Goniometrie zonder rekenmachine

De geschiedenis van sinustabellen

11. Table of Chords

Arcs	*Chords*			*Sixtieths*[1]				*Arcs*	*Chords*			*Sixtieths*			
½	0	31	25	0	1	2	50	16½	17	13	9	0	1	2	10
1	1	2	50	0	1	2	50	17	17	44	14	0	1	2	7
1½	1	34	15	0	1	2	50	17½	18	15	17	0	1	2	5
2	2	5	40	0	1	2	50	18	18	46	19	0	1	2	2
2½	2	37	4	0	1	2	48	18½	19	17	21	0	1	2	0
3	3	8	28	0	1	2	48	19	19	48	21	0	1	1	57
3½	3	39	52	0	1	2	48	19½	20	19	19	0	1	1	54
4	4	11	16	0	1	2	47	20	20	50	16	0	1	1	51
4½	4	42	40	0	1	2	47	20½	21	21	11	0	1	1	48
5	5	14	4	0	1	2	46	21	21	52	6	0	1	1	45
5½	5	45	27	0	1	2	45	21½	22	22	58	0	1	1	42
6	6	16	49	0	1	2	44	22	22	53	49	0	1	1	39
6½	6	48	11	0	1	2	43	22½	23	24	39	0	1	1	36
7	7	19	33	0	1	2	42	23	23	55	27	0	1	1	33
7½	7	50	54	0	1	2	41	23½	24	26	13	0	1	1	30
8	8	22	15	0	1	2	40	24	24	56	58	0	1	1	26
8½	8	53	35	0	1	2	39	24½	25	27	41	0	1	1	22
9	9	24	54	0	1	2	38	25	25	58	22	0	1	1	19
9½	9	56	13	0	1	2	37	25½	26	29	1	0	1	1	15
10	10	27	32	0	1	2	35	26	26	59	38	0	1	1	11

Uit Ptolemaeus' Almagest[11]

Auteur:
Sharon Steen
Studentnummer: 4082362
Studie: Wiskunde

Begeleider:
Jan Hogendijk
Universiteit Utrecht

17 juni 2016

Voorwoord

Op de middelbare school is goniometrie onlosmakelijk verbonden met de rekenmachine. Een leerling uit vwo-6 zou dus kunnen denken dat de sinus en cosinus alleen met de rekenmachine te berekenen zijn, en dat deze functies voor de uitvinding van de rekenmachine niet bestonden. Ik heb daarom mijn bachelorscriptie geschreven voor vwo-6-leerlingen die wiskunde B hebben gevolgd, met als doel hen inzicht te geven in de ontstaansgeschiedenis van goniometrie. Ik heb hierbij ook enkele bijzonderheden en problemen uitgelicht, en laten zien hoe deze problemen zijn opgelost.

Omdat vwo-6 niet het meest vanzelfsprekende publiek is voor een bachelorscriptie, heb ik wat andere afwegingen moeten maken. Ten eerste heb ik te maken met een beperkte voorkennis. Om mijn scriptie toekomstbestendig te maken heb ik rekening gehouden met het nieuwe wiskundecurriculum waar over twee jaar voor het eerst examen in wordt gedaan, waarin veel meetkundestellingen zijn weggevallen. Dit komt erop neer dat ik op het gebied van meetkunde slechts de stelling van Pythagoras, de stelling van Thales en het gebruik van gelijkvormige en congruente driehoeken als voorkennis mag aannemen.

Met deze voorkennis zou ik mijn scriptie zelfs voor vwo-4 kunnen schrijven. Er is een andere reden dat ik vwo-6 als publiek heb gekozen, en dat is wiskundig inzicht. Vanwege het doel van mijn scriptie en mijn onderwijsambities wilde ik een middelbareschoolpubliek hebben, maar vanwege de inhoud moest het inzicht zo groot mogelijk zijn. In het bijzonder zou paragraaf 8.2 voor de gemiddelde vwo-4-leerling niet haalbaar zijn. Toen ik mijn scriptie door een vwo-6-leerling liet lezen, bleek zelfs zij namelijk moeite met deze paragraaf te hebben. Bij vwo-6 moest ik er nog steeds rekening mee houden dat het inzicht vele malen lager ligt dan dat van het gemiddelde bachelorscriptiepubliek. Hier ben ik mee omgegaan door de stappen in mijn bewijzen erg klein te maken, zodat het ook voor deze leerlingen te volgen is.

Het laatste waar ik rekening mee moest houden is dat mijn publiek geen wetenschappelijke artikelen gewend is, en dus waarschijnlijk zal afhaken als de schrijfstijl te zakelijk wordt. Ik heb geprobeerd de interesse van mijn publiek te behouden door meer verhalend te schrijven en door, veelal buiten de lopende tekst om, interessante feiten toe te voegen. De meeste hiervan zijn te vinden in een kader naast de lopende tekst.

Dat gezegd hebbende, wens ik u veel leesplezier.

Inhoudsopgave

Inleiding

Op de middelbare school heb je waarschijnlijk regelmatig met de sinus en cosinus gewerkt. Je hebt er de lengte van een zijde van een driehoek mee berekend, je hebt het snijpunt van de sinusfunctie met een andere lijn berekend en je hebt de afgeleide en primitieve ervan bepaald. Maar zodra je voor een van die doelen een uitkomst moest berekenen, gebruikte je waarschijnlijk vrijwel altijd je rekenmachine. Het lijkt haast of deze functies zonder rekenmachine niet te berekenen zijn, alsof ze alleen in je rekenmachine bestaan. Toch bestaat goniometrie, waar de sinus en cosinus onderdeel van zijn, al duizenden jaren. In deze scriptie kun je lezen hoe deze tak van de wiskunde is ontstaan, en hoe er steeds slimmere manieren werden bedacht om sinussen meetkundig te berekenen.

Ik heb deze scriptie geschreven voor leerlingen uit vwo-6. Toch is het op een andere manier geschreven dan je van de middelbare school gewend bent. Dit zit hem voornamelijk in de bewijzen: ik geef voor bijna elke stelling en elk lemma (hulpstelling) een bewijs. Wanneer ik geen bewijs geef, verwijs ik naar een bron waar wel een bewijs te vinden is. Dit doe ik omdat bewijzen de basis van de wiskunde vormen. Waar de meeste (bèta)wetenschappen een combinatie van metingen, modellen en redeneringen gebruiken om iets aan te tonen, wordt dit in de wiskunde enkel door middel van bewijzen gedaan. We beginnen met een aantal aannamen, ook wel axioma's genoemd. Hierbij kun je denken aan dingen als 'voor elk getal a en b geldt dat $a + b = b + a$' en 'door elke twee punten kan precies één rechte lijn worden getrokken'. Deze axioma's worden door middel van logica gecombineerd om aan te tonen dat een stelling wel *moet* gelden. Zolang je aanneemt dat de axioma's kloppen, zijn de stellingen onomstotelijk waar. (Wanneer je in plaats van een axioma een ander axioma aanneemt, verandert de hele wiskunde. Een mooi voorbeeld daarvan kun je vinden in [8].) Zoals wel vaker voorkomt in wiskundige teksten zal ik de axioma's niet expliciet noemen en zal ik ook vaak vanuit eerder bewezen stellingen werken. Rechtsonder elk bewijs staat een vierkantje, zodat het einde van het bewijs gemakkelijk te herkennen is.

Het eerste deel van de scriptie gaat vooral over de ontstaansgeschiedenis van de goniometrie. Dit gaat terug naar het prille begin, namelijk: waarom wordt een cirkel überhaupt in 360° verdeeld? Het antwoord blijkt alles met astronomie te maken te hebben. Vervolgens komt een voorloper van de sinus tot stand, met bijbehorende rekenregels. Deze rekenregels werden door de Griek Ptolemaeus bewezen in zijn *Almagest*. Ik heb hiervoor de Engelse vertaling van G.J. Toomer uit 1984 gebruikt, waarin de notatie van Ptolemaeus is vervangen door een modernere[13]. Daarna leg ik uit hoe de sinus zelf tot stand kwam, en gebruik ik de eerder bewezen rekenregels voor de voorloper om de rekenregels voor de sinus te bepalen. Als overzichtswerk voor het eerste deel van mijn scriptie en in mindere mate voor het tweede deel heb ik *The Mathematics of the Heavens and the Earth* van Glen van Brummelen gebruikt[1].

In het eerste deel loopt het echter nog niet helemaal soepel met de berekening van de sinus. Het blijkt nogal een gedoe om steeds opnieuw de sinus van een hoek te berekenen, dus er worden tabellen voor gemaakt. Daarvoor wil je natuurlijk de sinus minstens voor elke hele graad in de tabel hebben staan, maar hier ontstaat een probleem: de sinus van 1 graad blijkt niet meetkundig te construeren. Wat hiermee precies wordt bedoeld kun je in hoofdstuk 5 lezen. De rest van mijn scriptie besteed ik aan enkele methoden om dit probleem te omzeilen. De eerste methode gaat al terug naar Ptolemaeus. Bijna duizend jaar later wordt in het Midden-Oosten door Abu Raihan Biruni een poging gedaan, met een volledig nieuwe methode. Om deze methode te beschrijven heb ik naar de Duitse vertaling van een deel van de *Canon voor Mas^{c}ud* door Carl Schoy gekeken[21]. In deze vertaling zaten echter enkele onvolledigheden en fouten, die ik hier aangevuld en verbeterd heb. Daarnaast heb ik verschillende vertalingen van Biruni's werk: *Het bepalen van de koorde in de cirkel* gebruikt voor benodigde stellingen[20, 22]. Als laatste heb ik bekeken hoe de Fransman François Viète het probleem zou kunnen hebben aangepakt. Hoewel hij namelijk nooit expliciet de sinus van 1 graad heeft berekend, had hij wel alle benodigdheden om dit aan te pakken. Ik heb deze benodigdheden samengenomen om te reproduceren hoe Viète de sinus van 1 graad zou kunnen hebben berekend. De methoden staan in zijn verzameling van werken *De analystische kunst*, waarvan ik de Engelse vertaling van T. Richard Witmer heb gebruikt[27].

Ik wil graag mijn begeleider Jan Hogendijk bedanken voor het idee om mijn scriptie voor vwo-6 te schrijven en de begeleiding waardoor ik na ieder gesprek weer met veel nieuwe ideeën aan de slag kon. Ook wil ik Steven Wepster bedanken omdat ik (zonder dat hij mijn scriptie begeleidde) bij hem terecht kon voor vragen en omdat ik het boek *The Mathematics of the Heavens and the Earth* veel te lang van hem heb geleend. Verder wil ik mijn zusje bedanken die, omdat ze net haar vwo-examens heeft gehad, kon controleren of de stof voor vwo-6 haalbaar was en omdat ze daarnaast ook verschillende tips heeft gegeven om mijn scriptie prettiger leesbaar te maken. Als laatste wil ik nog mijn vriend bedanken voor het doorlezen van mijn scriptie en de emotionele steun.

Deel I

Het ontstaan van goniometrie en sinustabellen

Hoofdstuk 1

Wat is goniometrie?

Bij het woord goniometrie denk je waarschijnlijk aan de golvende grafiek van de sinus en cosinus. Of je denkt aan de soscastoa-regel voor rechthoekige driehoeken. Op het eerste gezicht lijken deze twee dingen weinig met elkaar te maken te hebben, behalve dan dat ze toevallig allebei gebruik maken van de sinus en cosinus. Omdat de geschiedenis van de goniometrie echter ver voor het ontstaan van deze twee functies begint, moet eerst duidelijk zijn wat goniometrie eigenlijk is.

Glen van Brummelen[1, p.9] stelt twee eisen voor het bestaan van goniometrie:

1. Een standaardeenheid om de helling tussen twee lijnen (een hoek) te meten.
2. De mogelijkheid tot, en interesse in, het berekenen van lengten van lijnstukken.

Vanuit deze twee eisen kan een definitie van goniometrie worden geformuleerd. Iets kan namelijk goniometrie genoemd worden als het systematisch een bepaalde helling aan een bijbehorende lengte koppelt, en andersom. Ik zal in deze scriptie dus de volgende definitie hanteren:

Definitie 1.1 (Goniometrie)**.** *Goniometrie* is een systeem waarbij de grootte van een helling aan de waarde van een bijbehorende lengte wordt gekoppeld.

Deze definitie past bij de twee associaties met goniometrie die hierboven zijn genoemd. Bij een sinusfunctie vul je immers een hoek in, en komt er een bepaald getal (een lengte) uit. Bij soscastoa werkt het net iets anders, ook daar vul je een hoek in, maar er komt dan een verhouding van twee lengten uit.

In de geschiedenis werd aan de tweede eis van Van Brummelen al snel voldaan, men had per cultuur verschillende redenen om lengten te willen berekenen. Het begin van goniometrie kan dus worden gevonden door uit te zoeken wanneer er voor het eerst systematisch een getal aan een helling werd toegekend. Hiervoor moet je, omstreeks 1000 voor Christus, in Mesopotamië zijn[28, p.20-21].

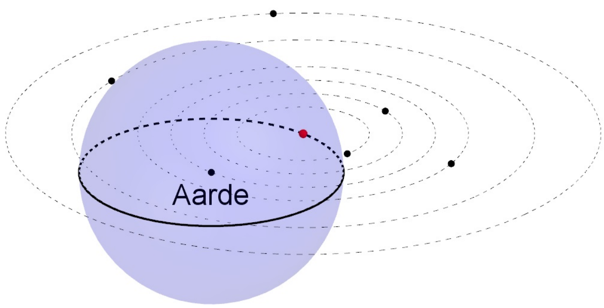
Hoofdstuk 2

Mesopotamië

Een kaart van Mesopotamië, tussen de Tigris en de Eufraat. Linksboven zie je Turkije. Mesopotamië betekent "tussen rivieren".

In de tiende eeuw voor Christus kwamen in Mesopotamië voor het eerst de ingrediënten samen om het begin van goniometrie te vormen. Ten eerste had men de behoefte om bogen te gebruiken. Zoals in vele culturen was er in Mesopotamië namelijk veel interesse in astronomie. Men kon hiermee de tijd bijhouden, wat voor landbouw en belastingen belangrijk was, maar men geloofde ook dat de hemellichamen rechtstreeks invloed hadden op het dagelijks leven. Er was dus een systeem nodig om aan te geven waar de verschillende planeten stonden.

In de oudheid zag men zag het universum als volgt: om de aarde heen staat een gigantische hemelbol, zo groot dat de aarde in vergelijking maar een stipje is. Op deze bol staan alle sterren vast, en de zon, maan en planeten bewegen zich er langzaam overheen. Deze hemelbol draait elke dag rond de aarde, wat dag en nacht veroorzaakt[1, p.1-2]. In figuur 2.1 zie je een vereenvoudige versie van het zonnenstelsel zoals wij het kennen met daarin het model uit de oudheid. De stippellijnen stellen de banen van de planeten voor, en de rode stip is de zon. De blauwe bol is de hemelbol, en de dikke lijn is de baan van de zon rond de aarde in dit model. Deze lijn werd de ecliptica genoemd. Dit is een zogenaamde 'grote cirkel' op de bol, wat betekent dat het middelpunt van de cirkel en de bol gelijk is. Omdat het zonnestelsel in werkelijkheid net als in de figuur ongeveer



Figuur 2.1

de vorm van een schijf heeft, zijn hierdoor ook de planeten en de maan vanaf de aarde in de buurt van deze cirkel te zien. Het is dus voldoende om aan te geven waar op die cirkel een planeet zich bevindt, en dat is precies wat graden doen. Hoe dit in Mesopotamië werd aangepakt kun je in paragraaf 2.2 lezen.

De bewoners van Mesopotamië waren niet uniek in hun interesse in astronomie. Wat ze zo geschikt maakten voor het begin van de goniometrie was iets anders, namelijk hun getallenstelsel.

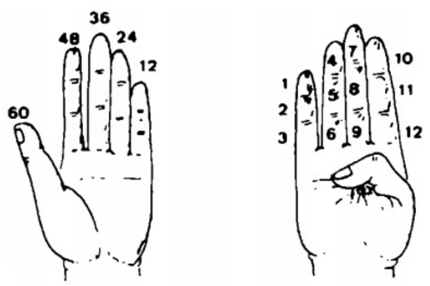
2.1 Het 60-tallige stelsel

Voor het ontstaan van goniometrie is een goed systeem voor breuken nodig. Immers, bedenk maar eens: hoe vaak komt het voor dat de sinus van een hele hoek een eenvoudig getal als antwoord geeft? Zonder een systeem om getallen achter de komma op te schrijven loopt de berekening, zelfs met afronding, al snel vast.

De Soemeriërs in Mesopotamië ontwikkelden in het derde millennium voor Christus een 60-tallig, ofwel sexagesimaal, stelsel. Zoals wij tot 10 en daarna tot 100 tellen, telden zij tot 60 en daarna 3600. Dit werkt net als onze uren, minuten en seconden, want hiervoor gebruiken we nog steeds een 60-tallig stelsel:: 3u25m8s+5u34m55s= 9u0m3s. Hoe dit systeem is ontstaan is niet bekend, hoewel er verschillende theorieën over bestaan[12, p.91-95]. Wel is gebleken dat een sexagesimaal stelsel erg handig is. Het getal 60 is namelijk door veel getallen te delen, om te beginnen al door 2, 3, 4, 5 en 6, een stuk beter dus dan 10 wat alleen door 2 en 5 te delen is. Daarnaast bleek het ook mogelijk om op je vingers tot 60 te tellen, met een systeem dat ook nu nog in verschillende gebieden in het Midden-Oosten wordt gebruikt.

