



Universiteit Utrecht

MATHEMATISCH INSTITUUT

BACHELOR SCRIPTIE

**Leren en liegen. De replicator en best
response dynamica in een banenmarkt
signaalspel.**

Auteur:
SUZANNE LOEFF
5502195

Begeleider:
DR. M. RUIJGROK

17 juni 2016

Samenvatting

Binnen het banenmarkt signaalspel van Spence zijn tegengestelde belangen tussen de werknemer en de werkgever, die beiden hun payoff willen maximaliseren. De werknemer, die een baan bij het bedrijf van de werkgever wil, kan eerlijk zijn of liegen over zijn productiviteit. Hij stuurt hierover een signaal wat de werkgever ontvangt. De werkgever probeert vervolgens zijn payoff te maximaliseren door het loon aan te passen aan zijn overtuiging over de productiviteit van deze werknemer. Deze scriptie onderzoekt het gedrag van de werknemer en de werkgever binnen het banenmarkt signaalspel. Bij zowel de replicator als de best response dynamica zijn de kosten van het signaal van invloed op de eerlijkheid van de spelers. Als deze kosten erg hoog of laag zijn, verdwijnt de factor eerlijkheid in het spel bijna helemaal. Als de signaalkosten hier echter ergens tussen liggen, is de factor eerlijkheid het hoogst. In dit geval sturen productieve werknemers een duur signaal en ontvangen zij een hoog loon, terwijl niet-productieve werknemers een goedkoop signaal sturen en een laag loon ontvangen.

Inhoudsopgave

1	Inleiding	3
2	Speltheorie	5
2.1	Signaalspel	7
3	Dynamica	10
3.1	Replicator dynamica	10
3.2	Best response dynamica	11
3.3	De replicator en best response dynamica bij steen, papier, schaar	13
4	Het banenmarkt signaalspel van Spence	16
4.1	Beschrijving	16
4.2	Evenwichten	18
5	De dynamica bij het spel van Spence	19
5.1	De best responses van de werknemer en de werkgever	19
5.2	Replicator dynamica	22
5.3	Best response dynamica	22
5.4	De resultaten	23
5.4.1	De dynamica bij hoge signaalkosten	23
5.4.2	De dynamica bij lage signaalkosten	26
6	Conclusie	29
7	Referenties	30
A	Appendix	31
B	Appendix	31
C	Appendix	32
D	Appendix	34

1 Inleiding

In deze scriptie zal het banenmarkt signaalspel van Spence ([8]) nader worden bekeken. Dit spel wordt gespeeld door twee personen: de werknemer en werkgever. De werknemer solliciteert bij de werkgever, maar kan liegen of eerlijk zijn over de capaciteiten die hij bezit. In deze inleiding wordt eerst een korte toelichting gegeven van een tweepersoons signaalspel en daarna wordt het banenmarkt signaalspel van Spence kort uitgelegd. Vervolgens worden twee dynamische systemen geïntroduceerd om het spel te onderzoeken. Tenslotte wordt aangegeven welke informatie in welk hoofdstuk staat en welke bronnen zijn geraadpleegd.

Bij een signaalspel dat wordt gespeeld door twee spelers is er sprake van asymmetrische informatie. De geïnformeerde speler die in staat is om signalen af te geven en de ongeïnformeerde speler die deze signalen ontvangt. De informatie, die alleen bekend is bij de geïnformeerde speler, is relevant voor beide spelers. Nadat de ongeïnformeerde speler een signaal heeft ontvangen, is deze speler in staat om te reageren op dit signaal. ([5], p. 331-332) Aangezien het uitzenden van signalen een gevolg is van individuele beslissingen, handelt niet elke speler op dezelfde manier in een bepaalde situatie. Een dergelijke situatie kan daarom worden uitgebreid door strategieën van de geïnformeerde speler te onderscheiden. Deze strategieën kan de ongeïnformeerde speler echter niet observeren. Aangezien een beslissing op basis van een ontvangen signaal ook per speler kan verschillen, is het ook mogelijk om strategieën van de ongeïnformeerde speler te onderscheiden. Onderzoek naar de uitkomsten van het spel bij verschillende signalen, geeft vervolgens informatie over het gedrag van beide spelers. ([5], p. 331-332)

Niet alleen verschijnselen binnen de economie en de politiek kunnen worden voorgesteld als signaalspellen, maar ook verschillende biologische en taalkundige verschijnselen. Denk hierbij bijvoorbeeld aan communicatie tussen prooi en roofdier ([11], p. 7), nakomelingen die smeken om voedsel bij hun ouders ([5], p. 335-336; [11]) en communicatie tussen mensen die beleefd zijn, en daarom meer moeite doen om zich uit te drukken ([9]).

Het banenmarkt signaalspel van Spence wordt door twee heren gespeeld.¹ De werknemer die solliciteert bij een werkgever en de werkgever die beslist of de werknemer wordt aangenomen. Vaak is het tijdens een sollicitatiegesprek lastig voor een werkgever om te beoordelen of een werknemer productief is. Het kost immers tijd om te ontdekken of de werknemer zijn werkzaamheden efficiënt uitvoert. Er is daarom sprake van asymmetrische informatie. De werknemer heeft informatie over zijn productiviteit, terwijl de werkgever dit niet onmiddellijk kan observeren. Ondanks de tijd die het kost voor de werkgever om de productiviteit van de werknemer te beoordelen, moet de werkgever wel bepalen welk loon hij bereid is te betalen aan de werknemer. Daarnaast is het vaak belangrijk dat de werknemer een bepaalde training volgt om zijn werkzaamheden goed te kunnen uitvoeren. De werknemer en de werkgever kunnen vervolgens worden ingedeeld in bepaalde typen met bijbehorende strategieën. Bovendien kunnen er aan het loon, de kosten van een opleiding en de payoffs van de werknemer en de werkgever waardes worden toegekend. Dit zal in hoofdstuk 4.1 verder aan bod komen.

De evolutionaire speltheorie onderzoekt de verhoudingen tussen populaties over tijd. Om de verhoudingen tussen werkgevers en werknemers te onderzoeken, zal gebruik worden gemaakt van twee dynamische systemen: de replicator en de best response dynamica. Ondanks dat deze twee systemen gebaseerd zijn op verschillende aannames, beschouwen ze beide de factor ‘leren’ binnen een spel. Als het spel van de werkgever en de werknemer telkens op dezelfde manier verloopt, bevindt het spel zich in een evenwicht. In deze scriptie wordt onderzocht bij welk gedrag van de

¹Dit maakt het eenvoudiger om in de rest van de tekst te verwijzen naar de personen die dit spel spelen.

spelers een evenwicht tot stand komt en wanneer deze stabiel is. Centraal staat hierbij de vraag: ‘Spelen de werkgever en de werknemer graag op een eerlijke manier?’.

In deze alinea wordt aangegeven hoe deze scriptie is ingedeeld. Hoofdstuk 2 bevat algemene informatie over speltheorie die noodzakelijk is voor de rest van deze scriptie. Hoofdstuk 3 zal twee dynamische systemen nader toelichten: de replicator dynamica in 3.1 en de best response dynamica in 3.2. Vervolgens zal door middel van een voorbeeld in hoofdstuk 3.3 worden laten zien hoe deze dynamica moeten worden toegepast. In hoofdstuk 4 zal informatie worden verschaft om het banenmarkt signaalspel van Spence inzichtelijker te maken. Op basis van de informatie gegeven in hoofdstuk 3 en 4, zal het in hoofdstuk 5 vervolgens mogelijk zijn de twee dynamische systemen te gebruiken bij het spel van Spence. De figuren die grafisch de best responses van dit spel weergeven, zijn zelf geconstrueerd met behulp van het programma GeoGebra ([2]). Tenslotte wordt in hoofdstuk 6 een kort overzicht gegeven van de informatie die in deze scriptie is verschaft. Bovendien wordt geconcludeerd bij welk gedrag van de werkgever en de werknemer het spel van Spence zich in een evenwicht bevindt en of de spelers graag eerlijk spelen.

Voor deze scriptie is gebruik gemaakt van verschillende bronnen. Het spel van Spence ([8]) staat hierbij centraal. Wagner ([10]) doet een vergelijkbaar onderzoek, maar bespreekt minder theorie met betrekking tot de dynamische systemen die in deze scriptie worden gebruikt. Voor achtergrondinformatie zijn een aantal tekstboeken ([3], [5], [6]) en artikelen ([1], [4], [7], [9], [11]) over speltheorie geraadpleegd. Daarnaast is het pakket TikZ van Latex en GeoGebra ([2]) gebruikt om de figuren 1, 3, 4 respectievelijk 5 te construeren.

2 Speltheorie

Speltheorie is een wiskundige discipline die onderzoek doet naar situaties waarbij concurrentie en samenwerking optreedt en verschillende partijen interactief betrokken zijn. Het onderzoek helpt ons onder andere begrijpen hoe de betrokken partijen beslissingen maken, hoe de interactie tussen partijen verloopt en wat voor uitkomsten dit geeft. Deze brede definitie van speltheorie is noodzakelijk vanwege de vele toepassingen die deze discipline kent. Deze toepassingen komen voor in wetenschappen als bijvoorbeeld biologie, wiskunde en economie. Denk hierbij aan vraagstukken over economische concurrentie, dieren die vechten voor een prooi en stemmen voor politieke kandidaten. ([5], p. 1; [6], p. 1)

Met *spelers* wordt verwezen naar de partijen die beslissingen maken. Elke speler heeft een verzameling van mogelijke *acties* en elke speler wordt beïnvloed door de acties van alle andere spelers. Daarnaast hebben alle spelers een bepaalde *voorkeur* wat betreft hun actie *profiel*, de lijst van alle acties van de speler. Deze voorkeur is gebaseerd op de hoogte van de *payoff*, in andere woorden, het resultaat van de keuze. ([5], p. 13) Om een spel te spelen gebruikt elke speler daarnaast een bepaalde *strategie*. Dit is een compleet plan van de speler om een spel te spelen. Deze strategie bevat dus informatie over de actie van de speler bij elke beslissing die mogelijk gemaakt moet worden. ([6], p. 46)

Neem vanaf nu aan dat er bij een spel twee spelers deelnemen. De mogelijke uitkomsten van een spel kunnen nu eenvoudig worden afgelezen wanneer een spel wordt weergegeven in de normale vorm. Deze normale vorm is een $m \times n$ -bimatrix (A, B) met $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$. De rijspeler 1 heeft dan een m aantal mogelijke strategieën met uitkomsten A en de kolomspeler 2 heeft n aantal mogelijke strategieën met mogelijke uitkomsten B . Elke speler kan dus meerdere strategieën gebruiken en de verzameling van alle strategieën van bijvoorbeeld speler 1 wordt de *strategie ruimte* Δ_m genoemd. Deze wordt gedefinieerd door

$$\Delta_m := \left\{ \vec{p} = (p_1, \dots, p_m) \in \mathbb{R}^m \mid \sum_{i=1}^m p_i = 1, p_i \geq 0 \forall i = 1, \dots, m \right\} \quad (2.1)$$

waarbij \vec{p} de kansverdeling van de strategie is. Er geldt dat \vec{p} een *pure strategie* is indien er een gehele $k \in [1, m]$ bestaat zodat $p_k = 1$ (want dan ook $p_i = 0 \forall i \neq k$). Strategie \vec{p} heet een *gemengde strategie* als $\forall i$ geldt dat $p_i \neq 1$. ([6], p. 21-22)

Voorbeeld 1. Het spel steen, papier, schaar wordt herhaaldelijk gespeeld door twee spelers. Stel dat de winnaar van dit spel een payoff van 1 ontvangt, de verliezer een payoff van -1 en bij gelijk spel krijgen allebei de spelers een payoff van 0. De mogelijke uitkomsten van dit spel kunnen nu worden weergegeven in de normale vorm, ofwel de 3×3 -bimatrix:

$$(A, B) = \begin{pmatrix} 0, 0 & -1, 1 & 1, -1 \\ 1, -1 & 0, 0 & -1, 1 \\ -1, 1 & 1, -1 & 0, 0 \end{pmatrix}.$$

Merk op dat $A = B^T$, dus dit spel is symmetrisch. De rij- en kolomspeler hebben beiden de mogelijkheid uit drie pure strategieën: steen, papier en schaar. Bovendien kunnen ze ook alle combinaties van deze drie strategieën spelen. De strategieruimte van speler 1 wordt gedefinieerd door:

$$\Delta_{3,1} = \left\{ \vec{p} = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3 \mid p_1 + p_2 + p_3 = 1, p_i \geq 0 \forall i = 1, 2, 3 \right\}$$

en van speler 2 door:

$$\Delta_{32} = \{(q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3 \mid q_1 + q_2 + q_3 = 1, q_i \geq 0 \forall i = 1, 2, 3\}.$$

De kans dat speler 1 en 2 nu bijvoorbeeld allebei steen spelen is gelijk aan p_1q_1 .

Neem nu aan dat beide spelers rationeel zijn en dus optimaal kiezen, gegeven de voorkeur die ze hebben. In het algemeen geldt dat voor elk spel de optimale strategie van de ene speler afhankelijk is van de strategie van de andere speler. Om de optimale strategie van een speler te bepalen, moet er dus een aanname worden gemaakt over de strategie van de andere speler. Ofwel, de speler moet een bepaalde overtuiging hebben over de strategie van de andere speler. ([5], p. 21)

Definitie 2.1 (Best response). *Een strategie \vec{p}^* van speler 1 is een best response tegen een strategie \vec{q} van speler 2 in een $m \times n$ -bimatrix spel (A, B) als:*

$$\vec{p}^* A \vec{q} \geq \vec{p} A \vec{q} \quad \forall \vec{p} \in \Delta_m.$$

Op analoge wijze volgt dat voor speler 2 strategie \vec{q}^ een best response is tegen \vec{p} als*

$$\vec{p} B \vec{q}^* \geq \vec{p} B \vec{q} \quad \forall \vec{q} \in \Delta_n.$$

Definitie 2.2 (Nash evenwicht). *Het paar van strategieën (\vec{p}^*, \vec{q}^*) heet een Nash evenwicht als \vec{p}^* een best response is van speler 1 tegen \vec{q}^* en \vec{q}^* een best response is van speler 2 tegen \vec{p}^* . Als \vec{p}^* en \vec{q}^* allebei pure strategieën zijn, dan is (\vec{p}^*, \vec{q}^*) een puur Nash evenwicht. Als \vec{p}^* en \vec{q}^* gemengde strategieën zijn, dan is (\vec{p}^*, \vec{q}^*) een Nash evenwicht in gemengde strategieën.*

Daarnaast heet (\vec{p}^*, \vec{q}^*) een strikt Nash evenwicht als $\vec{p}^* A \vec{q} > \vec{p} A \vec{q}$ voor alle $\vec{p} \in \Delta_m$ met $\vec{p} \neq \vec{p}^*$ en $\vec{p} B \vec{q}^* > \vec{p} B \vec{q}$ voor alle $\vec{q} \in \Delta_n$ met $\vec{q} \neq \vec{q}^*$. In veel spellen zijn meerdere Nash evenwichten aanwezig. Hierdoor ontstaat de vraag welke evenwichten relevant zijn en hoe men deze kan selecteren. Definitie 2.2 geeft hier geen antwoord op. ([6], p. 32-36, 118)

Vervolg voorbeeld 1. Stel dat men wil nagaan of het spel steen, papier, schaar Nash evenwichten heeft. Volgens definitie 2.2 moeten daarvoor eerst de best responses van speler 1 tegen speler 2 en van speler 2 tegen speler 1 worden uitgerekend. Aangezien dit spel symmetrisch is, is het in dit geval voldoende om enkel de best responses van één van de twee spelers te berekenen. De best responses van de andere speler zijn namelijk identiek. Men kan eerst nagaan dat er geen pure Nash evenwichten zijn. Stel namelijk dat speler 2 de pure strategie steen speelt, ofwel $\vec{q} = (1, 0, 0)$. Dan is in de 3×3 -bimatrix meteen af te lezen dat papier een best response is van speler 1, ofwel $\vec{p}^* = (0, 1, 0)$. Op dezelfde manier volgt ook dat als speler 2 $\vec{q} = (0, 1, 0)$ speelt, speler 1 de best response $\vec{p}^* = (0, 0, 1)$ speelt. Als speler 2 $\vec{q} = (0, 0, 1)$ speelt, zal de best response van speler 1 $\vec{p}^* = (1, 0, 0)$ zijn. Wanneer men deze best responses van speler 1 tegen de pure strategieën van speler 2 als sterretjes in de normale vorm zet, dan geeft dit de matrix:

$$(A^*, B) = \begin{pmatrix} 0, 0 & -1, 1 & 1^*, -1 \\ 1^*, -1 & 0, 0 & -1, 1 \\ -1, 1 & 1^*, -1 & 0, 0 \end{pmatrix}.$$

Er was al opgemerkt dat het spel symmetrisch is. De best responses van speler 2 zijn dus hetzelfde als de best responses van speler 1. Wanneer men nu ook de best responses van speler 2 als sterretjes in de matrix (A^*, B) zet, dan geeft dit het volgende resultaat:

$$(A^*, B^*) = \begin{pmatrix} 0, 0 & -1, 1^* & 1^*, -1 \\ 1^*, -1 & 0, 0 & -1, 1^* \\ -1, 1^* & 1^*, -1 & 0, 0 \end{pmatrix}.$$

Volgens definitie 2.2 is er een puur Nash evenwicht (\vec{p}^*, \vec{q}^*) als \vec{p}^* en \vec{q}^* beide pure strategieën zijn. Uit matrix (A^*, B^*) volgt nu dat er geen puur Nash evenwicht is voor dit spel. Bij elke uitkomst in (A^*, B^*) heeft namelijk minimaal één van twee spelers de voorkeur om van strategie te wisselen, dit levert immers een hogere payoff op.

