{>0}$ . Wanneer we dit invullen in bovenstaande vergelijking, vinden we

$$c(x + yi)(x - yi) + d(x + yi) - a(x - yi) - b = 0,$$

waaruit volgt dat

$$c(x^2 + y^2) + (d - a)x - b + (a + d)yi = 0.$$

Er moet dus gelden dat zowel het reële als het imaginaire deel gelijk is aan  $0$ , wat onder andere betekent dat  $(a + d)y = 0$ . Omdat we hebben verondersteld dat  $\text{spoor}(A) = a + d \neq 0$  en dat  $y > 0$ , heeft de bovenstaande vergelijking geen oplossingen die in het complexe bovenhalfvlak liggen. Hieruit blijkt dat de afbeelding  $\phi_A$  geen vaste punten in het complexe bovenhalfvlak heeft als  $\det(A) = -1$  en  $\text{spoor}(A) \neq 0$ .

We zullen nu ook de vaste punten van  $\phi_A$  bestuderen als  $\det(A) = +1$ . In dat geval kunnen we de vaste punten van  $\phi_A$  vinden door de vergelijking  $z = \frac{az + b}{cz + d}$  op te lossen. Wanneer we dit uitwerken, zien we dat

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0,$$

waaruit volgt dat

$$z = \frac{a - d \pm \sqrt{(d - a)^2 + 4bc}}{2c}.$$

Opnieuw zijn we alleen geïnteresseerd in de vaste punten die in het complexe bovenhalfvlak liggen. Dat betekent dat we voor bovenstaande vergelijking alleen de oplossingen  $z$  zoeken waarvoor geldt dat  $\Im(z) > 0$ . Zo'n oplossing is er slechts dan als  $(d - a)^2 + 4bc < 0$ . Wanneer we dit uitwerken, zien we dat moet gelden dat

$$d^2 - 2ad + a^2 + 4bc < 0,$$

oftewel

$$d^2 + 2ad + a^2 - 4ad + 4bc = (a + d)^2 - 4(ad - bc) < 0.$$

In deze uitdrukking herkennen we de formules voor het spoor en de determinant van de matrix  $A$ , waardoor we de ongelijkheid als volgt kunnen omschrijven:

$$\text{spoor}(A)^2 < 4.$$

Als bovenstaande het geval is, wordt het vaste punt in het complexe bovenhalfvlak van de afbeelding  $\phi_A$  gegeven door  $z = \frac{a - d + i\sqrt{-4bc - (d - a)^2}}{2c}$ .

Wanneer  $\text{spoor}(A)^2 \geq 4$ , dan heeft de vergelijking  $z = \frac{a - d \pm \sqrt{(d - a)^2 + 4bc}}{2c}$  enkel reële oplossingen en zal de afbeelding  $\phi_A$  geen vaste punten in het complexe bovenhalfvlak hebben.

## 5 Concrete spiegelingen

In dit hoofdstuk zullen we een aantal concrete voorbeelden bekijken van de afbeelding  $\phi_A$  zoals die in hoofdstuk 4 gedefinieerd is. Daarvoor zullen we eerst een koppeling maken tussen de afbeelding  $\phi_A$  en de hyperbolische meetkunde.

### 5.1 Het complexe bovenhalfvlakmodel

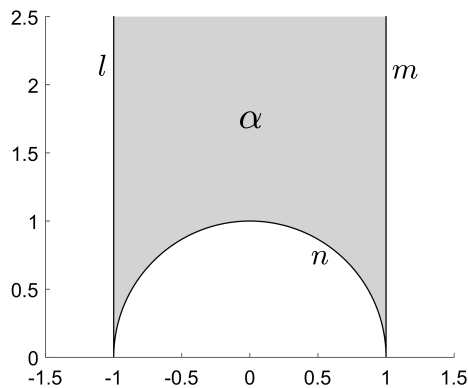
Voordat we concrete spiegelingen gaan bekijken, introduceren we eerst kort de hyperbolische meetkunde. Dit is een niet-Euclidische meetkunde die van de Euclidische meetkunde verschilt in het axioma over parallelle lijnen. In de hyperbolische meetkunde zijn er voor een lijn  $l$  en een punt  $P$  dat niet op  $l$  ligt minstens twee lijnen door  $P$  die  $l$  niet snijden, terwijl er in de Euclidische meetkunde slechts één zo'n lijn is.