Vanuit het sexagesimale stelsel ontstond ook een gewichtensysteem dat op 60 gebaseerd was[24, p.110-111]. De eerste gewichtseenheid was de ‘talent’, met het gewicht van een mens. Na verloop van tijd had men kleinere eenheden nodig, dus ging men over op een zestigste van een talent, een mina genaamd. Het was nu mogelijk om $\frac{1}{60}, \frac{2}{60}, \ldots, \frac{59}{60}$ van een talent aan te duiden. De mina werd weer verder opgedeeld, en ook de volgende eenheid werd weer opgedeeld, wat het mogelijk maakte om steeds kleinere gewichten aan te geven. Aan het einde van het tweede millenium voor Christus werden deze benamingen ook

Tot 60 tellen op je vingers
Al je vingers, behalve je duim, hebben drie vingerkootjes. Dit zijn dus in totaal twaalf vingerkootjes. Door deze op je rechterhand met je duim aan te wijzen, beginnend bovenaan je pink en eindigend bij het onderste kootje van je wijsvinger, kun je op één hand al tot twaalf tellen. Maar je hebt nog een tweede hand. Op deze hand houd je bij hoevaak je al tot twaalf hebt geteld. Na de eerste keer steek je dus je pink op, en begin je opnieuw op je rechterhand. Daarna ga je door met je ringvinger, middelvinger, enzovoort. Tot je deze hele hand open hebt, want dan ben je met 5×12 op 60 beland[12, p.94-95].



[12, p.95]

buiten de context van gewichten gebruikt. Men kon nu echt met breuken gaan rekenen.[1]

Omdat we met sexagesimale getallen zullen gaan rekenen, moet hiervoor een moderne notatie worden gebruikt. We zullen deze getallen als volgt noteren: de notatie $384; 45, 2$ *duidt* $384 + \frac{45}{60} + \frac{2}{60^2}$ *aan. Het gehele deel wordt dus normaal opgeschreven en het breukdeel in sexagesimalen. Een sexagesimaal is een geheel getal tussen 0 en 59. Omdat een sexagesimaal cijfer uit twee tekens kan bestaan (*45 *bijvoorbeeld), moeten we ze scheiden, wat we door middel van een komma doen. Om geen verwarring te veroorzaken met de komma in de gewone decimale notatie, die het gehele stuk van de breuk scheidt, gebruiken we in het sexagesimale systeem in plaats daarvan een puntkomma[1, p.13].*

2.2 360 graden

Zoals eerder genoemd waren alle hemellichamen binnen ons zonnestelsel in de buurt van de ecliptica te zien, het pad van het middelpunt van de zon langs de vaste sterren. De zon staat niet helemaal stil op de ecliptica: door het jaar heen staat zij steeds bij andere sterren. Na een heel jaar heeft de zon één rondje over de ecliptica gemaakt. De omgeving van deze cirkel, waar de maan en planeten zich altijd in bevinden, heet de zodiak. Een van de eerste bronnen waarin astronomische waarnemingen werden opgeschreven is de MUL.APIN[4, p.5-8]. Uit de waarnemingen hierin valt af te leiden dat dit document uiterlijk 1000 voor Christus ontstond[28, p.20-21], hoewel het oudste exemplaar dat is teruggevonden uit 687 voor Christus stamt[16, p.17]. Alle metingen werden toen nog gerelateerd aan 36 sterren in verschillende sterrenbeelden in de zodiak.

Na verloop van tijd ontstond er een nieuw systeem om de plaatsen op de ecliptica aan te duiden. Doordat de zon elk jaar langs de ecliptica reisde had de verdeling veel met tijd te maken. Met 12 of 13 maanden (manen) per jaar was het om te beginnen voor de hand liggend om de zodiak in 12 stukken te gaan verdelen. Dit gebeurde dan ook in de vijfde eeuw voor Christus. In een bron uit 419 voor Christus werd de plaats van planeten namelijk aangeduid met een sterrenbeeld waar ze op dat moment in stonden[29, p.217]. Er werden hiervoor twaalf sterrenbeelden gebruikt: o.a. Taurus (Stier), Gemini (Tweelingen), Cancer (Kreeft), Leo (Leeuw)... Het zijn in de meeste gevallen de sterrenbeelden die we nu nog van de horoscoop kennen. Men had de zodiak in twaalf even grote stukken verdeeld, en elk stuk naar een sterrenbeeld erin genoemd. De grootte van deze stukken werd een bêru genoemd[23].

Al snel bleek het nodig om de bêru verder op te delen om waarnemingen preciezer op te schrijven. Omdat de zon ongeveer 30 dagen lang in hetzelfde sterrenbeeld opkomt, was 30 een natuurlijke keuze. Ook vanwege het sexagesimale stelsel was de keuze voor 30 handig, 30 was daarin net zo handig als 5 in ons decimale stelsel. De 30 stukjes in een bêru werden uš genoemd[1, p.17]. De ecliptica, en daarmee het jaar, was nu dus in

[1] De eerste breuken vinden we niet in Mesopotamië. Voor ze daar ontstonden hadden de Egyptenaren halverwege het derde millennium voor Christus al een systeem ontwikkeld dat gebruik maakte van eenheidsbreuken[2, p.42]. Dit zijn breuken waarvan de teller 1 is. Deze breuken werden bij elkaar opgeteld om elke mogelijke breuk te creëren, met als extra beperking dat deze sommaties elke breuk maar een keer mochten bevatten. De breuk $\frac{2}{5}$ mocht dus niet als $\frac{1}{5} + \frac{1}{5}$ worden geschreven, maar dit werd $\frac{1}{3} + \frac{1}{15}$. Dit systeem werkte heel aardig, maar het kon soms flink uit de hand lopen, bijvoorbeeld bij $\frac{21}{23} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{13} + \frac{1}{359} + \frac{1}{644046}$, wat niet op een kortere manier geschreven kon worden. Hiermee rekenen werd al helemaal verschrikkelijk.

$12 \times 30 = 360$ uš verdeeld. De eerste bron waarin dit wordt gebruikt stamt al uit 410 voor Christus[18, p.8]. Hoewel het al lang bekend was dat een jaar 365 dagen had, kon toch aardig worden gerekend met de schatting dat de zon 1 uš per dag over de ecliptica verschuift en het jaar dus ongeveer 360 dagen had.

De verdeling in 360 stukken was echter niet in alle opzichten handig. De oude Grieken ontdekten namelijk dat het met dit systeem niet mogelijk was om een hoek van 1° te construeren, en dit zorgde nog eeuwen voor problemen. Wat hier precies mee wordt bedoeld, en hoe dit uiteindelijk werd opgelost, kun je in het tweede deel van deze scriptie lezen.

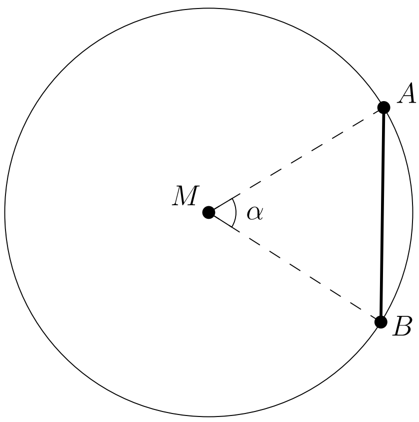
Hoofdstuk 3

Griekenland

Hoewel er in Mesopotamië een systeem was ontwikkeld om bogen een waarde te geven, koppelden ze daar nog geen lengtes aan. Van goniometrie was hier dus nog geen sprake. Ook in het vroege Griekenland kunnen we nog niet van goniometrie spreken, maar met een heel andere reden. Zij gebruikten astronomie namelijk niet om te voorspellen, maar om te verklaren. Daarom waren er geen getallen, maar meetkundige modellen nodig[1, p. 20]. Omdat ze hiervoor geen waarden voor hoeken en lengten nodig hadden, kan er nog niet van goniometrie worden gesproken. Dit veranderde rond de derde en tweede eeuw voor Christus, toen de kennis uit Mesopotamië in Griekenland terecht kwam[1, p. 33].

Omdat de Grieken zoveel gebruik maakten van meetkunde, was een goede basis van meetkunde nodig. Een belangrijke bron daarvoor waren de Elementen *die Euclides rond 300 voor Christus schreef, waarin veel meetkundige stellingen werden bewezen. In bewijzen zal ik naar enkele stellingen verwijzen. Deze stellingen kun je in bijlage A terugvinden. Je kunt ze herkennen door het woord "propositie" in plaats van stelling, gevolgd door een Romeins en normaal getal die aangeven om welke propositie het gaat.*

3.1 Hipparchus



Een van de mensen die met deze nieuwe kennis aan de slag ging was Hipparchus, die aan het begin van de tweede eeuw voor Christus leefde. Er is helaas weinig werk van hem teruggevonden, maar uit andere bronnen is bekend dat hij zich veel bezig hield met astronomie. Voor een deel van zijn ontdekkingen had hij goniometrie nodig. Hij is de eerste waarvan bekend is dat hij daarvoor de koorde gebruikte, een voorloper van de sinus. Waarschijnlijk heeft hij een tabel met koorden gemaakt, maar ook die is verloren gegaan.

Definitie 3.1 (Koorde)**.** Zij gegeven een cirkel met middelpunt M en een straal van lengte r. Laten verder twee punten A en B op de cirkel gegeven zijn zodat $\angle AMB$ gelijk is aan α. De *koorde* van hoek α, kort geschreven $\mathrm{Crd}\,(\alpha)$, geeft de lengte van lijnstuk AB.

De Grieken gebruikten hiervoor geen hoeken, maar bogen[13, p.48]. Omdat de koorde van hoek α gelijk is aan de koorde van boog α zal ik steeds gebruik maken van de term *hoek*.

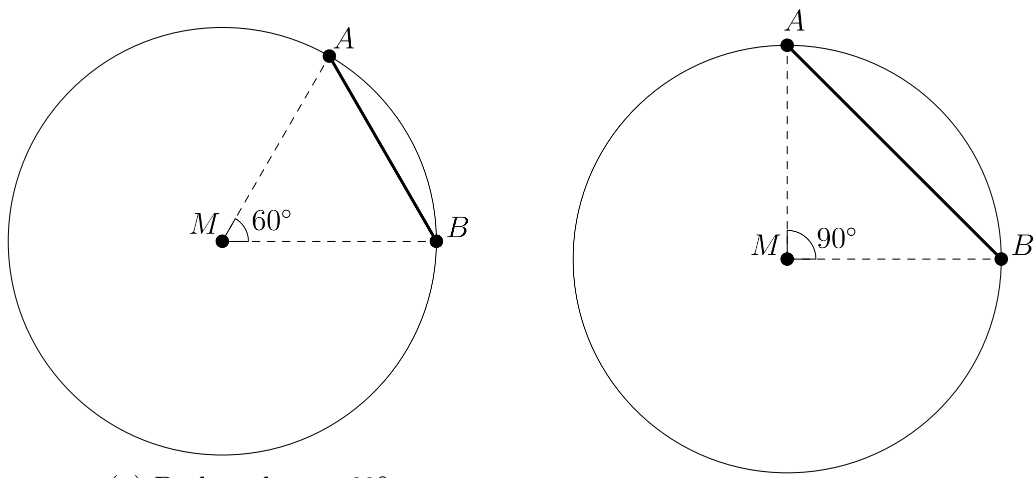
3.2 Ptolemaeus[13]

Ptolemaeus[2] leefde in de tweede eeuw na Christus. In tegenstelling tot zijn voorgangers is van hem vrijwel al het werk bewaard gebleven. Zijn belangrijkste werk is de *Almagest* (een Arabische verbastering van het Griekse woord voor "de grootste"), een boek over astronomie waarin hij het eerste model van de bewegingen van de hemellichamen ontwikkelde dat goed overeenkomt met de waarnemingen. Om dit te doen moest hij vaak gebruik maken van goniometrie. Omdat het bijzonder tijdrovend was om steeds opnieuw meetkundig een koorde te berekenen maakte men gebruik van tabellen, en een dergelijke tabel was dan ook in de *Almagest* opgenomen. De tabel gaf voor elke halve graad tot 180° de waarde van de koorde op een cirkel met een straal van 60. Het meest interessante is dat Ptolemaeus ook opschreef hoe de tabel kon worden berekend. Deze methode vormde de basis voor vele latere tabellen.

3.2.1 De koorden van 36°, 60°, 72° en 90°

Voordat je rekenregels kunt gebruiken om een tabel te maken, heb je een paar waarden nodig om mee te beginnen. De meest gemakkelijke waarden zijn $\mathrm{Crd}\,(60°)$ en $\mathrm{Crd}\,(90°)$. Voor Ptolemaeus waren deze zo vanzelfsprekend dat hij ze zonder bewijs gaf, maar ik heb hieronder voor beide toch een kort bewijs gegeven.

Lemma 3.1. *Bij een cirkel met straal* 60 *is de koorde van* 60° *gelijk aan* 60*[13, p.49].*



(a) De koorde van 60°

(b) De koorde van 90°

Figuur 3.1

[2]Biografische informatie over Ptolemaeus is te vinden in de *Dictionary of Scientific Biography*[6, deel 11, p.186-206].

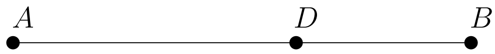
Bewijs. Bekijk figuur 3.1a. Er geldt dat $|AM| = |BM|$ omdat dit allebei de straal is. Driehoek AMB is dus gelijkbenig, dus $\angle MAB = \angle MBA$. Omdat de som van de hoeken gelijk is aan $180°$ en $\angle AMB = 60°$, moeten de andere twee hoeken ook $60°$ zijn. Alle hoeken van de driehoek zijn gelijk, dus is het een gelijkzijdige driehoek. De straal $|AM| = 60$, dus ook $\mathrm{Crd}\,(60°) = |AB| = 60$. □

Lemma 3.2. *Bij een cirkel met straal* 60 *is de koorde van* $90°$ *gelijk aan* $\sqrt{7200} \approx 84;51,10$*[13, p.49-50]*[3].

Bewijs. Bekijk figuur 3.1b. Omdat AM en BM beiden de straal zijn, geldt dat $|AM| = |BM| = 60$. Met de stelling van Pythagoras volgt dat $|AB|^2 = |AM|^2 + |BM|^2 = 3600 + 3600 = 7200$. Dus $\mathrm{Crd}\,(90°) = |AB| = \sqrt{7200}$. □

Voor de koorden van $36°$ en $72°$ is het nodig om te weten wat het betekent als een lijn in uiterste en middelste reden verdeeld is, en wat een ingeschreven veelhoek is.

Definitie 3.2 (Verdeling in uiterste en middelste reden)**.** Zij gegeven een lijnstuk AB, in twee stukken verdeeld door het punt D (zie figuur 3.2). Het lijnstuk is dan verdeeld *in uiterste en middelste reden* wanneer de verhouding tussen het langste en het kortste deel gelijk is aan de verhouding tussen het hele lijnstuk en het langste deel. Oftewel, wanneer $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AB|}{|AD|}$[10, VI Def. 3].

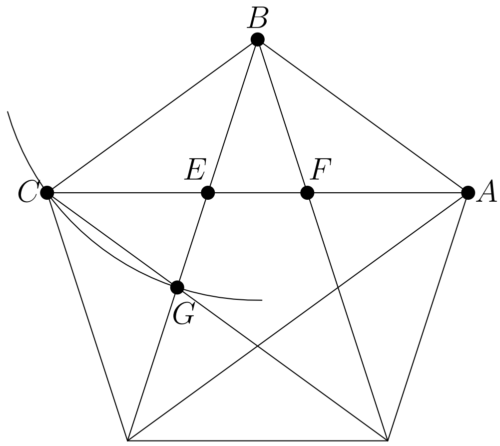


Figuur 3.2

Definitie 3.3 (Ingeschreven veelhoek)**.** Een veelhoek wordt een *ingeschreven veelhoek* genoemd wanneer alle hoekpunten op een cirkel liggen. De ingeschreven veelhoek heet regelmatig als alle zijden even lang zijn.

Omdat $\frac{360}{5} = 72$ en $\frac{360}{10} = 36$ komt het vinden van de koorden van $36°$ en $72°$ overeen met het vinden van de lengte van één zijde van een regelmatige vijf- en tienhoek ingeschreven in een cirkel.

In het bewijs van het volgende lemma maakt Ptolemaeus gebruik van propositie XIII 9, die zegt dat de som van de zijden van een ingeschreven zes- en tienhoek in uiterste en middelste reden verdeeld is door het in de zijde van de zeshoek en die van de tienhoek op te delen. Dit is vrij eenvoudig in te zien door middel van gelijkvormige driehoeken in een regelmatige vijfhoek, zie figuur 3.3. Hier geldt dat $\angle ABC = 108°$, dus omdat ΔABC gelijkbenig is geldt met de hoekensom dat $\angle BCA = \angle CAB = 36°$. Vanwege symmetrie geldt ook dat $\angle EBC = \angle ABF = 36°$, waaruit volgt dat $\angle FBE = 36°$. Uit de symmetrie volgt ook dat $|BE| = |BF|$, dus $\angle EFB = \angle BEF = 72°$. Verder geldt, weer door symmetrie, dat $\angle ECG = \angle FBE = 36°$ dus $\angle BCG = 72° = \angle BEF$. Er volgt dat ΔCGB en ΔEFB gelijkvormige (en gelijkbenige)



Figuur 3.3

[3]Ptolemaeus moest dus de wortel kunnen trekken uit willekeurige getallen. Wiskundigen uit zijn tijd draaiden daar hun hand niet voor om, hoe ze het aanpakten kun je lezen in bijlage B.