Nu rest de vraag of er Nash evenwichten in gemengde strategieën zijn. Daarvoor worden eerst de verwachte payoffs van speler 2 berekend, gegeven dat speler 1 een pure strategie speelt. Dit geeft de vergelijkingen van de payoffs:

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 A \vec{q} &= -q_2 + q_3 \\ \vec{e}_2 A \vec{q} &= q_1 - q_3 \\ \vec{e}_3 A \vec{q} &= -q_1 + q_2\end{aligned}$$

met $\vec{e} \in \mathbb{R}^3$ de standaardbasis vector. Vector \vec{e}_1 betekent dus bijvoorbeeld dat speler 1 de pure strategie steen speelt. Als men nu de substitutie $q_3 = 1 - q_2 - q_3$ toepast en de vergelijkingen van de payoffs gelijk stelt aan nul, dan volgt dat de best response van speler 2 gelijk is aan $\vec{q}^* = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, gegeven dat speler 1 pure strategieën speelt. Op dezelfde manier vindt men ook dat $\vec{p}^* = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ een best response is van speler 1, gegeven dat speler 2 pure strategieën speelt. Verder geldt dat $\vec{q}^* = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ een best response is van speler 2 als speler 1 $\vec{p}^* = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ speelt en $\vec{p}^* = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ een best response is van speler 1 als speler 2 $\vec{q}^* = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ speelt. Uit definitie 2.2 volgt nu dat $((\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}))$ een Nash evenwicht is in gemengde strategieën. Er kan geconcludeerd worden dat $((\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}))$ het enige Nash evenwicht is voor het spel steen, papier, schaar.

2.1 Signaalspel

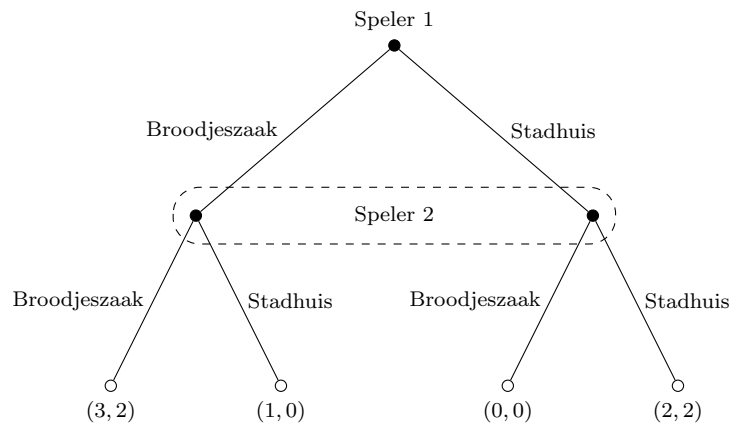
In de inleiding is een korte toelichting gegeven van een tweepersoons signaalspel. Neem nu aan dat er twee populaties zijn. De populatie die signalen gaat versturen, de geïnformeerde populatie, en de populatie die de signalen ontvangt, de ongeïnformeerde populatie. De spelers van de populatie die signalen versturen, kunnen worden onderverdeeld in verschillende typen. Voorbeelden hiervan zijn werknemers die laag of hoog zijn opgeleid, een bedrijf met kwalitatief goede of slechte producten en jonge dieren die wel of geen honger hebben. Twee evenwichten die bestaan bij een signaalspel waar enkel pure strategieën worden gespeeld, zijn het separating en het pooling evenwicht. Bij het *separating evenwicht* kiest elke speler van de geïnformeerde populatie een actie die consistent is met zijn type en reageert de ongeïnformeerde partij op dit signaal. De strategie die nu door alle spelers wordt gekozen, wordt de *separating strategie* genoemd. Een voorbeeld hiervan zou zijn dat jonge dieren die honger hebben veel moeite doen om de aandacht van hun ouders te trekken en daarom worden gevoed, terwijl jonge dieren die geen honger hebben dit niet doen en dus niet worden gevoed. Met behulp van het signaal dat door de geïnformeerde populatie (jonge dieren) wordt uitgezonden, is de ongeïnformeerde populatie (ouders) dus in staat om het type van de geïnformeerde populatie te achterhalen. Bij het *pooling evenwicht* kiezen verschillende typen van de geïnformeerde populatie dezelfde actie en reageert de ongeïnformeerde populatie niet op het signaal. Jonge dieren zullen dus bijvoorbeeld, ongeacht hun type, allemaal wel of allemaal geen moeite doen om de aandacht van hun ouders te trekken en ouders reageren hier niet op, maar kiezen er dus voor om altijd of nooit te voeden. De strategie die nu door alle spelers wordt gekozen, wordt de *pooling strategie* genoemd. De spelers van de ongeïnformeerde populatie zijn in deze situatie dus ook niet in staat het type van een speler uit de geïnformeerde populatie te achterhalen. ([5], p. 334-335)

Naast de twee evenwichten die bij pure strategieën bestaan, komt ook nog het *hybride evenwicht* voor. Hierbij hebben verschillende typen spelers uit dezelfde populatie verschillende strategieën. De spelers van het ene type kiezen één strategie, terwijl de spelers van het andere type willekeurig kiezen tussen de strategie pooling en separating. Deze gemengde strategieën bevatten dus voor een deel wel informatie, maar de overdracht hiervan is onvolledig. Bij het type speler dat zijn strategie willekeurig kiest, draagt het signaal immers geen informatie. ([10], p. 165)

Signaalspellen kunnen over het algemeen weergegeven worden als een boomdiagram. Dit wordt ook wel de *extensive form* van het spel genoemd. Om het begrip extensive form te verduidelijken, wordt nu een voorbeeld besproken.

Voorbeeld 2. Stel dat er twee spelers hebben afgesproken om rond 12 uur samen te gaan te winkelen. Ze weten alleen allebei niet meer of ze elkaar van tevoren bij de broodjeszaak of het stadhuis zouden ontmoeten. Speler 1 vertrekt als eerste maar wil eigenlijk nog graag lunchen voordat ze samen gaan winkelen. Als de spelers elkaar mislopen, gaan ze allebei niet winkelen, maar eet speler 1 nog wel het liefst een broodje.

Als speler 1 bij het stadhuis is en speler 2 bij de broodjeszaak, gaan ze allebei niet winkelen en kan speler 1 geen broodje eten. Ze hebben dan allebei een payoff van 0. Als speler 1 en 2 naar het stadhuis gaan, dan kan speler 1 nog steeds niet eten, maar kunnen ze wel gaan winkelen. Beiden hebben dan een payoff van 2. Als speler 1 echter wel kan lunchen, stijgt de payoff van speler 1 met waarde 1. Ontmoeten ze elkaar dus bij de broodjeszaak, dan heeft speler 1 een payoff van 3 en speler 2 nog steeds een payoff van 2. Wanneer speler 1 bij de broodjeszaak is en speler 2 bij het stadhuis, dan kunnen ze niet samen gaan winkelen, maar kan speler 1 nog wel iets eten. De payoff van speler 1 is dan gelijk aan 1 en van speler 2 gelijk aan 0.



Figuur 1: De extensive form van voorbeeld 2.

Om de payoffs van de spelers bij verschillende acties overzichtelijk weer te geven, wordt dit spel gepresenteerd in de extensive form (zie figuur 1). Speler 1 begint bij de eerste knoop, de zwarte stip, en maakt een beslissing over de plek waar hij heen gaat. Uit figuur 1 kan afgelezen worden dat het voor speler 1 altijd een best response is om naar de broodjeszaak te gaan. Dit zal immers, ongeacht de keuze van speler 2, altijd een hogere payoff opleveren. Speler 2 weet in de tweede knoop niet zeker wat speler 1 gaat doen. Hier komt hij namelijk pas achter als hij bij de broodjeszaak of bij het stadhuis is. Dit wordt in het figuur weergegeven door middel van een stippellijn. Ondanks dat speler 2 niet zeker weet waar speler 1 heen gaat, kan speler 2 wel door

middel van de payoffs bepalen wat de strategie van speler 1 waarschijnlijk zal zijn. Speler 2 zal dus, gegeven dat hij of zij rationeel is, overtuigd zijn van het feit dat speler 1 naar de broodjeszaak toe zal gaan. De meest optimale keuze voor speler 2 is daarom ook naar de broodjeszaak te gaan. Omdat het voor beide spelers dus een best response is om naar de broodjeszaak te gaan, is het evenwicht (Broodjeszaak, Broodjeszaak) een puur Nash evenwicht.

Het is ook mogelijk om het spel in de normale vorm weer te geven. Laat speler 1 de rijspeler en speler 2 de kolomspeler zijn, dan volgt dat de 2×2 -bimatrix van dit spel wordt gegeven door:

$$\begin{pmatrix} 3, 2 & 1, 0 \\ 0, 0 & 2, 2 \end{pmatrix}.$$

Het toepassen van de sterretjesmethode zoals die gebruikt is in voorbeeld 1, geeft nu de matrix:

$$\begin{pmatrix} 3^*, 2^* & 1, 0 \\ 0, 0 & 2^*, 2^* \end{pmatrix}.$$

In deze laatste matrix is af te lezen dat bij pure strategieën dit spel in totaal twee Nash evenwichten heeft, namelijk (Broodjeszaak, Broodjeszaak) en (Stadhuis, Stadhuis). In deze evenwichten zullen beide spelers niet meer willen afwijken van strategie.

3 Dynamica

Neem aan dat een spel wordt gespeeld door twee spelers. Om te onderzoeken hoe een evenwicht tussen deze twee spelers wordt bereikt, wordt aangenomen dat elke speler het spel begint met een bepaalde overtuiging over de acties van de andere speler. Nadat één ronde voorbij is, hebben beide spelers informatie over de acties die de andere speler heeft gespeeld. Op basis van deze informatie kunnen speler 1 en 2 hun overtuiging betref de strategie van de andere speler aanpassen. Beide spelers leren dus in feite van de gespeelde acties van de andere speler. ([5], p. 135)

In dit hoofdstuk zullen twee dynamische systemen aan bod komen: de best response en de replicator dynamica. Deze systemen zijn gebaseerd op verschillende aannames, maar veronderstellen allebei dat er in het spel een factor 'leren' aanwezig is. ([10], p. 164) Neem in dit hoofdstuk aan dat er twee populaties, p en q , aanwezig zijn en dat elke populatie bestaat uit spelers die gelijkwaardig zijn. Met dit laatste wordt bedoeld dat spelers uit dezelfde populatie hun strategie uit dezelfde strategie ruimte kiezen en dat ze identieke payoff functies hebben. Daarnaast is elke payoff functie afhankelijk van de strategieën van alle spelers uit de twee populaties.

3.1 Replicator dynamica

Het bekendste dynamische systeem binnen de evolutionaire speltheorie is de replicator dynamica. ([7], p. 16) Dit systeem bootst het effect van natuurlijke selectie na. In de context van spellen, gespeeld in de maatschappij, wordt aangenomen dat deze natuurlijke selectie tot uiting komt door het imiteren van gedrag van spelers uit een vorige ronde. De replicator dynamica is dus gebaseerd op imitatie. ([3], p. 86-87) Men moet echter wel opmerken dat een speler alleen de strategie van een andere speler uit dezelfde populatie imiteert als de payoff van deze speler hoger is. Als geen enkele speler binnen de populatie een hogere payoff heeft dan zichzelf, zal deze speler dus zijn eigen strategie in de volgende ronde herhalen. ([7], p. 16)

Laat $p_i \in [0, 1]$ de fractie van de populatie die de pure strategie $i \in \Delta_m$ speelt. Hierbij is Δ_m de strategie ruimte (zie vergelijking 2.1 hoofdstuk 2). Aangezien de fracties veranderen door imitatiegedrag en $\vec{p} = (p_1, \dots, p_m)$, geldt dat \vec{p} afhankelijk is van de tijd t (dus $\vec{p} = \vec{p}(t)$). Voor elke strategie i die wordt gespeeld, gegeven dat de populatie in staat \vec{p} verkeert, is de verwachte payoff gelijk aan $\vec{e}_i A \vec{p}$. Omdat \vec{p} een kansverdeling is, geldt dat de gemiddelde payoff van populatie p gelijk is aan $\sum_{i=1}^m p_i \vec{e}_i A \vec{p} = \vec{p} A \vec{p}$. Stel verder dat er een symmetrisch spel wordt gespeeld, dus $A = B^T$. De replicator vergelijking van populatie i wordt nu gegeven door:

$$\dot{p}_i = \frac{dp_i(t)}{dt} = [\vec{e}_i A \vec{p} - \vec{p} A \vec{p}] p_i. \quad (3.1)$$

Hierbij is $[\vec{e}_i A \vec{p} - \vec{p} A \vec{p}]$ de gemiddelde fitheid van populatie i . In sommige spellen wordt dit laatste echter ook gezien als de procentuele groei van elke strategie die momenteel in gebruik is. Door de vergelijking $\dot{p}_i = 0$ op te lossen, is het mogelijk de rustpunten, ook wel evenwichten, van het dynamisch systeem te bepalen. Voor $\dot{p}_i = 0$ geldt namelijk dat de populatie niet verandert en het systeem dus in evenwicht is. Daarnaast is de replicator vergelijking een differentiaalvergelijking waarmee het gedrag van het systeem in de rustpunten bepaald kan worden. Zo kan worden onderzocht of de populatie zich stabiel of instabiel gedraagt in een bepaald rustpunt. Als in een stabiel rustpunt een kleine verstoring ontstaat, dus de situatie verschuift naar een punt nabij het stabiele rustpunt, zal de populatie weer terug convergeren naar dit rustpunt. Als in een instabiel rustpunt een kleine verstoring ontstaat, zal de populatie echter niet meer naar het

rustpunt toe bewegen. ([3], p. 67-69, 86-87; [6], p. 114-118)

Er moet worden opgemerkt dat vergelijking 3.1 niet geldt als er een asymmetrisch spel, dus $A^T \neq B$, wordt gespeeld. In dit geval worden de replicator vergelijkingen van p en q gegeven door:

$$\dot{p}_i = \frac{dp_i(t)}{dt} = [\vec{e}_i A \vec{q} - \vec{p} A \vec{q}] p_i \quad (3.2)$$

$$\dot{q}_j = \frac{dq_j(t)}{dt} = [\vec{e}_j B^T \vec{p} - \vec{p} B \vec{q}] q_j \quad (3.3)$$

([4], p. 487)

Er is een belangrijke relatie tussen de rustpunten van de replicator dynamica en de Nash evenwichten. Deze relatie wordt beschreven door de volgende stelling.