Net zoals het Euclidische platte vlak een model is voor de Euclidische meetkunde, zo zijn er ook modellen voor de hyperbolische meetkunde. Het model

dat wij in deze scriptie zullen gebruiken is het complexe bovenhalfvlakmodel. Hierin worden hyperbolische lijnen afgebeeld als rechte lijnen evenwijdig aan de imaginaire as of als halve cirkels met hun middelpunt op de reële as. Meer informatie is te vinden in [1]. Wanneer we terugkijken naar paragraaf 2.4, zien we dat de vaste punten van  $\phi_A$  waarbij  $\det(A) = -1$  en  $\text{spoor}(A) = 0$  dus hyperbolische lijnen vormen in het complexe bovenhalfvlak. Aan elke hyperbolische lijn kunnen we daarom een afbeelding  $\phi_A$  koppelen waarbij  $A$  een reële  $2 \times 2$ -matrix is met determinant  $-1$  en spoor  $0$ . Hieronder zullen we dit doen door eerst, met behulp van paragraaf 2.4, de matrix  $A$  te bepalen.

## 5.2 Een hyperbolische driehoek

Ook in de hyperbolische meetkunde bestaan driehoeken, al voldoen ze niet aan alle eigenschappen waaraan driehoeken in de Euclidische meetkunde voldoen. Zo hoeft de hoekensom niet gelijk te zijn aan  $180^\circ$  en kan deze zelfs per driehoek verschillen. Ook bestaan ze niet uit drie rechte lijnen, maar uit drie hyperbolische lijnen, die ook halve cirkels kunnen zijn. Ten slotte kan het bij een hyperbolische driehoek in het complexe bovenhalfvlakmodel voorkomen dat één hoek niet te zien is, maar bij een punt op oneindig ligt. We zullen nu een voorbeeld geven van een hyperbolische driehoek en vervolgens zullen we voor elk van de drie hyperbolische lijnen berekenen van welke afbeelding het de vaste punten zijn.



*Figuur 2: Een hyperbolische driehoek in het complexe bovenhalfvlak. De driehoek bestaat uit drie hyperbolische lijnen  $l$ ,  $m$  en  $n$ . Eén hoek ligt bij een punt op oneindig en is niet te zien.*

Driehoek  $\alpha$  in figuur 2 bestaat uit drie hyperbolische lijnen, namelijk een verticale lijn  $l$  door het punt  $(-1, 0)$ , een verticale lijn  $m$  door het punt  $(1, 0)$  en een halve cirkelboog  $n$  door de punten  $(-1, 0)$  en  $(1, 0)$  met het middelpunt

op de reële as. Er zijn slechts twee hoeken zichtbaar, namelijk de hoek bij het punt  $(-1, 0)$  en die bij  $(1, 0)$ . De derde hoek ligt bij een punt op oneindig, ergens tussen  $l$  en  $m$  in. We bepalen nu voor elk van de drie lijnen welke matrix we eraan kunnen koppelen.

We beginnen met de lijn  $l$ . We bepalen voor de matrix  $L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  welke waarde  $a$ ,  $b$ ,  $c$  en  $d$  moeten krijgen. Omdat  $l$  een verticale lijn is, moet volgens paragraaf 2.3 gelden dat  $c = 0$ . Omdat ook moet gelden dat  $\det(L) = ad - bc = -1$ , volgt dat  $ad = -1$  en omdat  $\text{spoor}(L) = 0$ , volgt ook dat  $a + d = 0$ . Dat betekent dat  $a = \pm 1$  en  $d = \mp 1$ . Verder geldt voor elke  $z$  op  $l$  dat  $\Re(z) = -1$ . Omdat volgens paragraaf 2.4 geldt dat  $2 \cdot \Re(z) = -\frac{b}{a}$ , zien we dat in dit geval  $-2 = -\frac{b}{a}$ , oftewel  $b = 2a$ . We kunnen nu twee matrices opstellen die voldoen aan bovenstaande eisen. Wanneer we stellen dat  $a = 1$ , dan krijgen we de matrix  $L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , terwijl we, als  $a = -1$ , de matrix  $L_2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  krijgen. Deze matrices leveren beide dezelfde afbeelding op, namelijk

$$\phi_L(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} = -\bar{z} - 2.$$

Op dezelfde manier als hierboven, kunnen we ook twee matrices bij lijn  $m$  bepalen. We zien opnieuw dat  $c = 0$ ,  $a = \pm 1$  en  $d = \mp 1$ . Verder moet nu gelden dat  $2 \cdot \Re(z) = 2 = -\frac{b}{a}$  en dus dat  $b = -2a$ . Zo vinden we de matrices  $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  als  $a = 1$  en  $M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  als  $a = -1$ , die beide de afbeelding

$$\phi_M(z) = -\bar{z} + 2$$

opleveren.