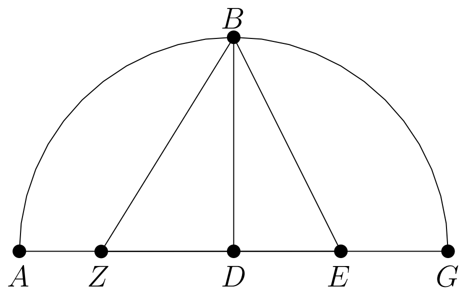
driehoeken zijn, dus $\frac{|BG|}{|BF|} = \frac{|CG|}{|EF|}$. Met symmetrie kunnen we dit wat vereenvoudigen, immers $|CG| = |BF| = |BE|$, $|EF| = |EG|$ en $|BG| = |BE| + |EG|$, dus $\frac{|CG|+|EG|}{|CG|} = \frac{|CG|}{|EG|}$. Dus $|CG|$ verdeelt $|CG| + |EG| = |BG|$ in uiterste en middelste reden. Bekijken we nu $\frac{|BG|+|CG|}{|BG|} = 1 + \frac{|CG|}{|BG|}$ dan volgt wegens de eerder aangetoonde gelijkheid dat dit gelijk is aan $1 + \frac{|EG|}{|CG|} = \frac{|CG|+|EG|}{|CG|}$. Hieruit volgt dat $\frac{|BG|+|CG|}{|BG|} = \frac{|BG|}{|CG|}$ dus ook $|BG|$ verdeelt $|BG| + |CG|$ in uiterste en middelste reden.

Neem nu de cirkel met middelpunt B en straal BG, die in de figuur deels getekend is. Aangezien $\frac{360}{6} = 60$ is de zijde van een ingeschreven zeshoek gelijk aan $\mathrm{Crd}\,(60°)$. Hiervan weten we dat het de straal van de cirkel is, dus $|BG|$ heeft dezelfde lengte als de zijde van een ingeschreven zeshoek. Omdat $|CG|$ duidelijk de koorde van 36° is en dus de zijde van de ingeschreven tienhoek is aangetoond dat de zijde van een zeshoek de som van de zijden van een zeshoek en een tienhoek in uiterste en middelste reden verdeelt.

Lemma 3.3. *Bij een cirkel met straal* 60 *is de koorde van* 36° *gelijk aan* $\sqrt{4500} - 30 \approx 37;4,55$ *en die van* 72° *gelijk aan* $\sqrt{9000 - 60\sqrt{4500}} \approx 70;32,3$.

Bewijs. [13, p.48-49] Beschouw de halfcirkel ABG met middelpunt D en lijn BD loodrecht op de diameter AG, zie figuur 3.4.

Zij E het punt op het midden van DG en trek lijn BE. Kies vervolgens het punt Z op AG zo dat $|EB| = |EZ|$, en trek lijn BZ. We gaan bewijzen dat DZ de zijde van een regelmatige tienhoek, en BZ de zijde van een regelmatige vijfhoek ingeschreven in de cirkel is.



Figuur 3.4

Omdat de lijn DG door E in tweeën wordt gedeeld en DZ in het verlengde ligt, geldt wegens propositie II 6:

$$|GZ| \cdot |ZD| + |ED|^2 = |EZ|^2.$$

Vanwege de stelling van Pythagoras geldt dat

$$|EB|^2 = |ED|^2 + |DB|^2.$$

Omdat $|EB|$=$|EZ|$ geldt dus dat

$$\begin{aligned} |GZ| \cdot |ZD| + |ED|^2 &= |ED|^2 + |DB|^2 \\ \text{dus } |GZ| \cdot |ZD| &= |DB|^2 \\ \text{oftewel } |GZ| \cdot |ZD| &= |DG|^2 \qquad (|DB| = |DG| = \text{straal}) \\ \text{dus } \frac{|GZ|}{|DG|} &= \frac{|DG|}{|ZD|}. \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat de lijn ZG in het punt D in uiterste en middelste reden is verdeeld. Omdat we al eerder hadden gezien dat de zijde van een ingeschreven zeshoek gelijk is aan de straal, is hier DG gelijk is aan de zijde van een ingeschreven zeshoek. Vanwege propositie XIII 9 is dan DZ gelijk aan de zijde van een ingeschreven tienhoek. Omdat ook BD gelijk is aan de zijde van een ingeschreven zeshoek, volgt met propositie XIII 10 en de stelling van Pythagoras dat BZ de zijde is van de ingeschreven vijfhoek.

Het rest nu nog om de lengtes van deze zijden te berekenen.

$$\begin{aligned}
\text{Omdat } |DE| &= 30 && \text{(halve straal)}\\
\text{geldt } |DE|^2 &= 900.\\
\text{Maar ook } |BD| &= 60 && \text{(straal)}\\
\text{dus } |BD|^2 &= 3600.\\
\text{Er volgt dat } |EZ|^2 &= |EB|^2 = |DE|^2 + |BD|^2 = 4500 && \text{(Stelling van Pythagoras)}\\
\text{dus } |EZ| &= \sqrt{4500} \approx 67;4,55\\
\text{en dus } \operatorname{Crd}(36^\circ) &= |DZ| = |EZ| - |DE| = \sqrt{4500} - 30 \approx 37;4,55.
\end{aligned}$$

Voor de zijde van de vijfhoek, BZ, geldt nu:

$$\begin{aligned}
\text{Omdat } |DZ|^2 &= 5400 - 60\sqrt{4500} \approx 1375;4,15\\
\text{en } |BD|^2 &= 3600\\
\text{geldt dat } |BZ|^2 &= |DZ|^2 + |BD|^2 = 9000 - 60\sqrt{4500} \approx 4975;4,15\\
& && \text{(Stelling van Pythagoras)}\\
\text{dus } \operatorname{Crd}(72^\circ) &= |BZ| = \sqrt{9000 - 60\sqrt{4500}} \approx 70;32,3.
\end{aligned}$$

Dit voltooit het bewijs. □

Met moderne notatie zouden we de koorde van 36° gemakkelijker kunnen berekenen. Neem namelijk weer figuur 3.3, waarin we aannemelijk hebben gemaakt dat $\frac{|CG|+|EG|}{|CG|} = \frac{|CG|}{|EG|}$. Als we nu $|CG| + |EG| = r$ nemen en $|CG| = x$, dan volgt hieruit dat $\frac{r}{x} = \frac{x}{r-x}$ oftewel $x^2 + rx - r^2 = 0$. Door dit op te lossen met de *abc*-formule en de positieve oplossing te gebruiken volgt dat $\operatorname{Crd}(36^\circ) = x = r\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.[4]

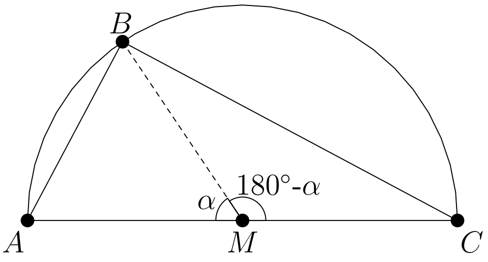
3.2.2 Rekenregels voor koorden

Nu een aantal koorden bekend zijn, zijn er rekenregels nodig om deze te combineren tot een tabel. De meest gemakkelijke rekenregel is die waarmee de koorde van het complement wordt bepaald. Ptolemaeus gaf hiervan zelfs geen bewijs, omdat hij het als vanzelfsprekend zag.

Stelling 3.4 (Complement)**.** *Zij de koorde bij hoek* α *bekend. Dan geldt dat* $\operatorname{Crd}(180^\circ - \alpha) = \sqrt{(2r)^2 - \operatorname{Crd}^2(\alpha)}$*[13, p.50].*

[4] In de tijd van Ptolemaeus bestond er nog geen algebra. Hij kon de koorde van 36° dus niet op deze manier berekenen omdat het idee om een zijde x te noemen niet bestond.

Bewijs. Zij gegeven een halve cirkel met diameter AC en middelpunt M. Zij B op de cirkel zo dat $|AB| = \text{Crd}\,(\alpha)$, dus $|BC| = \text{Crd}\,(180° - \alpha)$. De stelling van Thales geeft dat $\angle ABC = 90°$, dus kan de stelling van Pythagoras worden toegepast. Daarmee volgt dat



Figuur 3.5

$$\begin{aligned} \text{Crd}^2\,(180° - \alpha) &= |AC|^2 - \text{Crd}^2\,(\alpha) \\ \text{dus } \text{Crd}\,(180° - \alpha) &= \sqrt{|AC|^2 - \text{Crd}^2\,(\alpha)} \\ \text{dus } \text{Crd}\,(180° - \alpha) &= \sqrt{(2r)^2 - \text{Crd}^2\,(\alpha)} \end{aligned}$$

□

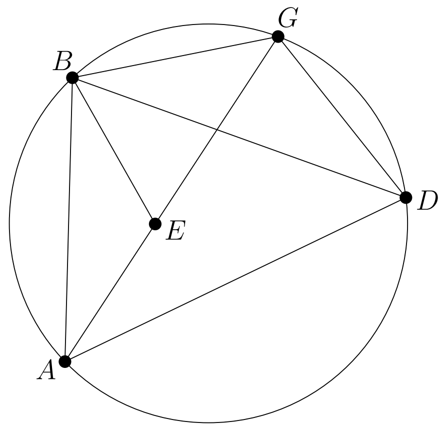
Voor de volgende bewijzen is de stelling van Ptolemaeus nodig. Hierin wordt een koordenvierhoek gebruikt. Ook is in het bewijs de omtrekshoek nodig.

Definitie 3.4 (Koordenvierhoek)**.** Een *koordenvierhoek* is een vierhoek (niet noodzakelijk een vierkant) die in een cirkel is ingeschreven.

Definitie 3.5 (Middelpunts- en omtrekshoek)**.** Zij gegeven een koorde AB in een cirkel met middelpunt M, en een punt C op de cirkel aan dezelfde kant van AB als M (zie figuur 3.5). Dan is $\angle AMB$ de *middelpuntshoek* en $\angle ACB$ de *omtrekshoek* van AB.

Stelling 3.5 (Stelling van Ptolemaeus)**.** *Zij $ADGB$ een koordenvierhoek, met de diagonalen AG en BD getrokken. Dan geldt dat $|AG| \cdot |BD| = |AD| \cdot |BG| + |AB| \cdot |DG|$.*

Bewijs. [13, p.50-51] Kies het punt E op AG zo dat $\angle EBA = \angle GBD$ (zie figuur 3.6). Dan geldt door $\angle EBD$ erbij op te tellen ook dat $\angle DBA = \angle GBE$. Verder geldt dat $\angle ADB = \angle EGB$ omdat dit omtrekshoeken van AB zijn, zie propositie III 21. Omdat twee hoeken overeenkomen zijn ΔADB en ΔEGB dus gelijkvormig. Hieruit volgt dat:



Figuur 3.6

$$\frac{|BG|}{|EG|} = \frac{|BD|}{|AD|}$$
$$\text{oftewel } |AD| \cdot |BG| = |EG| \cdot |BD|.$$

Opnieuw vanwege propositie III 21, ditmaal met koorde BG, geldt dat $\angle BAE = \angle BDG$. Met $\angle EBA = \angle GBD$ volgt nu dat ΔAEB en ΔDGB gelijkvormig zijn. Dus geldt:

$$\frac{|AB|}{|AE|} = \frac{|BD|}{|DG|}$$
$$\text{oftewel } |AB| \cdot |DG| = |AE| \cdot |BD|.$$

Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned} |AG| \cdot |BD| &= |EG| \cdot |BD| + |AE| \cdot |BD| \\ &= |AD| \cdot |BG| + |AB| \cdot |DG|. \end{aligned}$$

□

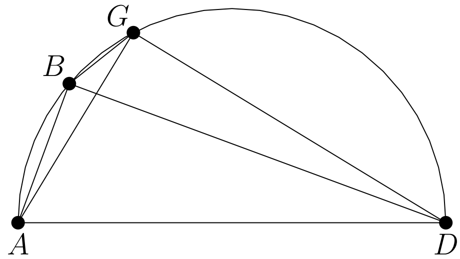
Om een tabel op te kunnen stellen moet je de koorde van een kleine hoek kunnen berekenen. Een goed begin hiervoor is het berekenen van het verschil van twee bekende hoeken.

Bij de volgende stellingen geeft Ptolemaeus geen expliciet resultaat, hij bewijst alleen dat het berekend kan worden. Ik heb de bewijzen verder uitgewerkt om ook een formule te verkrijgen.

Stelling 3.6 (Verschilregel)**.** *Zij* Crd (α) *en* Crd (β) *gegeven, en* $\alpha > \beta$. *Dan geldt dat*

$$\mathrm{Crd}\,(\alpha-\beta) = \frac{\mathrm{Crd}\,(\alpha)\cdot\,\mathrm{Crd}\,(180^\circ-\beta) -\,\mathrm{Crd}\,(\beta)\cdot\,\mathrm{Crd}\,(180^\circ-\alpha)}{2r}.$$

Bewijs. [13, p.51-52] Zij gegeven de halve cirkel met diameter AD. Laten B en G op de cirkel gegeven zijn zo dat $|AG| =$ Crd (α) en $|AB| =$ Crd (β), dus $|BG| =$ Crd $(\alpha-\beta)$ (zie figuur 3.7). Er volgt dan dat $|DG| =$ Crd $(180^\circ-\alpha)$ en $|BD| =$ Crd $(180^\circ-\beta)$. Verder is bekend dat $|AD| = 2r$. Vanwege stelling 3.5 geldt dan met koordenvierhoek $ADGB$ dat



Figuur 3.7

$$\begin{aligned}
|AB|\cdot|DG| + |AD|\cdot|BG| &= |AG|\cdot|BD| \\
\text{dus } |AD|\cdot|BG| &= |AG|\cdot|BD| - |AB|\cdot|DG| \\
\text{oftewel } |BG| &= \frac{|AG|\cdot|BD| - |AB|\cdot|DG|}{|AD|} \\
\text{dus } \mathrm{Crd}\,(\alpha-\beta) &= \frac{\mathrm{Crd}\,(\alpha)\cdot\,\mathrm{Crd}\,(180^\circ-\beta) -\,\mathrm{Crd}\,(\beta)\cdot\,\mathrm{Crd}\,(180^\circ-\alpha)}{2r}.
\end{aligned}$$

□

Met de verschilregel kan nu de koorde van 12° als verschil van 60° en 72° worden berekend. De volgende stap is om hoeken te gaan halveren.

Stelling 3.7 (Halveerregel)**.** *Zij* Crd (α) *gegeven. Voor de koorde van* $\frac{\alpha}{2}$ *geldt dat*

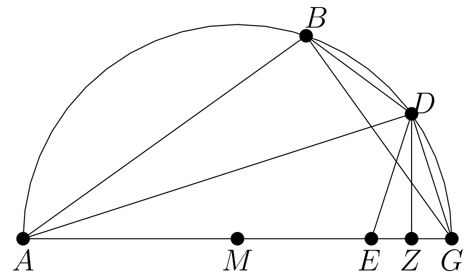
$$\mathrm{Crd}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{2r^2 - r\,\mathrm{Crd}\,(180^\circ-\alpha)}.$$

Ptolemaeus had deze stelling met stelling 3.5 kunnen bewijzen. Dit doet hij in de *Almagest* echter niet. Waarschijnlijk komt dit omdat deze stelling al veel langer bekend was, en hij dus gewoon een ouder bewijs over kon nemen.

Bewijs. [13, p.52-53] Zij gegeven de halve cirkel met diameter AG. Laten B en D op de halve cirkel gegeven zijn zo dat $|BG| =$ Crd (α) en $\angle DAG = \frac{1}{2}\angle BAG$ (zie figuur 3.8). Vanwege propositie III 20 komt halveren van $\angle BMG$ overeen met halveren van $\angle BAG$, dus geldt dat $|DG| =$ Crd $\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

We zullen eerst een formule voor $|ZG|$ opstellen, en deze gebruiken we vervolgens om een formule voor $\text{Crd}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ te verkrijgen.

Trek de lijnen AB, BD, DG, AD en BG. Trek DZ met Z op AG, loodrecht op AG. Kies punt E op AG zo dat $|AB| = |AE|$ en trek DE.



Figuur 3.8

Uit de constructie volgt dat $|AB| = |AE|$ en $\angle BAD = \angle DAE$. Omdat ze verder nog zijde AD gemeen hebben zijn ΔADB en ΔADE congruent. Dit betekent dat $|DE| = |BD|$. Omdat uit de constructie ook volgt dat $|BD| = |DG|$ betekent dit dat $|DE| = |DG|$. Omdat verder $\angle DZE = \angle DZG = 90°$ en zijde DZ gemeenschappelijk is, volgt dat ook ΔEZD en ΔGZD congruent zijn. Hieruit kan worden opgemaakt dat

$$\begin{aligned}
|GZ| &= |EZ| \\
&= \frac{1}{2}|EG| \\
&= \frac{1}{2}(|AG| - |AE|) \\
&= \frac{1}{2}(|AG| - |AB|) \\
&= \frac{1}{2}(2r - \text{Crd}\,(180° - \alpha))
\end{aligned}$$

Vanwege de stelling van Thales geldt dat $\angle GDA = 90°$. Ook $\angle GZD = 90°$, dus omdat ook $\angle DGZ$ gemeenschappelijk is zijn ΔAGD en ΔDGZ gelijkvormig. Hieruit volgt dat:

$$\begin{aligned}
\frac{|DG|}{|GZ|} &= \frac{|AG|}{|DG|} \\
\text{dus } |DG|^2 &= |AG| \cdot |GZ| \\
&= 2r \cdot \frac{1}{2}(2r - \text{Crd}\,(180° - \alpha)) \\
&= 2r^2 - r\,\text{Crd}\,(180° - \alpha) \\
\text{dus } \text{Crd}\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= |DG| = \sqrt{2r^2 - r\,\text{Crd}\,(180° - \alpha)}.
\end{aligned}$$

□

Met de halveerregel kan nu de koorde van 6°, 3°, $1\frac{1}{2}°$ enzovoort worden berekend. Om ook de koorde van 1° (en met halveren dus die van $\frac{1}{2}°$) te berekenen gebruikt Ptolemaeus een schattingsmethode. Hij had namelijk al ontdekt dat dit niet meer precies meetkundig te doen was. Wat hij hier precies mee bedoelde kun je in hoofdstuk 5 lezen. Hoe Ptolemaeus dit probleem omzeilde staat in hoofdstuk 6.