Stelling 3.1 (Folk theorem). *Het volgende is waar:*

- (i) *Alle Nash evenwichten zijn rustpunten van de replicator vergelijking.*
- (ii) *Alle strikte Nash evenwichten zijn asymptotisch stabiel.*
- (iii) *Alle rustpunten van de replicator dynamica die het limiet zijn van een interne baan als $t \rightarrow \infty$, zijn Nash evenwichten.*
- (iv) *Alle stabiele rustpunten van de replicator vergelijking zijn Nash evenwichten.*

Uit deze stelling volgt dat elk intern rustpunt van de replicator dynamica een Nash evenwicht is. ([4], p. 482) Het bewijs van stelling 3.1 kan gevonden worden in [3] pagina 69 tot en met 71.

3.2 Best response dynamica

In deze paragraaf wordt de theoretische achtergrond van de best response dynamica gegeven. Dit systeem is gebaseerd op het optimaliseren van de payoff. ([7], p. 30) Het algemene idee van deze dynamica is dat elke speler uit populatie p in een bepaalde ronde zijn best response gaat spelen tegen de gemiddelde strategie van de tegenstander (populatie q) die eerder is gespeeld. Spelers uit p reageren dus uiteindelijk allemaal optimaal, gegeven dat de spelers uit q hun strategieën niet aanpassen. ([1], p. 135)

Laat $BR(\vec{q})$ de verzameling van best responses van populatie p tegen de gemiddelde strategie \vec{q} van populatie q . Een exacte definitie van $BR(\vec{q})$ wordt gegeven door:

$$BR(\vec{q}) = \{\vec{p}^* \in \Delta_m \mid \vec{p}^* A \vec{q} \geq \vec{p} A \vec{q} \forall \vec{p} \in \Delta_m\}. \quad (3.4)$$

Op dezelfde manier volgt ook:

$$BR(\vec{p}) = \{\vec{q}^* \in \Delta_n \mid \vec{p} A \vec{q}^* \geq \vec{p} A \vec{q} \forall \vec{q} \in \Delta_n\}. \quad (3.5)$$

De best response dynamica wordt vervolgens gegeven door de vergelijkingen:

$$\dot{\vec{p}} \in BR(\vec{q}) - \vec{p} \quad (3.6)$$

$$\dot{\vec{q}} \in BR(\vec{p}) - \vec{q} \quad (3.7)$$

waarbij \vec{p} en \vec{q} afhangen van de tijd t . ([1], p. 533; [3], p. 93-94; [4], p. 496; [10], p. 169) Merk op dat de gemiddelde strategie van de tegenstander geen pure strategie hoeft te zijn en dat de best responses niet altijd uniek zijn. Hierdoor kunnen de strategieën van de spelers uit populatie p verschillende best responses zijn. Hieruit volgt dat gegeven t , \vec{p} en \vec{q} niet uniek zijn bepaald en de best response dynamica dus geen gewone differentiaalvergelijking beschrijft.²

De volgende stelling volgt eenvoudig uit de definitie van de best response dynamica.

Stelling 3.2.

- (i) *Alle rustpunten van de best response dynamica zijn Nash evenwichten.*
- (ii) *Alle Nash evenwichten zijn rustpunten van de best response dynamica.*

Bewijs.

(i) Uit vergelijking 3.6 en 3.7 volgt dat in alle rustpunten van de best response dynamica, best responses worden gespeeld door beide spelers. Uit de definitie van het Nash evenwicht (definitie 2.2) volgt nu dat al deze rustpunten Nash evenwichten zijn.

(ii) Uit de definitie van het Nash evenwicht volgt dat een evenwicht (\vec{p}, \vec{q}) een Nash evenwicht is als \vec{p} een best response is tegen \vec{q} en \vec{q} een best response is tegen \vec{p} . Maar uit de definitie van $BR(\vec{q})$ en $BR(\vec{p})$ (zie vergelijking 3.4 en 3.5) volgt dat de best response dynamica al deze best responses bepaald. Uit vergelijking 3.6 en 3.7 kan men dus opmaken dat alle Nash evenwichten rustpunten van de best response dynamica zijn. \square

Uit stelling 3.1 en 3.2 kan men nu gemakkelijk afleiden dat alle rustpunten van de best response dynamica ook rustpunten van de replicator dynamica zijn. Uit stelling 3.2(i) volgt namelijk dat alle rustpunten van de best response dynamica Nash evenwichten zijn en uit stelling 3.1(i) volgt dat alle Nash evenwichten rustpunten van de replicator dynamica zijn. Dus alle rustpunten van de best response dynamica zijn rustpunten van de replicator dynamica.

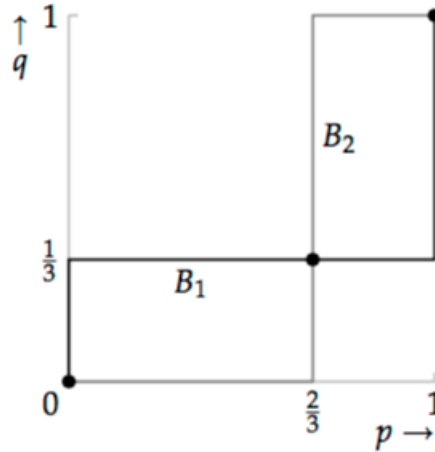
Door de constructie van de best response dynamica is het mogelijk dat een speler geen voorkeur heeft tussen verschillende strategieën, gegeven de strategie van de tegenstander. Dit zorgt voor een ‘omslagpunt’ bij de best response. Om dit beter uit te leggen volgt nu een voorbeeld.

Voorbeeld 3. Neem aan dat er een spel wordt gespeeld door twee spelers; speler 1 en 2. De normale vorm van dit spel is:

$$\begin{pmatrix} 2, 1 & 0, 0 \\ 0, 0 & 1, 2 \end{pmatrix}$$

waarbij speler 1 de rijspeler is en speler 2 de kolomspeler. Laat p en $1 - p$ de kansen zijn dat speler 1 respectievelijk de bovenste of onderste rij speelt en laat q en $1 - q$ de kansen zijn dat speler 2 respectievelijk de linker of rechter kolom speelt.

²Voor nadere toelichting op deze opmerking zie [1] pagina 532 en 533.



Figuur 2: De best responses van de spelers van voorbeeld 3. De zwarte en grijze lijn zijn de best response functies van respectievelijk speler 1 en 2. De Nash evenwichten worden gegeven door de zwarte punten. ([5], p. 113, figuur 113.2)

Men kan nagaan dat door uitrekenen van de best responses van speler 1 en 2 en deze best responses grafisch weer te geven, men figuur 2 verkrijgt. Dit figuur laat zien dat bij $q = \frac{1}{3}$, speler 1 geen voorkeur heeft tussen alle strategieën van de vorm $(p, 1 - p)$ met $p \in [0, 1]$. Op dezelfde manier volgt dat bij $p = \frac{2}{3}$, speler 2 geen voorkeur heeft tussen alle strategieën van de vorm $(q, 1 - q)$ met $q \in [0, 1]$. Een dergelijke situatie wordt in deze scriptie een omslagpunt genoemd.

Door de aanwezigheid van zulke omslagpunten wordt in de best response dynamica gebruik gemaakt van stuksgewijs lineaire functies. Een voordeel van deze dynamica is dat vanuit elke beginwaarde in de faseruimte, stuksgewijs lineaire oplossingen geconstrueerd kunnen worden. ([3], p. 95-96) Men definieert de best response functie dus als een stuksgewijs lineaire functie en bepaalt met behulp van deze functie de oplossingen van de best response dynamica.

3.3 De replicator en best response dynamica bij steen, papier, schaar

Bekijk het spel van voorbeeld 1 uit hoofdstuk 2 met de normale vorm:

$$(A, B) = \begin{pmatrix} 0,0 & -1,1 & 1,-1 \\ 1,-1 & 0,0 & -1,1 \\ -1,1 & 1,-1 & 0,0 \end{pmatrix}$$

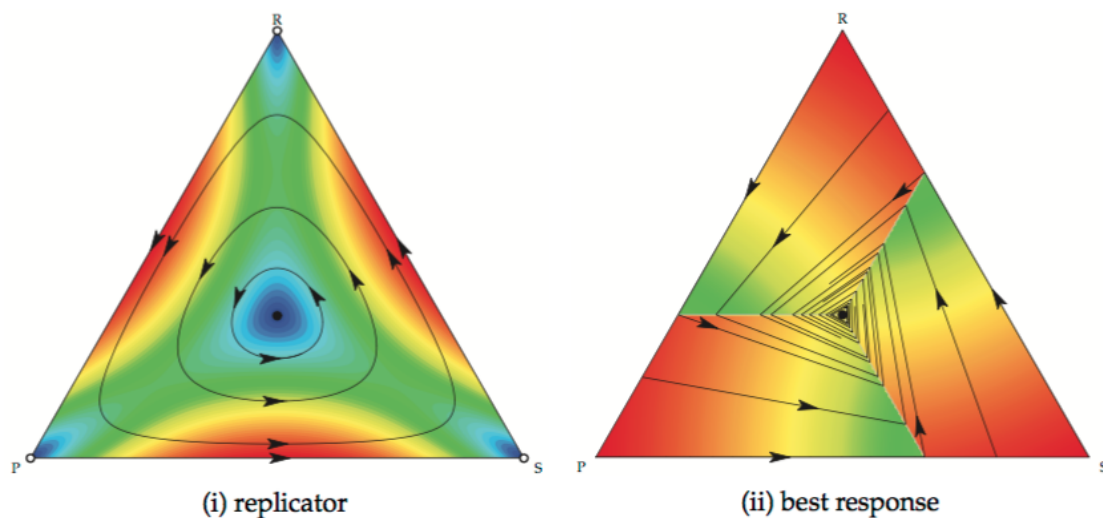
Neem nu aan dat dit spel door twee populaties wordt gespeeld, de spelers van populatie p en de tegenstanders van deze spelers, populatie q . Fractie p_1 staat voor het deel van populatie p dat steen speelt, fractie p_2 voor het deel dat papier speelt en de resterende fractie p_3 speelt schaar. Er geldt nu dat $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, want alle opgetelde fracties vormen de totale populatie van p . Voor populatie q geldt een analoge redenering. Fractie q_1 speelt steen, q_2 papier en q_3 schaar met $q_1 + q_2 + q_3 = 1$.

Er was eerder al opgemerkt dat dit spel symmetrisch is en daarom is het voldoende alleen de vergelijkingen behorend bij één van de twee populaties uit te rekenen. Men kan met behulp van vergelijking 3.1 nagaan dat de replicator vergelijkingen van populaties p gegeven kunnen worden

door:

$$\begin{aligned}\dot{p}_1 &= [e_1^T A \vec{p} - \vec{p}^T A \vec{p}] p_1 = (-p_2 + p_3)p_1 \\ \dot{p}_2 &= [e_2^T A \vec{p} - \vec{p}^T A \vec{p}] p_2 = (p_1 - p_3)p_2 \\ \dot{p}_3 &= [e_3^T A \vec{p} - \vec{p}^T A \vec{p}] p_3 = (-p_1 + p_2)p_3\end{aligned}$$

Om de rustpunten van de replicator dynamica te bepalen, stelt men $\dot{p}_1 = \dot{p}_2 = \dot{p}_3 = 0$. Dit geeft vervolgens de oplossingen $\vec{p} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $\vec{p} = (1, 0, 0)$, $\vec{p} = (0, 1, 0)$ en $\vec{p} = (0, 0, 1)$. Er zijn dus vier rustpunten bij de replicator dynamica. Dit komt overeen met figuur 3(i), het faseportret van het spel voor de replicator dynamica.



Figuur 3: De faseportretten van voorbeeld 1 die corresponderen met de replicator en best response dynamica. Hierbij staat R voor steen, P voor papier en S voor schaar. ([7], p.16, figuur 6)

Stel nu dat $p_1 = 0$ in de replicator vergelijkingen, dan volgt dat $\dot{p}_1 = 0$, $\dot{p}_2 < 0$ en $\dot{p}_3 > 0$. In deze situatie bewegen de strategieën van populatie p dus van papier naar schaar. Op dezelfde manier volgt dat bij $p_2 = 0$, de strategieën bewegen van schaar naar steen en bij $p_3 = 0$ van steen naar papier. De strategieën bij $p_1 = 0$, $p_2 = 0$ of $p_3 = 0$ bewegen dus richting de rustpunten respectievelijk $\vec{p} = (0, 0, 1)$, $\vec{p} = (1, 0, 0)$ en $\vec{p} = (0, 1, 0)$. Dit komt overeen met het faseportret van figuur 3(i). Als een strategie dus geheel afwezig is binnen een populatie, dan zal deze strategie ook in de toekomst niet meer terugkomen. Er is immers geen speler uit de populatie die deze strategie zal spelen, waardoor ook niemand deze strategie kan imiteren.

Als een populatie zich in het punt $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ bevindt, dan zit de totale populatie in het unieke Nash evenwicht $(\vec{p}^*, \vec{q}^*) = ((\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}))$. Uit figuur 3(i) kan men afleiden dat dit een stabiel evenwicht is. Omdat de replicator dynamica gebaseerd is op imitatie, is elk vlak en hoekpunt van het figuur invariant. Eenmaal in een punt binnen de driehoek zal een speler zijn strategie niet wijzigen, totdat een andere speler uit de populatie een hogere payoff heeft. In dat geval imiteert de speler deze strategie en verplaatst zich dus richting het andere hoekpunt.

Nu wordt dit spel bekeken met behulp van de best response dynamica. Men had in hoofdstuk 2 al opgemerkt dat in dit geval het spel maar één Nash evenwicht heeft. Uit stelling 3.2 volgt nu dat dit dus ook het enige rustpunt van de best response dynamica is. Uit figuur 3(ii) kan men

vervolgens afleiden dat dit een asymptotisch stabiel evenwicht is. Beide populaties zullen zich in dit evenwicht bevinden als $t \rightarrow \infty$ en dus uiteindelijk hun payoff maximaliseren.

Men kan nagaan dat de best responses van dit spel drie richtingen op zullen gaan, namelijk steen, papier of schaar. Dit is ook te zien in figuur 3(ii). De strategie papier verslaat steen. Als dus te veel spelers steen spelen, is het een best response om over te stappen naar de strategie papier. Een aantal spelers uit de populatie zullen dus hun best response spelen en kiezen de strategie papier. Als vervolgens na verloop van tijd te veel spelers hun best response steen gaan spelen, wordt het voordeliger om schaar te gaan spelen. Immers, schaar verslaat papier. Op analoge wijze kan men ook nagaan dat als te veel mensen schaar spelen, de populatie richting de strategie steen gaat bewegen.