Ook voor de hyperbolische lijn  $n$  kunnen we bepalen van welke afbeelding dit de vaste punten zijn door eerst de bijbehorende matrix te bepalen. Als we weer terugkijken naar paragraaf 2.4, dan zien we dat in dit geval  $c \neq 0$ . Ook zien we dat het middelpunt van de cirkel gelijk moet zijn aan  $\frac{a}{c}$ , oftewel  $\frac{a}{c} = 0$  en dus  $a = 0$ . Omdat weer moet gelden dat  $a + d = 0$ , volgt hieruit dat ook  $d = 0$ . Verder weten we dat de straal van de cirkel gelijk is aan  $\frac{1}{|c|}$  en omdat de straal in dit geval 1 is, geldt  $\frac{1}{|c|} = 1$ , oftewel  $c = \pm 1$ . Ten slotte moet er ook gelden dat  $ad - bc = -1$  en dus dat  $b = \frac{1}{c}$ . Uit het bovenstaande volgen weer twee matrices, namelijk  $N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  als  $c = 1$  en  $N_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  als  $c = -1$ . Ook deze matrices geven beide dezelfde afbeelding, namelijk

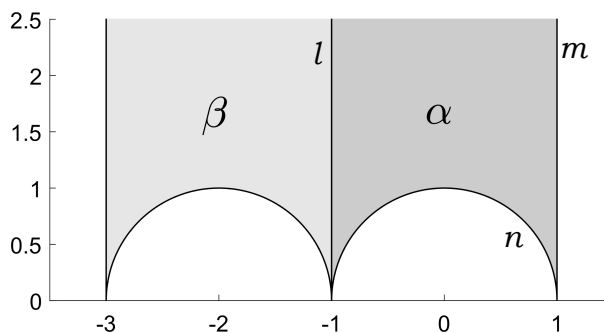
$$\phi_N(z) = \frac{1}{\bar{z}}.$$

### 5.3 Hyperbolische spiegelingen

In deze paragraaf zullen we driehoek  $\alpha$  uit figuur 2 spiegelen in zijn eigen drie zijden, oftewel in de lijnen  $l$ ,  $m$  en  $n$ . Hierbij gaat spiegelen in een verticale rechte lijn op de manier zoals we het in de Euclidische meetkunde gewend zijn. Spiegelen in een cirkelboog gaat op de manier zoals we in paragraaf 2.1 beschreven hebben. Bij het spiegelen zullen we gebruik maken van de afbeeldingen  $\phi_L$ ,  $\phi_M$  en  $\phi_N$  die we in paragraaf 5.2 hebben gevonden.

Allereerst spiegelen we driehoek  $\alpha$  in lijn  $l$ . Hiervoor moeten we alle drie de lijnen van  $\alpha$  in lijn  $l$  spiegelen. Omdat een lijn niet verplaatst wanneer deze gespiegeld wordt in zichzelf, betekent dit dat we eigenlijk alleen de lijnen  $m$  en  $n$  hoeven te spiegelen in  $l$ . Dit doen we door van elk punt op deze twee lijnen het spiegelbeeld te berekenen met behulp van de afbeelding  $\phi_L$  en deze spiegelbeelden vervolgens te tekenen. We zullen hiervoor het programma MATLAB gebruiken. In deze paragraaf zullen we slechts kort uitleggen hoe we te werk zijn gegaan en de resultaten laten zien. De complete MATLAB-code inclusief uitleg is te vinden in bijlage A.

We spiegelen eerst lijn  $m$  in lijn  $l$ . Hiervoor definiëren we  $m$  in MATLAB en laten we het spiegelbeeld hiervan uitrekenen. Dit doen we door alle punten van lijn  $m$  in te vullen in de afbeelding  $\phi_L(z) = -\bar{z} - 2$ . Vervolgens laten we deze spiegelbeelden tekenen door MATLAB. Voor het spiegelen van lijn  $n$  in lijn  $l$  passen we precies dezelfde procedure toe. Dit levert een nieuwe driehoek op die we  $\beta$  noemen. In figuur 3 is deze driehoek te zien.

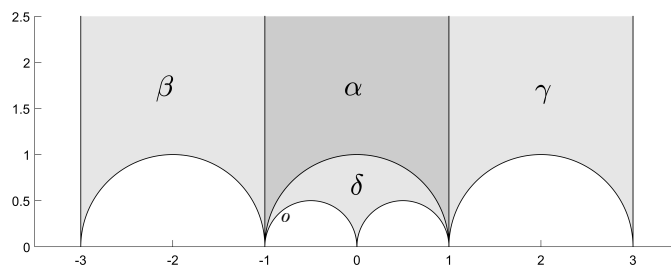


Figuur 3: Driehoek  $\beta$  ontstaat door de drie lijnen van  $\alpha$  te spiegelen in lijn  $l$ .