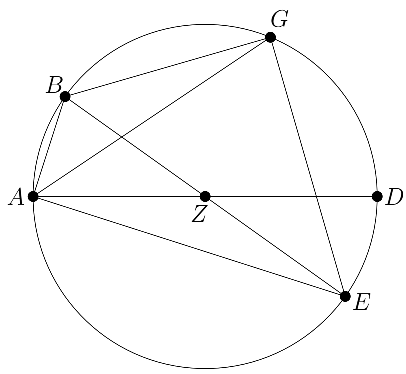
We missen echter nog één rekenregel om een tabel op te kunnen stellen. Uit de kleine koorden moeten we namelijk weer grotere koorden kunnen bepalen. Dit kan door middel van de somregel.

Stelling 3.8 (Somregel)**.** *Laten* $\text{Crd}\,(\alpha)$ *en* $\text{Crd}\,(\beta)$ *gegeven zijn, en stel* $\alpha + \beta \leq 180°$. *Dan kan* $\text{Crd}\,(\alpha + \beta)$ *berekend worden door middel van:*

$$\text{Crd}\,(\alpha + \beta) = \frac{\text{Crd}\,(\alpha) \cdot \text{Crd}\,(180° - \beta) + \text{Crd}\,(\beta) \cdot \text{Crd}\,(180° - \alpha)}{2r}.$$

Ptolemaeus gebruikte in zijn bewijs de koordenvierhoek $BGDE$ (zie figuur 3.9), waarmee een formule voor $\operatorname{Crd}(180° - (\alpha + \beta))$ verkregen kan worden. Ik gebruik zijn methode bij een andere koordenvierhoek die direct een formule voor $\operatorname{Crd}(\alpha + \beta)$ oplevert.

Bewijs. [13, p.53] Zij gegeven een cirkel met middelpunt Z en diameter AD. Laten B en G op de cirkel gegeven zijn zo dat $|AB| = \operatorname{Crd}(\alpha)$ en $|BG| = \operatorname{Crd}(\beta)$, dus $|AG| = \operatorname{Crd}(\alpha + \beta)$. Trek de diameter BZE en trek de lijnstukken AB, AE, AG, BG en EG (zie figuur 3.9). Er geldt dus dat $|BE| = 2r$, $|AE| = \operatorname{Crd}(180° - \alpha)$ en $|EG| = \operatorname{Crd}(180° - \beta)$.



Figuur 3.9

Omdat $ABGE$ een koordenvierhoek is, geldt wegens stelling 3.5 dat

$$|AG| \cdot |BE| = |AB| \cdot |EG| + |BG| \cdot |AE|$$
$$\text{dus } |AG| = \frac{|AB| \cdot |EG| + |BG| \cdot |AE|}{|BE|}$$
$$\text{oftewel } \operatorname{Crd}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{Crd}(\alpha) \cdot \operatorname{Crd}(180° - \beta) + \operatorname{Crd}(\beta) \cdot \operatorname{Crd}(180° - \alpha)}{2r}.$$

□

Met de basisregels van Ptolemaeus kon relatief gemakkelijk een koordentabel worden opgesteld, hoewel het nog erg veel rekenwerk kostte. Maar toen de tabel er eenmaal was, kon men echt met goniometrie, en dus met numerieke astronomie, aan de slag.

Hoofdstuk 4

Het ontstaan van de sinus

Na het opstellen van de koordentabel paste Ptolemaeus de koorden in de Almagest in vele situaties toe. In veel gevallen bleek hij echter niet direct de koorde nodig te hebben. Hij moest daar nog mee verder rekenen, want vaak had hij $\frac{1}{2}\,\mathrm{Crd}\,(2\alpha)$ nodig. Dit bleef hij echter steeds opnieuw uitrekenen.

Toen men echter in India met goniometrie begon, besloot men dat dat slimmer kon.

4.1 De etymologie van *sinus*

Het is helaas niet bekend in hoeverre de Indiërs kennis over goniometrie uit Griekenland door hebben gekregen[1, p. 94-95]. Wat wel bekend is, is dat vanaf de eerste bronnen over goniometrie, stammend uit de vijfde eeuw, niet de koorde als basis werd gebruikt. In plaats daarvan werd gerekend met de jyā-ardhā, wat "koorde helft" betekent. Deze was voor hoek α gelijk aan $\frac{1}{2}\,\mathrm{Crd}\,(2\alpha)$. Al snel werd deze term afgekort tot jyā (wat eigenlijk weer gewoon "koorde" betekent).

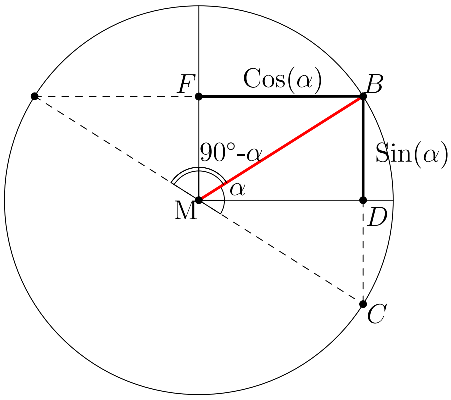
De kennis uit India reisde vervolgens door naar Irak, waar boeken uit het Sanskrit werden vertaald. Het woord jyā klonk fonetisch als "jîba", dus dit woord werd in Irak voor de half-koorde gebruikt. Men schreef echter de korte klinkers niet op, dus het verder betekenisloze "jîba" werd opgeschreven als "jyb" en werd toen al snel uitgesproken als "jaib", wat "boezem" betekende. Toen deze Arabische teksten uiteindelijk naar het Latijn werden vertaald, kozen de vertalers dan ook het Latijnse woord voor boezem: de *sinus* was geboren[5, p. 198].

4.2 Rekenregels voor de sinus

Omdat de sinus handiger bleek om mee te rekenen, was het nuttig om hier een tabel voor op te stellen. Hiervoor waren stellingen nodig die equivalent waren met die uit het vorige hoofdstuk, het zou immers niet efficiënt zijn om eerst een tabel voor de koorde te maken en dan elke koorde om te zetten naar een sinus. Gelukkig bleken veel van de rekenregels met de definitie van de sinus aangepast te kunnen worden. Hiervoor moet eerst de sinus en cosinus goed gedefiniëerd worden. De Indiërs deden dit als volgt:

Definitie 4.1 (Sinus)**.** Zij gegeven een cirkel met straal r. Dan noemen we $\operatorname{Sin}(\alpha) = \frac{1}{2}\operatorname{Crd}(2\alpha)$ voor $0° \leq \alpha \leq 90°$. In figuur 4.1 is lijnstuk BD de sinus van α.
Definitie 4.2 (Cosinus)**.** De cosinus is de sinus van het complement (sinus complementi). Zij gegeven een cirkel met straal r. Dan noemen we $\operatorname{Cos}(\alpha) = \operatorname{Sin}(90° - \alpha)$ voor $0° \leq \alpha \leq 90°$. In figuur 4.1 is lijnstuk BF de cosinus van α.

Let op dat er hierbij onderscheid wordt gemaakt tussen de huidige sinus en cosinus behorende bij de eenheidscirkel, en de oude versie waarbij de cirkel vaak een grotere straal had. We zullen de oudere, grotere sinus en cosinus met een hoofdletter aangeven. Er geldt dus dat $\operatorname{Sin}(\alpha) = r\sin(\alpha)$ en $\operatorname{Cos}(\alpha) = r\cos(\alpha)$.



Figuur 4.1

Met deze twee definities en de stellingen uit het vorige hoofdstuk kunnen rekenregels voor de sinus worden achterhaald. Controleer zelf dat $r = 1$ alle huidige rekenregels geeft.
Stelling 4.1 (Complement)**.** *Het verband tussen de sinus en de sinus van het complement (de cosinus) wordt gegeven door*

$$\operatorname{Cos}^2(\alpha) + \operatorname{Sin}^2(\alpha) = r^2. \tag{4.1}$$

Bewijs.[5]

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cos}(\alpha) &= \operatorname{Sin}(90° - \alpha) \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{Crd}(180° - 2\alpha) \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{(2r)^2 - \operatorname{Crd}^2(2\alpha)} && \text{(Zie stelling 3.4)} \\
&= \sqrt{\frac{(2r)^2 - \operatorname{Crd}^2(2\alpha)}{4}} \\
&= \sqrt{r^2 - \left(\frac{1}{2}\operatorname{Crd}(2\alpha)\right)^2} \\
&= \sqrt{r^2 - \operatorname{Sin}^2(\alpha)}
\end{aligned}$$

dus

$$\operatorname{Cos}^2(\alpha) + \operatorname{Sin}^2(\alpha) = r^2.$$

□

Stelling 4.2 (Verschilregel)**.**

$$\operatorname{Sin}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{Sin}(\alpha)\cdot\operatorname{Cos}(\beta) - \operatorname{Sin}(\beta)\cdot\operatorname{Cos}(\alpha)}{r}.$$

[5]Ik toon in dit bewijs het verband aan tussen de complementstelling voor de koorde en die voor de sinus. Deze stelling kan echter veel gemakkelijker worden bewezen door rechtstreeks de stelling van Pythagoras toe te passen.

Bewijs.

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Sin}(\alpha-\beta) &= \frac{1}{2}\operatorname{Crd}(2\alpha-2\beta)\\
&= \frac{\operatorname{Crd}(2\alpha)\cdot\operatorname{Crd}(180^\circ-2\beta)-\operatorname{Crd}(2\beta)\cdot\operatorname{Crd}(180^\circ-2\alpha)}{4r}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(Zie stelling 3.6)}\\
&= \frac{\operatorname{Crd}(2\alpha)\cdot\operatorname{Crd}(180^\circ-2\beta)}{4r}-\frac{\operatorname{Crd}(2\beta)\cdot\operatorname{Crd}(180^\circ-2\alpha)}{4r}\\
&= \frac{1}{r}\left(\frac{1}{2}\operatorname{Crd}(2\alpha)\cdot\frac{1}{2}\operatorname{Crd}(180^\circ-2\beta)-\frac{1}{2}\operatorname{Crd}(2\beta)\cdot\frac{1}{2}\operatorname{Crd}(180^\circ-2\alpha)\right)\\
&= \frac{\operatorname{Sin}(\alpha)\cdot\operatorname{Sin}(90^\circ-\beta)-\operatorname{Sin}(\beta)\cdot\operatorname{Sin}(90^\circ-\alpha)}{r}\\
&= \frac{\operatorname{Sin}(\alpha)\cdot\operatorname{Cos}(\beta)-\operatorname{Sin}(\beta)\cdot\operatorname{Cos}(\alpha)}{r}.
\end{aligned}
$$

□

Stelling 4.3 (Halveerregel)**.**

$$\operatorname{Sin}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{r^2-r\operatorname{Cos}(\alpha)}{2}. \tag{4.2}$$

Bewijs.

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Sin}\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{1}{2}\operatorname{Crd}(\alpha)\\
&= \frac{\sqrt{2r^2-r\operatorname{Crd}(180^\circ-2\alpha)}}{2} \qquad \text{(Zie stelling 3.7)}\\
&= \sqrt{\frac{2r(r-\frac{1}{2}\operatorname{Crd}(180^\circ-2\alpha))}{4}}\\
&= \sqrt{\frac{1}{2}r(r-\operatorname{Sin}(90^\circ-\alpha))}\\
&= \sqrt{\frac{1}{2}r(r-\operatorname{Cos}(\alpha))}
\end{aligned}
$$

dus

$$\operatorname{Sin}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{r^2-r\operatorname{Cos}(\alpha)}{2}.$$

□

Stelling 4.4 (Somregel)**.**

$$\operatorname{Sin}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{Sin}(\alpha)\cdot\operatorname{Cos}(\beta)+\operatorname{Sin}(\beta)\cdot\operatorname{Cos}(\alpha)}{r}.$$

Bewijs.

$$\begin{aligned}
\text{Sin}\,(\alpha+\beta) &= \frac{1}{2}\,\text{Crd}\,(2\alpha+2\beta) \\
&= \frac{\text{Crd}\,(2\alpha)\cdot\,\text{Crd}\,(180^\circ-2\beta)+\,\text{Crd}\,(2\beta)\cdot\,\text{Crd}\,(180^\circ-2\alpha)}{4r} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(Zie stelling 3.8)} \\
&= \frac{\text{Crd}\,(2\alpha)\cdot\,\text{Crd}\,(180^\circ-2\beta)}{4r}+\frac{\text{Crd}\,(2\beta)\cdot\,\text{Crd}\,(180^\circ-2\alpha)}{4r} \\
&= \frac{1}{r}\left(\frac{1}{2}\,\text{Crd}\,(2\alpha)\cdot\frac{1}{2}\,\text{Crd}\,(180^\circ-2\beta)+\frac{1}{2}\,\text{Crd}\,(2\beta)\cdot\frac{1}{2}\,\text{Crd}\,(180^\circ-2\alpha)\right) \\
&= \frac{\text{Sin}\,(\alpha)\cdot\,\text{Sin}\,(90^\circ-\beta)+\,\text{Sin}\,(\beta)\cdot\,\text{Sin}\,(90^\circ-\alpha)}{r} \\
&= \frac{\text{Sin}\,(\alpha)\cdot\,\text{Cos}\,(\beta)+\,\text{Sin}\,(\beta)\cdot\,\text{Cos}\,(\alpha)}{r}.
\end{aligned}$$

□

Als laatste kunnen gemakkelijk de bekende koorden worden omgezet naar sinussen:
Lemma 4.5. *De door Ptolemaeus gevonden waarden van de koorde, met straal* 60*, geven:*

$\text{Sin}\,(18^\circ)\approx 18;32,28$	$\sin(18^\circ)=\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)\approx 0,30902$	(Zie lemma 3.3)
$\text{Sin}\,(30^\circ)=30$	$\sin(30^\circ)=0,5$	(Zie lemma 3.1)
$\text{Sin}\,(36^\circ)\approx 35;16,2$	$\sin(36^\circ)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(5-\sqrt{5})}\approx 0,58779$	(Zie lemma 3.3)
$\text{Sin}\,(45^\circ)\approx 42;25,35$	$\sin(45^\circ)=\frac{1}{2}\sqrt{2}\approx 0,70711$	(Zie lemma 3.2)

Met deze nieuwe regels kan een sinustabel met hoeken van 0° tot 90° worden gecreëerd. De sinus heeft echter het zelfde probleem als de koorde: die van 1° kan niet meetkundig worden bepaald. Als dat immers wel kon, dan zou $\frac{1}{2}\,\text{Crd}\,(2^\circ)$ kunnen worden geconstrueerd, dus ook $\text{Crd}\,(2^\circ)$ en door halveren $\text{Crd}\,(1^\circ)$. Hoe dit probleem werd opgelost kun je in het tweede deel van deze scriptie lezen.

Tot nu toe zijn de volgende waarden van belang bij het bepalen van sin(1°):

$\sin(36^\circ)$	$=$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(5-\sqrt{5})}$	(rechtstreeks berekend)
$\sin(30^\circ)$	$=$	$0,5$	(rechtstreeks berekend)
$\sin(6^\circ)$	$=$	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}(5-\sqrt{5})}-\frac{1}{8}(1+\sqrt{5})$	(verschil)
$\sin(3^\circ)$	$=$	$\dfrac{\sqrt{4-\sqrt{\frac{1}{2}(5-\sqrt{5})}-\frac{\sqrt{3}}{2}(1+\sqrt{5})}}{2\sqrt{2}}$	(helft)

Het is duidelijk dat het steeds meer werk kost om alle wortels uit te rekenen.

Deel II

De ongrijpbare $\sin(1^\circ)$

Hoofdstuk 5

Het probleem van sin(1°)

In het eerste deel heb je kunnen lezen hoe een aantal sinuswaarden kunnen worden berekend, en hoe daarmee een tabel kan worden gevormd. Er is echter iets bijzonders aan de hand met deze hoeken: $18°, 30°, 36°, 45°$, ze zijn namelijk allemaal veelvouden van 3. Het verschil en de som van deze hoeken is dus ook steeds een veelvoud van 3, en omdat 90° ook deelbaar door 3 is, het complement ook. Met halveren raak je deze factor 3 ook niet kwijt. Met de huidige rekenregels en beginwaarden hoort elke berekenbare koorde van een hoek met geheel aantal graden dus bij een hoek die een factor 3 bevat.

Om de sinus van 1° te berekenen moet er duidelijk een nieuwe regel of nieuwe waarde worden berekend. De verschillende mogelijkheden kun je in dit hoofdstuk lezen, maar eerst wordt er wat verteld over de beperkingen van (Griekse) meetkunde.