Uit figuur 3 volgt dat er voor dit spel duidelijke verschillen en overeenkomsten tussen de replicator en best response dynamica zijn. Beide dynamica genereren het unieke Nash evenwicht, maar bij de replicator dynamica zijn meer rustpunten aanwezig dan bij de best response dynamica. Bovendien was eerder al opgemerkt dat alle rustpunten in de best response dynamica ook rustpunten in de replicator dynamica zijn. Verder is te zien dat de populatie bij de replicator dynamica niet in de richting van het Nash evenwicht beweegt, terwijl dit bij de best response dynamica duidelijk wel het geval is. Het Nash evenwicht is dus alleen asymptotisch stabiel bij de best response dynamica.

4 Het banenmarkt signaalspel van Spence

In dit hoofdstuk wordt het banenmarkt signaalspel van Spence, die in de inleiding kort is besproken, nader toegelicht. Er zal worden aangegeven welke aannames nodig zijn voor het analyseren van dit spel en de extensive form van het spel van Spence zal worden weergegeven en uitgelegd.

4.1 Beschrijving

Deze paragraaf is onder andere gebaseerd op hoofdstuk 2 van Wagner ([10]).

Bij het banenmarkt signaalspel van Spence wordt aangenomen dat de werknemer bekend is met zijn productiviteit θ , maar dat de werkgever niet van deze informatie op de hoogte is. Daarnaast wordt onderscheid gemaakt tussen twee type werknemers: de productieve θ_H en de niet-productieve θ_L . De kans op een productieve of niet-productieve werknemer is gelijk aan respectievelijk p_H of p_L , met $p_H + p_L = 1$ en $0 < p_L, p_H < 1$. Nadat de werknemer bekend is met zijn productiviteit, moet hij een bepaald niveau van onderwijs $e \in \mathbb{R}^+$, het signaal, aanschaffen. De totale kosten van de werknemer zijn nu gelijk aan $c(\theta, e)$ en dit is dus afhankelijk van zijn productiviteit en het gewenste niveau van onderwijs. Merk op dat als de productiviteit θ van een werknemer toeneemt, maar zijn signaalkosten e gelijk blijven, nemen de totale kosten $c(\theta, e)$ van deze werknemer af. Het is immers voor een productieve werknemer minder duur om een bepaald niveau van onderwijs e te behalen. De functie $c(\theta, e)$ is daarom omgekeerd evenredig met θ .

De werkgever is alleen in staat om e te observeren en weet niets over de productiviteit van de werknemer. Daarom wordt de keuze van e door de werknemer gezien als een signaal. Omdat een werknemer maar één keer een signaal kan afgeven en het spel niet wordt herhaald door dezelfde werknemer, wordt aangenomen dat hij niet investeert in het verwerven van een reputatie betreft zijn signalering. Hierdoor zal de werkgever dus ook geen patroon van de keuzes van de werknemer kunnen ontdekken. ([8], p. 355) Omdat de werknemer, ongeacht zijn productiviteit, elk signaal kan afgeven, is hij ook in staat het signaal te manipuleren; een duur signaal e afgeven als niet-productieve werknemer of een goedkoop signaal e afgeven als productieve werknemer. ([8], p. 358)

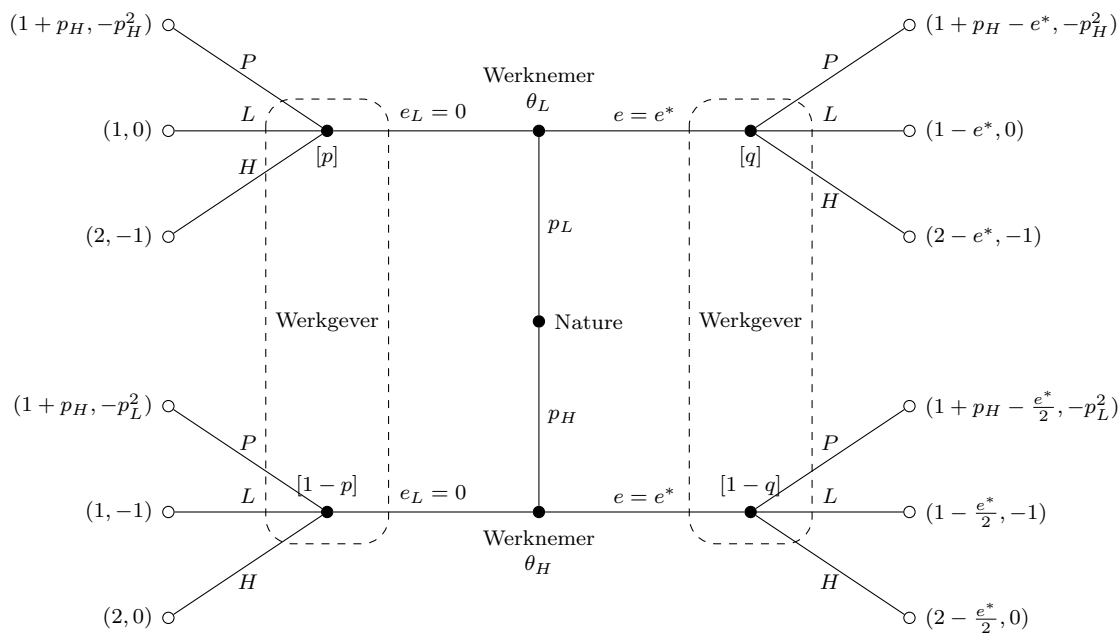
Nadat de werkgever een signaal van de werknemer heeft ontvangen, bepaalt de werkgever de hoogte van het loon w dat hij bereid is te betalen aan de werknemer. Er wordt aangenomen dat w gelijk is aan θ . In andere woorden, het loon dat de werkgever bereid is te betalen, wordt gelijkgesteld aan de marginale bijdrage van de werknemer. Om deze aanname te modelleren, wordt verondersteld dat de werkgever het kwadratische verschil tussen w en θ minimaliseert. De pay-offs van de werkgever en de werknemer zijn dus gelijk aan respectievelijk $-(w - \theta)^2$ en $w - c(\theta, e)$.

Om in dit spel de dynamica, die beschreven staat in hoofdstuk 3.1 en 3.2, in detail te bestuderen, is het nodig om waarden te geven aan de variabelen. Er wordt daarom, net als in het originele artikel van Spence ([8]), aangenomen dat $c(\theta, e) = \frac{e}{\theta}$, $\theta_H = 2$ en $\theta_L = 1$. Hieruit volgt $c(\theta_H, e) = \frac{e}{2}$ en $c(\theta_L, e) = e$. Neem verder aan dat de werknemer twee signalen kan uitzenden: het gratis signaal $e_L = 0$ en het duurdere signaal e^* met $e^* \in (0, 2)$. Zoals in de inleiding al is aangegeven, wordt een onderscheid gemaakt tussen verschillende strategieën van de werknemer en werkgever. Deze strategieën worden weergegeven in tabel 1 op de volgende bladzijde. Merk op dat bij de strategieën van de werknemer Low en High pooling strategieën zijn, terwijl de strategie Sep een separate strategie is. De strategieruimte van de werknemer wordt gegeven door $\{\text{Low}, \text{Sep}, \text{High}\}$.

Werknemer	Low: de werknemer kiest altijd voor e_L .
	Sep: werknemer θ_H kiest voor e^* en θ_L voor e_L .
	High: de werknemer kiest altijd voor e^* .
Werkgever	Pool: de werkgever biedt altijd $w = 1 + p_H$.
	Sep: de werkgever biedt $w = 1$ bij e_L en $w = 2$ bij e^* .

Tabel 1: De pure strategieën van de werkgever en werknemer bij het spel van Spence 4

De strategie ruimte die hoort bij de werkgever wordt gegeven door $\{\text{Pool}, \text{Sep}\}$. Bij de (pooling) strategie Pool neemt de werkgever aan dat het signaal van de werknemer geen informatie bevat en de werkgever biedt daarom het loon $w = 1 + p_H$.³ Bij de (separate) strategie Sep neemt de werkgever wel aan dat het signaal van de werknemer informatie bevat. De werkgever biedt daarom $w = 1$ bij e_L en $w = 2$ bij e^* .⁴ Deze laatste strategie vraagt om een uitleg. De werkgever weet alleen hoeveel de werknemer bereid is te betalen voor een opleiding, maar heeft in tegenstelling tot de werknemer geen informatie over of deze van type θ_H of θ_L is. Daarnaast is het voor een niet-productieve werknemer duurder om een opleiding te volgen, dan voor een productieve werknemer. Het is dus aannemelijk dat een werknemer die meer uitgeeft aan onderwijs het signaal afgeeft dat hij productiever is. ([5], p. 332)



Figuur 4: De extensive form van het spel van Spence.

³Er geldt dat w gelijk is aan de marginale bijdrage van de werknemer. Men kan dus aannemen dat $w = \theta_H p_H + \theta_L p_L = 2p_H + 1(1 - p_H) = 1 + p_H$.

⁴Bij e_L gelooft de werkgever dat de werknemer van het type θ_L is, ofwel $p_L = 1$ en $p_H = 0$. Dus $w = \theta_H p_H + \theta_L p_L = \theta_L = 1$. Bij e^* gelooft de werkgever dat de werknemer van het type θ_H is, ofwel $p_L = 0$ en $p_H = 1$. Dus $w = \theta_H p_H + \theta_L p_L = \theta_H = 2$.

Met de bovenstaande beschrijving is het mogelijk om de extensive form van het spel van Spence, zie vorige pagina figuur 4, weer te geven. In de eerste fase, middelste knoop, wordt door Nature het type van de werknemer bepaald en deze informatie is alleen bij de werknemer bekend. In de tweede fase (bij θ_L en θ_H) geeft de werknemer een signaal af: $e_L = 0$ of $e = e^*$. In de laatste fase (bij $[p]$, $[1 - p]$, $[q]$ en $[1 - q]$) moet de werkgever kiezen tussen drie acties en hierbij weet de werkgever alleen welk signaal de werknemer heeft gekozen. De werkgever weet dus niet met welk type werknemer hij te maken geeft. Bij P heeft de werkgever strategie Pool en bij L en H neemt hij aan dat hij met respectievelijk werknemer θ_L en werknemer θ_H te maken heeft. Hoe de uitkomsten van de extensive form worden verkregen, wordt beschreven in appendix A.

4.2 Evenwichten

In deze paragraaf zal worden uitgelegd hoe een evenwicht in het spel van Spence is gedefinieerd. Neem aan dat het spel een systeem is dat telkens dezelfde componenten herhaalt. Het eerste component is dat nieuwe sollicitanten de banenmarkt betreden. Vervolgens passen de werkgevers de overtuiging die zij hebben over het profiel van de werknemers aan en wijzigen daarop het loon dat ze de werknemers zullen aanbieden. Het gedrag van de sollicitant, dus zijn signalering, verandert en nadat de sollicitanten zijn aangenomen, zal er nieuwe data voor de werkgever beschikbaar zijn over het functioneren van de werknemer. Hierna begint het hele systeem weer opnieuw en vinden dezelfde gebeurtenissen plaats. Het systeem heet stationair als de werkgever een ronde met een bepaalde overtuiging over de werknemer begint, die niet weerlegd wordt door de data van de ronde erna. Dit stationaire systeem is dus zelfbevestigend. ([8], p. 259-360)

Het originele spel van Spence definieert een evenwicht van het systeem als de verzameling van componenten die telkens door het systeem opnieuw worden gegenereerd. Hiermee wordt bedoeld dat de overtuiging van de werkgevers over de werknemers elke keer weer consistent is met de data en de werkgevers zullen dus hun strategieën niet hoeven aan te passen. ([8], p. 360) Dit zelfbevestigende of stationaire systeem genereert vervolgens een bepaald loon dat wordt aangeboden door de werkgever, wat vervolgens leidt tot een bepaald signaal van de werknemer. De werknemers zullen namelijk ook informatie hebben over de uitkomsten van vorige rondes. ([8], p. 360) Van het spel van Spence is bekend dat het oneindig veel evenwichten heeft. De evenwichten met bijbehorende (consistente) overtuigingen komen in drie soorten voor: pooling, separating en hybride. ([10], p. 165) Voor uitleg van deze evenwichten, zie hoofdstuk 2.1.

In deze scriptie zal de bovenstaande definitie van een evenwicht worden gebruikt. Om de evenwichten te bestuderen, zal bij het banenmarkt signaalspel van Spence gebruik worden gemaakt van twee dynamica: de best response en replicator dynamica. Deze twee dynamica zijn in hoofdstuk 3.1 en 3.2 uitgelegd. ([10], p. 164)

5 De dynamica bij het spel van Spence

In dit hoofdstuk worden de replicator en best response dynamica, die uitgelegd zijn in respectievelijk hoofdstuk 3.1 en 3.2, toegepast voor het banenmarkt signaalspel van Spence ([8]). Hierbij zal gebruikt worden gemaakt van de extensive form van het spel van Spence, weergegeven in figuur 4. De payoffs van het spel kunnen worden afgelezen met behulp van een 3×2 -bimatrix (A,B), dus de normale vorm. Hierbij is de rijspeler de werknemer en de kolomspeler de werkgever. Om aan te geven welke strategieën bij welke uitkomsten horen, is gebruik gemaakt van een tabel in plaats van een bimatrix. De uitkomsten hiervan zijn af te lezen in tabel 2.

	Pool	Sep
Low	$1 + p_H, -P_L p_H$	$1, -p_H$
Sep	$1 + p_H - \frac{p_H e^*}{2}, -P_L p_H$	$1 + p_H - \frac{p_H e^*}{2}, 0$
High	$1 + p_H - p_L e^* - \frac{p_H e^*}{2}, -P_L p_H$	$2 - p_L e^* - \frac{p_H e^*}{2}, -P_L$

Tabel 2: De payoffs van de pure strategieën gegeven in tabel 1.

Om de dynamiek van het spel te bepalen, wordt aangenomen dat er twee grote populaties aanwezig zijn; werkgevers en werknemers. Laat y_1 en y_2 de fractie werkgevers zijn die respectievelijk Pool en Sep speelt met $y_1, y_2 \in [0, 1]$ en laat x_1, x_2 en x_3 de fractie werknemers zijn die respectievelijk Low, Sep en High speelt met $x_1, x_2, x_3 \in [0, 1]$. Met behulp van vergelijking 2.1, volgt dat de strategie ruimte van de werkgevers gelijk is aan:

$$\Delta_2 := \{\vec{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 + y_2 = 1; y_1, y_2 \geq 0\},$$

en van de werknemers gelijk is aan:

$$\Delta_3 := \{\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1; x_1, x_2, x_3 \geq 0\}.$$

Hieruit volgt dat de totale strategieruimte gelijk is aan $\Delta_2 \times \Delta_3$. Aangezien $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ en $y_1 + y_2 = 1$ heeft de dynamica voor dit systeem drie onbekenden. Er geldt immers dat $y_1 = 1 - y_2$, dus de twee fracties van de populatie werkgevers hangen van enkel één variabele af. Op dezelfde manier volgt dat de drie fracties van de populatie werknemers van twee variabele afhangen. Het hele systeem heeft dus inderdaad drie onbekenden. De figuren die gebruikt zullen worden in dit hoofdstuk zullen daarom de coördinaten (x_2, x_3, y_2) hebben.

5.1 De best responses van de werknemer en de werkgever

Met behulp van tabel 2 en definitie 2.1 is het mogelijk om de best responses van de spelers van het spel van Spence uit te rekenen. In dit hoofdstuk worden deze berekeningen uitgevoerd en grafisch weergegeven.