Het spiegelen van driehoek  $\alpha$  in lijn  $m$  gaat op een soortgelijke manier. Nu laten we MATLAB het spiegelbeeld van de lijnen  $l$  en  $n$  uitrekenen door alle punten op die lijnen in te vullen in de afbeelding  $\phi_M(z) = -\bar{z} + 2$ . Deze spiegelbeelden laten we weer tekenen door MATLAB, waardoor driehoek  $\gamma$



ontstaat. Om driehoek  $\alpha$  te spiegelen in lijn  $n$ , laten we het spiegelbeeld van de lijnen  $l$  en  $m$  berekenen met behulp van de afbeelding  $\phi_N = \frac{1}{z}$ . Als we deze spiegelbeelden weer laten tekenen, krijgen we driehoek  $\delta$ . In figuur 4 zijn de driehoeken  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  en  $\delta$  samen te zien.



Figuur 4: Driehoek  $\alpha$  en de drie driehoeken  $\beta$ ,  $\gamma$  en  $\delta$  die ontstaan door  $\alpha$  te spiegelen in zijn eigen zijden  $l$ ,  $m$  en  $n$ .

Door driehoek  $\alpha$  te spiegelen in de drie lijnen  $l$ ,  $m$  en  $n$ , hebben we drie nieuwe hyperbolische driehoeken gekregen. Ook deze kunnen we weer spiegelen in verschillende hyperbolische lijnen. Dit kunnen we doen door middel van het samenstellen van de afbeeldingen  $\phi_L$ ,  $\phi_M$  en  $\phi_N$ . Zo kunnen we bijvoorbeeld driehoek  $\delta$  spiegelen in één van zijn eigen zijden, namelijk de hyperbolische lijn die in figuur 4 met  $o$  is aangegeven. Daarvoor moeten we eerst de afbeelding vinden die een spiegeling in  $o$  voorstelt.

We bekijken nu de afbeelding  $\phi_O = \phi_N \circ \phi_L \circ \phi_N$  en zullen laten zien dat  $\phi_O$  de afbeelding is die een spiegeling in  $o$  voorstelt. Omdat volgens hoofdstuk 4 het samenstellen van afbeeldingen gebaseerd is op het vermenigvuldigen van matrices, kunnen we aan de afbeelding  $\phi_O$  de matrix  $O = NLN$  koppelen. Hierbij zijn  $L$  en  $N$  de matrices die horen bij de lijnen  $l$  en  $n$ . In paragraaf 5.2 zagen we dat we bij beide lijnen twee matrices kunnen bepalen. Omdat deze matrices dezelfde afbeelding opleveren, maakt het niet uit welke matrix we kiezen. We zullen vanaf nu werken met  $L = L_1$  en  $N = N_1$ .

Omdat  $O$  het product is van drie matrices met determinant  $-1$ , zal gelden dat ook  $\det(O) = -1$ . Wanneer we nu  $\phi_O$  laten werken op het punt  $\phi_N(p)$  waarbij  $p \in l$ , zien we dat

$$\phi_O(\phi_N(p)) = \phi_N\left(\phi_L\left(\phi_N(\phi_N(p))\right)\right) = \phi_N(\phi_L(p)) = \phi_N(p).$$

Hieruit blijkt dat de afbeelding  $\phi_O$  vaste punten heeft. Omdat ook  $\det(O) = -1$ , moet nu volgens paragraaf 4.2 gelden dat  $\text{spoor}(O) = 0$ . Als we terugkijken naar paragraaf 2.4, zien we dat  $\phi_O$  een spiegeling in een cirkel of in een verticale

rechte lijn voorstelt.

We kunnen de afbeelding  $\phi_O$  ook preciezer bepalen door de matrix  $O = NLN$  uit te rekenen. We zien dan dat

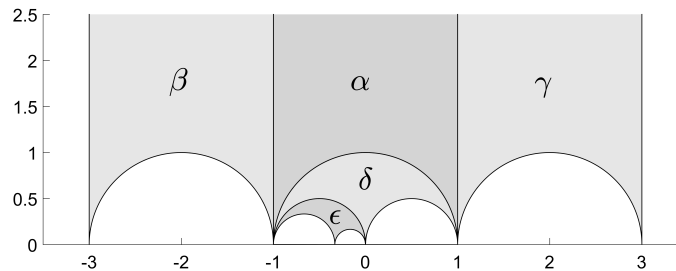
$$O = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hieruit maken we op dat

$$\phi_O = \frac{\bar{z}}{-2\bar{z} - 1}.$$

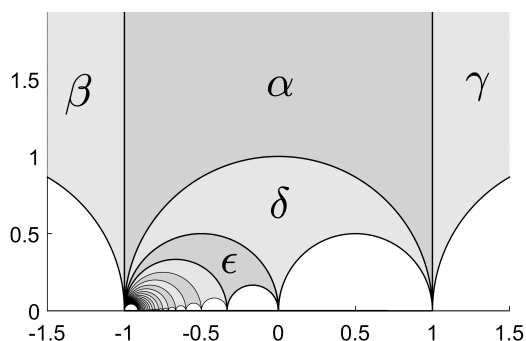
Verder zien we volgens paragraaf 2.4 aan de matrix  $O$  dat  $\phi_O$  een spiegeling voorstelt in de cirkel met middelpunt  $-\frac{1}{2}$  en straal  $\frac{1}{2}$ , oftewel in de hyperbolische lijn  $o$ .