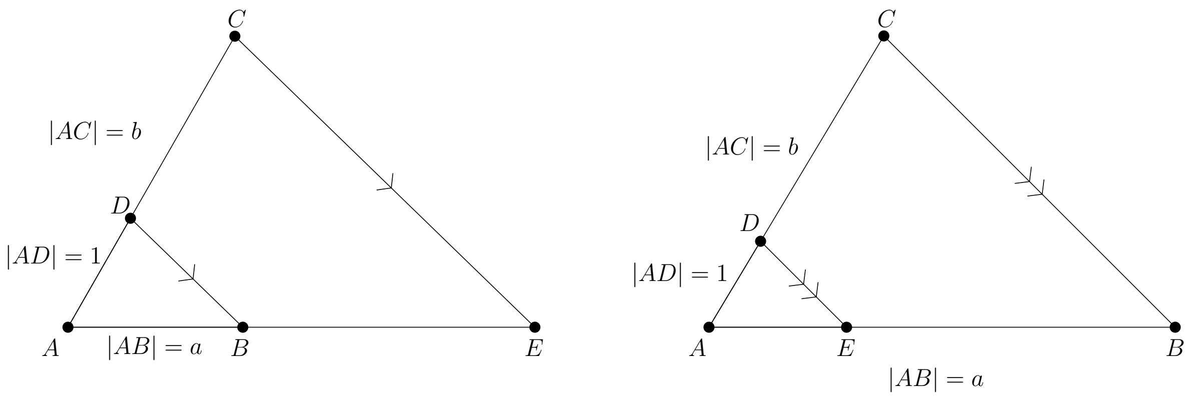
5.1 Construeerbaarheid

Stel je hebt een lijnstuk, en dit geef je lengte 1. Welke lengtes kun je hiermee maken, als je alleen een liniaal en een passer mag gebruiken? Dat is het probleem van construeerbare getallen.

Definitie 5.1 (Construeerbaar getal)**.** Een getal a is *construeerbaar* als je een lijnstuk met lengte a of $-a$ kan construeren met Euclidische methoden, gegeven een lijnstuk van lengte 1. Deze Euclidische methoden zijn het gebruik van een liniaal zonder schaalverdeling en een passer, waarbij de instrumenten niet oneindig vaak mogen worden gebruikt.

Stel a en b zijn construeerbaar. De twee lijnstukken kunnen in het verlengde van elkaar worden gezet, wat $a + b$ oplevert. Door de lijnstukken over elkaar heen te leggen en het restant te bekijken, kan $|a - b|$ worden geconstrueerd. Hierbij worden de absoluutstrepen om het verschil heen gebruikt om aan te geven dat het om het positieve verschil gaat ($a - b$ of $b - a$). Een lijnstuk van negatieve lengte bestaat immers niet en is dus technisch gezien niet construeerbaar. De definitie is echter zo opgesteld dat ook het negatieve getal construeerbaar wordt genoemd.

Door middel van gelijkvormige driehoeken kan ook het product en het quotiënt, $a \cdot b$ en $\frac{a}{b}$, worden geconstrueerd, zie figuur 5.1. Als laatste kan door middel van een constructie in een halve cirkel de wortel van een getal worden geconstrueerd. Stel namelijk dat in figuur 5.2, $|BD| = x$. Door middel van de stelling van Pythagoras kan dan $|AD|$ en $|CD|$



Figuur 5.1 Links: $|AE| = a \cdot b$, rechts: $|AE| = \frac{a}{b}$

worden bepaald, waarna $|AD|^2 + |CD|^2 = |AC|^2$ (vanwege de stelling van Thales en de stelling van Pythagoras) een vergelijking voor x geeft, namelijk $(1+a)^2 = a^2 + 2x^2 + 1$. Hieruit volgt dat $x^2 = a$.

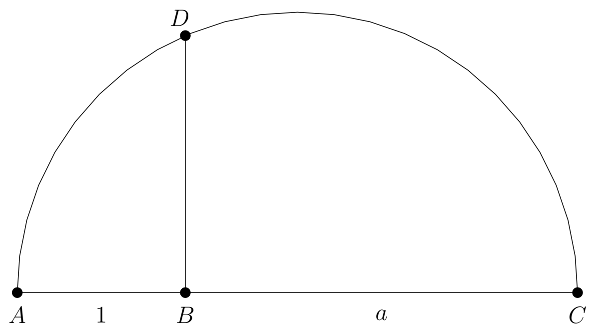
Er kan worden aangetoond dat elk construeerbaar getal kan worden gevormd door deze operaties, dus door eindig vaak optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen en worteltrekken. Dit betekent dat ook elke kwadratische vergelijking met niet-negatieve discriminant kan worden opgelost. De *abc*-formule bevat immers alleen deze operaties. Voor vergelijkingen met hogere machten van x gaat dit helaas niet op.

5.2 Driedelen of een nieuwe waarde berekenen

In het eerste deel zijn de koorden, en daarmee de sinussen, van een aantal hoeken berekend. Deze hoeken bleken, in graden, allemaal een factor drie te hebben. Er zijn twee mogelijkheden om een hoek te krijgen die deze factor niet heeft:

1. Een hoek in drieën delen.
2. De koorde/sinus van een nieuwe hoek berekenen, namelijk één die in graden geen factor 3 heeft.

Uiteraard zijn sommige hoeken in drieën te delen: de hoeken van 30° en 90° kunnen beiden worden geconstrueerd, dus 90° is in drieën te delen. Men heeft echter jaren geploeterd



Figuur 5.2 $|BD| = \sqrt{a}$

met het vinden van een algemene constructie met passer en liniaal waarmee elke hoek precies in drieën te delen was. Ptolemaeus had al het vermoeden dat het niet mogelijk was maar kon het helaas niet bewijzen[13, p.54]. Pas millennia later, in 1837, haalde de Fransman P.L. Wantzel de laatste twijfel weg[30]. Hij toonde aan dat een hoek van 20° niet met passer en liniaal te construeren is, waardoor de hoek van 60° niet in drieën kan worden gedeeld. Omdat het voor één hoek onmogelijk is, kan er nooit een algemene regel zijn om een hoek met passer en liniaal in drieën te delen. Voor dit bewijs is helaas kennis van Galoistheorie nodig, dus wordt het hier achterwege gelaten. Een iets eenvoudiger te begrijpen bewijs kan worden gevonden in het boek *Algebra* van M. Riemersma[14].

Wist je dat men zelfs na het bewijs van Wantzel bleef proberen om hoeken op Euclidische wijze in drieën te delen? In het boek "The trisectors" van U. Dudley zijn daar veel voorbeelden van te vinden[3].

Aangezien het driedelen in zijn algemeenheid dus onmogelijk is, moet worden gekeken naar het vinden van een nieuwe waarde. Elke koorde die tot nu toe is berekend, heeft met een koordenveelhoek te maken: Die van 90° hoort bij een vierkant, 72° bij een vijfhoek, 60° bij een zeshoek en 36° bij een tienhoek. Om een hoek zonder factor 3 te vinden, kan dus een n-hoek worden gebruikt waarvoor $\frac{360}{n}^\circ$ geen factor 3 meer bevat. Omdat 360 tweemaal de factor 3 heeft (het is deelbaar door $3^2 = 9$ maar niet door $3^3 = 27$), kan voor n elk veelvoud van 9 worden genomen, dus $n = 9m$. Als echter de hoek $\frac{360}{9m}^\circ$ geconstrueerd kan worden, kan door middel van de somregel ook $\frac{360}{9}^\circ = 40°$ worden geconstrueerd. Om het probleem van sinus 1° op te lossen hoeft dus alleen de negenhoek te worden geconstrueerd. Hier stuiten we echter op een nieuw probleem: Als de negenhoek construeerbaar is, dan is 40° construeerbaar. Met de halveringsregel is dus ook 20° construeerbaar, maar Wantzel had bewezen dat dit onmogelijk was. Het kan dus niet mogelijk zijn om een negenhoek te construeren. Ook deze methode loopt dus dood.

Nu kun je je afvragen of er niet zonder een veelhoek een hoek kan worden geconstrueerd zodat $\operatorname{Sin}(1°)$ berekend kan worden. Helaas komen we dan bij dezelfde tegenstelling. Als namelijk $\operatorname{Sin}(1°)$ geconstrueerd kan worden, dan kan door middel van de somregel ook $\operatorname{Sin}(20°)$ geconstrueerd worden. Hiermee kan dan ook de hoek 20° worden geconstrueerd, maar dat is niet mogelijk. Door dat ene bewijs van Wantzel blijkt dus dat het echt onmogelijk is om de sinus van 1° met passer en liniaal te construeren. In de volgende hoofdstukken kun je lezen hoe men dit op verschillende manieren probeerde te omzeilen.

In hoofdstuk 2 stond dat het door de verdeling in 360 graden kwam dat de koorde van 1° zo'n probleem was. Dat zit als volgt: Als de cirkel bijvoorbeeld in 480° was verdeeld, dan was de zijde van een zeshoek $\frac{480°}{6} = 80°$ en die van een vijfhoek $\frac{480°}{5} = 96°$. Het verschil is dus 16°, en dat hoef je alleen nog een paar keer te halveren om op 1° te komen. De reden dat 1° niet construeerbaar is, is dus dat de cirkel in een aantal stukken is verdeeld dat deelbaar is door 9.

Wist je dat het zomaar had gekund dat we nu met 400° rekenden? Toen in Frankrijk het metrieke stelsel met onder andere de meter en de gram werd ontwikkeld, werd ook de decimale graad (waarbij een rechte hoek 100 graden is) het officiële systeem om hoeken te meten. Gelukkig werd dit snel teruggedraaid, want dit had ons probleem nog veel groter gemaakt: we zouden dan een hoek in vijven moeten delen!

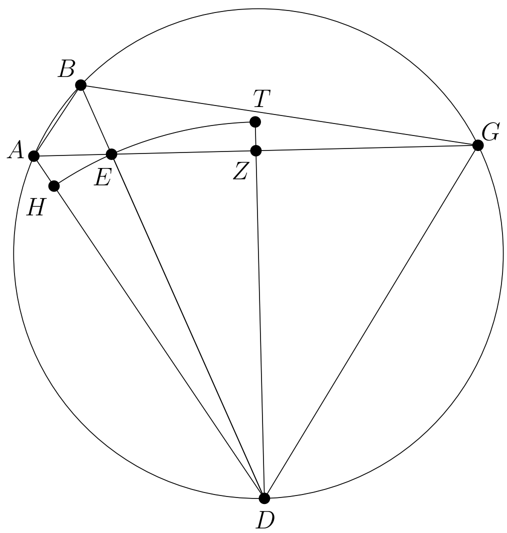
Hoofdstuk 6

Ptolemaeus: interpoleren

De eerste die probeerde de koorde van 1° te benaderen was Ptolemaeus. Na het bewijzen van zijn verschillende rekenregels was hij niet tevreden met een tabel per $1\frac{1}{2}^\circ$, hij wilde een tabel die de koorde voor elke halve graad gaf. Hiervoor had hij de koorde van 1° nodig. Bij gebrek aan goede rekenregels om dit uit te rekenen pakte hij het anders aan. Hij gaf een onder- en een bovengrens, en deze bleken zo dicht bij elkaar te liggen dat hij daarmee een goede waarde voor $\operatorname{Crd}(1^\circ)$ kon bepalen. Om dit te kunnen doen had hij de volgende stelling nodig:

Stelling 6.1. *Wanneer twee hoeken*[6] *tussen* 0° *en* 90° *liggen, is de verhouding tussen de grotere en de kleinere hoek groter dan de verhouding tussen de bijbehorende koorden[13, p.54].*

Zij gegeven de cirkel ABG met lijn AB, BG, en AG zo dat $|AB| < |BG|$. Als we propositie III 20 toepassen dan zegt de stelling dat $|BG| : |AB| < \angle GDB : \angle BDA$ voor een willekeurig punt D op de cirkel (zie figuur 6.1).



Figuur 6.1

Bewijs. Teken de bisectrice BD van $\angle ABG$, die de cirkel snijdt in D (zie figuur 6.1). De bisectrice snijdt lijn AG in punt E. Omdat $\angle DBG$ de omtrekshoek van GD is, en $\angle ABD$ die van AD, en deze hoeken gelijk zijn, geldt vanwege propositie III 20 dat AD en DG dezelfde middelpuntshoek hebben, dus dat $|AD| = |DG|$. Driehoek ΔADG is dus gelijkbenig. Verder geldt vanwege propositie VI 3 dat omdat $|BG| > |AB|$, $|GE| > |EA|$.

Teken DZ loodlecht op AG. Omdat ΔADG gelijkbenig is, is Z het middelpunt van AG. Omdat $|GE| \neq |EA|$ staat DE niet loodrecht op AG, dus geldt dat $|ED| > |DZ|$. Het punt A ligt nog verder van Z dan E, dus ook $|AD| > |ED|$. Teken nu een cirkelboog met middelpunt D en straal DE. Omdat $AD > ED$ snijdt deze boog AD in H tussen A en D en omdat $ED > DZ$ ligt het punt T op de boog op het verlengde van DZ. Er geldt dat de oppervlakte van sector (opp. sector) DET groter

[6]Ptolemaeus geeft deze stelling in termen van bogen in plaats van hoeken. Voor hoeken komt het bewijs echter overeen dus zal ik deze terminologie gebruiken.

is dan die van ΔDEZ en dat de oppervlakte van sector DHE kleiner is dan die van ΔDEA. Hieruit volgt dat $\Delta DEZ : \Delta DEA <$ opp. sector DET : opp. sector DHE. Maar opp. sector DET : opp. sector $DHE = \angle ZDE : \angle EDA$ en vanwege propositie VI 1 geldt dat $\Delta DEZ : \Delta DEA = |EZ| : |EA|$, dus

$$\begin{aligned} |EZ| : |EA| &< \angle ZDE : \angle EDA \\ \text{dus } (|EZ| + |EA|) : |EA| &< (\angle ZDE + \angle EDA) : \angle EDA, \\ \text{dat wil zeggen, } |AZ| : |EA| &< \angle ZDA : \angle EDA \\ \text{dus } 2|AZ| : |EA| &< 2\angle ZDA : \angle EDA. \end{aligned}$$

Omdat $|AD| = |DG|$, $\angle DZA = \angle DZG$ en DZ gemeenschappelijk is zijn ΔADZ en ΔGDZ congruent, dus $|AZ| = |ZG|$ en $\angle ADZ = \angle GDZ$. Dus:

$$\begin{aligned} |AG| : |EA| &< \angle GDA : \angle EDA. \\ \text{Er geldt dat } (|AG| - |EA|) : |EA| &< (\angle GDA - \angle EDA) : \angle EDA \\ \text{dus } |EG| : |EA| &< \angle GDE : \angle EDA. \end{aligned}$$

Omdat vanwege propositie VI 3 geldt dat $|EG| : |EA| = |BG| : |AB|$, kunnen we nu concluderen dat $|BG| : |AB| < \angle GDE : \angle EDA$. □

Ptolemaeus had inmiddels berekend dat $\text{Crd}\left(1\frac{1}{2}^\circ\right) = 1;34,15$ en $\text{Crd}\left(\frac{3}{4}^\circ\right) = 0;47,8$. Met deze waarden, en stelling 6.1, kon hij de waarde van $\text{Crd}\,(1^\circ)$ schatten:

$$\text{Crd}\,(1^\circ) : \text{Crd}\left(\frac{3}{4}^\circ\right) < 1^\circ : \frac{3}{4}^\circ \qquad \text{Crd}\left(1\frac{1}{2}^\circ\right) : \text{Crd}\,(1^\circ) < 1\frac{1}{2}^\circ : 1^\circ$$

Omdat duidelijk geldt dat $1^\circ : \frac{3}{4}^\circ = \frac{4}{3}$ en $1\frac{1}{2}^\circ : 1^\circ = \frac{3}{2}$, geldt dat

$$\begin{aligned} \text{Crd}\,(1^\circ) : \text{Crd}\left(\frac{3}{4}^\circ\right) &< \frac{4}{3} & \text{Crd}\left(1\frac{1}{2}^\circ\right) : \text{Crd}\,(1^\circ) &< \frac{3}{2} \\ \text{dus } \text{Crd}\,(1^\circ) &< \frac{4}{3}\text{Crd}\left(\frac{3}{4}\right). & \text{Crd}\,(1^\circ) &> \frac{2}{3}\text{Crd}\left(1\frac{1}{2}^\circ\right). \\ \text{Invullen geeft } \text{Crd}\,(1^\circ) &< \frac{4}{3} \cdot 0;47,8 & \text{Crd}\,(1^\circ) &> \frac{2}{3} \cdot 1;34,15 \\ \text{dus} \text{Crd}\,(1^\circ) &< 1;2,50. & \text{Crd}\,(1^\circ) &> 1;2,50. \end{aligned}$$

Ptolemaeus concludeert nu dat $\text{Crd}\,(1^\circ) = 1;2,50$[13, p.55-56].

Het lijkt nu alsof Ptolemaeus de koorde van $\text{Crd}\,(1^\circ)$ exact heeft bepaald, wat zou er immers tussen $1;2,50$ en $1;2,50$ kunnen zitten? Toch is dit niet helemaal waar. Als hij zijn eerdere berekeningen niet tot twee maar tot drie sexagesimalen had gedaan, dan was hij erop uitgekomen dat $1;2,49,48 < \text{Crd}\,(1^\circ) < 1;2,49,53$. Zijn methode geeft dus een goede benadering in twee sexagesimalen, maar preciezer dan dat lukt het niet. Echt exact kan dit dus niet worden genoemd, het is een benadering. De eerste exacte methode, die met elke precisie kan werken, laat nog bijna duizend jaar op zich wachten.