Eerst worden de best responses van de werknemer besproken. Er geldt dat de kans dat een werkgever Sep of Pool speelt gelijk is aan respectievelijk y_2 en $y_1 = 1 - y_2$ (zie de inleiding van hoofdstuk 5). Er geldt dat Low een best response is van de werknemer als aan de volgende twee

vergelijkingen wordt voldaan:

$$\left[\begin{array}{l} (1 + p_H)(1 - y_2) + (1)(y_2) \geq \left(1 + p_H - \frac{p_H e^*}{2}\right) (1 - y_2) + \left(1 + p_H - \frac{p_H e^*}{2}\right) (y_2) \\ \Leftrightarrow p_H(1 - y_2) + 1 \geq 1 + p_H - \frac{p_H e^*}{2} \\ \Leftrightarrow 1 - y_2 \geq 1 - \frac{e^*}{2} \\ \Leftrightarrow y_2 \leq \frac{e^*}{2} \quad \text{dus ook} \quad 0 \leq y_2 \leq \frac{e^*}{2} \end{array} \right.$$

en

$$\left[\begin{array}{l} (1 + p_H)(1 - y_2) + (1)(y_2) \geq \left(1 + p_H - p_L e^* - \frac{p_H e^*}{2}\right) (1 - y_2) + \left(2 - p_L e^* - \frac{p_H e^*}{2}\right) (y_2) \\ \Leftrightarrow \left(p_L e^* + \frac{p_H e^*}{2}\right) (1 - y_2) \geq \left(1 - p_L e^* - \frac{p_H e^*}{2}\right) (y_2) \\ \Leftrightarrow y_2 \leq p_L e^* + \frac{p_H e^*}{2} = e^* \left(1 - p_H + \frac{p_H}{2}\right) = e^* \left(1 - \frac{p_H}{2}\right) \\ \text{dus ook} \quad 0 \leq y_2 \leq e^* \left(1 - \frac{p_H}{2}\right) \end{array} \right.$$

Low is dus een best response van de werknemer als $0 \leq y_2 \leq \frac{e^*}{2}$ en $0 \leq y_2 \leq e^* \left(1 - \frac{p_H}{2}\right)$. Aangezien aangenomen wordt dat $e^* > 0$ en $0 \leq p_H \leq 1$, volgt dat als de voorwaarde $0 \leq y_2 \leq \frac{e^*}{2}$ geldt, de andere voorwaarde automatisch ook geldt. Oftewel, Low is een best response voor de werknemer als $0 \leq y_2 \leq \frac{e^*}{2}$. Vervolgens wordt nu naar de strategie Sep gekeken. Sep is een best response van de werknemer als voldaan wordt aan de volgende twee vergelijkingen:

$$\left[\begin{array}{l} \left(1 + p_H - \frac{p_H e^*}{2}\right) (1 - y_2) + \left(1 + p_H - \frac{p_H e^*}{2}\right) (y_2) \geq (1 + p_H)(1 - y_2) + (1)(y_2) \\ \Leftrightarrow 1 + p_H - \frac{p_H e^*}{2} \geq p_H(1 - y_2) + 1 \\ \Leftrightarrow 1 - \frac{e^*}{2} \geq 1 - y_2 \\ \Leftrightarrow \frac{e^*}{2} \leq y_2 \quad \text{dus ook} \quad \frac{e^*}{2} \leq y_2 \leq 1 \end{array} \right.$$

en

$$\left[\begin{array}{l} 1 + p_H - \frac{p_H e^*}{2} \geq \left(1 + p_H - p_L e^* - \frac{p_H e^*}{2}\right) (1 - y_2) + \left(2 - p_L e^* - \frac{p_H e^*}{2}\right) (y_2) \\ \Leftrightarrow 1 + p_H - \frac{p_H e^*}{2} \geq 1 + p_H - p_L e^* - \frac{p_H e^*}{2} + (1 - p_H)(y_2) \\ \Leftrightarrow p_L e^* \geq p_L y_2 \\ \Leftrightarrow y_2 \leq e^* \quad \text{dus ook} \quad 0 \leq y_2 \leq e^*. \end{array} \right.$$

Men ziet dat als $0 < e^* < 1$, dat dan de twee voorwaarden impliceren dat $\frac{e^*}{2} \leq y_2 \leq e^*$, terwijl als $1 < e^* < 2$ dan geldt alleen de voorwaarde $\frac{e^*}{2} \leq y_2 \leq 1$. Dus Sep is een best response van de werknemer voor $0 < e^* < 1$ als $\frac{e^*}{2} \leq y_2 \leq e^*$ en voor $1 < e^* < 2$ als $\frac{e^*}{2} \leq y_2 \leq 1$. Tenslotte is High een best response van de werknemer als geldt:

$$\left[\begin{array}{l} \left(1 + p_H - p_L e^* - \frac{p_H e^*}{2}\right) (1 - y_2) + \left(2 - p_L e^* - \frac{p_H e^*}{2}\right) (y_2) \geq (1 + p_H)(1 - y_2) + (1)(y_2) \\ \Leftrightarrow y_2 \geq e^* \left(1 - \frac{p_H}{2}\right) \quad \text{dus ook} \quad e^* \left(1 - \frac{p_H}{2}\right) \leq y_2 \leq 1 \end{array} \right.$$

en

$$\left[\begin{array}{l} \left(1 + p_H - p_L e^* - \frac{p_H e^*}{2}\right) (1 - y_2) + \left(2 - p_L e^* - \frac{p_H e^*}{2}\right) (y_2) \geq 1 + p_H - \frac{p_H e^*}{2} \\ \Leftrightarrow e^* \leq y_2 \quad \text{dus ook} \quad e^* \leq y_2 \leq 1 \end{array} \right.$$

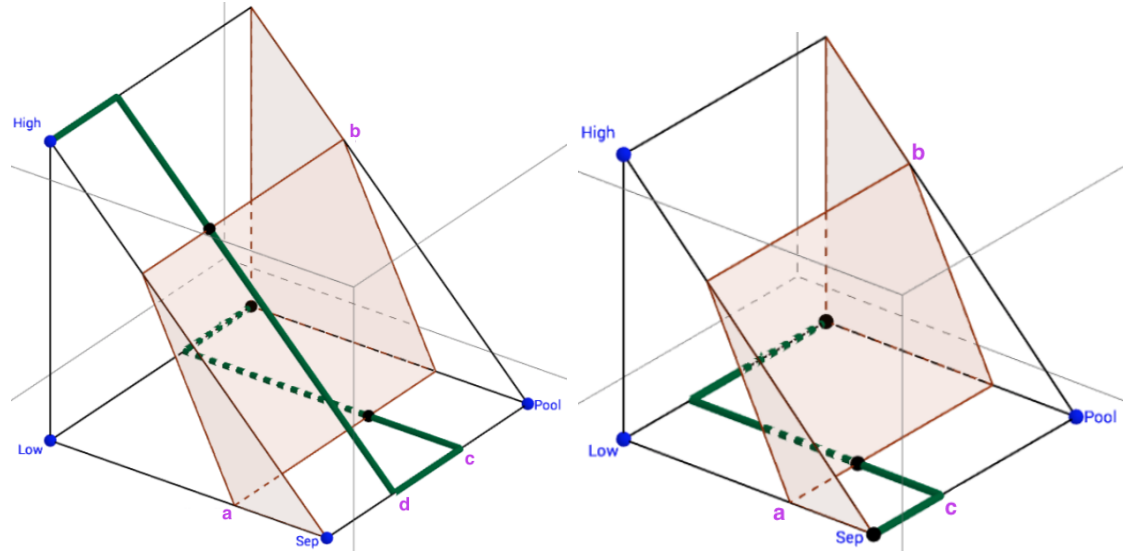
Verder volgt voor High als best response dat bij $0 < e^* < 1$ de twee voorwaarden impliceren dat $e^* \leq y_2 \leq 1$. Echter bij $1 < e^* < 2$ krijgt men nu dat de twee voorwaarden impliceren dat $1 < y_2 \leq 1$. Dit is een tegenspraak en hieruit volgt dat voor $1 < e^* < 2$ High nooit een best response van de werknemer zal zijn. Er kan geconcludeerd worden dat Low een best response is van de werknemer als $0 \leq y_2 \leq \frac{e^*}{2}$, Sep voor $0 < e^* < 1$ als $\frac{e^*}{2} \leq y_2 \leq e^*$ en voor $1 < e^* < 2$ als $\frac{e^*}{2} \leq y_2 \leq 1$ en High alleen voor $0 < e^* < 1$ als $e^* \leq y_2 \leq 1$.

Nu zullen de best responses van de werkgever uitgerekend worden. De kans dat een werknemer strategie Low, Sep of High speelt is gelijk aan respectievelijk $x_1 = 1 - x_2 - x_3$, x_2 en x_3 . Pool is een best response van de werkgever als geldt:

$$\begin{cases} (-p_{LP_H})(1 - x_2 - x_3) + (-p_{LP_H})(x_2) + (-p_{LP_H})(x_3) \geq (-p_H)(1 - x_2 - x_3) + (-p_L)(x_3) \\ \Leftrightarrow -p_{LP_H} \geq -p_H + p_H x_2 + p_H x_3 - p_L x_3 \\ \Leftrightarrow -p_{LP_H} \geq -p_H + p_H x_2 + (p_H - p_L)x_3 \\ \Leftrightarrow -(1 - p_H)p_H \geq -p_H + p_H x_2 + (p_H - (1 - p_H))x_3 \\ \Leftrightarrow p_H^2 \geq p_H x_2 + (2p_H - 1)x_3 \end{cases}$$

Met ziet nu dat Pool een best response is voor $x_2 = 0$ bij $p_H^2 \geq (2p_H - 1)x_3$ en voor $x_3 = 0$ bij $x_2 \leq p_H$. De werkgever heeft geen voorkeur tussen Pool en Sep als $p_H^2 = p_H x_2 + (2p_H - 1)x_3$ en Sep is een best response als $p_H^2 \leq p_H x_2 + (2p_H - 1)x_3$.

Uit definitie 2.2, de berekingen hierboven en de toelichting betreft strikte Nash evenwichten in appendix B volgt dat er verschillende (strikte) Nash evenwichten in dit spel aanwezig zijn. Dit wordt duidelijk aan de hand van figuur 5 dat met behulp van GeoGebra ([2]) zelf is geconstrueerd. Dit figuur geeft de best responses die hierboven zijn uitgerekend, grafisch weer.



Figuur 5: De best responses die corresponderen met de strategieën uit tabel 2. Het linker figuur voor $0 < e^* < 1$ met $p_H = \frac{2}{3}$ en $e^* = \frac{2}{3}$ en het rechter figuur voor $1 < e^* < 2$ met $p_H = \frac{2}{3}$ en $e^* = \frac{4}{3}$. De blauwe hoekpunten zijn de strategieën van de werknemers en werkgevers. De best response van de werknemers wordt gegeven door de groene lijn en van de werkgevers door het bruine oppervlak. De Nash evenwichten worden gegeven door de zwarte punten. Verder geldt: $a : x_2 = p_H$, $b : x_3 = p_H$, $c : y_2 = \frac{e^*}{2}$ en $d : y_2 = e^*$.

Dit figuur is gebaseerd op figuur 2 van Wagner ([10]) en met programma GeoGebra ([2]) geconstrueerd.

Uit figuur 5 volgt dat het pooling evenwicht (Low, Pool) altijd een strikt Nash evenwicht is, terwijl het separating evenwicht (Sep, Sep) alleen voorkomt wanneer de productieve werknemers een kostbaar signaal e^* sturen. Dit evenwicht is daarom alleen zichtbaar in het rechter figuur 5, waarbij de signaalkosten hoog genoeg zijn. In dit evenwicht sturen de productieve werknemers een duur signaal en krijgen een hoog loon, terwijl de niet-productieve werknemers een goedkoop signaal sturen en een laag loon krijgen. In dit evenwicht zorgt het kostbare signaal er dus voor dat de werknemer eerlijk zal zijn over zijn productiviteit.

Voor $0 < e^* < 1$ komt het separating evenwicht niet voor. Echter, is er wel een belangrijk gemengd Nash evenwicht voor deze waarden van e^* . In het linker figuur is af te lezen dat dit evenwicht ligt op $x_1 = 0$, $x_3 = p_H$ en $y_2 = e^*$. Dit komt overeen met het feit dat de werknemers willekeurig kiezen tussen Sep en High met respectievelijk kans p_L , want $x_2 = 1 - 0 - p_H = p_L$, en p_H en de werkgevers willekeurig kiezen tussen Pool en Sep met respectievelijk kans e^* en $1 - e^*$. Uit de definitie van de strategieën van de werknemers, gegeven in tabel 1, volgt dat als de werknemers willekeurig tussen Sep en High kiezen, de productieve werknemers altijd het signaal e^* zullen sturen, terwijl de niet-productieve werknemers willekeurig kiezen tussen signaal $e_L = 0$ en $e = e^*$. Dit gemengde evenwicht correspondeert dus met een hybride evenwicht in het originele spel van Spence.

Verder is op te merken dat in figuur 5 voor de waarden $0 < e^* < 2$ ook nog een Nash evenwicht in gemengde strategieën voorkomt waarbij $x_3 = 0$. Ook dit evenwicht correspondeert met een hybride evenwicht in het originele spel van Spence. Hierbij kiezen de werknemers willekeurig tussen Low en Sep met respectievelijk kans p_L en p_H en de werkgevers willekeurig tussen Pool en Sep met respectievelijk kans $\frac{e^*}{2}$ en $1 - \frac{e^*}{2}$. Uit de definitie van de strategieën Low en Sep, gegeven in tabel 1, volgt dat in dit evenwicht de productieve werknemers willekeurig zullen kiezen tussen signaal $e_L = 0$ en $e = e^*$ en de niet-productieve werknemers sturen altijd signaal $e_L = 0$.

5.2 Replicator dynamica

Bij de replicator dynamica wordt aangenomen dat alleen de werknemers elkaar imiteren en de werkgevers elkaar imiteren indien dit een hogere payoff oplevert. De replicator vergelijkingen geven dus aan hoe de strategieverdeling van de twee populaties verloopt als gevolg van imitatie. Met behulp van vergelijkingen 3.2 en 3.3 uit hoofdstuk 3.1 is men in staat de replicator vergelijkingen van het spel van Spence die horen bij tabel 2 te bepalen. Deze worden gegeven door:

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= [\vec{e}_2 A \vec{y} - \vec{x} A \vec{y}] x_2 \\ \dot{x}_3 &= [\vec{e}_3 A \vec{y} - \vec{x} A \vec{y}] x_3 \\ \dot{y}_2 &= [\vec{e}_2 B^T \vec{x} - \vec{x} B \vec{y}] y_2 \end{aligned}$$

Men kan opmaken uit appendix C dat het invullen van de vectoren en matrices geeft:

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= \left[\frac{p_H e^*}{2} (-1 + x_2 - x_3) + p_H y_2 (1 - x_2) + e^* x_3 - x_3 y_2 \right] x_2 \\ \dot{x}_3 &= \left[\frac{p_H e^*}{2} (1 + x_2 - x_3) - e^* + y_2 - p_H x_2 y_2 + e^* x_3 - x_3 y_2 \right] x_3 \\ \dot{y}_2 &= (p_H x_2 + 2p_H x_3 - p_H^2 - x_3) (1 - y_2) y_2 \end{aligned}$$

5.3 Best response dynamica

Bij de best response dynamica wordt aangenomen dat de spelers van beide populaties op den duur allemaal een best response spelen. De werkgevers spelen dus uiteindelijk allemaal een best

response tegen de gemiddelde strategie van de werknemers, gegeven dat de werknemers hun strategie niet veranderen. De werknemers spelen ook uiteindelijk allemaal een best response tegen de gemiddelde strategie van de werkgevers, gegeven dat de werkgevers hun strategie niet veranderen.