We kunnen nu dus met behulp van de afbeelding  $\phi_O$  de driehoek  $\delta$  door MATLAB laten spiegelen in lijn  $o$ , waardoor we de nieuwe driehoek  $\epsilon$  krijgen. Deze is afgebeeld in figuur 5.



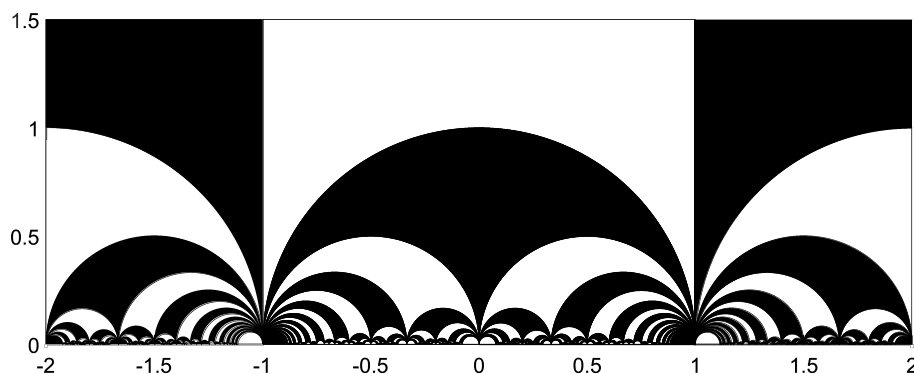
*Figuur 5: De hyperbolische driehoek  $\epsilon$  ontstaat door  $\delta$  te spiegelen in de hyperbolische lijn  $o$ .*

Door middel van het samenstellen van de afbeeldingen  $\phi_L$ ,  $\phi_M$ ,  $\phi_N$  en de nieuwe afbeelding  $\phi_O$  kunnen we steeds nieuwe spiegelingen laten ontstaan. Zo kunnen we ook driehoek  $\epsilon$  spiegelen in één van zijn eigen zijden en zo kunnen we blijven doorgaan. Figuur 6 laat een aantal van dit soort spiegelingen na elkaar zien.



*Figuur 6: Een aantal hyperbolische spiegelingen.*

Door op dezelfde manier als hierboven steeds meer driehoeken in verschillende zijden te spiegelen, kunnen mooie figuren ontstaan. We zullen hier één zo'n figuur laten zien. We beginnen daarbij met een driehoek zoals  $\alpha$ , dus een driehoek met twee hoeken op de reële as en een hoek bij een punt op oneindig. Deze driehoek kleuren we wit. Vervolgens spiegelen we deze driehoek in zijn eigen zijden en doen we bij de nieuwe driehoeken die zo ontstaan hetzelfde. Hierbij verandert een driehoek steeds van kleur als hij gespiegeld wordt: een witte driehoek wordt zwart en omgekeerd. Wanneer we op deze manier een groot aantal verschillende spiegelingen uitvoeren, ontstaat een plaatje zoals in figuur 7.



*Figuur 7: Een aantal hyperbolische spiegelingen. Bij elke spiegeling verandert de gespiegelde driehoek van kleur.*

## 6 Een hyperbolische spiegelingsgroep

In paragraaf 5.3 hebben we gezien dat er door middel van het herhaaldelijk samenstellen van de spiegelingen  $\phi_L$ ,  $\phi_M$  en  $\phi_N$  steeds nieuwe afbeeldingen

ontstaan. Omdat dat samenstellen gebaseerd is op matrixvermenigvuldiging, is het interessant om de matrices te bekijken die ontstaan door de matrices

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

herhaaldelijk met elkaar te vermenigvuldigen<sup>1</sup>. Die matrices vormen een groep van gehele  $2 \times 2$ -matrices, die door  $L$ ,  $M$  en  $N$  wordt voortgebracht. Omdat de voortbrengers van deze groep spiegelingen in het hyperbolische vlak voorstellen, noemen we de groep een hyperbolische spiegelingsgroep. In dit hoofdstuk zullen we onderzoeken hoe we deze groep precies kunnen beschrijven.

## 6.1 De groepen $G$ en $G^+$

We noemen de hyperbolische spiegelingsgroep die voortgebracht wordt door de matrices  $L$ ,  $M$ , en  $N$  nu  $G$ . We merken op dat

$$\begin{aligned} L^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ M^2 &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \\ N^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

waaruit volgt dat  $L = L^{-1}$ ,  $M = M^{-1}$  en  $N = N^{-1}$ .