Hoofdstuk 7

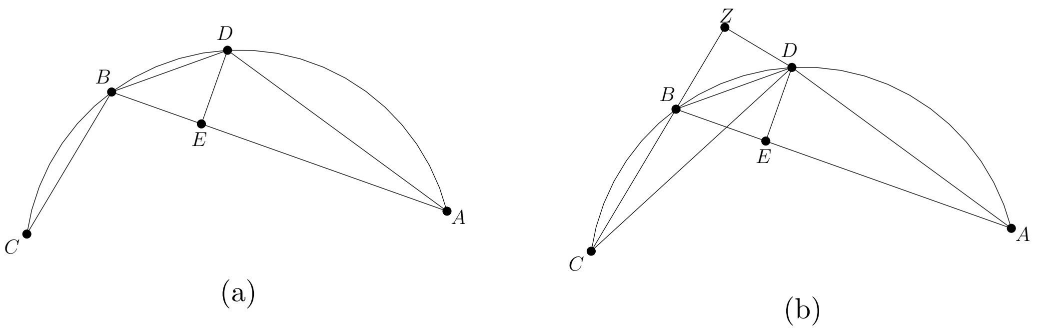
Biruni: de negenhoek

Niet alleen de Grieken en Indiërs hielden zich bezig met goniometrie. In de middeleeuwen kwam deze kennis samen met tabellen vanuit zowel Griekenland als India in het Midden-Oosten terecht. Zo kwam het dat de Iraanse Abu Raihan Biruni (973-1048)[7] geïntrigeerd raakte door de koorde van $1°$[1, p.138]. In zijn belangrijkste werk, de *Canon voor Mas*^{c}*ud*, berekende hij die door middel van een ingeschreven negenhoek. Hij ging ervan uit dat hij die negenhoek al had en zocht vervolgens verbanden tussen verschillende lijnstukken in de negenhoek tot hij een vergelijking voor de lengte van de zijde op kon stellen. Om deze verbanden te vinden had hij echter een aantal stellingen nodig, die hij in een eerder boek opschreef en bewees. In dit boek, *Het bepalen van de koorde in de cirkel*, wordt gebruik gemaakt van de volgende configuratie om veel goniometrieregels te bewijzen:

Zij gegeven de boog $\widehat{ABC}$ met $\widehat{AB} > \widehat{BC}$. Zij D het middelpunt van $\widehat{ABC}$. Teken DE loodrecht op AB (zie figuur 7.1a).

Voor deze configuratie bewees hij onder andere de volgende stelling:
Stelling 7.1 (De stelling van de gebroken koorde)**.** $|AE| = |BE| + |BC|$

Biruni gaf voor deze stelling maar liefst 23 verschillende bewijzen, uit verschillende bronnen. Ik gebruik hier het veertiende bewijs, wat een overzichtelijk argument met congruente rechthoekige driehoeken geeft.



Figuur 7.1 Biruni's basisconfiguratie

[7]Biografische informatie over Biruni is te vinden in de *Dictionary of Scientific Biography*[6, deel 2, p.147-158].

Bewijs. [20, eerste bewijs] Verleng de lijn BC naar boven en trek DZ loodrecht op deze lijn. Trek ook lijn CD (zie figuur 7.1b). Er geldt dat $\angle EAD = \angle ZCD$ omdat deze beiden de omtrekshoek van BD zijn (zie propositie III 21). Verder is $\angle DEB = \angle BZD = 90°$ en $|AD| = |CD|$ vanwege de constructie, dus ΔEAD en ΔZCD zijn congruent.
Uit de congruentie volgt dat $|DZ| = |DE|$. Omdat ze verder de lijn BD gemeen hebben en $\angle DEB = \angle BZD = 90°$ zijn dus ΔBED en ΔBZD congruent.
Uit de eerste congruentie volgt dat $|CZ| = |AE|$. Uit de tweede volgt dat $|ZB| = |BE|$. Omdat vanzelfsprekend $|CZ| = |ZB| + |BC|$, volgt dus dat $|AE| = |BE| + |BC|$. □

In dezelde configuratie bewees hij de volgende stelling:
Stelling 7.2. $|AB| \cdot |BC| + |BD|^2 = |AD|^2$

Ook voor deze stelling gaf hij meerdere bewijzen. Ik gebruik het tweede bewijs, omdat het grotendeels overeenkomt met het bewijs dat ik voor 7.1 heb gebruikt.

Bewijs. [22, p.27] We gebruiken opnieuw figuur 7.1b, dus alles wat in het vorige bewijs was aangetoond geldt. Wegens de stelling van Pythagoras geldt in driehoek ΔDCZ dat $|DC|^2 = |CZ|^2 + |DZ|^2$ en in driehoek ΔDBZ dat $|DZ|^2 = |BD|^2 - |BZ|^2$. Hieruit volgt dat $|DC|^2 = |BD|^2 + |CZ|^2 - |BZ|^2$.
Omdat $|CZ| = |CB| + |BZ|$ geldt dat $|CZ|^2 = |CB|^2 + 2|CB| \cdot |BZ| + |BZ|^2$, dus $|CZ|^2 - |BZ|^2 = |CB|^2 + 2|CB| \cdot |BZ|$. Vullen we dit in de vorige gelijkheid in, dan krijgen we dat $|DC|^2 = |BD|^2 + |CB|^2 + 2|CB| \cdot |BZ| = |BD|^2 + |CB|(|CB| + 2|BZ|)$. Omdat $|BZ| = |BE|$ kunnen we stelling 7.1 toepassen, wat $|DC|^2 = |BD|^2 + |CB|(|AE| + |BE|)$ geeft. Omdat vanzelfsprekend $|AB| = |AE| + |BE|$ volgt nu het resultaat: $|DC|^2 = |BD|^2 + |CB| \cdot |AB|$.

□

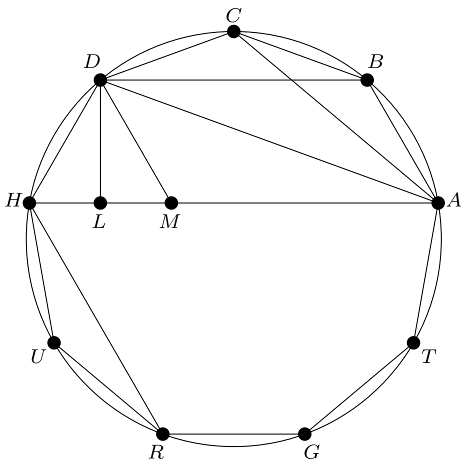
Biruni gebruikte deze twee stellingen, naast de bekende meetkunderegels, om een vergelijking voor de zijde van een negenhoek op te stellen.

Wist je dat de tijdgenoten van Biruni het nogal vreemd vonden dat hij zoveel bewijzen voor een stelling gaf? Iemand noemde het 'overtollig' en vond het tijdsverspilling[19, p.683]. Historici zijn er nu wel erg blij mee: hij bevestigt het bestaan van veel personen en werken die anders vergeten waren geweest.

7.1 De negenhoek

De volgende constructie volgt de vertaling [21, p.188-189] van de *Canon voor Mas^{c}ud.* Ik heb enkele (druk)fouten verbeterd en (schijnbare) onvolledigheden aangevuld.

Zij gegeven de regelmatige negenhoek $ABCDHURGT$ ingeschreven in een cirkel, zie figuur 7.2. Teken koorde AH en teken DL loodrecht op AH. Vanwege stelling 7.1 op boog $\widehat{AHR}$ geldt dan dat $|AL| = |HL| + |HR|$. Omdat HR en BD beiden de koorde zijn van $2 \cdot 40° = 80°$ geldt dat $|HR| = |BD|$ dus kan dit worden herschreven tot $|BD| = |AL| - |HL|$. Kies M op AL zo dat $|HL| = |LM|$. Dan geldt dat $|AM| = |AL| - |HL| = |BD|$.



Figuur 7.2

Omdat $|HL| = |LM|$, $\angle HLD = \angle MLD$ en ze DL gemeen hebben, zijn driehoeken ΔHLD en ΔMLD congruent dus is $\angle DHM = \angle DMH$. Aangezien $\angle DHA$ de omtrekshoek van $\mathrm{Crd}\,(120°) = |AD|$ is, geldt vanwege propositie III 20 dat $\angle DHA = 60°$. Driehoek ΔHMD is dus een gelijkzijdige driehoek, dus $|HM| = |DH|$.

Op dit punt nam Biruni $|DH| = \mathrm{Crd}\,(40°) = 1$. Later kon hij dit herschalen om de koorde bij een specifieke straal te krijgen. Verder noemde hij $|BD| = \mathrm{Crd}\,(80°) = x$.

Door de stelling van Ptolemaeus (3.5) toe te passen op koordenvierhoek $ABDH$ volgt dat

$$\begin{aligned} |AH| \cdot |BD| + |AB| \cdot |DH| &= |AD| \cdot |BH|, \\ \text{dus } (|AM| + |MH|)|BD| + |DH|^2 &= |AD|^2, \\ \text{dus } (x+1)x + 1 &= |AD|^2, \\ \text{dus } x^2 + x + 1 &= |AD|^2. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Met stelling 7.2 bij boog $\widehat{ADH}$ (met middelpunt C) volgt ook:

$$\begin{aligned} |AD| \cdot |DH| + |CD|^2 &= |AC|^2 \\ \text{dus } |AD| + 1 &= x^2 \\ \text{dus } |AD| &= x^2 - 1. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Door nu 7.1 en 7.2 te combineren volgt

$$\begin{aligned} x^2 + x + 1 &= (x^2 - 1)^2 \\ \text{oftewel } x^2 + x + 1 &= x^4 - 2x^2 + 1 \\ \text{dus } 3x^2 + x &= x^4 \\ \text{dus } 3x + 1 &= x^3 \qquad \text{(De oplossing } x = 0 \text{ sluit immers niet aan bij de situatie)} \end{aligned}$$

Helaas is niet bekend hoe Biruni deze vergelijking oploste. Hij schreef direct op dat de (positieve) oplossing afgerond $1; 52, 45, 47, 13$ is. Deze oplossing klopt met afronding precies, dus hij moet een methode hebben gehad om dergelijke vergelijkingen (met waarschijnlijk willekeurige precisie) op te lossen. Maar dan was hij er nog niet, dit geeft immers alleen $x = \mathrm{Crd}\,(80°)$ als $\mathrm{Crd}\,(40°) = 1$. Het herschalen bleek echter geen groot probleem te zijn. Zijde AD is namelijk de koorde van $120°$. Deze is, als complement van

60°, bekend. Bij $r = 1$ (Biruni was erg vooruitstrevend in het gebruik van een straal van 1) is het kwadraat daarvan gelijk aan 3. Met $\text{Crd}\,(40°) = 1$ hadden we in 7.1 echter dat $|AD|^2 = (x+1)x + 1 \approx 6;24,41,18,25$. Omdat $\text{Crd}\,(120°)^2 : |AD|^2 = \text{Crd}\,(40)^2 : |DH|^2$ volgt dat $\text{Crd}\,(40°) \approx \sqrt{\frac{3}{6;24,41,18,25}} \approx 0;41,2,32,42,5 \approx 0,684040284$. Biruni zelf komt op een iets ander antwoord uit, namelijk $0;41,2,32,41,55$. Waarschijnlijk heeft hij in een van de rekenstappen anders afgerond. Het verschil tussen zijn afgeronde uitkomst en het mijne is echter miniem, slechts $\frac{1}{77760000}$. Omdat de uitkomst van Biruni iets verder van de echte waarde af zit, en het voornamelijk om de methode gaat, zal ik mijn eigen uitkomst gebruiken om op Biruni's wijze de koorde van 1° te bepalen.

Voor $r = 1$ is $\text{Crd}\,(36°)$ gelijk aan $0;37,4,55,20,30$. De koorde van 4° kan dus nu worden gevonden, en door halveren ook die van 2° en 1°:

$$\begin{aligned}
\text{Crd}\,(4°) &= \frac{\text{Crd}\,(40°)\cdot\text{Crd}\,(180°-36°) - \text{Crd}\,(36°)\cdot\text{Crd}\,(180°-40°)}{2} \\
&\approx 0;4,11,16,34,55 \\
\text{Crd}\,(2°) &= \sqrt{2 - \text{Crd}\,(180°-4°)} \\
&\approx 0;2,5,39,26,21 \\
\text{Crd}\,(1°) &= \sqrt{2 - \text{Crd}\,(180°-2°)} \\
&\approx 0;1,2,49,51,47 \approx 0,01745307
\end{aligned}$$

Dit klopt (afgerond) tot 8 decimalen achter de komma. Helaas is er door steeds afronden een foutje geslopen in de laatste sexagesimaal. Om de rekenmethoden van Biruni na te bootsen heb ik elk getal namelijk tussendoor afgerond, hij had immers geen rekenmachine die voor elke tussenstap extra getallen achter de komma kon onthouden. Als de laatste sexagesimaal 48 was geweest in plaats van 47, had de benadering tot de elfde decimaal geklopt. De sinus van 1° kan hier worden gevonden door $\text{Crd}\,(2°)$ te halveren, ook deze klopt tot 8 decimalen achter de komma.

Ook Biruni heeft geen exacte waarde van $\text{Crd}\,(1°)$, hij rondt het antwoord immers af. Toch is er een belangrijk verschil tussen de methode van Biruni en die van Ptolemaeus. De methode is namelijk wel exact: door een preciezere waarde van $\text{Crd}\,(36°)$ te nemen, en de derdegraadsvergelijking preciezer op te lossen, kan de koorde van 1° met willekeurige precisie worden bepaald. Het enige obstakel is hier nog de methode om de vergelijking op te lossen.

Je vraagt je misschien af waarom voor het herschalen 7.1 wordt gebruikt in plaats van 7.2. Dit heeft met afronding te maken. De waarde van x was afgerond, en klopte dus niet helemaal. In 7.2 zouden we verder werken met het kwadraat, waardoor de fout groter wordt. Bij 7.1 wordt ook gekwadrateerd, maar de grotere fout wordt weer opgeheven als aan het einde de wortel wordt getrokken. Daardoor komt dit op een beter antwoord uit. Biruni heeft dit zelf ook waarschijnlijk doorgehad, want hij gebruikte hier zelf ook 7.1.

Hoofdstuk 8

Viète: Driedeling

In de vroege middeleeuwen was er in Europa geen interesse in goniometrie. De belangrijkste astronomische taak, het bepalen van de datum waarop Pasen viel, kon zonder deze kennis worden verricht. Pas vanaf de elfde eeuw kwam goniometrie, via bronnen uit Griekenland en het Midden-Oosten, weer in Europa terecht[1, p.223-224]. De eerste wiskundigen die hiermee aan de slag gingen kopieerden vaak methoden uit deze bronnen.

François Viète (1540-1603)[8] deed veel nieuw werk met goniometrie. Hoewel er geen bron is waarin hij de sinus van 1° berekent, had hij wel alle ingrediënten om dit te doen. In zijn *Canon Mathematicus* geeft hij een sinustabel - maar deze is gekopieerd van Regiomontanus (1436-1476). Hij had hiermee echter wel beschikking over veel waarden van de sinus. Als hij dus een formule voor $\operatorname{Sin}\left(\frac{\alpha}{3}\right)$ zou kunnen vinden, zou hij $\operatorname{Sin}(3^\circ)$ uit de tabel kunnen gebruiken om $\operatorname{Sin}(1^\circ)$ te berekenen. In *Universele stellingen over de analyse van deling van hoeken* vindt hij formules om $\operatorname{Sin}(n\alpha)$ te bepalen als $\operatorname{Sin}(\alpha)$ gegeven is. Andersom zouden deze formules met een gegeven $\operatorname{Sin}(n\alpha)$ kunnen dienen als vergelijking voor $\operatorname{Sin}(\alpha)$. Maar de driedeling leidt tot een derdegraadsvergelijking, die niet zomaar op te lossen is. In zijn werk *Over de numerieke oplossing van machten* behandelt hij echter numerieke methoden om (in principe) elke n-demachtsvergelijking op te lossen, dus ook dat obstakel heeft hij opgelost. In dit hoofdstuk neem ik deze drie bronnen samen om te reconstrueren hoe Viète $\operatorname{Sin}(1^\circ)$ zou kunnen hebben bepaald.

Wist je dat aan de drukfouten te zien is welke tabellen van elkaar zijn overgenomen? Een boek drukken was veel handwerk, waardoor er altijd fouten inslopen. Als een tabel van een eerdere wordt overgenomen dan staan deze drukfouten ook in de nieuwe tabel.

8.1 Vergelijking voor driedeling

Om te beginnen is een formule voor $\operatorname{Sin}(3\alpha)$, gegeven $\operatorname{Sin}(\alpha)$ nodig. Deze geeft Viète in stelling III van de *Universele Stellingen*[27, p.422-423]. Hij geeft hier niet de daadwerkelijke formule, maar hij geeft een formule waaraan $\operatorname{Sin}(3\alpha)$ "proportioneel" is. Hiermee bedoelt hij dat het gelijk is op vermenigvuldiging met een constante na. Ook heeft hij

[8] Biografische informatie over Viète is te vinden in de *Dictionary of Scientific Biography*[6, deel 14, p.18-25].

het zelf niet over de sinus en cosinus. De stellingen gaan over verbanden tussen zijden van rechthoekige driehoeken als het verband tussen de hoeken bekend is. Zo zegt stelling II iets over de basis (aanliggende zijde), loodrechte (overstaande zijde) en hypotenusa (schuine zijde) van een driehoek met hoek $\alpha+\beta$ als die zijden voor driehoeken met hoeken α en β gegeven zijn. Omdat van de driehoeken wel de hoeken (en dus de vorm) bekend zijn, maar niet de grootte, is het in de stellingen dus nodig om de waarden op een (vergrotings)factor na te geven.