Met behulp van vergelijkingen 3.6 en 3.7 uit hoofdstuk 3.2 is de best response dynamica die hoort bij het spel van Spence (tabel 2) te bepalen. De best response dynamica die hoort bij populatie x , gegeven een strategie \vec{y} van populatie y , is:

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &\in BR(\vec{y}) - x_2 \\ \dot{x}_3 &\in BR(\vec{y}) - x_3 \end{aligned}$$

De best response dynamica die hoort bij populatie y , gegeven de strategie \vec{x} van populatie x , is:

$$\dot{y}_2 \in BR(\vec{x}) - y_2$$

Waarbij

$$\begin{aligned} BR(\vec{y}) &= \{ \vec{x}^* \in \Delta_3 \mid \vec{x}^* A \vec{y} \geq \vec{x} A \vec{y} \forall \vec{x} \in \Delta_3 \} \\ BR(\vec{x}) &= \{ \vec{y}^* \in \Delta_2 \mid \vec{x} A \vec{y}^* \geq \vec{x} A \vec{y} \forall \vec{y} \in \Delta_2 \} \end{aligned}$$

De berekeningen van $\vec{x} A \vec{y}$ zijn weergegeven in appendix C. In hoofdstuk 3.2 is uitgelegd dat de best response dynamica geen gewone differentiaalvergelijking genereert. Met gebruik van een stuksgewijs lineaire functie als functie van de best response, is men nu in staat faseportretten te construeren die bij de best response dynamica horen.

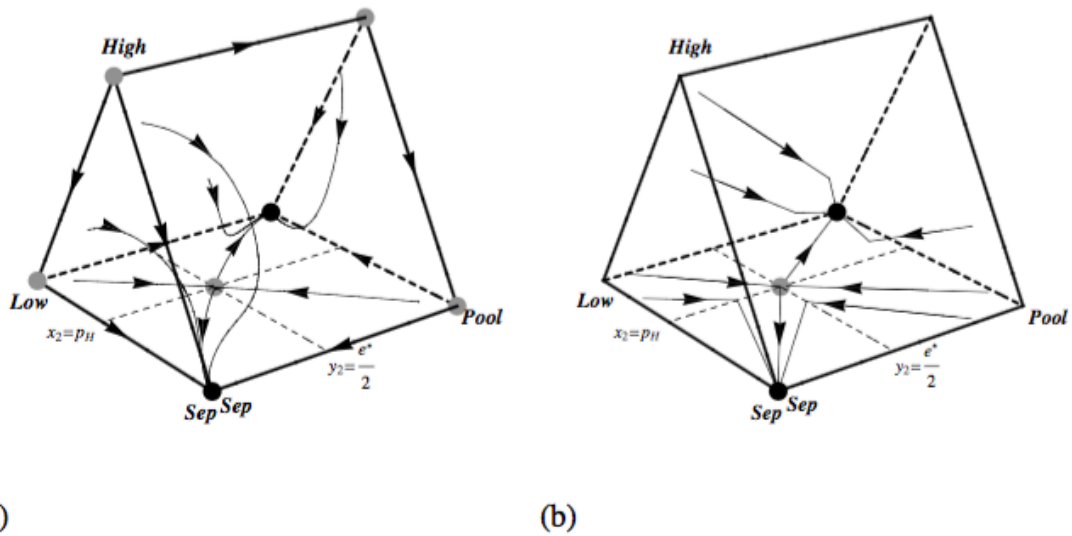
5.4 De resultaten

Met behulp van hoofdstuk 5.2 en 5.3 is het nu mogelijk de faseportretten die zijn geconstrueerd door Wagner ([10]) te analyseren. In de eerste en tweede subparagraaf worden de replicator en best response dynamica voor $1 < e^* < 2$ respectievelijk $0 < e^* < 1$ besproken.

5.4.1 De dynamica bij hoge signaalkosten

Deze paragraaf is gebaseerd op paragraaf 4.1 van Wagner ([10]).

In figuur 5 van hoofdstuk 5.1 was al naar voren gekomen dat in het spel van Spence drie Nash evenwichten aanwezig zijn bij $1 < e^* < 2$. Uit stelling 3.1 en 3.2 volgt nu dat deze drie Nash evenwichten ook rustpunten van de replicator en best response dynamica zijn. Van de drie Nash evenwichten zijn er verder twee, (Low, Pool) en (Sep, Sep), ook nog een strikt Nash evenwicht (zie appendix B). Uit stelling 3.1(ii) volgt nu dat deze twee strikte Nash evenwichten asymptotisch stabiel zijn. Dit is ook terug te zien in de faseportretten van beide dynamica in figuur 6 op de volgende pagina. Verder was al eerder geconcludeerd dat High nooit een best response was voor $1 < e^* < 2$. De payoff van de pure strategie Sep is dan namelijk strikt groter dan de payoff van de pure strategie High. Dit is ook terug te zien in de faseportretten, want de populatie beweegt altijd van de strategie High vandaan. Elke interne beginwaarde van het faseportret wordt daarom, als $t \rightarrow \infty$, teruggebracht naar een punt dat ligt op het vlak x_2, y_2 en waarvoor $x_3 = 0$.



Figuur 6: De faseportretten van het spel van Spence met $1 < e^* < 2$ voor (a) de replicator en (b) de best response dynamica. De zwarte en grijze punten staan voor respectievelijk stabiele en instabiele evenwichten. ([10], p. 170, figuur 3)

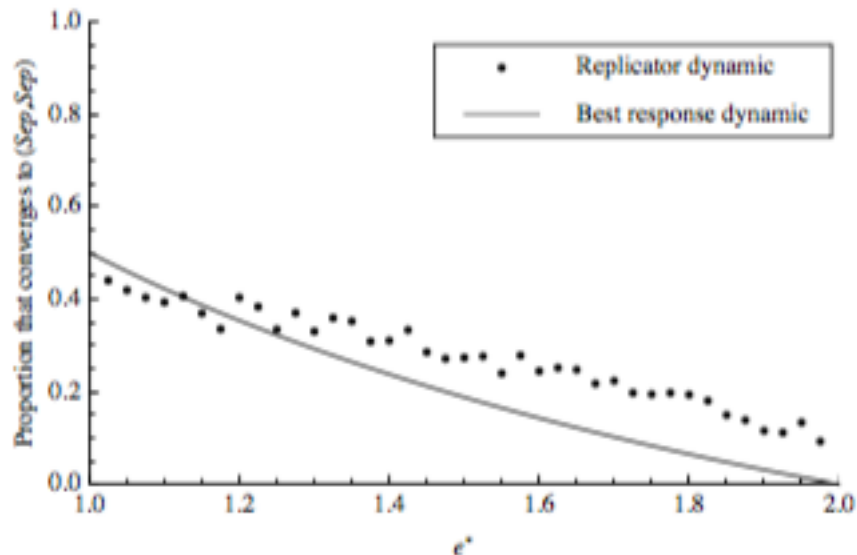
Het evenwicht $(x_2, x_3, y_2) = (p_H, 0, \frac{e^*}{2})$ dat ook te zien is in beide faseportretten van figuur 6 is een Nash evenwicht (volgt uit hoofdstuk 5.1). Wanneer men de replicator vergelijkingen in dit punt bekijkt, dan volgt inderdaad dat $\dot{x}_2 = \dot{x}_3 = \dot{y}_2 = 0$. Om te laten zien dat dit evenwicht niet stabiel is, wordt gekeken naar beide faseportretten in het punt $(\frac{p_H}{2}, 0, \frac{e^*}{2})$. Men ziet dat het afhankelijk is van de verstoring of het systeem zich in de richting van dit gemengd Nash evenwicht of van dit evenwicht af beweegt. Hieruit volgt dat $(p_H, 0, \frac{e^*}{2})$ een instabiel evenwicht is. Uit figuur 6 kan men concluderen dat dit evenwicht ook een zadelpunt is.

Merk verder op dat, net als in voorbeeld 1, de replicator dynamica rustpunten heeft in alle punten waar beide populaties pure strategieën spelen. Als alle werknemers dezelfde pure strategie spelen en alle werkgevers dit ook doen, dan is er geen speler die hiervan af zal wijken. Er is immers niemand uit de populatie van wie het gedrag geïmiteerd kan worden. In figuur 6 is bijvoorbeeld te zien dat het punt (Pool, Sep) alleen een rustpunt bij de replicator dynamica is. Bij de best response dynamica zullen werkgevers namelijk op den duur allemaal overstappen van de pure strategie Pool naar de pure strategie Sep, want dit geeft een payoff van 0 in plaats van $-p_L p_H$ (zie tabel 2).⁵ Tegelijkertijd zullen de werknemers op gegeven moment allemaal overstappen van de pure strategie Sep naar de pure strategie Low. Doordat beide populaties zullen veranderen van strategie als de beginwaarde (Pool, Sep) is, zal de uitkomst (Pool, Sep) in de best response dynamica geen rustpunt zijn.

In werkelijkheid zijn de rustpunten die de replicator dynamica extra genereert ten opzichte van de best response dynamica ongeloofwaardig. Kuddedieren zouden bijvoorbeeld inderdaad de strategie van andere dieren van dezelfde soort volgen en stappen daardoor niet over naar een andere strategie als deze niet aanwezig is in de populatie. In zo'n geval zou de replicator dynamica dus een goede weergave zijn van de werkelijkheid. Echter wordt bij het spel van Spence verwacht

⁵Aangenomen dat $p_L \neq 0$ en $p_H \neq 0$.

dat beide populaties spelers bevat die op zijn minst enigszins rationeel zijn. Ze denken dus na over hoe ze hun payoff kunnen maximaliseren, waardoor de populatie niet in één pure strategie blijft hangen. De drie Nash evenwichten die aanwezig zijn leveren voor de spelers hogere payoffs op, dus het spel van Spence zal dus naar alle waarschijnlijkheid eerder naar één van deze Nash evenwichten convergeren. De weergave van het spel van Spence bij $1 < e^* < 2$ is daarom realistischer bij de best response dynamica. De drie rustpunten van deze dynamica zijn namelijk allemaal Nash evenwichten.



Figuur 7: De proportie van de populatie die convergeert naar het separating evenwicht (Sep, Sep) met $p_H = \frac{1}{2}$ voor allebei de dynamica. Elk punt van de replicator dynamica is het gemiddelde van 1000 willekeurig gekozen beginwaarde in de faseruimte. ([10], p. 171, figuur 4)

Figuur 7 laat zien hoe groot de aantrekkingskracht van het separating evenwicht is voor beide dynamische systemen met $p_H = \frac{1}{2}$. Dit houdt in dat gekeken wordt naar de fractie van de totale populatie die convergeert naar dit evenwicht. Dit is interessant omdat in dit evenwicht de werknemer een eerlijk signaal stuurt en de werkgever een eerlijk loon biedt. Er wordt dus gekeken in hoeverre beide populaties eerlijkheid belangrijk vinden. Uit figuur 7 kan men opmaken dat bij beide dynamische systemen, de proportie die convergeert naar het separating evenwicht omgekeerd evenredig is met de signaalkosten e^* . Voor $e^* \downarrow 1$ ziet men dat ongeveer de helft van de spelers naar het evenwicht (Sep, Sep) convergeert. De andere helft van de spelers zal dus naar het evenwicht (Low, Pool) convergeren. Immers (Sep, Sep) en (Low, Pool) zijn de enige twee attractoren van dit spel (zie figuur 6).

Wanneer het evenwicht (Low, Pool) alleen door werkgevers en niet-productieve werknemers wordt bereikt, is dit evenwicht maar voor de helft oneerlijk en voor de andere helft eerlijk. Niet-productieve werknemers sturen immers een eerlijk signaal, maar de werkgevers bieden, ongeacht de productiviteit van de werknemer, altijd hetzelfde loon. Op het moment dat ook productieve werknemers de strategie Low spelen, liegen ze echter over hun signaal. Wanneer het evenwicht (Low, Pool) dus ook door productieve werknemers wordt bereikt, wordt de factor eerlijkheid in dit evenwicht kleiner. Men kan concluderen dat als $e^* \downarrow 1$ en $p_H = \frac{1}{2}$, waarschijnlijk alle werknemers eerlijk spelen. De kans is namelijk groot dat in dit geval de productieve werknemers

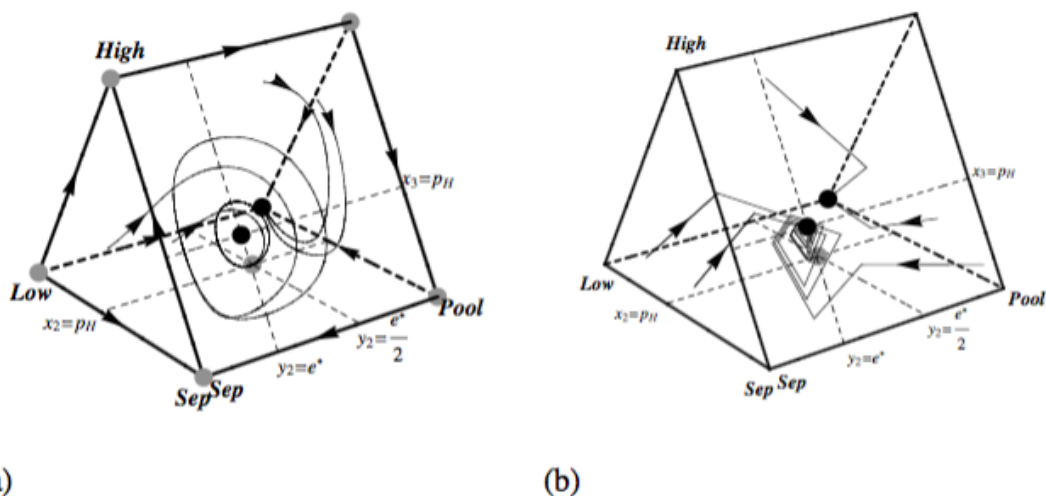
Sep spelen en de niet-productieve werknemers Low. Echter, spelen alleen de werkgevers die Sep spelen eerlijk, de andere helft die Pool spelen, spelen oneerlijk.

Wanneer e^* toeneemt en de waarde 2 nadert, neemt de factor eerlijkheid in het spel af en convergeert een steeds grotere fractie van de populatie naar het evenwicht (Low, Pool). Omdat in dit geval $p_H = \frac{1}{2}$ en de proportie van de populatie die convergeert naar het separating evenwicht bij $e^* > 1$ kleiner is dan $\frac{1}{2}$, volgt dat niet alle productieve werknemers meer bereid zijn het dure signaal e^* te versturen. Voor $e^* = 2$ convergeert zelfs (bijna) de hele populatie naar het evenwicht (Low, Pool). In deze situatie spelen dus alleen nog de niet-productieve werknemers eerlijk. Men kan concluderen dat bij $p_H = \frac{1}{2}$ de factor eerlijkheid dus het grootst is als $e^* \downarrow 1$.

5.4.2 De dynamica bij lage signaalkosten

Deze paragraaf is gebaseerd op paragraaf 4.2 van Wagner ([10]).

Zoals men in figuur 8 kan zien, wordt de dynamiek bij $0 < e^* < 1$ complexer. Zoals in hoofdstuk 5.1 en appendix B was geconcludeerd, blijft (Low, Pool) voor deze waarden van e^* nog steeds een strikt Nash evenwicht. Dit evenwicht is daarom weer asymptotisch stabiel. Wederom is het Nash evenwicht $(p_H, 0, \frac{e^*}{2})$ aanwezig voor beide dynamische systemen. Omdat dit rustpunt net als voor $1 < e^* < 2$ instabiel is, wordt over dit evenwicht geen nadere toelichting gegeven. Merk ook weer op dat, net als in voorbeeld 1 en de vorige subparagraaf, de replicator dynamica rustpunten heeft in alle punten waar beide populaties pure strategieën spelen. Dit verschijnsel kan op dezelfde manier worden uitgelegd als in hoofdstuk 5.4.1 al is gedaan. Bovendien is weer te zien dat alle rustpunten in de replicator dynamica ook voorkomen in de best response dynamica.