We bekijken nu de groep  $G^+ = G \cap SL_2(\mathbb{Z})$ , waarbij  $SL_2(\mathbb{Z})$  de groep is van alle gehele  $2 \times 2$ -matrices met determinant  $+1$ . De groep  $G^+$  bestaat dus uit alle producten van  $L$ ,  $M$  en  $N$  die determinant  $+1$  hebben. Omdat de matrices  $L$ ,  $M$  en  $N$  zelf alle drie determinant  $-1$  hebben, bestaat  $G^+$  uit alle matrices die een product zijn van een even aantal van deze drie matrices. Deze groep wordt dus voortgebracht door de matrices  $LL$ ,  $LM$ ,  $LN$ ,  $ML$ ,  $MM$ ,  $MN$ ,  $NL$ ,  $NM$  en  $NN$ . We zullen nu laten zien dat we het aantal voortbrengers van  $G^+$  terug kunnen brengen tot twee.

Omdat we hierboven zagen dat het kwadrateren van de matrices  $L$ ,  $M$  en  $N$  de eenheidsmatrix oplevert, kunnen we de voortbrengers van de groep  $G^+$  terugbrengen tot  $LM$ ,  $LN$ ,  $ML$ ,  $MN$ ,  $NL$  en  $NM$ . Om dezelfde reden geldt ook

<sup>1</sup>In paragraaf 2 zagen we dat deze matrices dezelfde spiegelingen opleveren als de matrices  $-L$ ,  $-M$  en  $-N$ .

dat

$$(LM)^{-1} = M^{-1}L^{-1} = ML ,$$

$$(LN)^{-1} = N^{-1}L^{-1} = NL \text{ en}$$

$$(NM)^{-1} = M^{-1}N^{-1} = MN .$$

Hieruit volgt dat we  $G^+$  ook kunnen definiëren als de groep die door de matrices  $LM$ ,  $LN$  en  $NM$  wordt voortgebracht.

We kunnen het aantal voortbrengers van  $G^+$  nog kleiner maken. Er geldt namelijk dat  $LNNM = LM$ . Hierdoor zien we dat de matrix  $LM$  te schrijven is als een product van de matrices  $LN$  en  $NM$ , waaruit volgt dat de groep  $G^+$  door deze twee matrices wordt voortgebracht. Wanneer we nu stellen dat  $C = LN = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  en  $D = NM = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ , kunnen we zeggen dat de matrices  $C$  en  $D$  de groep  $G^+$  voortbrengen.

## 6.2 Een beschrijving van de groep $G^+$

We zullen nu een precieze beschrijving geven van de groep  $G^+$ . Hiervoor definiëren we eerst een andere groep van gehele  $2 \times 2$ -matrices, namelijk de groep  $\Gamma$ , die wordt voortgebracht door de matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  en  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ . Deze groep zullen we straks gebruiken om een uitdrukking te geven voor de groep  $G^+$ .

We definiëren nu de matrix  $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Als we deze matrix kwadrateren, zien we dat

$$P^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

waaruit volgt dat  $P = P^{-1}$ .

Met behulp van de matrix  $P$  kunnen we een verband geven tussen de voortbrengers  $A$  en  $B$  van de groep  $\Gamma$  en de voortbrengers  $C$  en  $D$  van de groep  $G^+$ . Wanneer we namelijk de matrices  $PCP$  en  $PDP$  bekijken, zien we dat

$$\begin{aligned}
PCP &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A
\end{aligned}$$

en dat

$$\begin{aligned}
PDP &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = B.
\end{aligned}$$

Uit  $PCP = A$  volgt, wanneer we beide kanten zowel links als rechts vermenigvuldigen met  $P^{-1} = P$ , dat  $C = PAP$ . Dit betekent dat  $C^{-1} = (PAP)^{-1} = PA^{-1}P$ . Op dezelfde manier volgt uit  $PDP = B$  dat  $D = PBP$  en dat  $D^{-1} = PB^{-1}P$ .

We zullen nu aantonen dat de groep  $G^+$  gelijk is aan de groep  $P\Gamma P = \{PXP \mid X \in \Gamma\}$ . Dit doen we door te laten zien dat  $G^+ \subseteq P\Gamma P$  en dat  $P\Gamma P \subseteq G^+$ .

Stel eerst dat  $S \in G^+$ , dan is  $S$  een product van de matrices  $C$ ,  $D$ ,  $C^{-1}$  en  $D^{-1}$ . Hierboven zagen we dat dit betekent dat  $S$  een product is van de matrices  $PAP$ ,  $PBP$ ,  $PA^{-1}P$  en  $PB^{-1}P$ . Wanneer we een willekeurig product van deze laatste vier matrices bekijken, zien we dat we een matrix  $PEP$  krijgen, waarbij  $E$  een product is van de matrices  $A$ ,  $B$ ,  $A^{-1}$  en  $B^{-1}$ . Hierbij hebben we gebruikt dat  $PP$  de eenheidsmatrix oplevert. We zien dus dat  $S = PEP$ . Omdat de matrix  $E$  bestaat uit de voortbrengers van  $\Gamma$  en hun inverse matrices, geldt  $E \in \Gamma$  en dus  $PEP = S \in P\Gamma P$ . Hieruit volgt dat  $G^+ \subseteq P\Gamma P$ .