In afbeeldingen plaatst Viète de driehoeken vaak in een cirkel met de hypotenusa als diameter. De gegeven hoek (laten we deze α noemen) is dan de omtrekshoek van de loodrechte, dus de loodrechte is $\operatorname{Crd}(2\alpha)$ en de basis is de koorde van het complement daarvan. We kunnen de driehoek echter ook zo plaatsen dat de hypotenusa de straal vormt, zodat de gegeven hoek op het middelpunt ligt. In dit geval is de loodrechte $\operatorname{Sin}(\alpha)$ en de basis $\operatorname{Cos}(\alpha)$. Viète zal zich hier ook bewust van zijn geweest, aangezien hij in zijn sinustabel (die ook andere goniometrische waarden bevat) de sinus "loodrechte" noemt en de cosinus "basis". Voor het gemak zullen we hier dus de notatie met sinus en cosinus gebruiken, met hypotenusa r.

Viète legt in zijn werk niet uit hoe hij aan stelling III is gekomen. In een analyse van het werk wordt hiervoor stelling I gebruikt, die gelijk is aan stelling 4.2 en de vergelijkbare stelling voor de cosinus[7, p.69-71]. Het is echter veel praktischer om stelling II te gebruiken, die de somregel voor de sinus (stelling 4.4) en cosinus geeft[27, p.421-422]:

Lemma 8.1. $\operatorname{Cos}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{Cos}(\alpha)\cdot \operatorname{Cos}(\beta) - \operatorname{Sin}(\alpha)\cdot \operatorname{Sin}(\beta)}{r}$

Bewijs.

$$\begin{aligned}\operatorname{Cos}(\alpha+\beta) &= \operatorname{Sin}(90^\circ-\alpha-\beta)\\ &= \frac{\operatorname{Sin}(90^\circ-\alpha)\cdot \operatorname{Cos}(\beta) - \operatorname{Sin}(\beta)\cdot \operatorname{Cos}(90^\circ-\alpha)}{r} && \text{(Zie stelling 4.2)}\\ &= \frac{\operatorname{Cos}(\alpha)\cdot \operatorname{Cos}(\beta) - \operatorname{Sin}(\alpha)\cdot \operatorname{Sin}(\beta)}{r}\end{aligned}$$

□

Viète geeft deze stelling dus als een "proportionaliteit". Omdat in zijn geval de hypotenusa niet gelijk hoeft te zijn is r niet gedefinieerd, en de deling door r laat hij dan ook achterwege. Dit blijkt precies de vergrotingsfactor te zijn. In de stelling zegt hij namelijk ook dat de hypotenusa van $\alpha+\beta$ proportioneel is met het product van de hypotenusa van α en die van β. In ons geval dus $r = \text{hypotenusa}_{\alpha+\beta} \sim \text{hypotenusa}_\alpha \cdot \text{hypotenusa}_\beta = r^2$, waarbij $\sim$ de proportionaliteit aangeeft. Om het gelijk te maken moet het rechterlid dus door r worden gedeeld. Alle zijden zijn met dezelfde factor vergroot, dus dit moet ook voor de basis en loodrechte gelden.

Om een formule voor $\operatorname{Sin}(3\alpha)$ te bepalen, zoeken we er eerst een voor $\operatorname{Sin}(2\alpha)$ en $\operatorname{Cos}(2\alpha)$. Deze gebruiken we vervolgens om $\operatorname{Sin}(3\alpha)$ te vinden.

Stelling 8.2. *Voor* $\alpha \leq 45^\circ$ *geldt dat* $\operatorname{Sin}(2\alpha) = \frac{2\operatorname{Sin}(\alpha)\cdot \operatorname{Cos}(\alpha)}{r}$ *en* $\operatorname{Cos}(2\alpha) = \frac{\operatorname{Cos}^2(\alpha) - \operatorname{Sin}^2(\alpha)}{r}$.

Bewijs.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Sin}(2\alpha) &= \operatorname{Sin}(\alpha+\alpha) \\
&= \frac{\operatorname{Sin}(\alpha)\cdot\operatorname{Cos}(\alpha)+\operatorname{Sin}(\alpha)\cdot\operatorname{Cos}(\alpha)}{r} && \text{(Zie stelling 4.4.)} \\
&= \frac{2\operatorname{Sin}(\alpha)\cdot\operatorname{Cos}(\alpha)}{r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cos}(2\alpha) &= \operatorname{Cos}(\alpha+\alpha) \\
&= \frac{\operatorname{Cos}(\alpha)\cdot\operatorname{Cos}(\alpha)-\operatorname{Sin}(\alpha)\cdot\operatorname{Sin}(\alpha)}{r} && \text{(Zie lemma 8.1.)} \\
&= \frac{\operatorname{Cos}^2(\alpha)-\operatorname{Sin}^2(\alpha)}{r}
\end{aligned}$$

□

Stelling 8.3. *Voor $\alpha \leq 30^\circ$ geldt dat* $\operatorname{Sin}(3\alpha) = \frac{3\operatorname{Sin}(\alpha)\cdot\operatorname{Cos}^2(\alpha)-\operatorname{Sin}^3(\alpha)}{r^2}$.

Deze stelling is slechts een klein deel van de veel algemenere stelling III van Viète. Hij neemt namelijk een willekeurige rechthoekige driehoek met hoek α, loodrechte B, basis D en hypotenusa Z. Hij stelt dan dat de loodrechte van een rechthoekige driehoek met hoek 3α overeenkomt met $3D^2B - B^3$. Daarnaast geeft hij ook een dergelijke identiteit voor de basis en hypotenusa, en werkt hij het ook voor $n\alpha$ met grotere n uit. Door $B = \operatorname{Sin}(\alpha)$ en $D = \operatorname{Cos}(\alpha)$ in te vullen volgt stelling 8.3.

Bewijs.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Sin}(3\alpha) &= \operatorname{Sin}(\alpha+2\alpha) \\
&= \frac{\operatorname{Sin}(\alpha)\,\frac{\operatorname{Cos}^2(\alpha)-\operatorname{Sin}^2(\alpha)}{r} + \frac{2\operatorname{Sin}(\alpha)\cdot\operatorname{Cos}(\alpha)}{r}\operatorname{Cos}(\alpha)}{r} && \text{(Zie stelling 4.4 en 8.2.)} \\
&= \frac{\operatorname{Sin}(\alpha)\cdot\operatorname{Cos}^2(\alpha)-\operatorname{Sin}(3\alpha)+2\operatorname{Sin}(\alpha)\cdot\operatorname{Cos}^2(\alpha)}{r^2} \\
&= \frac{3\operatorname{Sin}(\alpha)\cdot\operatorname{Cos}^2(\alpha)-\operatorname{Sin}^3(\alpha)}{r^2}
\end{aligned}$$

□

Met dit verband zijn we al bijna bij een vergelijking voor $\operatorname{Sin}(\alpha)$ aangekomen als $\operatorname{Sin}(3\alpha)$ bekend is. Het enige obstakel is nog de cosinus, maar door middel van stelling 4.1 ($\operatorname{Cos}^2(\alpha) = r^2 - \operatorname{Sin}^2(\alpha)$) en een beetje herleiden komen we op het volgende uit:

$$\frac{r^2}{4}\operatorname{Sin}(3\alpha) = \frac{3r^2}{4}\operatorname{Sin}(\alpha) - \operatorname{Sin}^3(\alpha)$$

Vullen we $\alpha = 1^\circ$ in, dan is dit een vergelijking voor $\operatorname{Sin}(1^\circ)$. In de *Canon Mathematicus*[15] zien we dat als hypotenusa 100.000 is gebruikt (Viète werkt ook met goniometrie in het decimale stelsel), dus dit is r. Verder vinden we dat voor deze r, $\operatorname{Sin}(3^\circ) \approx 5234$. Zetten we nog dat $\operatorname{Sin}(1^\circ) = x$, dan moet deze vergelijking worden opgelost:

$$13.085.000.000.000 = 7.500.000.000x - x^3 \tag{8.1}$$

Omdat de waarde van $\operatorname{Sin}(3°)$ niet heel nauwkeurig is, is deze vergelijking ook niet heel nauwkeurig. Dit zie je terug in het getal 13.085.000.000.000. Als de waarde voor $\operatorname{Sin}(3°)$ preciezer was geweest, dan hadden er in plaats van nullen andere cijfers gestaan.

8.2 De derdegraadsvergelijking

De wiskunde in deze paragraaf is aanzienlijk lastiger dan in de rest van deze scriptie. Om dit te kunnen volgen zul je zorgvuldig moeten lezen, en is het belangrijk om te controleren of je iedere stap begrijpt.

In het werk *Over de numerieke oplossing van machten* geeft Viète een methode om vele hogeregraadsvergelijkingen numeriek op te lossen. Het specifieke voorbeeld van de vorm $ax - x^3 = c$ (de vorm die wij op moeten lossen) is helaas door de vertaler overgeslagen[27, p.311-370] maar door middel van de andere voorbeelden en de schema's uit het origineel [26, 214-216] kan worden achterhaald hoe hij deze vergelijking op zou lossen. De methode is op een aantal dingen gebaseerd. Ten eerste op het feit dat wanneer de oplossing bijvoorbeeld 463 zou zijn, dit kan worden geschreven als $4 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 3$. Ten tweede dat wanneer de oplossing van de vorm $(k + l)$ is, er geldt dat $a(k + l) - (k + l)^3 = ak + al - k^3 - 3k^2l - 3kl^2 - l^3 = c$. Door deze twee identiteiten samen te nemen kunnen de cijfers in de oplossing een voor een, van links naar rechts, worden bepaald.

Om het overzichtelijk te houden zal ik de vergelijking nu steeds aanduiden met $ax-x^3 = c$, dus $a = 7.500.000.000$ en $c = 13.085.000.000.000$.

Omdat $\operatorname{Sin}(1°) < \operatorname{Sin}(3°)$ is de gezochte oplossing kleiner dan 5234. We kunnen er dus vanuit gaan dan de oplossing (maximaal) uit vier cijfers bestaat, dus de vorm $1000k + 100l+10m+n$ heeft (voor willekeurige vergelijkingen heeft Viète ook een methode om de hoeveelheid cijfers te bepalen, maar dat is hier niet nodig). Om k te vinden zoeken we het grootste cijfer zodat $1000ak - (1000k)^3 \leq c$. Omdat a namelijk zo groot is vergeleken bij x, is $-x^3$ naar verhouding erg klein dus stijgt de functie (dit kan ook met differentiëren worden gecontroleerd). Door $100l+10m+n$ bij de oplossing op te tellen wordt de uitkomst dus groter, dus we mogen niet nu al over c heen gaan. Dat a zo groot is betekent ook dat k gevonden kan worden door $\frac{c}{1000a}$ naar beneden af te ronden. Er geldt immers dat $k - \frac{(1000k)^3}{1000a} \leq \frac{c}{1000a}$ en k is een geheel getal, dus alleen als het verschil tussen $\frac{c}{1000a}$ en het gehele getal erboven heel klein is (kleiner dan $\frac{(1000k)^3}{1000a}$) moet er naar boven worden afgerond. Nadat k gevonden is tellen we $(1000k)^3$ bij c op en halen we $1000ak$ daarvan af, wat ons een restant $c + (1000k)^3 - 1000ak$ geeft waarmee we verder gaan naar de volgende stap.

Het bepalen van de volgende cijfers werkt steeds als volgt: We bekijken nu wat er gebeurt als we $(1000k + 100l)$ invullen, opnieuw in de ongelijkheid omdat $(1000k + 100l)$ waarschijnlijk nog steeds iets onder de oplossing zit. We krijgen dan:

$$\begin{aligned}
(1000k + 100l)a - (1000k - 100l)^3 &\leq c \\
1000ak + 100al - (1000k)^3 - (1000k)^2 300l - 3000k(100l)^2 - (100l)^3 &\leq c \\
100al - (1000k)^2 300l - 3000k(100l)^2 - (100l)^3 &\leq c + (1000k)^3 - 1000ak \\
l(100a - 300(1000k)^2 - 100^2 \cdot 3000k) - (l^2 - l)100^2 \cdot 3000k - (100l)^3 &\leq c + (1000k)^3 - 1000ak
\end{aligned}$$

Als we nu het restant uit de vorige stap (het rechterlid) delen door $100a - 300(1000k)^2 - 300000k$ dan geeft dit de waarde van $l - \frac{(l^2-l)100^2 \cdot 3000k + (100l)^3}{100a - 300(1000k)^2 - 100^2 \cdot 3000k}$. Omdat in de breuk door bijna $100a$ gedeeld wordt, een erg groot getal, is deze breuk erg klein. Net als bij de eerste stap kunnen we hem dus waarschijnlijk verwaarlozen, dus kunnen we $\frac{c + (1000k)^3 - 1000ak}{100a - 300(1000k)^2 - 100^2 \cdot 3000k}$ naar beneden afronden om l te krijgen. Nu l bekend is hebben we een nieuw restant nodig, het liefst van dezelfde vorm zodat we op dezelfde manier verder kunnen. Door $1000k$ in het eerdere restant te vervangen door $1000k + 100l$ krijgen we $c + (1000k + 100l)^3 - a(1000k + 100l)$. Dit getal krijgen we door $3(1000k)^2 100l$, $3000k(100l)^2$ en $(100l)^3$ bij het restant op te tellen, en er vervolgens al vanaf te halen.

In de volgende stappen werken we precies hetzelfde, alleen gebruiken we $100(10k + l)$ in plaats van $1000k$ en $10m$ in plaats van $100l$, en in de stap erna vergelijkbaar voor n. Het is echter nog wel een hoop gedoe om steeds de machten van tien bij te houden. Hier heeft Viète een oplossing op verzonnen, door een schema te gebruiken. Om te beginnen schrijft hij het getal c op. Omdat de meeste getallen waarmee wordt gerekend een product van 3 getallen zijn, en daarmee in zijn ogen een balk, zet hij (vanaf rechts) na elk derde cijfer een verticale lijn en na elke lijn (dus bij het 1e, 4e, 7e, etc. cijfer) een stip. Dit geeft in ons geval 5 stippen, wat betekent dat de oplossing uit (maximaal) vijf cijfers zal bestaan. Omdat de sinus van 1 graad kleiner is dan die van 3 graden weten we echter al dat de oplossing uit (maximaal) 4 cijfers zal bestaan, dus kunnen we de meest linkse stip weghalen.

De meest linkse stip is nu de basis voor het eerste cijfer, de volgende voor het tweede cijfer, enzovoort. Hiermee wordt bedoeld dat $(1000k)^3$ het getal k^3 is dat niet helemaal rechts, maar op de meest linkse stip begint. Er moeten dan inderdaad steeds 3 stappen tussen zitten, immers $(1000k)^3 = 10^9k^3$ 'begint' drie stappen verder dan $(100l)^3 = 10^6l^3$. Om de notatie duidelijk te maken zal ik voor de getallen die 10, 100 of 1000 al 'met zich meedragen', de variabelen K, L, M, N gebruiken.

Als we nu bijvoorbeeld het getal KL^2 bekijken, dan gebruiken we de basis van de kleinste van de twee: L. Omdat het echter met K wordt vermenigvuldigd, wat een extra tiental met zich meedraagt, begint het niet op de stip maar een stap naar links. Op vergelijkbare wijze begint K^2L twee stappen naar links. Dat ziet er dan als volgt uit, wanneer bijvoorbeeld $K = 2$ en $L = 3$:

$$\begin{array}{cc|ccc|cr}
\cdots & . & & & . & \cdots & \\
\cdots & 8 & & & & \cdots & K^3 \\
\cdots & 1 & 2 & & & \cdots & K^2L \\
\cdots & & 1 & 8 & & \cdots & KL^2 \\
\cdots & & & 2 & 7 & \cdots & L^3
\end{array}$$

Het systeem zoals we het nu hebben werkt helaas niet voor de termen aK, aL, enzovoort. Immers, $1000ak$ 'begint' maar 1 plaats na $100al$, niet 3. Om dit op te lossen wordt ook boven c van rechts naar links stippen geplaatst, evenveel als eronder staan. Deze staan echter direct naast elkaar. Boven de stippen staat dan a, beginnend bij de meest linkse stip. Hier staat dan dus eigenlijk $1000a$.

Nu we een systeem voor een schema hebben, is het nog de vraag hoe we die handig kunnen gebruiken. Voor het eerste cijfer ziet het schema er als volgt uit:

a (verschoven door stippen)
stippen

c
stippen

Derde macht van eerste cijfer

c plus (derde macht van eerste cijfer)

a keer eerste cijfer

c plus (derde macht van eerste cijfer) min (a keer eerste cijfer)=restant

In het schema wordt niet expliciet uitgelegd hoe het juiste cijfer wordt verkregen, maar deze kan dus worden gevonden door c te delen door de verschoven a. Daarna wordt in het schema het restant berekend zoals ook hierboven was uitgelegd. Na elk schema wordt uit beide rijen stippen de meest linkse weggehaald. Nu is de meest linkse dus de basis voor het volgende getal. In het vervolg noem ik alle eerder gevonden cijfers samen 'vorig getal' en het nieuw te vinden cijfer 'volgend cijfer'. Het schema voor elk cijfer na de eerste ziet er dan als volgt uit:

a (verschoven door stippen)
Stippen

Restant vorige schema
Stippen

3 keer (kwadraat van vorige getal) (verschoven alsof het ook keer volgende cijfer is)
3 keer (vorige getal) (verschoven alsof het ook keer (kwadraat van volgende cijfer) is)
(Voor verduidelijking van het verschuiven, zie de berekening in bijlage C)

Som van bovenstaande

a min bovenstaande (dit is de deler waaruit het nieuwe cijfer voortkomt)

3 keer (kwadraat van vorige getal) keer (volgende cijfer)
3 keer (vorige getal) keer (kwadraat van volgende cijfer)
Derde macht van (volgende cijfer)

Som van bovenstaande

Restant plus bovenstaande=S

a keer volgende cijfer

S min bovenstaande: nieuwe restant

Ook in dit schema wordt elke stap die hierboven beschreven was uitgevoerd. Eerst wordt de deler bepaald die het nieuwe cijfer zal geven, daarna worden de resterende termen van oude restant afgetrokken om een nieuw restant te krijgen. Daarna kunnen er dus weer stippen worden weggehaald om door te gaan met het volgende cijfer.