Figuur 8: De faseportretten van het spel van Spence met $0 < e^* < 1$ voor (a) de replicator en (b) de best response dynamica. De zwarte en grijze punten staan voor respectievelijk stabiele en instabiele evenwichten. ([10], p. 172, figuur 5)

In tegenstelling tot bij $1 < e^* < 2$, komt het separating evenwicht bij $0 < e^* < 1$ niet voor. In plaats daarvan is er een gemengd Nash evenwicht (p_L, p_H, e^*) , wat het hybride evenwicht wordt genoemd. De betekenis van dit evenwicht is in hoofdstuk 5.1 gegeven. Men kan aantonen dat

bij de best response dynamica het hybride evenwicht stabiel is.⁶ Dit is ook te zien in figuur 8. Bij dit dynamisch systeem zijn dus twee attractoren aanwezig, het hybride evenwicht en het evenwicht (Low, Pool).

Om iets over de stabiliteit in het evenwicht bij de replicator dynamica te zeggen, wordt gebruik gemaakt van eigenwaarden. Deze eigenwaarden kunnen met behulp van de Jacobiaan in het punt (p_L, p_H, e^*) ,

$$\begin{aligned}
J_{(p_L, p_H, e^*)} &= \begin{pmatrix} \left. \frac{d\dot{x}_2}{dx_2} \right|_{x_2=p_L} & \left. \frac{d\dot{x}_2}{dx_3} \right|_{x_3=p_H} & \left. \frac{d\dot{x}_2}{dy_2} \right|_{y_2=e^*} \\ \left. \frac{d\dot{x}_3}{dx_2} \right|_{x_2=p_L} & \left. \frac{d\dot{x}_3}{dx_3} \right|_{x_3=p_H} & \left. \frac{d\dot{x}_3}{dy_2} \right|_{y_2=e^*} \\ \left. \frac{d\dot{y}_2}{dx_2} \right|_{x_2=p_L} & \left. \frac{d\dot{y}_2}{dx_3} \right|_{x_3=p_H} & \left. \frac{d\dot{y}_2}{dy_2} \right|_{y_2=e^*} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(p_H^2 e^* - p_H e^*) & \frac{1}{2}(p_H^2 e^* - p_H e^*) & -p_H^3 + 2p_H^2 - p_H \\ -p_H^3 + 2p_H^2 - p_H & -\frac{p_H^2 e^*}{2} & p_H^3 - 2p_H^2 + p_H \\ e^* p_H - e^{*2} p_H & -e^* + e^{*2} + 2e^* p_H - 2e^{*2} p_H & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

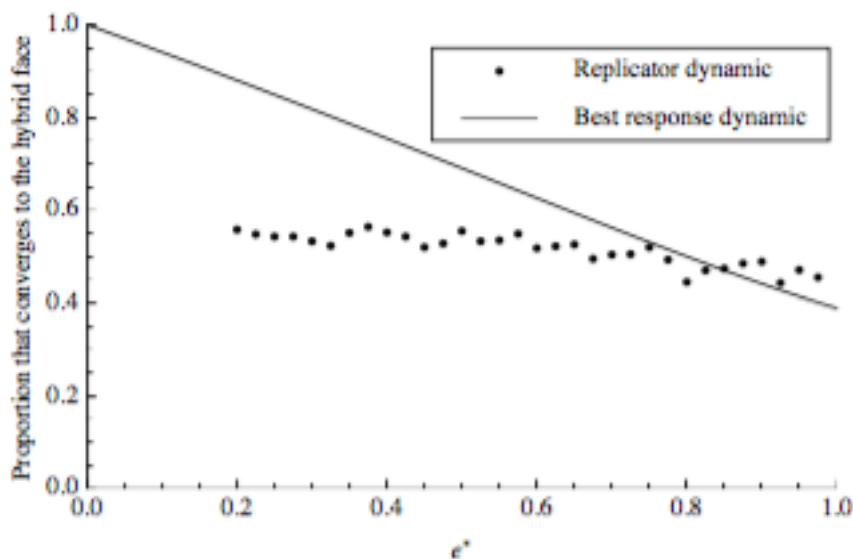
worden gevonden. De uitwerkingen van de elementen in de Jacobiaan zijn gegeven in appendix D. De karakteristieke vergelijking $\det(J - \lambda I) = 0$ oplossen voor λ geeft nu de eigenwaarden:

$$\lambda_1 = -\frac{p_H e^*}{2} \quad \text{en} \quad \lambda_{2,3} = \pm \sqrt{-p_H e^* (e^* - 1)(p_H - 1)^3}.$$

Merk op dat voor $0 < p_H < 1$ en $0 < e^* < 1$ geldt dat $(e^* - 1) < 0$ en $(p_H - 1) < 0$. Hieruit volgt $-p_H e^* (e^* - 1)(p_H - 1)^3 < 0$. Alleen λ_1 is dus een reële eigenwaarde van de Jacobiaan en $\lambda_{2,3}$ zijn puur imaginair. Uit de center manifold theorie en het feit dat J geen eigenwaarden heeft met een positief reëel deel, volgt nu dat het hybride evenwicht neutraal stabiel is bij de replicator dynamica. Omdat dit evenwicht niet een hyperbolisch rustpunt is, kunnen er alleen geen conclusies worden getrokken met betrekking tot de stabiliteit in dit punt. Een kleine verstoring in (p_L, p_H, e^*) leidt tot een spirallende beweging richting het hybride evenwicht of van het hybride evenwicht af. Er kan geconcludeerd worden dat bij de replicator dynamica minimaal één attractor aanwezig is, namelijk (Low, Pool). Het is echter onbekend of bij deze dynamica ook het hybride evenwicht een attractor is.

Omdat het onbekend is of het hybride evenwicht een attractor is bij de replicator dynamica, is het niet mogelijk om te bepalen hoe groot de proportie van de populatie is die convergeert naar het hybride evenwicht. Men kan echter wel kijken naar hoe groot de proportie van de populatie is die convergeert naar het vlak waar $x_1 = 0$. De werknemers spelen in dit geval dus alleen de strategieën Sep en High, waardoor de populatie niet naar de attractor (Low, Pool) zal convergeren. Het hybride evenwicht is echter wel met zekerheid een attractor bij de best response dynamica. In dit geval is het dus mogelijk om uit te rekenen hoe groot de proportie van de populatie is die convergeert naar het hybride evenwicht. De uitkomsten van de proportie van de populatie die convergeert naar het vlak $x_1 = 0$ en het hybride evenwicht bij respectievelijk de replicator en de best response dynamica voor verschillende waarden van e^* met $0 < e^* < 1$ en $p_H = \frac{1}{2}$ zijn afgebeeld in figuur 9 op de volgende pagina.

⁶Voor het bewijs hiervan, zie ([10]) pagina 179 tot en met 181.



Figuur 9: De proportie van de populatie die convergeert naar het hybride evenwicht bij de best response dynamica en die convergeert naar het vlak $x_1 = 0$ bij de replicator dynamica. Hierbij geldt $p_H = \frac{1}{2}$. Elk punt van de replicator dynamica is het gemiddelde van 1000 willekeurig gekozen beginwaarden in de faseruimte. ([10], p. 173, figuur 6)

Figuur 9 laat zien dat bij de replicator dynamica de waarde van e^* weinig invloed heeft op de proportie die convergeert naar het vlak $x_1 = 0$. Voor $0.2 < e^* < 1$ convergeert namelijk ongeveer de helft van de populatie naar dit vlak, terwijl de andere helft van de populatie convergeert naar de attractor (Low, Pool). Waarschijnlijk zullen de productieve werknemers het signaal e^* sturen, dus de strategie Sep of High kiezen, terwijl de niet-productieve werknemers de strategie Low kiezen en dus het gratis signaal e_L sturen. Blijkbaar is het signaal e^* dus te duur voor niet-productieve werknemers, maar goedkoop genoeg voor productieve werknemers. Daarnaast laat figuur 9 zien dat bij de best response dynamica de proportie die convergeert naar het hybride evenwicht omgekeerd evenredig is met de signaalkosten e^* . Bij $e^* = 0$ zal waarschijnlijk geen van de werknemers meer voor de strategie Low kiezen. De keuze e_L kan namelijk voor de werkgever een reden zijn om aan te nemen dat de werknemer niet productief is. Omdat in dit geval $e_L = e^*$, is het dus voor niet-productieve werknemers voordeliger om oneerlijk te zijn en signaal e^* te sturen. Deze werknemers kiezen dus voor de strategie High. De productieve werknemers kunnen echter willekeurig kiezen tussen Sep en High, want in dit geval sturen ze altijd het signaal e^* . De productieve werknemers zijn bij $e^* = 0$ dus eerlijk over hun productiviteit. Als e^* stijgt, zullen niet-productieve werknemers waarschijnlijk eerder de strategie Low kiezen, waardoor de proportie van de populatie dat naar het hybride evenwicht convergeert afneemt. De niet-productieve werknemers zullen dus als e^* toeneemt, eerder geneigd zijn eerlijk te zijn.

6 Conclusie

In deze scriptie is het spel van Spence geanalyseerd met behulp van twee dynamische systemen. Beide systemen houden rekening met de aanwezigheid van een factor ‘leren’ in het spel. De replicator dynamica is gebaseerd op imitatie. Spelers imiteren de strategieën van andere spelers uit dezelfde populatie als dit een hogere payoff oplevert. Als een strategie geheel afwezig is in een spel, dan zal deze strategie dus ook niet meer terugkomen. Geen van de spelers zal namelijk ooit deze strategie kunnen imiteren. Dit is ook terug te zien in het spel steen, papier, schaar en het spel van Spence. Alle uitkomsten waar pure strategieën worden gespeeld, zijn rustpunten in de replicator dynamica. De best response dynamica is gebaseerd op het optimaliseren van de payoff. Elke ronde gaat een aantal spelers van populatie p hun best response spelen tegen de gemiddelde strategie van de populatie q . Spelers uit populatie p zullen dus uiteindelijk allemaal hun best response gaan spelen, gegeven dat de spelers uit populatie q hun niet strategie aanpassen. Een belangrijke eigenschap van de best response dynamica is dat dit systeem enkel alle Nash evenwichten van het spel genereert. Bovendien zijn alle rustpunten in de best response dynamica ook rustpunten van de replicator dynamica. Dit is ook terug te zien in de faseportretten van steen, papier, schaar en het spel van Spence.

In hoofdstuk 5 is de dynamiek van het spel van Spence onderzocht. Met behulp van de replicator en best response dynamica is het gedrag van werknemers en werkgevers in de evenwichten bestudeerd. Hierbij is onderscheid gemaakt tussen hoge en lage signaalkosten respectievelijk $1 < e^* < 2$ en $0 < e^* < 1$. Voor beide signaalkosten is (Low, Pool) een asymptotisch stabiel evenwicht. Op het moment dat $e^* \uparrow 1$ en $p_H = \frac{1}{2}$, kiezen steeds meer niet-productieve werknemers voor de strategie Low. Als vervolgens $e^* \uparrow 2$, wordt het signaal ook te duur voor productieve werknemers. Bij $e^* = 2$ zit namelijk bijna de hele populatie in het evenwicht (Low, Pool). In dit geval spelen niet-productieve werknemers dus eerlijk, terwijl de productieve werknemers en de werkgevers niet eerlijk spelen. Op het moment dat $e^* \downarrow 1$ en $p_H = \frac{1}{2}$ is de factor eerlijkheid in de populatie bij $1 < e^* < 2$ het grootst. De helft van de populatie convergeert dan naar het separating evenwicht, waarbij de productieve werknemers een duur signaal sturen en een hoog loon krijgen en de niet-productieve werknemers een goedkoop signaal sturen en een laag loon krijgen. In tegenstelling tot bij $1 < e^* < 2$, komt het separating evenwicht bij $0 < e^* < 1$ niet voor. In plaats daarvan is er een hybride evenwicht, waarbij werknemers willekeurig kiezen tussen Sep en High met respectievelijk kans p_L en p_H en werkgevers willekeurig kiezen tussen Pool en Sep met respectievelijk kans e^* en $1 - e^*$. Bij $e^* \downarrow 0$ kiezen waarschijnlijk steeds meer niet-productieve werknemers voor het signaal e^* . In dat geval zijn ze niet eerlijk, want hiermee geven ze het signaal af dat ze productief zijn. Daarnaast als $e^* \uparrow 1$, dan zullen steeds meer niet-productieve werknemers overstappen van de strategie High naar de strategie Low. Blijkbaar is het signaal e^* dan te duur voor niet-productieve werknemers, maar goedkoop genoeg voor productieve werknemers. Dus als $e^* \approx 1$ is de factor eerlijkheid in het spel dus het hoogst.

Het spel van Spence wordt beter weergegeven door de best response dynamica dan de replicator dynamica. De rustpunten die de replicator dynamica extra genereert ten opzichte van de best response dynamica zijn namelijk ongeloofwaardig. Van werknemers en werkgevers wordt verwacht dat ze nadenken over de keuzes die ze maken en dus enigszins rationeel zijn. Daarom zullen deze spelers eerder hun payoff maximaliseren en blijven populaties niet hangen in pure strategieën die onvoordelig zijn. De Nash evenwichten leveren hogere payoffs op, dus het spel van Spence zal naar alle waarschijnlijkheid eerder naar één van deze evenwichten convergeren. Aangezien de best response dynamica enkel alle Nash evenwichten genereert, geeft deze dynamica een realistischere weergave van het spel van Spence dan de replicator dynamica.

7 Referenties

- [1] Berger, U. (2002). Best response dynamics for role games. *International Journal of Game Theory*, 30.4: 527-538.
- [2] GeoGebra, (21-05-2016).
<https://www.geogebra.org>
- [3] Hofbauer, J., & Sigmund, K. (1998). *Evolutionary games and population dynamics*. Cambridge University Press.
- [4] Hofbauer, J., & Sigmund, K. (2003). Evolutionary game dynamics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 40.4: 479-519.
- [5] Osborne, M. J. (2004). *An introduction to game theory*. Oxford University Press.
- [6] Peters, H. (2015). *Game theory: A multi-leveled approach*. Springer.
- [7] Sandholm, W. H. (2015). Population games and deterministic evolutionary dynamics. *Handbook of game theory*, 4: 703-778.
- [8] Spence, M. (1973). Job market signaling. *The quarterly journal of Economics*, 87.3: 355-374.
- [9] Van Rooy, R. (2003). Being polite is a handicap: Towards a game theoretical analysis of polite linguistic behavior. In: *Proceedings of the 9th conference on Theoretical aspects of rationality and knowledge*, 45-58. ACM.
- [10] Wagner, E. O. (2013). The dynamics of costly signaling. *Games*, 4.2: 163-181.
- [11] Zollman, K. J., Bergstrom, C. T., & Huttegger, S. M. (2012). Between cheap and costly signals: the evolution of partially honest communication. *Proceedings of the Royal Society of London B: Biological Sciences*, 280: 20121878.

A Appendix

Hier volgt een uitleg van de resultaten verkregen in figuur 4. Er is gegeven dat de payoffs van de werkgever en werknemer gelijk zijn aan respectievelijk $-(w-\theta)^2$ en $w-c(\theta, e)$ en dat $c(\theta_H, e) = \frac{e}{2}$ en $c(\theta_L, e) = e$.