Stel nu dat  $S \in P\Gamma P$ . Dan geldt dat  $S = PTP$  voor een matrix  $T \in \Gamma$ . Omdat  $T \in \Gamma$ , is het een product van de matrices  $A$ ,  $B$ ,  $A^{-1}$  en  $B^{-1}$ , oftewel van de matrices  $PCP$ ,  $PDP$ ,  $PC^{-1}P$  en  $PD^{-1}P$ . Op dezelfde manier als hierboven, zien we dat  $T$  dus gelijk is aan een matrix  $PFP$ , waarbij  $F$  een product is van de matrices  $C$ ,  $D$ ,  $C^{-1}$  en  $D^{-1}$  en dus een element van de groep  $G^+$ . Hieruit volgt dat  $S = PTP = PPFPP = F \in G^+$  en dus dat  $P\Gamma P \subseteq G^+$ . We kunnen nu concluderen dat  $G^+ = P\Gamma P$ .

We zullen de groep  $\Gamma$  nu beschrijven met behulp van congruenties. Daarvoor bekijken we de groep die wordt voortgebracht door de matrices  $A$ ,  $B$  en

$-I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Het is bekend dat dit de groep  $\Gamma(2)$  is, die als volgt kan worden beschreven:

$$\Gamma(2) = \left\{ Q \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid Q \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{2} \right\} .$$

Wanneer we nu terugkijken naar de groep  $G^+$ , zien we dat we deze ook kunnen beschrijven met behulp van congruenties. Als we namelijk  $\pm G^+$  schrijven voor de groep die wordt voortgebracht door  $G^+$  en  $-I$ , zien we dat deze beschreven kan worden als

$$\pm G^+ = \left\{ R \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid PRP \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{2} \right\} .$$

### 6.3 Een beschrijving van de hyperbolische spiegelingsgroep $G$

We hebben in paragraaf 6.2 een omschrijving gevonden voor de groep  $G^+$ . Dit is echter maar een deel van de hyperbolische spiegelingsgroep  $G$ , namelijk het deel van de matrices die determinant  $+1$  hebben. Het andere deel van  $G$ , de matrices met determinant  $-1$ , kunnen we beschrijven als de nevenklasse  $NG^+$ . Stel namelijk dat  $K \in G$  en  $K \notin G^+$ . Dan geldt  $\det(K) = -1$ , dus  $\det(NK) = -1 \cdot -1 = +1$  en  $NK \in G^+$ . Omdat  $N^{-1} = N$ , betekent dit dat  $K = NNK \in NG^+$ . Hieruit volgt dat we  $G$  inderdaad in de twee delen  $G^+$  en  $NG^+$  kunnen opsplitsen.

Met behulp van bovenstaande bevindingen, kunnen we de hyperbolische spiegelingsgroep  $G$  nu als volgt omschrijven:

$$G = G^+ \cup NG^+, \text{ waarbij } \pm G^+ = \left\{ R \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid PRP \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{2} \right\} .$$

De reden dat we naar de groep  $\pm G^+$  moeten kijken in plaats van de groep  $G^+$ , is dat de groep  $G$  voortkomt uit spiegelingen waarbij we steeds twee matrices kunnen opstellen die een factor  $-1$  van elkaar verschillen. Zie ook de opmerking in voetnoot 1.

## 7 Conclusie

In deze scriptie hebben we, met behulp van een aantal tussenstappen, een omschrijving gegeven van de hyperbolische spiegelingsgroep die ontstaat door een hyperbolische driehoek herhaaldelijk in zijn eigen zijden te spiegelen.

We zijn begonnen met het kijken naar spiegelingen in cirkels en rechte lijnen, waarvoor we met behulp van complexe getallen afbeeldingen hebben gedefinieerd. Daarna hebben we meerdere spiegelingen na elkaar toegepast en gekeken naar de samengestelde afbeeldingen die op die manier ontstaan. Vervolgens hebben we in het complexe bovenhalfvlakmodel een hyperbolische driehoek gedefinieerd, die we herhaaldelijk in zijn eigen zijden hebben gespiegeld met behulp van de afbeeldingen die we eerder hebben gevonden. Ten slotte hebben we gezien dat hierdoor een hyperbolische spiegelingsgroep ontstaat en hebben we voor deze groep een precieze omschrijving gevonden met behulp van de groep  $\Gamma(2)$ .