Door op deze manier steeds een cijfer uit te rekenen (zie bijlage C), ontstaat de oplossing 1745. Er is dan nog wel een restant over. Deze ontstaat omdat 1745 niet precies de oplossing is, er horen nog decimalen achter. Viète werkte echter alleen met gehele getallen. Als de berekening nog een stap verder zou worden doorgevoerd zouden we zien dat de eerste decimaal 3 is, en dat 1745 dus een juiste afronding is. Viète kon dus op deze manier met willekeurige precisie (een grotere straal zou voor meer precisie zorgen) de sinus van 1° berekenen. Als we het vergelijken met zijn tabel in de *Canon Mathematicus* zien we dat inderdaad precies deze waarde in de tabel staat.

De vergelijking die we hebben opgelost heeft eigenlijk drie oplossingen. Een daarvan is negatief, en Viète bekeek deze daarom niet. Hij had wel een vergelijkbare methode om de *andere oplossing te vinden, maar dit is de methode voor de grote oplossing, en deze is duidelijk veel te groot: in de eerste stap wordt al duidelijk dat het uit vijf cijfers bestaat en met een 8 begint. Het is daarom alleen nodig om de methode voor de kleine oplossing te doorlopen.*

Hoofdstuk 9

En nu verder?

Met de formule voor de driedeling van Viète was de sinus van $1°$ eindelijk overwonnen. De vraag is nu of we verder kunnen gaan: niet de sinus van 1 graad, maar die van 1 minuut bijvoorbeeld. Ook deze kon Viète berekenen. Hij had namelijk ook een vergelijking voor de vijfdeling van een hoek, en met drie- en vijfdelingen kan vanaf de sinus van $\frac{3}{4}^{\circ}$ ook die van $\frac{1}{60}^{\circ} = 1'$ worden berekend.

In 1593 daagde Adriaan van Roomen wiskundigen uit om de volgende vergelijking op te lossen voor bepaalde waarden C:[25, p.30-32]

$$\begin{aligned}45x &- 3795x^3 + 95634x^5 - 1138500x^7 + 7811375x^9 - 34512075x^{11}\\ &+ 105306075x^{13} - 232676280x^{15} + 384942375x^{17} - 488494125x^{19} + 483841800x^{21}\\ &- 378658800x^{23} + 236030652x^{25} - 117679100x^{27} + 46955700x^{29} - 14945040x^{31}\\ &+ 3764565x^{33} - 740259x^{35} + 111150x^{37} - 12300x^{39} + 945x^{41} - 45x^{43} + x^{45} = C\end{aligned}$$

Viète zag al snel dat deze intimiderende vergelijking eigenlijk met een 45-deling van een hoek te maken had, en loste hem daardoor zonder problemen op. Er geldt namelijk dat $x = 2\sin(\alpha)$ wanneer $C = 2\sin(45\alpha)$. Ook met deze vergelijking kan dus (uit de sinus van $\frac{3}{4}^{\circ}$) de sinus van $1'$ worden verkregen.

Met dit soort voorbeelden komen we echter aan het einde van een tijdperk: nog geen eeuw later ontdekte Newton in zijn *Over analyse door middel van oneindige reeksen* een oneindige optelling van machten van x die, als je x invult, precies $\mathrm{Sin}\,(x)$ geeft[17, par. 9.2][9]. Door genoeg termen uit de sommatie te gebruiken kan zo de sinus van elke willekeurige hoek worden berekend en elke gewenste precisie worden behaald. Hiermee was het probleem om sinussen te berekenen dus echt opgelost.

[9] In de wiskunde wordt een dergelijke optelling een machtreeks genoemd.

Bijlage A

Stellingen uit de Elementen van Euclides

Alle volgende stellingen zullen zonder bewijs worden gegeven, omdat de bewijzen vaak weer op eerdere stellingen leunen. De stellingen met bewijzen kunnen worden teruggevonden in de Engelse vertaling van T.L. Heath[10]. De geïnteresseerde lezer kan de bewijzen ook terugvinden op de website `http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html`. In de naam van de stelling geven de Romeinse cijfers het boek aan waarin het terug te vinden is, en het getal erna het nummer van de stelling. Voor de leesbaarheid zijn de stellingen in moderne notatie opgeschreven. Zo schreef Euclides over rechthoeken en vierkanten, dit is hier omgezet naar vermenigvuldigingen en kwadraten.

Om in te zien waar de stellingen over gaan kun je schetsen maken.

Propositie II 6: [10, deel 1, p.385-388] Zij gegeven een lijnstuk AB, met punt C in het midden van dit lijnstuk en lijnstuk BD in het verlengde van AB. Dan geldt dat $|AD| \cdot |BD| + |BC|^2 = |CD|^2$.

Propositie III 20: [10, deel 2, p.46-49] Zij gegeven een cirkel met middelpunt M en koorde AB. Dan geldt dat de middelpuntshoek van AB tweemaal zo groot is als de omtrekshoek van AB.

Propositie III 21: [10, deel 2, p.49-51] Zij gegeven een cirkel met koorde AB en C en D op de cirkel aan dezelfde kant van AB. Dan geldt dat $\angle ACB = \angle ADB$, dus alle omtrekshoeken zijn gelijk.

Propositie VI 1: [10, deel 2, p.191-194] Driehoeken en parallellogrammen met gelijke hoogten staan in dezelfde verhouding tot elkaar als hun basis.

Propositie VI 3: [10, deel 2, p.195-200] Zij gegeven de driehoek ΔABC en zij AD de bisectrice van $\angle BAC$. Dan geldt dat $DB : DC = AB : AC$.

Propositie XIII 9: [10, deel 3, p.455-457] Zij een regelmatige zeshoek en een regelmatige tienhoek ingeschreven in dezelfde cirkel. Wanneer de zijde van deze zes- en tienhoek achter elkaar worden gezet is het geheel in uiterste en middelste reden verdeeld, waarbij het grootste deel de zijde van de zeshoek is.

Propositie XIII 10: [10, deel 3, p.457-461] Laten een regelmatige vijf-, zes- en tienhoek ingeschreven zijn in dezelfde cirkel. De zijde van de vijfhoek in het kwadraat is dan gelijk aan de zijde van de zeshoek in het kwadraat plus de zijde van de tienhoek in het kwadraat.

Bijlage B

Worteltrekken

Stel je wilt de wortel berekenen van een getal A. De Grieken hadden hier een methode voor die erg op staartdelen lijkt[9, p.32-35]. Hoewel de Grieken voor astronomie een sexagesimaal systeem gebruiken, zal ik het hier voor de duidelijkheid in ons decimale systeem uitleggen. Om te beginnen bepaal je uit hoeveel cijfers het getal moet bestaan: als A uit i cijfers bestaat, dan bestaat $\sqrt{A}$ uit $\frac{i}{2}$ cijfers (naar boven afgerond). Immers, een getal met i cijfers is minimaal 10^{i-1} en kleiner dan 10^i, dus de wortel is minimaal $10^{\frac{i-1}{2}}$ en kleiner dan $10^{\frac{i}{2}}$. Als $\frac{i-1}{2}$ geheel is betekent dat dat het getal uit $\frac{i-1}{2}+1$ cijfers bestaat, en als $\frac{i}{2}$ geheel is bestaat het uit precies $\frac{i}{2}$ cijfers.

Stel nu dat je hebt ontdekt dat de oplossing uit 4 cijfers bestaat, dus $\sqrt{A} \approx 1000k + 100l + 10m + n$ (de methode werkt voor grotere en kleinere getallen precies hetzelfde). Dan zoek je eerst k door het grootste cijfer te zoeken waarvoor geldt dat $1000^2k^2 < A$. Vervolgens trek je 1000^2k^2 van A af, en met dit restant wordt verder gerekend. In elke volgende stap wordt gebruik gemaakt van het feit dat $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, dus $(x+y)^2 - y^2 = x^2 + 2xy$. Dit betekent dat wanneer we de rest van de oplossing (dus zonder $1000k$) aanduiden met x, en $y = 1000k$ nemen, er moet gelden dat $A-(1000k)^2 = x^2+2x\cdot 1000k$. Om l te vinden moet het grootste cijfer worden gevonden waarvoor geldt dat $(100l)^2+2\cdot 100l\cdot 1000k < A-(1000k)^2$. Dit wordt gedaan door uitproberen, maar een benadering wordt gegeven door $\frac{A-(1000k)^2}{200000k}$. Zodra l gevonden is wordt $(100l) + 200000lk$ van het eerdere restant afgehaald, wat $A - (1000k + 100l)^2$ oplevert. Elk volgende cijfer wordt nu op dezelfde manier berekend als l, alleen veranderen de machten van tien. Zelfs cijfers achter de komma werken precies hetzelfde.

Voorbeeld: Stel je wilt de wortel van $\sqrt{7200}$ bepalen. De wortel zal uit twee cijfers bestaan. Het eerste cijfer moet 8 zijn, immers $80^2 = 6400 < 7200 < 8100 = 90^2$ dus 9 is niet mogelijk. We rekenen nu verder met $7200 - 80^2 = 800$. Omdat $\frac{800}{2\cdot 80} = 5$, zal het volgende cijfer rond de 5 liggen. Maar $5^2 + 2\cdot 5\cdot 80 = 825 > 800$, dus 5 is te groot. Het werkt wel met 4: $4^2 + 2\cdot 4\cdot 80 = 656 < 800$. Dus $84 < \sqrt{7200} < 85$.

Bijlage C

Schema's voor de berekening van Viète

Vergelijking: $13.085.000.000.000 = 7.500.000.000x - x^3$

Eerste cijfer: $k = 1$

	7	5	0	0	0	0	0	0	0	0				$1000a$
										.	.	.	.	
1	3	0	8	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	c
				.			.			.			.	
				1										K^3
1	3	0	8	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	7	5	0	0	0	0	0	0	0	0				$k \cdot 1000a$
	5	5	8	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Eerste restant

Tweede cijfer: $l = 7$

	7	5	0	0	0	0	0	0	0	0			$100a$
										.	.	.	
5	5	8	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Eerste restant
						.			.			.	
				3									$300 \cdot K^2$
					3								$3 \cdot 100^2 \cdot K$
				3	3								
	7	4	9	6	7	0	0	0	0	0			
			2	1									$L \cdot 3 \cdot K^2$
			1	4	7								$L^2 \cdot 3 \cdot K$
				3	4	3							L^3
			3	9	1	3							
5	5	8	9	9	1	3	0	0	0	0	0	0	
5	2	5	0	0	0	0	0	0	0	0			$L \cdot 100a$
	3	3	9	9	1	3	0	0	0	0	0	0	Tweede restant

Derde cijfer: $m = 4$

	7	5	0	0	0	0	0	0	0	0		$10a$
										.	.	
3	3	9	9	1	3	0	0	0	0	0	0	Tweede restant
								.			.	
				8	6	7						$30 \cdot (K + L)^2$
						5	1					$3 \cdot 10^2 \cdot (K + L)$
				8	7	2	1					
	7	4	9	1	2	7	9	0	0	0		
			3	4	6	8						$M \cdot 3 \cdot (K + L)^2$
					8	1	6					$M^2 \cdot 3 \cdot (K + L)$
							6	4				M^3
			3	5	5	0	2	4				
3	4	0	2	6	8	0	2	4	0	0	0	
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		$M \cdot 10a$
	4	0	2	6	8	0	2	4	0	0	0	Derde restant

Vierde cijfer: $n = 5$

	7	5	0	0	0	0	0	0	0	0	a
										.	
4	0	2	6	8	0	2	4	0	0	0	Derde restant
										.	
				9	0	8	2	5			$3 \cdot (K + L + M)^2$
							5	2	2		$3 \cdot (K + L + M)$
				9	0	8	7	7	2		
	7	4	9	0	9	1	2	2	8	0	
			4	5	4	1	2	5			$N \cdot 3 \cdot (K + L + M)^2$
					1	3	0	5	0		$N^2 \cdot 3 \cdot (K + L + M)$
								1	2	5	N^3
			4	5	5	4	3	1	2	5	
4	0	3	1	3	5	6	7	1	2	5	
3	7	5	0	0	0	0	0	0	0	0	Na
	2	8	1	3	5	6	7	1	2	5	Restant

Oplossing: 1745.

Bibliografie

[1] Brummelen, G. van: *The Mathematics of the Heavens and the Earth, The Early History of Trigonometry*. Princeton University Press, New Jersey, 2009.

[2] Chrisomalis, S.: *Numerical Notation, A Comparative History*. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[3] Dudley, U.: *The Trisectors*. Cambridge University Press, 1994.

[4] Evans, J.: *The history and practice of ancient astronomy*. Oxford University Press, inc., New York, 1998.

[5] Eves, H.: *An introduction to the history of mathematics, Revised edition*. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1964.

[6] Gillispie, C. C. en F. L. Holmes: *Dictionary of Scientific Biography*. Scribner, New York, 1970–1990.

[7] González-Velasco, E. A.: *Journey Through Mathematics*. Springer, 2011.

[8] Gulik-Gulikers, I. van: *Geschiedenis van de niet-Euclidische meetkunde*. Epsilon Uitgaven, Amsterdam, 2005.

[9] Heath, T. L.: *A manual of Greek mathematics*. Courier Corporation, 1931.

[10] Heath, T. L.: *The thirteen books of Euclid's Elements*. Dover Publications, inc., New York, 1956.

[11] Hutchkins, R. M.: *Great books of the Western World*, volume 16. Encyclopaedia Brittanica, 1952.

[12] Ifrah, G.: *The universal history of numbers, From history to the invention of the computer*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 2000. Vertaald vanuit het Frans door David Bellos, E. F. Harding, Sophie Wood and Ian Monk.

[13] Ptolemy: *Ptolemy's Almagest*. Springer-Verlag, New York, 1984. Translated from the Greek, annotated and with appendices by G. J. Toomer.

[14] Riemersma, M.: *Algebra, De brug tussen getallen en meetkundige constructies*. Epsilon Uitgaven, Amsterdam, 2010.

[15] Roegel, D.: "A reconstruction of Viète's Canon Mathematicus (1579)". 2011.

[16] Rogers, J. H.: "Origins of the ancient constellations: I. The Mesopotamian traditions". *Journal of the British Astronomical Association*, 108:p.9–28, 1998.

[17] Roy, R.: *Sources in the development of mathematics, Infinite series and products from the fifteenth to the twenty-first century.* Cambridge University Press, Cambridge, 2011.

[18] Sachs, A.: "Babylonian Horoscopes". *Journal of Cuneiform Studies*, (2):p.49–75.

[19] Saidan, A.: *The Trigonometry of al-Bīrūnī.* In Said, H. M. (redactie): *al-Bīrūnī commemorative volume*, pagina's 681–690. Hamdard Academy, Karachi, 1979. Proceedings of the International Congress held in Karachi, November 26–December 12, 1973.

[20] Saud, M.: *A Part of al-Bīrūnīś Istikhhrāj al-Autār fi al-Dā'irah.* In Said, H. M. (redactie): *al-Bīrūnī commemorative volume*, pagina's 691–705. Hamdard Academy, Karachi, 1979. Proceedings of the International Congress held in Karachi, November 26–December 12, 1973.

[21] Schoy, C.: *Die Trigonometrischen Lehren des Persischen Astronomen Abu'l-Raihan Muh. ibn Ahmad al-Biruni, Dargestellt nach Al-Qanun Al-Mas'udi.* Nummer 8. Orient-Buchhandlung Heinz Lafaire K.-G., Hannover, 1927.

[22] Suter, Heinrich: "Das Buch der Auffindung der Sehnen im Kreise von Abu'l-Raihan Muhammed El-Bīrūnī"'. *Bibliotheca Mathematica*, pagina's 11–78, 1910.

[23] Thureau-Dangin, F.: "La division du cercle". *Revue d'Assyriologie et d'archologie orientale*, 25(4):p.187–188, 1928.

[24] Thureau-Dangin, F.: "Sketch of a history of the sexagesimal system". *Osiris*, 7:p.95–141, 1939.

[25] Tignol, J.P.: *Galois' Theory of Algebraic Equations.* World Scientific, 2001.

[26] Viète, F.: *Fransisci Vietae opera mathematica*. 1646.

[27] Viète, F.: *The analytic art.* Kent State University Press, 1983. Vertaald door T. Richard Witmer.

[28] Waerden, B. L. van der: "Babylonian Astronomy. II. The Thirty-Six Stars". *Journal of Near Eastern Studies*, 8(1):p.6–26, 1949.

[29] Waerden, B. L. van der: "History of the Zodiac". *Archiv fr Orientforschung*, 16:p.216–230, 1952.

[30] Wantzel, P. M. L.: "Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas". *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2(1):366–372, 1837.