Men weet dat als de werkgever strategie Pool kiest, hij altijd het loon $w = 1 + p_H$ biedt. Bij $e_L = 0$ volgt dus dat de payoff van de werknemer gelijk is aan $1 + p_H - c(\theta, e_L) = 1 + p_H$, terwijl bij $e = e^*$ volgt dat deze payoff gelijk is aan $1 + p_H - c(\theta_L, e^*) = 1 + p_H - e^*$ bij θ_L en gelijk is aan $1 + p_H - c(\theta_H, e^*) = 1 + p_H - \frac{e^*}{2}$ bij θ_H . Verder is bij de strategie Pool de payoff van de werkgever gelijk aan $-(1 + p_H - \theta)^2$. Bij $\theta_L = 1$ volgt dan dat deze payoff gelijk is aan $-p_H^2$, terwijl bij $\theta_H = 2$ is deze payoff gelijk aan $-(p_H - 1)^2 = -(-p_L)^2 = -p_L^2$.

Men weet dat als de werkgever Low kiest, de werkgever aanneemt dat hij te maken heeft met een werknemer van type θ_L , ofwel $p_H = 0$ en $p_L = 1$. De werkgever biedt daarom $w = 1 + p_H = 1$ en de payoff van de werknemer wordt $1 - c(\theta, e)$ en van de werkgever wordt $-(1 - \theta)^2$. Als de aanname van de werkgever terecht is, wordt dus bij $e_L = 0$ de payoff van de werknemer gelijk aan $1 - c(\theta_L, e_L) = 1$ en bij de werkgever gelijk aan $-(1 - \theta_L)^2 = 0$. Bij $e = e^*$ kan men met een soortgelijke beredenering nagaan dat de payoff van de werknemer gelijk is aan $1 - c(\theta_L, e^*) = 1 - e^*$ en dat de payoff van de werkgever gelijk blijft aan 0.

Stel nu dat de werkgever nog steeds Low kiest, maar nu is de werknemer van type θ_H . Dan volgt op analoge wijze dat bij $e_L = 0$ de payoff van de werknemer gelijk is aan $1 - c(\theta_H, e_L) = 1$ en de payoff van de werkgever gelijk is aan $-(1 - \theta_H)^2 = -(1 - 2)^2 = -1$. Bij $e = e^*$ is de payoff van de werknemer gelijk aan $1 - c(\theta_H, e^*) = 1 - \frac{e^*}{2}$ en blijft de payoff van de werkgever gelijk aan -1 .

In de vorige alinea zijn alle uitkomsten bij de actie Low van de werkgever uitgerekend. Op analoge wijze volgen de uitkomsten van keuze High van de werkgever. Deze uitleg wordt daarom achterwege gelaten.

B Appendix

Hier volgt een beknopte uitleg over de strikte Nash evenwichten die in het spel van Spence aanwezig zijn.

Men ziet dat als de werknemer Low speelt, dan is Pool een best response van de werkgever, want $-p_H^2 \cdot p_L - p_L^2 \cdot p_H = -p_H p_L$ en dit is strikt groter dan $-1 \cdot p_L$ en strikt groter dan $-1 \cdot p_H$ aangezien $p_H + p_L = 1$ met $p_H, p_L \in (0, 1)$. Als echter de werkgever Pool speelt, is ook Low een best response van de werknemer. Er geldt immers dat $1 + p_H > 1 + p_H - e^*$ en $1 + p_H > 1 + p_H - \frac{e^*}{2}$. Dus (Low, Pool) is een strikt, puur Nash evenwicht voor alle waarden $e^* > 0$.

Stel nu dat de werknemer Sep speelt, dan is het een best response van de werkgever om ook Sep te spelen, want $0 > -p_H p_L$.⁷ Dus bij het signaal $e_L = 0$ kiest hij Low en bij het signaal $e = e^*$ kiest hij High. Als de werkgever echter Sep speelt, is het afhankelijk van de waarde van e^* wat de werknemer speelt. Namelijk alleen voor $1 < e^* < 2$ is Sep een best response van de werknemer. In dit geval geldt namelijk $2 - \frac{e^*}{2} > 1$ en $1 > 2 - e^*$. Dus alleen voor $1 < e^* < 2$ is (Sep, Sep) een strikt, puur Nash evenwicht.

⁷Aangenomen dat $p_L \neq 0$ en $p_H \neq 0$.

C Appendix

Voor de replicator vergelijking van populatie x heeft men de volgende elementen nodig:

$$\begin{aligned}
\vec{e}_2 A \vec{y} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 + p_H & 1 \\ 1 + p_H - \frac{p_H e^*}{2} & 1 + p_H - \frac{p_H e^*}{2} \\ 1 + p_H - p_L e^* - \frac{p_H e^*}{2} & 2 - p_L e^* - \frac{p_H e^*}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 + p_H - \frac{p_H e^*}{2} \\ 1 + p_H - \frac{p_H e^*}{2} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \left(1 + p_H - \frac{p_H e^*}{2}\right) (y_1 + y_2) = 1 + p_H - \frac{p_H e^*}{2} \\
\vec{e}_3 A \vec{y} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 + p_H & 1 \\ 1 + p_H - \frac{p_H e^*}{2} & 1 + p_H - \frac{p_H e^*}{2} \\ 1 + p_H - p_L e^* - \frac{p_H e^*}{2} & 2 - p_L e^* - \frac{p_H e^*}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 + p_H - p_L e^* - \frac{p_H e^*}{2} \\ 2 - p_L e^* - \frac{p_H e^*}{2} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\
&= \left(1 + p_H - p_L e^* - \frac{p_H e^*}{2}\right) y_1 + \left(2 - p_L e^* - \frac{p_H e^*}{2}\right) y_2 \\
&= \left(1 - p_L e^* - \frac{p_H e^*}{2}\right) y_1 + p_H y_1 + \left(1 - p_L e^* - \frac{p_H e^*}{2}\right) y_2 + y_2 \\
&= 1 - (1 - p_H) e^* - \frac{p_H e^*}{2} + p_H (1 - y_2) + y_2 = 1 - e^* + \frac{p_H e^*}{2} + p_H - p_H y_2 + y_2 \\
\vec{x} A \vec{y} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 + p_H & 1 \\ 1 + p_H - \frac{p_H e^*}{2} & 1 + p_H - \frac{p_H e^*}{2} \\ 1 + p_H - p_L e^* - \frac{p_H e^*}{2} & 2 - p_L e^* - \frac{p_H e^*}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (1 + p_H)x_1 + (1 + p_H - \frac{p_H e^*}{2})x_2 + (1 + p_H - p_L e^* - \frac{p_H e^*}{2})x_3 \\ x_1 + (1 + p_H - \frac{p_H e^*}{2})x_2 + (2 - p_L e^* - \frac{p_H e^*}{2})x_3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\
&= (1 + p_H)x_1 y_1 + \left(1 + p_H - \frac{p_H e^*}{2}\right) x_2 y_1 + \left(1 + p_H - p_L e^* - \frac{p_H e^*}{2}\right) x_3 y_1 \\
&\quad + x_1 y_2 + \left(1 + p_H - \frac{p_H e^*}{2}\right) x_2 y_2 + \left(2 - p_L e^* - \frac{p_H e^*}{2}\right) x_3 y_2 \\
&= (y_1 + y_2)x_1 + p_H x_1 y_1 + \left(1 + p_H - \frac{p_H e^*}{2}\right) (y_1 + y_2)x_2 + \left(1 - p_L e^* - \frac{p_H e^*}{2}\right) x_3 y_1 \\
&\quad + p_H x_3 y_1 + \left(1 - p_L e^* - \frac{p_H e^*}{2}\right) x_3 y_2 + x_3 y_2 \\
&= x_1 + (x_1 + x_3)p_H y_1 + \left(1 + p_H - \frac{p_H e^*}{2}\right) x_2 + \left(1 - p_L e^* - \frac{p_H e^*}{2}\right) x_3 + x_3 y_2 \\
&= 1 - x_2 - x_3 + (1 - x_2)(1 - y_2)p_H + x_2 + p_H x_2 - \frac{p_H e^*}{2} x_2 + x_3 - p_L e^* x_3 - \frac{p_H e^*}{2} x_3 + x_3 y_2 \\
&= 1 + p_H - p_H y_2 - p_H x_2 + p_H x_2 y_2 + p_H x_2 - \frac{p_H e^*}{2} x_2 - (1 - p_H) e^* x_3 - \frac{p_H e^*}{2} x_3 + x_3 y_2 \\
&= 1 + p_H - p_H y_2 + p_H x_2 y_2 - \frac{p_H e^*}{2} x_2 - e^* x_3 + \frac{p_H e^*}{2} x_3 + x_3 y_2
\end{aligned}$$

Dit geeft de replicator vergelijkingen van populatie x :

$$\begin{aligned}
\dot{x}_2 &= [\vec{e}_2 A \vec{y} - \vec{x} A \vec{y}] x_2 \\
&= \left[1 + p_H - \frac{p_H e^*}{2} - 1 - p_H + p_H y_2 - p_H x_2 y_2 + \frac{p_H e^*}{2} x_2 + e^* x_3 - \frac{p_H e^*}{2} x_3 - x_3 y_2 \right] x_2 \\
&= \left[\frac{p_H e^*}{2} (-1 + x_2 - x_3) + p_H y_2 (1 - x_2) + e^* x_3 - x_3 y_2 \right] x_2 \\
\dot{x}_3 &= [\vec{e}_3 A \vec{y} - \vec{x} A \vec{y}] x_3 \\
&= \left[1 - e^* + \frac{p_H e^*}{2} + p_H - p_H y_2 + y_2 - 1 - p_H + p_H y_2 - p_H x_2 y_2 + \frac{p_H e^*}{2} x_2 + e^* x_3 \right. \\
&\quad \left. - \frac{p_H e^*}{2} x_3 - x_3 y_2 \right] x_3 \\
&= \left[\frac{p_H e^*}{2} (1 + x_2 - x_3) - e^* + y_2 - p_H x_2 y_2 + e^* x_3 - x_3 y_2 \right] x_3
\end{aligned}$$

Voor de replicator vergelijking van populatie y heeft men de volgende elementen nodig:

$$\begin{aligned}
\vec{e}_2 B^T \vec{x} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -p_L p_H & -p_H \\ -p_L p_H & 0 \\ -p_L p_H & -p_L \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p_H \\ 0 \\ -p_L \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -p_H x_1 - p_L x_3 \\
&= -p_H (1 - x_2 - x_3) - (1 - p_H) x_3 = -p_H + p_H x_2 - x_3 + 2p_H x_3 \\
\vec{x} B \vec{y} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -p_L p_H & -p_H \\ -p_L p_H & 0 \\ -p_L p_H & -p_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p_L p_H (x_1 + x_2 + x_3) \\ -p_H x_1 - p_L x_3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -(1 - p_H) p_H \\ -p_H x_1 - (1 - p_H) x_3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = -p_H y_1 + p_H^2 y_1 - p_H x_1 y_2 - x_3 y_2 + p_H x_3 y_2 \\
&= -p_H (1 - y_2) + p_H^2 (1 - y_2) + (-x_1 + x_3) p_H y_2 - x_3 y_2 \\
&= -p_H + p_H y_2 + p_H^2 - p_H^2 y_2 + (-1 + x_2 + 2x_3) p_H y_2 - x_3 y_2 \\
&= -p_H + p_H y_2 + p_H^2 - p_H^2 y_2 - p_H y_2 + p_H x_2 y_2 + 2p_H x_3 y_2 - x_3 y_2 \\
&= -p_H + p_H^2 - p_H^2 y_2 + p_H x_2 y_2 + 2p_H x_3 y_2 - x_3 y_2
\end{aligned}$$

Dit geeft de replicator vergelijking van populatie y :

$$\begin{aligned}
\dot{y}_2 &= [\vec{e}_2 B^T \vec{x} - \vec{x} B \vec{y}] y_2 \\
&= \left[-p_H + p_H x_2 - x_3 + 2p_H x_3 + p_H - p_H^2 + p_H^2 y_2 - p_H x_2 y_2 - 2p_H x_3 y_2 + x_3 y_2 \right] y_2 \\
&= \left[p_H x_2 (1 - y_2) + 2p_H x_3 (1 - y_2) - p_H^2 (1 - y_2) - x_3 (1 - y_2) \right] y_2 \\
&= \left[(p_H x_2 + 2p_H x_3 - p_H^2 - x_3) (1 - y_2) \right] y_2 = (p_H x_2 + 2p_H x_3 - p_H^2 - x_3) (1 - y_2) y_2
\end{aligned}$$

D Appendix

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d\dot{x}_2}{dx_2} \right|_{x_2=p_L} &= \left(\frac{p_H e^*}{2} (-1 + x_2 - p_H) + p_H e^* (1 - x_2) + e^* p_H - p_H e^* \right) + \left(\frac{p_H e^*}{2} - p_H e^* \right) x_2 \Big|_{x_2=p_L} \\
&= (-p_H^2 e^* + p_H^2 e^*) + \left(-\frac{p_H e^*}{2} \right) (1 - p_H) = \frac{1}{2} (P_H^2 e^* - P_H e^*) \\
\left. \frac{d\dot{x}_2}{dx_3} \right|_{x_3=p_H} &= \left(-\frac{p_H e^*}{2} + e^* - e^* \right) p_L = \frac{1}{2} (P_H^2 e^* - P_H e^*) \\
\left. \frac{d\dot{x}_2}{dy_2} \right|_{y_2=e^*} &= p_H p_L (1 - p_L) - p_L p_H = p_H^2 (1 - p_H) - p_H (1 - p_H) = -p_H^3 + 2p_H^2 - p_H \\
\left. \frac{d\dot{x}_3}{dx_2} \right|_{x_2=p_L} &= \frac{p_H^2 e^*}{2} - p_H^2 e^* = -\frac{p_H^2 e^*}{2} \\
\left. \frac{d\dot{x}_3}{dx_3} \right|_{x_3=p_H} &= \left(\frac{p_H e^*}{2} (1 + p_L - x_3) - e^* + e^* - p_H p_L e^* + e^* x_3 - x_3 e^* \right) + \left(-\frac{p_H e^*}{2} + e^* - e^* \right) x_3 \Big|_{x_3=p_H} \\
&= \left(\frac{p_H e^*}{2} (2 - p_H - p_H) - p_H (1 - p_H) e^* \right) - \frac{p_H^2 e^*}{2} \\
&= p_H e^* (1 - p_H) - p_H e^* (1 - p_H) - \frac{p_H^2 e^*}{2} = -\frac{p_H^2 e^*}{2} \\
\left. \frac{d\dot{x}_2}{dy_2} \right|_{y_2=e^*} &= p_H - p_H^2 p_L - p_H^2 = p_H - p_H^2 (1 - p_H) - p_H^2 = p_H^3 - 2p_H^2 + p_H \\
\left. \frac{d\dot{y}_2}{dx_2} \right|_{x_2=p_L} &= p_H (1 - e^*) e^* = e^* p_H - e^{*2} p_H \\
\left. \frac{d\dot{y}_2}{dx_3} \right|_{x_3=p_H} &= (2p_H - 1) (1 - e^*) e^* = (2p_H - 1) (e^* - e^{*2}) = -e^* + e^{*2} + 2e^* p_H - 2e^{*2} p_H \\
\left. \frac{d\dot{y}_2}{dy_2} \right|_{y_2=e^*} &= (p_H p_L + 2p_H^2 - p_H^2 - p_H) (-1) y_2 + (p_H p_L + 2p_H^2 - p_H^2 - p_H) (1 - y_2) \Big|_{y_2=e^*} \\
&= (p_H (-1 + p_L) + p_H^2) (1 - 2y_2) \Big|_{y_2=e^*} = (-p_H^2 + p_H^2) (1 - 2e^*) = 0
\end{aligned}$$