## Referenties

- [1] Anderson, James W. (2005)  
*Hyperbolic Geometry*  
Springer Science & Business Media, London. p 1-8.
- [2] Stienstra, J.  
*Dictaat concrete meetkunde*



## A De MATLAB-code

Hieronder zullen we de code geven die we in MATLAB hebben gebruikt om de hyperbolische driehoeken te laten spiegelen. Tekst die achter een %-tekentje staat is commentaar en wordt niet uitgevoerd door MATLAB.

```
function Matrixvermenigvuldiging

figure(1);
clf;

% Eerst plotten we de lijnen l, m en n.

tmp = 0:0.01:1000;
l = -1 + 1i*tmp; % lijn l
m = 1 + 1i*tmp; % lijn m

theta = [0:0.001:1]*pi;
n = cos(theta) + 1i*sin(theta); % lijn n

hold on;
plot(l);
plot(m);
plot(n); % Deze drie lijnen leveren de driehoek alpha op

% Nu maken we de matrices bij de lijnen l, m en n

L = [1 2 ; 0 -1];
M = [1 -2 ; 0 -1];
N = [0 1 ; 1 0];

% We spiegelen met behulp van de functie 'spiegeling' driehoek alpha in de
% lijn l

nGespiegeldInl = spiegeling(L,n);
plot(nGespiegeldInl);
mGespiegeldInl = spiegeling(L,m);
plot(mGespiegeldInl); % Dit levert driehoek beta op

% We spiegelen met behulp van de functie 'spiegeling' driehoek alpha in de
% lijn m

lGespiegeldInm = spiegeling(M,l);
plot(lGespiegeldInm);
nGespiegeldInm = spiegeling(M,n);
```

```

plot(nGespiegeldInn);          % Dit levert driehoek gamma op

% We spiegelen met behulp van de functie 'spiegeling' driehoek alpha in de
% lijn n

lGespiegeldInn = spiegeling(N,1);
plot(lGespiegeldInn);
mGespiegeldInn = spiegeling(N,m);
plot(mGespiegeldInn);          % Dit levert driehoek delta op

% Met behulp van de functie 'recursief' laten we driehoek alpha en de
% driehoeken die daaruit ontstaan recursief spiegelen

recursief(n, lGespiegeldInn, mGespiegeldInn, N, N*L*N, N*M*N, 1, 7)

hold off;

axis('equal');
axis([-2,2,0,1.5]);          % Hiermee stellen we de assen in.

set(0,'DefaultAxesColorOrder',[0 0 0],...
'DefaultAxesLineStyleOrder','-');
% Dit zorgt ervoor dat alle lijnen doorgetrokken en zwart zijn.

end

%% We maken een functie om een spiegeling uit te voeren

function gespiegeld = spiegeling (matrix, punten)
a = matrix(1,1);          % rij 1, kolom 2
b = matrix(1,2);
c = matrix(2,1);
d = matrix(2,2);
gespiegeld = (a*conj(punten) + b) ./ (c*conj(punten) + d);
end

%% We maken een functie om driehoeken recursief te laten spiegelen

function recursief (puntenB, puntenL, puntenR, matrixB, matrixL, matrixR, teller, max)
% B=boven, L=links, R=rechts

% Punten van de nieuwe linker driehoek
puntenLL = spiegeling(matrixL, puntenB); % Linkerzijde linker driehoek
puntenLR = spiegeling(matrixL, puntenR); % Rechterzijde linker driehoek
puntenLB = puntenL;
% Punten van de nieuwe rechter driehoek

```

```

puntenRL = spiegeling(matrixR, puntenL); % Linkerzijde rechterdriehoek
puntenRR = spiegeling(matrixR, puntenB); % Rechterzijde rechterdriehoek
puntenRB = puntenR;

plot(puntenLL);
plot(puntenLR);
plot(puntenRL);
plot(puntenRR);

% Matrices van de linkerdriehoek
matrixLB = matrixL; % Matrix bovenzijde linkerdriehoek
matrixLL = matrixL*matrixB*matrixL; % Matrix linkerzijde linkerdriehoek
matrixLR = matrixL*matrixR*matrixL; % Matrix rechterzijde linkerdriehoek

% Matrices van de rechterdriehoek
matrixRB = matrixR; % Matrix bovenzijde rechterdriehoek
matrixRL = matrixR*matrixL*matrixR; % Matrix linkerzijde rechterdriehoek
matrixRR = matrixR*matrixB*matrixR; % Matrix rechterzijde rechterdriehoek

if teller < max
recursief(puntenLB, puntenLL, puntenLR, matrixLB, matrixLL, matrixLR, teller+1, max);
recursief(puntenRB, puntenRL, puntenRR, matrixRB, matrixRL, matrixRR, teller+1, max);
end

end

```